



## CINEMÁTICA

### Movimiento rectilíneo de una partícula

Variable $a$	Constante $a = a_c$
$a = \frac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \frac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a ds = v dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

### Movimiento curvilíneo de una partícula

Coordenadas $x, y, z$	Coordenadas $r, \theta, z$
$v_x = \dot{x} \quad a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r} \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y} \quad a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z} \quad a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z} \quad a_z = \ddot{z}$

### Coordenadas $n, t, b$

$v = \dot{s}$	$a_t = \dot{v} = v \frac{dv}{ds}$
	$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{ d^2y/dx^2 }$

### Movimiento relativo

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

### Movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo

Variable $\alpha$	Constante $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$
$\omega d\omega = \alpha d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

### Para el punto $P$

$$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$$

### Movimiento plano general relativo-ejes de traslación

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})}$$

### Movimiento plano general relativo, eje de traslación y rotación

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

## CINÉTICA

**Momento de inercia de masa**  $I = \int r^2 dm$

**Teorema de los ejes paralelos**  $I = I_G + md^2$

**Radio de giro**  $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$

### Ecuaciones de movimiento

Partícula	$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Cuerpo rígido	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$
(Movimiento plano)	$\Sigma F_y = m(a_G)_y$
	$\Sigma$

### Cuerpo rígido (movimiento plano)

**Prefijos del SI**

<i>Múltiplo</i>	<i>Forma exponencial</i>	<i>Prefijo</i>	<i>Símbolo SI</i>
1 000 000 000	$10^9$	giga	G
1 000 000	$10^6$	mega	M
1 000	$10^3$	kilo	k
<i>Submúltiplo</i>			
0.001	$10^{-3}$	mili	m
0.000 001	$10^{-6}$	micro	$\mu$
0.000 000 001	$10^{-9}$	nano	n

**Factores de conversión (FPS) a (SI)**

<i>Cantidad</i>	<i>Unidad de medición (FPS)</i>	<i>Es igual a</i>	<i>Unidades de medición (SI)</i>
Fuerza	lb		4.448 N
Masa	slug		14.59 kg
Longitud	ft		0.3048 m

**Factores de conversión (FPS)**

1 pie = 12 in (pulgadas)  
1 mi (milla) = 5280 ft  
1 kip (kilolibra) = 1000 lb  
1 ton = 2000 lb



INGENIERÍA MECÁNICA

# DINÁMICA



INGENIERÍA MECÁNICA

# DINÁMICA

DECIMOCUARTA EDICIÓN

R. C. HIBBELER

TRADUCCIÓN

Jesús Elmer Murrieta Murrieta  
*Tecnológico de Monterrey, campus Morelos*

REVISIÓN TÉCNICA

Jorge Fonseca Campos  
*Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnología Avanzada  
Instituto Politécnico Nacional, México*

PEARSON

**HIBBELER, R. C.**  
**Ingeniería mecánica. Dinámica**  
Decimocuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2016

ISBN: 978-607-32-3697-3

Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm

Páginas: 784

Todos los derechos reservados.

Authorized translation from the English language edition, entitled *Engineering Mechanics. Dynamics 14<sup>th</sup> Edition*, by R. C. Hibbeler, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2016. All rights reserved.

ISBN 9780133915389

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Engineering Mechanics. Dynamics 14<sup>a</sup> edición*, por R. C. Hibbeler, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2016. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Director General:

Director de Contenidos y Servicios Digitales:

Gerente de Contenidos y Servicios Editoriales:

Coordinador de Contenidos, Educación Superior:

Especialista en Contenidos de Aprendizaje:

Especialista en Desarrollo de Contenidos:

Supervisor de Arte y Diseño:

Sergio Fonseca Garza

Alan David Palau

Jorge Luis Íñiguez Caso

Guillermo Domínguez Chávez

e-mail: guillermo.dominguez@pearson.com

Luis Miguel Cruz Castillo

Bernardino Gutiérrez Hernández

Enrique Trejo Hernández

DECIMOCUARTA EDICIÓN, 2016

D.R. © 2016 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Antonio Dovalí Jaime, Núm. 70

Torre B, Piso 6, Col. Zedec

Ed. Plaza Santa Fe

Delegación Álvaro Obregón

C. P. 01210 C. México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación puede reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 978-607-32-3697-3

ISBN e-book 978-607-32-3691-1

Impreso en México. *Printed in Mexico*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 19 18 17 16

**PEARSON**

[www.pearsonenespañol.com](http://www.pearsonenespañol.com)

## Al estudiante

Con la esperanza de que este trabajo estimule un interés en la ingeniería mecánica y proporcione una guía aceptable para su comprensión.



El propósito principal de este libro es ofrecer al estudiante una presentación clara e integral de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. Para alcanzar ese objetivo, la obra se ha enriquecido con los comentarios y las sugerencias de cientos de revisores que se dedican a la enseñanza, así como de muchos de los alumnos del autor.

## Características nuevas en esta edición

**Problemas conceptuales.** Esta nueva característica se encuentra a lo largo de todo el texto y se presenta justo antes de los problemas fundamentales. Su intención es poner a prueba la comprensión conceptual que logró el estudiante acerca de la teoría. Por lo general, las soluciones requieren la realización de pocos cálculos o de ninguno en absoluto; así, estos problemas proporcionan un entendimiento básico de los conceptos, antes de aplicarlos en forma numérica. Al final de este texto, se presentan todas las soluciones.

**Agrupación de los conceptos de cada sección.** Se agregaron resúmenes que refuerzan el material de lectura y destacan las definiciones y los conceptos importantes en las secciones.

**Resumen del material.** En esta edición se logró una mayor claridad en los conceptos y ahora las definiciones importantes se presentan en negritas con la finalidad de resaltarlas.

**Problemas de repaso al final del capítulo.** En esta edición se incluyen las soluciones a todos los problemas de repaso al final del texto, por lo que los estudiantes pueden revisar su trabajo mientras estudian para sus exámenes y repasar sus conocimientos al concluir cada capítulo.

**Nuevas fotografías.** La importancia de conocer los temas de estudio se refleja en las aplicaciones al mundo real representadas en las más de 30 fotografías nuevas o actualizadas a lo largo del libro. Por lo general, esas fotografías se utilizan para explicar la forma en que los principios relevantes se aplican a situaciones cotidianas y la manera como se comportan los materiales bajo carga.

**Problemas nuevos.** En esta edición se agregaron cerca de 30% de problemas inéditos, los cuales involucran aplicaciones en muchos campos de la ingeniería.

## Características particulares

Además de las nuevas características que se acaban de mencionar, hay otras que destacan el contenido del texto, entre ellas las siguientes.

**Organización y estructura.** Cada capítulo está organizado en secciones bien definidas que incluyen una explicación de temas específicos, problemas de ejemplo ilustrativos y conjuntos de problemas de tarea. Los temas dentro de cada sección se colocan en subgrupos definidos por títulos en letras negritas. El propósito de esto es presentar un método estructurado para introducir cada definición o concepto nuevo, y convertir al libro en una útil y práctica referencia en repases posteriores.

**Contenido del capítulo.** Cada capítulo comienza con una ilustración que muestra una aplicación relevante del tema, así como con una lista con viñetas de los objetivos del capítulo, para brindar una visión general del material que se cubrirá.

**Énfasis en los diagramas de cuerpo libre.** Al resolver problemas, es particularmente importante dibujar un diagrama de cuerpo libre; por tal razón este paso se enfatiza a lo largo del texto. En particular, se dedican secciones y ejemplos especiales para demostrar cómo trazar diagramas de cuerpo libre. También se agregaron problemas de tarea específicos para desarrollar dicha práctica.

**Procedimiento general para la resolución de problemas.** Al final del primer capítulo, se presenta un procedimiento general para analizar cualquier problema de mecánica. Después, el procedimiento se adapta para resolver problemas específicos a lo largo del libro. Esta característica única ofrece al estudiante un método lógico y ordenado que puede seguir al aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven utilizando ese método esquemático con la finalidad de aclarar su aplicación numérica. Sin embargo, una vez que se tiene dominio de los principios relevantes y se ha obtenido confianza y buen juicio en el método, el estudiante podrá desarrollar sus propios procedimientos para la resolución de problemas.

**Resúmenes de cada sección.** Constituyen un repaso o un resumen de los conceptos más importantes en cada sección y destacan los aspectos más significativos que deberían observarse al aplicar la teoría para la resolución de problemas.

**Problemas de práctica.** Estas series de problemas se ubican de manera selectiva justo después de la mayoría de los problemas de ejemplo. Con ellos, los estudiantes obtienen aplicaciones sencillas de los conceptos y, por lo tanto, la oportunidad de desarrollar sus habilidades en la resolución de problemas antes de intentar resolver cualquiera de los problemas generales que se presentan en seguida. Asimismo, se pueden utilizar de práctica para los exámenes y, más adelante, si está en sus planes, como preparación para el *Fundamentals in Engineering Exam*.

**Conceptos conceptuales.** Mediante el uso de las fotografías que se incluyen a lo largo del libro se aplica la teoría, de una manera simplificada, con el propósito de ilustrar algunas de sus características conceptuales más importantes, y representar el significado físico de muchos de los términos que se usan en las ecuaciones. Las

aplicaciones simplificadas aumentan el interés en el tema estudiado y preparan de mejor forma al estudiante para entender los ejemplos y resolver los problemas.

**Problemas de otro tipo.** Además de los problemas fundamentales y conceptuales que se mencionaron, el libro incluye problemas de otro tipo, como los que se describen a continuación:

- **Problemas de diagrama de cuerpo libre.** Algunas secciones del libro incluyen problemas introductorios que sólo requieren dibujar el diagrama de cuerpo libre para una situación específica. Son asignaciones que harán que el estudiante reconozca la importancia de dominar esta habilidad como un requisito para obtener una solución integral de cualquier problema de equilibrio.
- **Problemas generales de análisis y diseño.** La mayoría de los problemas presentan situaciones reales en la práctica de la ingeniería. Algunos provienen de productos reales usados en la industria. Se espera que este realismo estimule el interés del estudiante en la ingeniería mecánica, y lo ayude a desarrollar la habilidad de reducir cualquier problema de este tipo desde su descripción física hasta un modelo o representación simbólica a la que se le puedan aplicar los principios de la mecánica.

A lo largo del libro existe cierto equilibrio entre los problemas que utilizan las unidades del SI y las del FPS. Asimismo, en todas las series se ha hecho un esfuerzo por ordenar los problemas de acuerdo con una dificultad creciente, excepto en los problemas de repaso al final de cada capítulo, los cuales se presentan en orden aleatorio.

- **Problemas por computadora.** Se ha hecho un esfuerzo por incluir algunos problemas que pueden resolverse usando un procedimiento numérico ejecutado en una computadora de escritorio o en una calculadora de bolsillo. La intención es ampliar la capacidad del estudiante para que utilice otras formas de análisis matemático sin sacrificar el tiempo, para enfocarse en la aplicación de los principios de la mecánica. Los problemas de este tipo, que pueden o deben resolverse mediante procedimientos numéricos, se identifican con un “cuadro” (■) antes del número del problema.

Esta edición contiene una gran cantidad de problemas de tarea que se clasifican en dos categorías. Los problemas que se indican sólo mediante un número tienen una respuesta, y en algunos casos un resultado numérico adicional, que se presenta en la parte final del libro. Cada cuarto problema tiene un asterisco (\*) antes de su número, lo que indica que se trata de un problema sin respuesta.

**Exactitud.** Del mismo modo que en las ediciones anteriores, la precisión del texto y de las soluciones a los problemas ha sido verificada de manera profunda por el autor y por cuatro revisores adicionales: Scott Hendricks, del Virginia Polytechnic Institute and State University; Karim Nohra, de la University of South Florida; Kurt Norlin, del Bittner Development Group, y finalmente Kai Beng, un ingeniero practicante, que además de revisar la precisión brindó sugerencias para el desarrollo de problemas.

## Contenido

El libro está dividido en 11 capítulos, en los que los principios se aplican primero en situaciones sencillas y después en contextos más complejos.

En el capítulo 12 se estudia la cinemática de una partícula, seguido de un análisis de la cinética de las partículas en los capítulos 13 (Fuerza y aceleración), capítulo 14 (Trabajo y energía) y capítulo 15 (Impulso y cantidad de movimiento). Los conceptos de la dinámica de partículas contenidos en estos cuatro capítulos se resumen posteriormente en una sección de “repaso”, y el estudiante recibe la oportunidad de identificar y resolver una variedad de problemas. En el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, existe una sucesión similar de presentación: capítulo 16 (Cinemática plana), capítulo 17 (Ecuaciones de movimiento), capítulo 18 (Trabajo y energía) y Capítulo 19 (Impulso y cantidad de movimiento), seguida de un resumen y una serie de problemas de repaso para estos capítulos.

Si el tiempo lo permite, el curso podría incluir algún material que involucre el movimiento de cuerpos rígidos en tres dimensiones. La cinemática y la cinética de este movimiento se analizan en los capítulos 20 y 21, respectivamente. El capítulo 22 (Vibraciones) se puede incluir si el estudiante tiene la base matemática necesaria. Las secciones del libro que se consideran fuera del alcance del curso de dinámica básica se indican con un asterisco (\*) y pueden ser omitidas. Tenga en cuenta que este material también proporciona una referencia adecuada para los principios básicos, cuando se estudian cursos más avanzados. Por último, el apéndice A proporciona una lista de fórmulas matemáticas necesarias para resolver los problemas del libro, en el apéndice B se presenta un breve repaso del análisis vectorial, y el apéndice C contiene un repaso de la aplicación de la regla de la cadena.

**Comentarios adicionales.** A discreción del profesor, es posible cubrir los capítulos 12 a 19 en el siguiente orden sin perder continuidad: capítulos 12 y 16 (Cinemática), capítulos 13 y 17 (Ecuaciones de movimiento), capítulos 14 y 18 (Trabajo y energía), y capítulos 15 y 19 (Impulso y cantidad de movimiento).

## Reconocimientos

El autor se ha esforzado por escribir este libro de manera que resulte de interés tanto para el estudiante como para el profesor. A través de los años muchas personas han contribuido en su desarrollo y siempre estaré agradecido por sus valiosas sugerencias y comentarios. De forma específica, quisiera agradecer a todas las personas que han aportado comentarios relacionados con la preparación de la decimocuarta edición de esta obra y, en particular, a R. Bankhead del Highline Community College, K. Cook-Chennault de Rutgers, la State University of New Jersey, E. Erisman del College of Lake County Illinois, M. Freeman de la University of Alabama, H. Lu de la University of Texas en Dallas, J. Morgan de la Texas A & M University, R. Neptune de la University of Texas, I. Orabi de la University of New Haven, T. Tan de la University of Memphis, R. Viesca de la Tufts University, y G. Young de la Oklahoma State University.

Hay otras personas que me han enviado algunos comentarios y que también merecen un reconocimiento especial, entre ellos J. Dix, H. Kuhlman, S. Larwood, D. Pollock y H. Wenzel. Un viejo amigo y socio, Kai Beng Yap, fue de gran ayuda durante la preparación y revisión de las soluciones a los problemas. En este mismo sentido, va una nota especial de agradecimiento a Kurt Norlin del Bittner Development Group. Asimismo, agradezco la ayuda recibida durante el proceso de producción de Martha McMaster, mi correctora de pruebas, y de Rose Kernan, mi editora de producción. Además, agradezco a mi esposa, Conny, quien ayudó en la preparación del manuscrito para su publicación.

Por último, extiendo mi agradecimiento a todos mis alumnos y a los miembros del profesorado que se han tomado el tiempo de enviarme sus sugerencias y comentarios por correo electrónico. Como esta lista es demasiado larga, espero que aquellos que han proporcionado su ayuda de esta manera acepten este reconocimiento anónimo.

Estaré muy agradecido con ustedes si me envían algún comentario o sugerencia, o si me hacen saber la existencia de problemas de cualquier tipo en relación con esta edición.

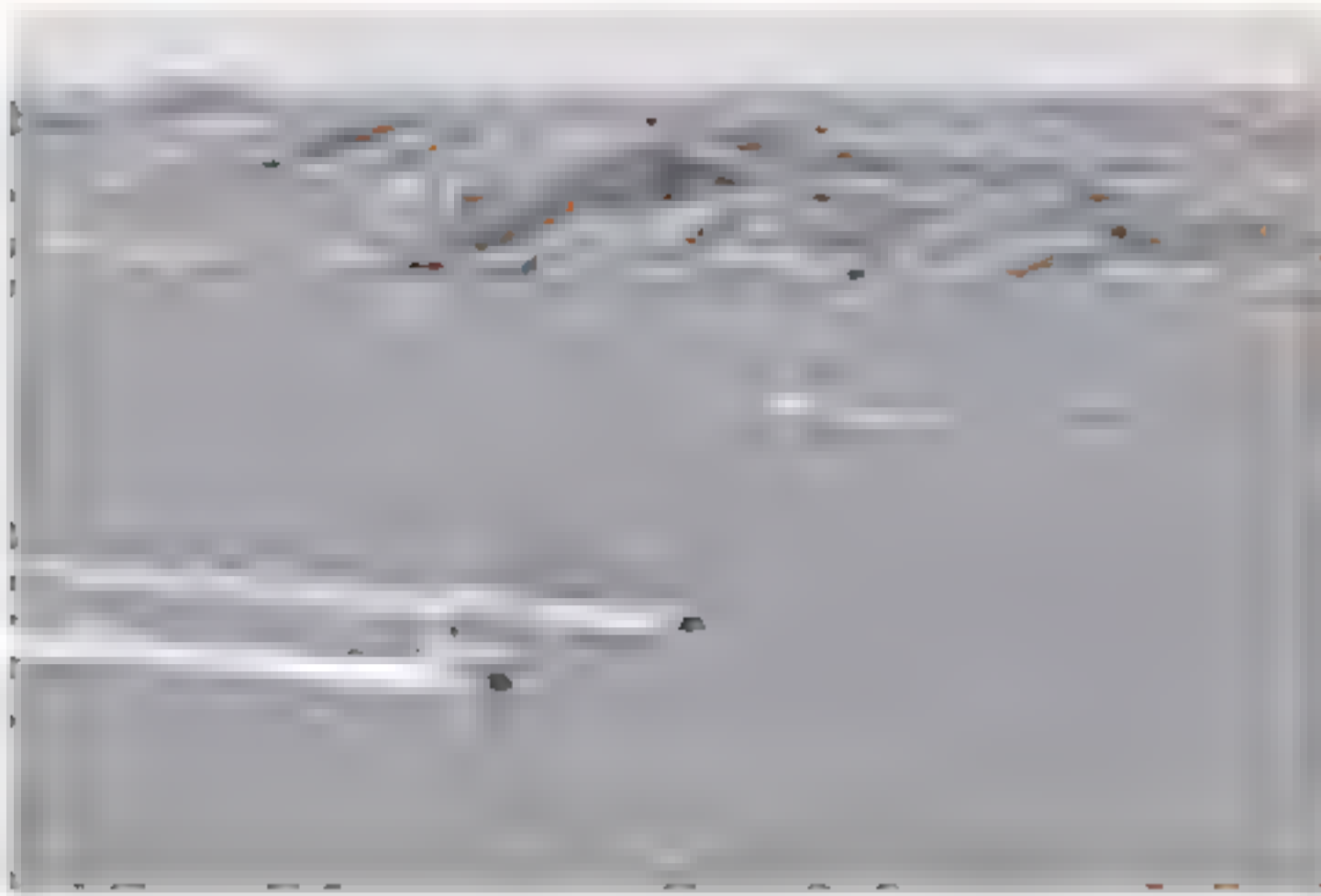
*Russell Charles Hibbeler*  
*hibbeler@bellsouth.net*

## Recursos (en inglés) para los profesores que utilizan este texto como apoyo para su asignatura

- **Manual de soluciones para el profesor.** Este suplemento incluye soluciones completas apoyadas por enunciados y figuras de los problemas. El manual de esta decimocuarta edición ha sido modificado para mejorar su legibilidad, y su precisión se revisó varias veces. El manual de soluciones para el profesor está disponible en: [www.pearsonenespañol.com/hibbeler](http://www.pearsonenespañol.com/hibbeler).
- **Recursos para el profesor.** Los recursos visuales que acompañan al texto se encuentran disponibles en: [www.pearsonenespañol.com/hibbeler](http://www.pearsonenespañol.com/hibbeler). Estos recursos incluyen todas las figuras del texto en formato de diapositivas de PowerPoint.

Por favor contacte a su representante de Pearson para obtener una clave de inicio y contraseña para acceder a estos recursos.

Prefacio 7



## 12 Cinemática de una partícula 3

Objetivos del capítulo 3

- 12.1 Introducción 3
- 12.2 Cinemática rectilínea: movimiento continuo 5
- 12.3 Cinemática rectilínea: movimiento errático 20
- 12.4 Movimiento curvilíneo general 34
- 12.5 Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares 36
- 12.6 Movimiento de un proyectil 41
- 12.7 Movimiento curvilíneo: componentes normal y tangencial 56
- 12.8 Movimiento curvilíneo: componentes cilíndricas 71
- 12.9 Análisis del movimiento dependiente absoluto de dos partículas 85
- 12.10 Movimiento relativo de dos partículas utilizando ejes en traslación 91



## 13 Cinética de una partícula: fuerza y aceleración 113

Objetivos del capítulo 113

- 13.1 Segunda ley de Newton del movimiento 113
- 13.2 Ecuación de movimiento 116
- 13.3 Ecuación de movimiento de un sistema de partículas 118
- 13.4 Ecuaciones de movimiento: coordenadas rectangulares 120
- 13.5 Ecuaciones de movimiento: coordenadas normales y tangenciales 138
- 13.6 Ecuaciones de movimiento: coordenadas cilíndricas 152
- 13.7 Movimiento de fuerza central y mecánica espacial 164



## 14

### Cinética de una partícula: trabajo y energía 179

Objetivos del capítulo 179

- 14.1 Trabajo de una fuerza 179
- 14.2 Principio de trabajo y energía 184
- 14.3 Principio de trabajo y energía para un sistema de partículas 186
- 14.4 Potencia y eficiencia 204
- 14.5 Fuerzas conservativas y energía potencial 213
- 14.6 Conservación de la energía 217

## 15

### Cinética de una partícula: impulso y cantidad de movimiento 237

Objetivos del capítulo 237

- 15.1 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales 237
- 15.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas 240
- 15.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas 254
- 15.4 Impacto 266
- 15.5 Cantidad de movimiento angular 280
- 15.6 Relación entre el momento de una fuerza y la cantidad de movimiento angular 281
- 15.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares 284
- 15.8 Flujo continuo de una corriente de fluido 295
- 15.9 Propulsión con masa variable 300



## 16

### Cinemática plana de un cuerpo rígido 319

- Objetivos del capítulo 319
- 16.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido 319
- 16.2 Traslación 321
- 16.3 Rotación alrededor de un eje fijo 322
- 16.4 Análisis del movimiento absoluto 338
- 16.5 Análisis de movimiento relativo: velocidad 346
- 16.6 Centro instantáneo de velocidad cero 360
- 16.7 Análisis del movimiento relativo: aceleración 373
- 16.8 Análisis del movimiento relativo mediante ejes rotatorios 389



## 17

### Cinética plana de un cuerpo rígido: fuerza y aceleración 409

- Objetivos del capítulo 409
- 17.1 Momento de inercia de masa 409
- 17.2 Ecuaciones de movimiento de cinética plana 423
- 17.3 Ecuaciones de movimiento: traslación 426
- 17.4 Ecuaciones de movimiento: rotación alrededor de un eje fijo 441
- 17.5 Ecuaciones de movimiento: movimiento plano general 456

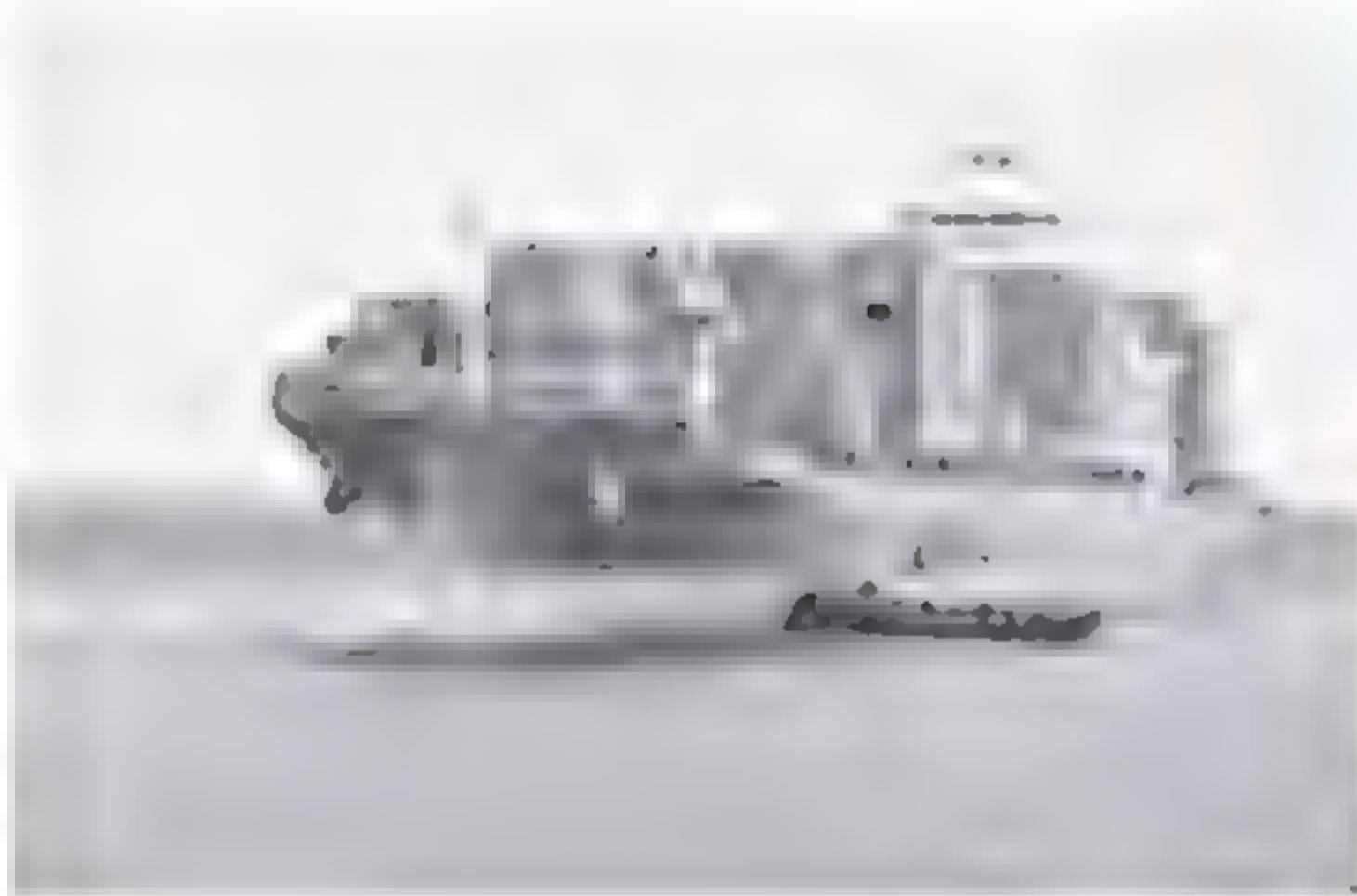


## 18

Cinética plana de un  
cuerpo rígido: trabajo  
y energía 473

Objetivos del capítulo 473

- 18.1 Energía cinética 473
- 18.2 Trabajo de una fuerza 476
- 18.3 Trabajo de un momento de par 478
- 18.4 Principio de trabajo y energía 480
- 18.5 Conservación de la energía 496

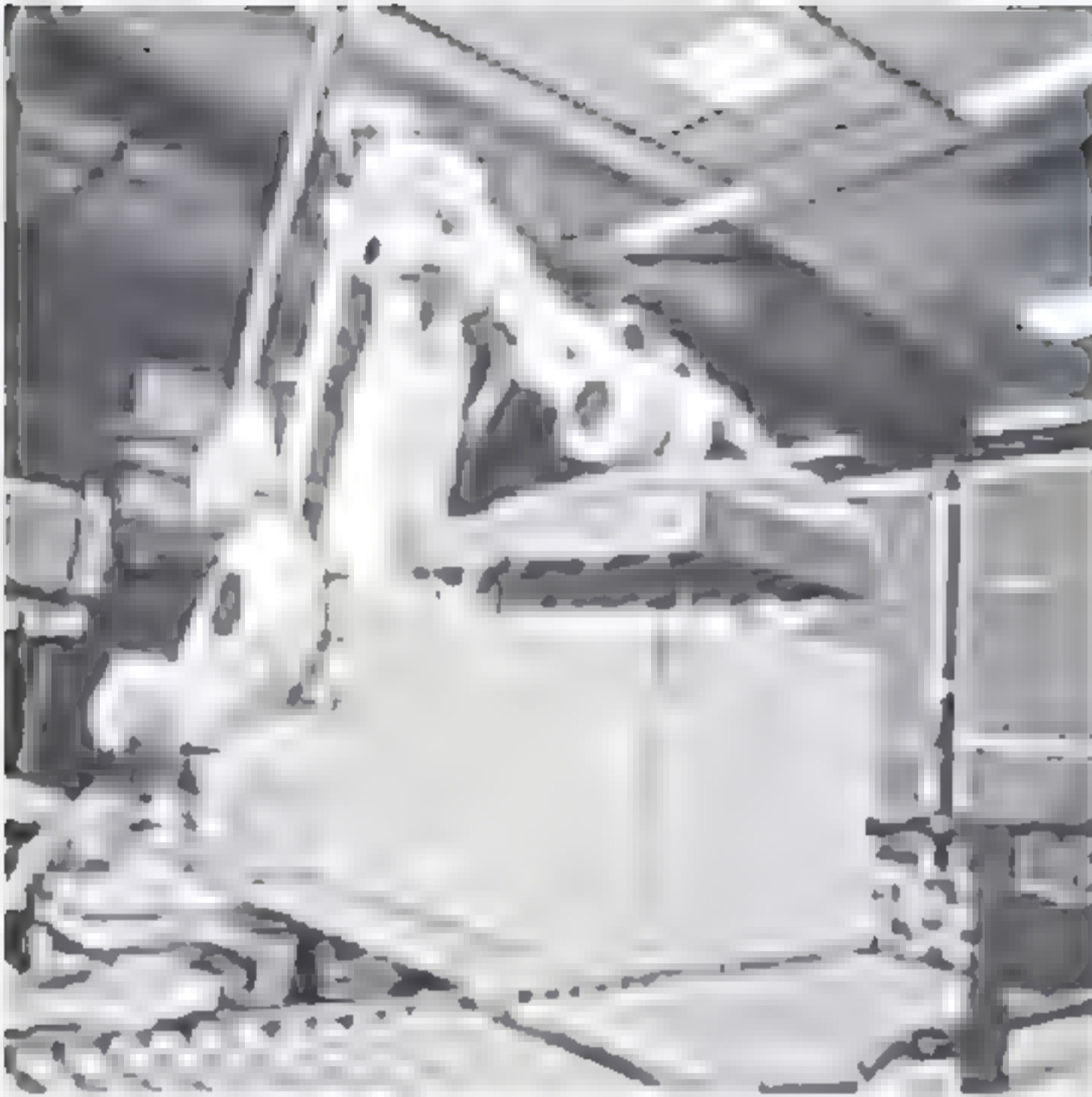


## 19

Cinética plana de un  
cuerpo rígido: impulso y  
cantidad de  
movimiento 517

Objetivos del capítulo 517

- 19.1 Cantidad de movimiento lineal  
y angular 517
- 19.2 Principio de impulso y cantidad  
de movimiento 523
- 19.3 Conservación de la cantidad  
de movimiento 540
- 19.4 Impacto excéntrico 544



## 20

### Cinemática tridimensional de un cuerpo rígido 561

Objetivos del capítulo 561

- 20.1 Rotación alrededor de un punto fijo 561
- 20.2 Derivada con respecto al tiempo de un vector medido desde un sistema fijo o desde un sistema en traslación-rotatorio 564
- 20.3 Movimiento general 569
- 20.4 Análisis de movimiento relativo por medio de ejes en traslación y en rotación 578

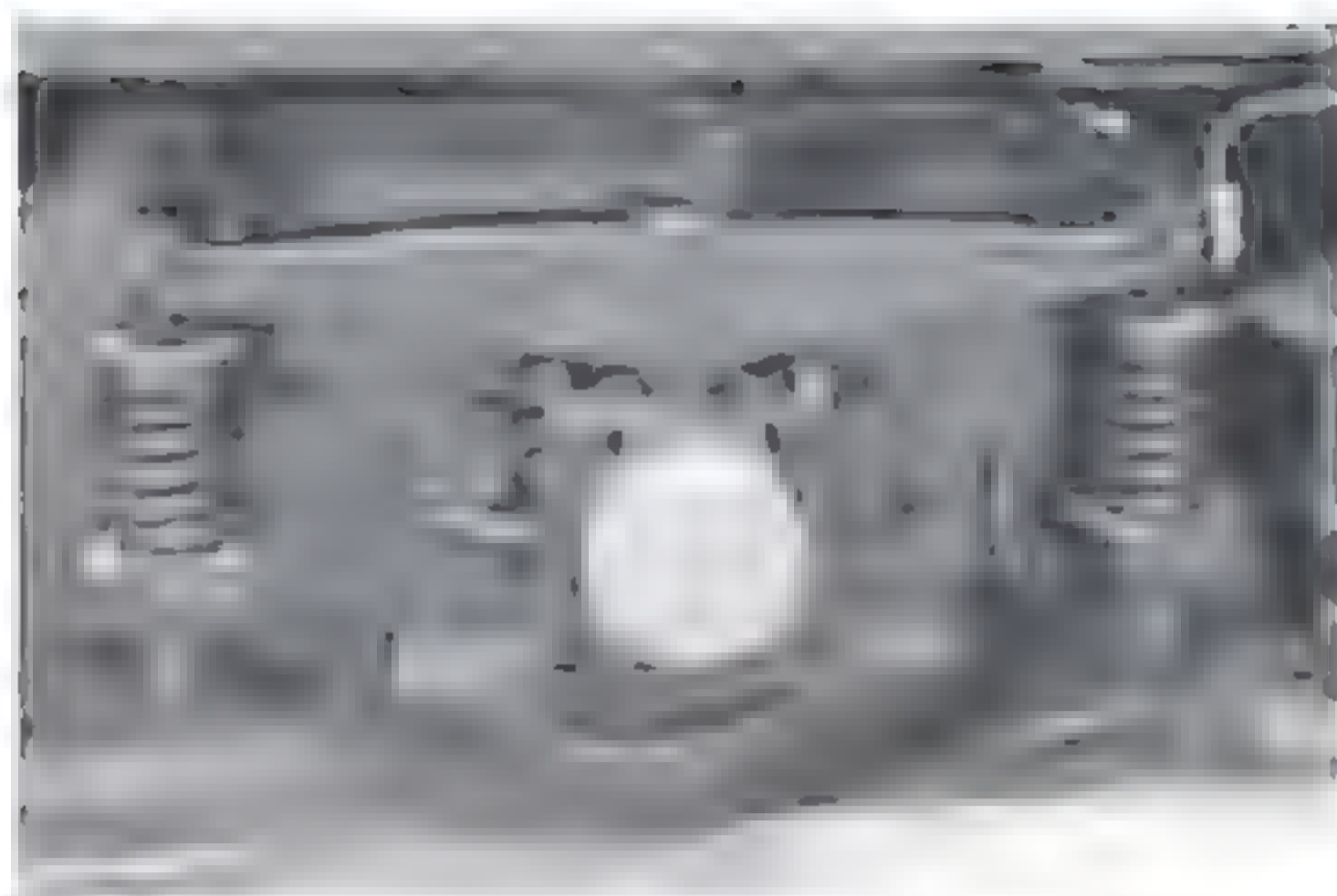


## 21

### Cinética tridimensional de un cuerpo rígido 591

Objetivos del capítulo 591

- 21.1 Momentos y productos de inercia 591
- 21.2 Cantidad de movimiento angular 601
- 21.3 Energía cinética 604
- 21.4 Ecuaciones de movimiento 612
- 21.5 Movimiento giroscópico 626
- 21.6 Movimiento sin par de torsión 632



## 22

### Vibraciones 643

Objetivos del capítulo 643

- 22.1 Vibración libre no amortiguada 643
- 22.2 Métodos de energía 657
- 22.3 Vibración forzada no amortiguada 663
- 22.4 Vibración libre amortiguada viscosa 667
- 22.5 Vibración forzada amortiguada viscosa 670
- 22.6 Análogos de un circuito eléctrico 673

### Apéndice

- A. Expresiones matemáticas 682
- B. Análisis vectorial 684
- C. Regla de la cadena 689

**Soluciones parciales y respuestas a los problemas fundamentales 692**

**Soluciones a los problemas preliminares de Dinámica 713**

**Soluciones a los problemas de repaso 723**

**Respuestas a problemas seleccionados 733**

**Índice 745**

Las imágenes iniciales de los capítulos tienen los siguientes créditos:

**Capítulo 12,** Lars Johansson/Fotolia  
**Capítulo 13,** Migel/Shutterstock  
**Capítulo 14,** Oliver Furrer/Ocean/Corbis  
**Capítulo 15,** David J. Green/Alamy  
**Capítulo 16,** TFoxFoto/Shutterstock  
**Capítulo 17,** Surasaki/Fotolia  
**Capítulo 18,** Arinahabich/Fotolia  
**Capítulo 19,** Hellen Sergeyeva/Fotolia  
**Capítulo 20,** Philippe Psaila/Science Source  
**Capítulo 21,** Derek Watt/Alamy  
**Capítulo 22,** Daseaford/Fotolia



INGENIERÍA MECÁNICA

# DINÁMICA

DECIMOCUARTA EDICIÓN

# Capítulo 12



(© Lars Johansson/Fotolia)

Aunque cada uno de estos botes es bastante grande, a la distancia su movimiento puede analizarse como si cada uno fuera una partícula.

# Cinemática de una partícula

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
- Estudiar el movimiento rectilíneo de una partícula y su representación gráfica.
- Investigar el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva usando distintos sistemas de coordenadas.
- Analizar el movimiento dependiente que existe entre dos partículas.
- Examinar los principios del movimiento relativo de dos partículas mediante ejes en traslación.

## 12.1 Introducción

La **mecánica** es una rama de las ciencias físicas que se ocupa del estado de reposo o movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. La ingeniería mecánica se divide en dos áreas de estudio: estática y dinámica. La **estática** se ocupa del equilibrio de un cuerpo que está en reposo o que se mueve con velocidad constante. Este texto presenta la **dinámica**, la cual se ocupa del movimiento acelerado de un cuerpo. La dinámica se estudiará en dos partes: **cinemática**, la cual trata sólo los aspectos geométricos del movimiento; y **cinética**, que analiza las fuerzas que provocan el movimiento. Para desarrollar estos principios, primero se verá la dinámica de una partícula, y a continuación se tratarán temas de dinámica de un cuerpo rígido en dos y luego en tres dimensiones.

Históricamente, los principios de la dinámica se desarrollaron cuando fue posible medir el tiempo con exactitud. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los primeros que hizo contribuciones importantes a esta disciplina. Su trabajo consistió en experimentos con péndulos y cuerpos en caída libre. Sin embargo, las aportaciones más significativas a la dinámica las realizó Isaac Newton (1642-1727), quien se destacó por la formulación de las tres leyes fundamentales del movimiento y la ley universal de atracción gravitacional. Poco después de que se postularan esas leyes, Euler, D'Alembert, Lagrange y otros desarrollaron técnicas importantes para su aplicación.

En la ingeniería hay muchos problemas cuyas soluciones requieren la aplicación de los principios de la dinámica. Por lo común, el diseño estructural de cualquier vehículo, ya sea un automóvil o un avión, requiere considerar el movimiento al cual se somete. Esto también es cierto para muchos dispositivos mecánicos como motores eléctricos, bombas, herramientas portátiles, manipuladores industriales y maquinaria. Asimismo, las predicciones de los movimientos de satélites artificiales, proyectiles y naves espaciales se basan en la teoría de la dinámica. Conforme se presenten más avances tecnológicos, habrá incluso una mayor necesidad de saber cómo aplicar los principios de esta materia.

**Solución de problemas.** Se considera que la dinámica es más compleja que la estática, ya que en la primera se deben tomar en cuenta las fuerzas aplicadas a un cuerpo y se tiene que describir su movimiento. Asimismo, muchas aplicaciones requieren cálculo integral, más que sólo álgebra y trigonometría. En cualquier caso, la forma más efectiva de aprender los principios de la dinámica es **resolver problemas**. Para tener éxito en dicha labor, es necesario presentar el trabajo de una forma lógica y ordenada, como sugiere la siguiente secuencia de pasos:

1. Lea el problema con cuidado e intente correlacionar la situación física real con la teoría que haya estudiado.
2. Dibuje todos los diagramas necesarios y tabule los datos del problema.
3. Establezca un sistema de coordenadas y aplique los principios pertinentes, casi siempre en forma matemática.
4. Resuelva de manera algebraica las ecuaciones necesarias hasta donde sea práctico; luego, utilice un conjunto consistente de unidades y complete la solución numéricamente. Reporte la respuesta sin más cifras significativas que la precisión de los datos dados.
5. Estudie la respuesta con juicio técnico y sentido común para determinar si parece razonable o no.
6. Una vez completada la solución, repase el problema. Trate de pensar en otras formas de obtener la misma solución.

Al aplicar este procedimiento general, realice el trabajo lo más limpio posible. Por lo general, ser pulcro estimula una forma de pensar clara y ordenada, y viceversa.

## 12.2 Cinemática rectilínea: movimiento continuo

Iniciaremos nuestro estudio de la dinámica con el análisis de la cinemática de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea. Recuerde que una *partícula* tiene masa pero su tamaño y forma son despreciables. Por consiguiente, limitaremos la aplicación a aquellos objetos cuyas dimensiones no afecten el análisis del movimiento. En la mayoría de los problemas nos interesarán los cuerpos de tamaño finito, como cohetes, proyectiles o vehículos. Cada uno de estos objetos se considerará como una partícula, si el movimiento se caracteriza por el movimiento de su centro de masa y la rotación del cuerpo se puede despreciar.

**Concepto clave.** La cinemática de una partícula está caracterizada al especificar, en cualquier instante, su posición, velocidad y aceleración.

**Posición.** La trayectoria rectilínea de una partícula se definirá por medio de un sólo eje de coordenadas  $s$  (fig. 12-1a). El origen  $O$  en la trayectoria es un punto fijo, y a partir de él se utiliza la **coordenada de posición**  $s$  para especificar la ubicación de la partícula en cualquier instante dado. La magnitud de  $s$  es la distancia de  $O$  a la partícula, por lo general medida en metros (m) o pies (pies, ft) y su signo algebraico define el sentido de su dirección. Aunque la selección es arbitraria, en este caso  $s$  es positiva ya que el eje de coordenadas es positivo a la derecha del origen. Asimismo, es negativo si la partícula está a la izquierda de  $O$ . Tenga en cuenta que *la posición es una cantidad vectorial*, pues tiene tanto magnitud como dirección. En este caso, sin embargo, está representada por el escalar algebraico  $s$ , en vez del carácter en negritas  $\mathbf{s}$ , ya que la dirección se mantiene a lo largo del eje de coordenadas.

**Desplazamiento.** El **desplazamiento** de la partícula se define como el *cambio en su posición*. Por ejemplo, si la partícula se mueve de un punto a otro (fig. 12-1b), el desplazamiento es

$$\Delta s = s' - s$$

En este caso,  $\Delta s$  es *positivo* puesto que la posición final de la partícula queda a la *derecha* de su posición inicial, es decir,  $s' > s$ . Asimismo, si la posición final quedara a la *izquierda* de su posición inicial,  $\Delta s$  sería *negativo*.

El desplazamiento de una partícula también es una *cantidad vectorial*, y deberá distinguirse de la distancia que recorre la partícula. Específicamente, la *distancia recorrida* es un *escalar positivo* que representa la longitud total de la trayectoria a lo largo de la cual viaja la partícula.

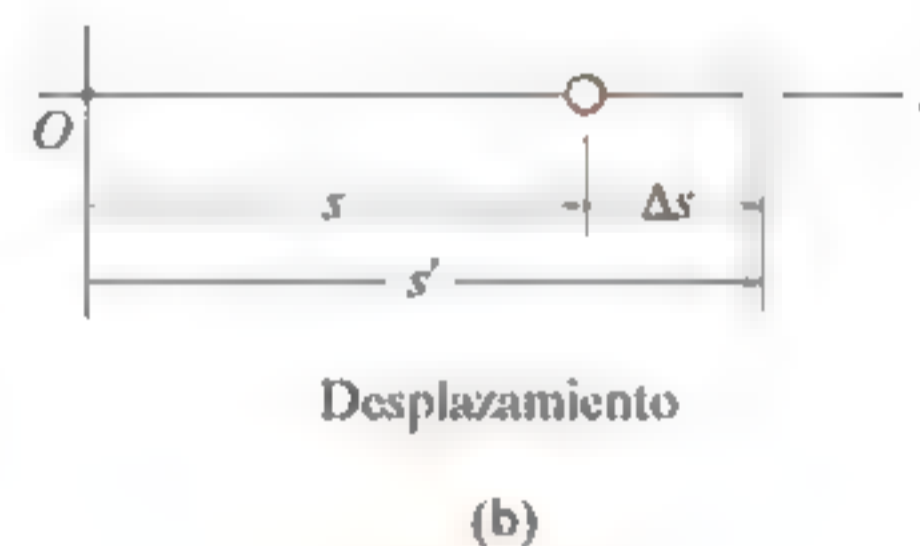
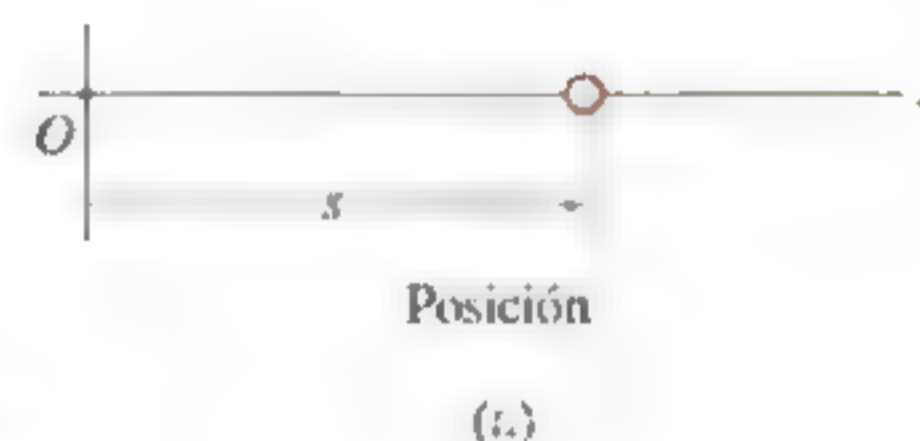


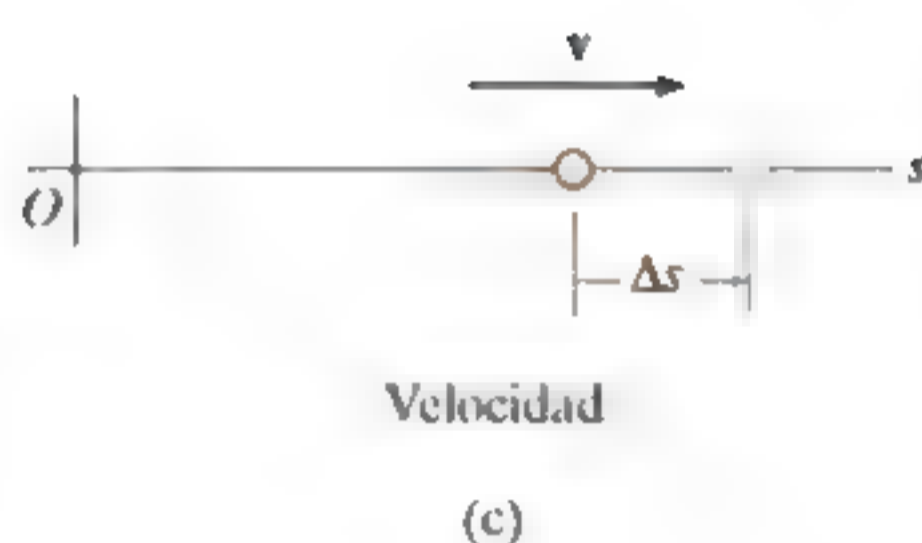
Fig. 12-1

**Velocidad promedio** Si la partícula experimenta un desplazamiento  $\Delta s$  durante el intervalo  $\Delta t$ , su **velocidad promedio** durante este intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si tomamos valores de  $\Delta t$  cada vez más pequeños, la magnitud de  $\Delta s$  se aproxima a un valor diferencial. Por consiguiente, la **velocidad instantánea** es un vector definido como  $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{s} / \Delta t)$ , o bien,

$$(\pm) \quad \left| v = \frac{ds}{dt} \right| \quad (12-1)$$

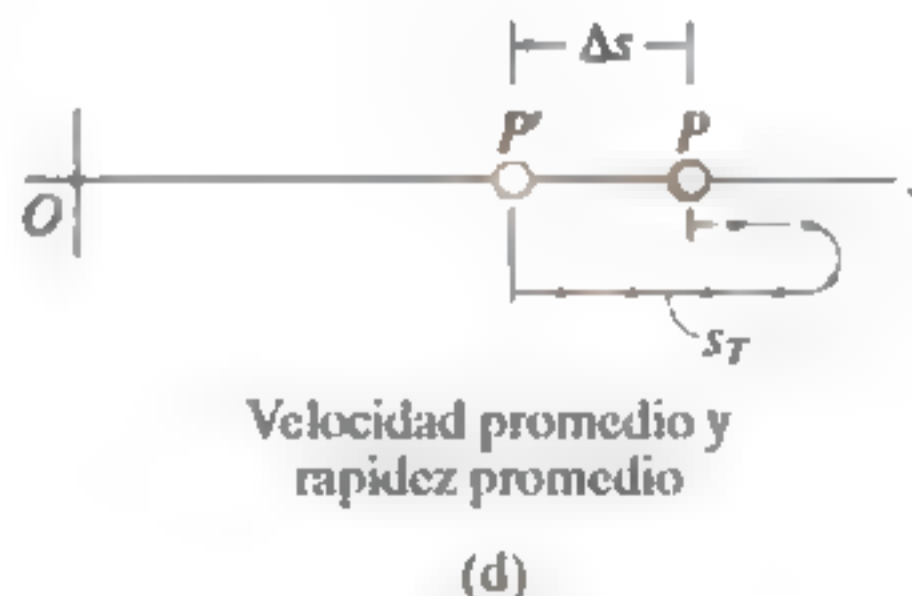


Como  $\Delta t$  o  $dt$  siempre es positivo, el signo utilizado para definir el *sentido* de la velocidad es el mismo que el de  $\Delta s$  o  $ds$ . Por ejemplo, si la partícula se está moviendo hacia la *derecha* (fig. 12-1c), la velocidad es *positiva*; pero si se mueve hacia la *izquierda*, la velocidad es *negativa*. (Esto se resalta aquí con la flecha que aparece a la izquierda de la ecuación 12-1.) La *magnitud* de la velocidad se conoce como **rapidez**, y en general se expresa en unidades de m/s o ft/s.

De vez en cuando se utiliza el término “rapidez promedio”. La **rapidez promedio** es siempre un escalar positivo y se define como la distancia total recorrida por una partícula,  $s_T$ , dividida entre el tiempo transcurrido  $\Delta t$ ; es decir,

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

Por ejemplo, la partícula en la figura 12-1d viaja a lo largo de la trayectoria de longitud  $s_T$  en el tiempo  $\Delta t$ , por lo que su rapidez promedio es  $(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = s_T / \Delta t$ , pero su velocidad promedio es  $v_{\text{prom}} = -\Delta s / \Delta t$ .



**Fig. 12.1 (cont.)**

**Definición.** Siempre que se conoce la velocidad de la partícula en dos puntos, su **aceleración promedio** durante el intervalo  $\Delta t$  se define como

$$a_{\text{prom}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aquí  $\Delta v$  representa la diferencia de la velocidad durante el intervalo  $\Delta t$ , es decir,  $\Delta v = v' - v$  (fig. 12-1e).

La **aceleración instantánea** en el instante  $t$  es un vector que se determina al tomar valores cada vez más pequeños de  $\Delta t$  y los valores correspondientes de  $\Delta v$  que se aproximan a un valor diferencial, de modo que  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta v / \Delta t)$ , o bien,

$$(\pm) \quad \left| a = \frac{dv}{dt} \right| \quad (12-2)$$

Si sustituimos la ecuación 12-1 en este resultado, también podemos escribir

$$(\pm) \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Tanto la aceleración promedio como la instantánea pueden ser positivas o negativas. En particular, cuando la partícula *se va moviendo cada vez más lentamente*, o su rapidez se reduce, se dice que se está **desacelerando**. En este caso,  $v'$  en la figura 12-1f es *menor* que  $v$ , de modo que  $\Delta v = v' - v$  será negativa. Por consiguiente,  $a$  también será negativa y por lo tanto actuará a la *izquierda*, en el *sentido opuesto* a  $v$ . Además, observe que si la partícula está originalmente en reposo, entonces puede tener una aceleración si un instante después tiene una velocidad  $v'$ ; y si la *velocidad es constante*, entonces la *aceleración es cero* puesto que  $\Delta v = v - v = 0$ . Las unidades que comúnmente se utilizan para expresar la magnitud de la aceleración son  $\text{m/s}^2$  o  $\text{ft/s}^2$ .

Por último, se puede obtener una relación diferencial importante que involucra el desplazamiento, la velocidad y la aceleración a lo largo de la trayectoria, si eliminamos la diferencial de tiempo  $dt$  entre las ecuaciones 12-1 y 12-2. Entonces,

$$dt \quad \frac{ds}{v} = \frac{dv}{a}$$

o

$$(\pm) \quad a \, ds = v \, dv \quad (12-3)$$

Aunque ya obtuvimos tres ecuaciones cinemáticas importantes, hay que tener en cuenta que la ecuación anterior no es independiente de las ecuaciones 12-1 y 12-2.

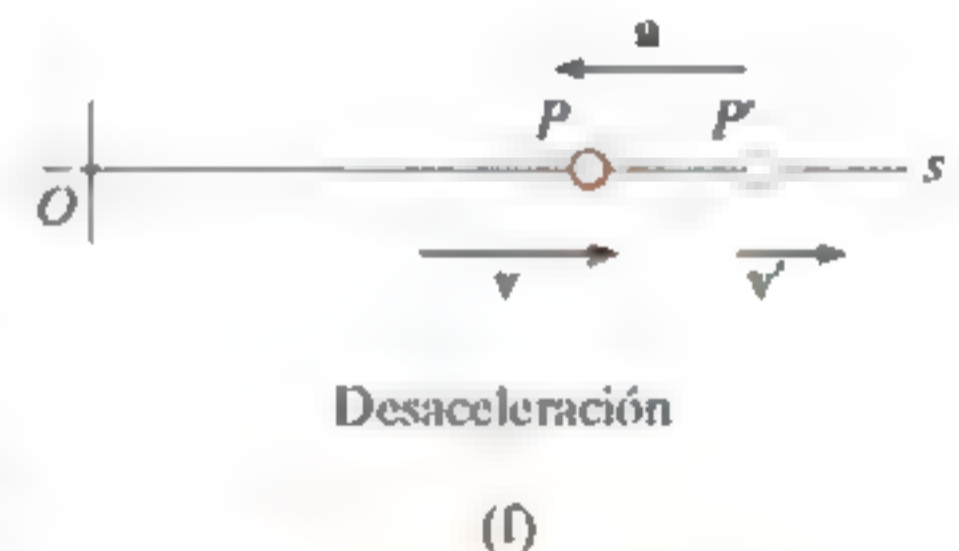
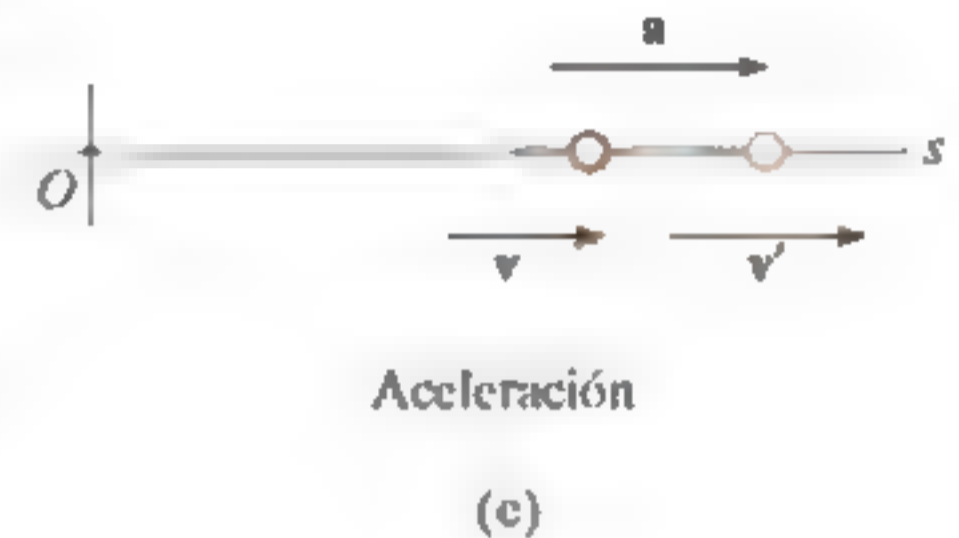


Fig. 12-1 (cont.)



Cuando se suelta la pelota, ésta tiene velocidad cero pero una aceleración de  $9.81 \text{ m/s}^2$ . (© R. C. Hibbeler)

**Aceleración constante  $a_c = a$ .** Cuando la aceleración es constante, se pueden integrar cada una de las tres ecuaciones cinemáticas  $a_c = dv/dt$ ,  $v = ds/dt$  y  $a_c ds = v dv$  para obtener fórmulas que relacionen  $a_c$ ,  $v$ ,  $s$  y  $t$ .

**Velocidad en función del tiempo.** Integre  $a_c = dv/dt$ , considerando que inicialmente  $v = v_0$  cuando  $t = 0$ .

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c dt$$

$$v = v_0 + a_c t$$

Aceleración constante

(12-4)

**Posición en función del tiempo  $s = s(t)$ .** Integre  $v = ds/dt = v_0 + a_c t$ , suponiendo que inicialmente  $s = s_0$  cuando  $t = 0$ .

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

Aceleración constante

(12-5)

**Velocidad en función de la posición  $v = v(s)$ .** Despeje  $t$  en la ecuación 12-4 y sustituya en la ecuación 12-5 o integre  $v dv = a_c ds$ , considerando que inicialmente  $v = v_0$  cuando  $s = s_0$ .

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a_c ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Aceleración constante

(12-6)

La dirección positiva del eje  $s$ , indicada por la flecha que aparece a la izquierda de cada ecuación, determina los signos algebraicos de  $s_0$ ,  $v_0$  y  $a_c$ , utilizados en las tres ecuaciones anteriores. Recuerde que estas ecuaciones son útiles *sólo cuando la aceleración es constante y cuando  $t = 0$ ,  $s = s_0$ ,  $v = v_0$* . Un ejemplo típico de movimiento acelerado constante sucede cuando un cuerpo cae libremente hacia el suelo. Si se ignora la resistencia del aire y la distancia de caída es corta, entonces la aceleración *dirigida hacia abajo* del cuerpo, cuando se aproxima a la Tierra, es constante y aproximadamente de  $9.81 \text{ m/s}^2$  o  $32.2 \text{ ft/s}^2$ . La comprobación de esto se da en el ejemplo 13.2.

### Puntos importantes

- La dinámica se ocupa de cuerpos que tienen movimiento acelerado.
- La cinemática es el estudio de la geometría del movimiento.
- La cinética es un estudio de las fuerzas que causan el movimiento.
- La cinemática rectilínea se refiere al movimiento en línea recta.
- La rapidez se refiere a la magnitud de la velocidad.
- La rapidez promedio es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo total. Ésta es diferente de la velocidad promedio, la cual es el desplazamiento dividido entre el tiempo.
- Una partícula que se va moviendo cada vez más lentamente se está desacelerando.
- Una partícula puede tener una aceleración  $y$ , al mismo tiempo, una velocidad cero.
- La relación  $a \, ds = v \, dv$  se deriva de  $a = dv/dt$  y  $v = ds/dt$ , al eliminar  $dt$ .



Durante el tiempo en que este cohete experimenta movimiento rectilíneo, su altitud en función del tiempo puede medirse y expresarse como  $s = s(t)$ . Su velocidad se determina entonces por  $v = ds/dt$ , y su aceleración a partir de  $a = dv/dt$ . (© NASA)

### Procedimiento para el análisis

#### Sistema de coordenadas

- Establezca una coordenada de posición  $s$  a lo largo de la trayectoria y especifique su *origen fijo* y su *dirección positiva*.
- Como el movimiento sucede a lo largo de una línea recta, las cantidades vectoriales de posición, velocidad y aceleración se pueden representar como escalares algebraicas. Para el trabajo analítico el sentido de  $s$ ,  $v$  y  $a$  se define entonces por sus *signos algebraicos*.
- El sentido positivo de cada uno de estos escalares se puede indicar con una flecha mostrada al lado de cada ecuación cinemática empleada.

#### Ecuaciones cinemáticas

- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables,  $a$ ,  $v$ ,  $s$  y  $t$ , entonces se puede obtener una tercera variable con una de las ecuaciones cinemáticas,  $a = dv/dt$ ,  $v = ds/dt$  o  $a \, ds = v \, dv$ , puesto que cada ecuación relaciona las tres variables\*.
- Siempre que se realice una integración, es importante que se conozcan la posición y la velocidad en un instante dado para evaluar la constante de integración si se utiliza una integral indefinida, o los límites de integración si se utiliza una integral definida.
- Recuerde que las ecuaciones 12-4 a 12-6 tienen sólo un uso limitado, pues se aplican únicamente cuando la *aceleración es constante* y las condiciones iniciales son  $s = s_0$  y  $v = v_0$  cuando  $t = 0$ .

\* En el apéndice A se dan algunas fórmulas de diferenciación e integración estándar.

## EJEMPLO



(© R. C. Hibbeler)

El automóvil de la fotografía de la izquierda y la figura 12-2 se desplaza en línea recta, de modo que durante un corto tiempo su velocidad está definida por  $v = (3t^2 + 2t)$  ft/s, donde  $t$  está en segundos. Determine su posición y aceleración si  $t = 3$  s. Cuando  $t = 0$ ,  $s = 0$ .



Fig. 12-2

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** La coordenada de posición se extiende desde el origen fijo  $O$  hasta el auto y es positiva a la derecha.

**Posición.** Como  $v = f(t)$ , la posición del automóvil se determina con  $v = ds/dt$ , puesto que esta ecuación relaciona  $v$ ,  $s$  y  $t$ . Observe que  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , entonces\*

$$\begin{aligned} \left( \frac{+}{-} \right) \quad v &= \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t) \\ \int_0^s ds &= \int_0^t (3t^2 + 2t) dt \\ s \Big|_0^s &= t^3 + t^2 \Big|_0^t \\ s &= t^3 + t^2 \end{aligned}$$

Cuando  $t = 3$  s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ ft} \quad \text{Resp.}$$

**Aceleración.** Como  $v = f(t)$ , la aceleración se determina con  $a = dv/dt$ , puesto que esta ecuación relaciona  $a$ ,  $v$  y  $t$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{+}{-} \right) \quad a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t) \\ &= 6t + 2 \end{aligned}$$

Cuando  $t = 3$  s,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Para resolver este problema no pueden utilizarse las fórmulas de aceleración constante, porque la aceleración es una función del tiempo.

\*Se puede obtener el mismo resultado evaluando una constante de integración  $C$  en vez de utilizar los límites definidos en la integral. Por ejemplo, al integrar  $ds = (3t^2 + 2t)dt$  resulta en  $s = t^3 + t^2 + C$ . Con la condición de que en  $t = 0$ ,  $s = 0$ , entonces  $C = 0$ .

## EJEMPLO

Se dispara un proyectil pequeño verticalmente *hacia abajo* en un medio fluido con una velocidad inicial de 60 m/s. Debido a la resistencia aerodinámica del fluido, el proyectil experimenta una desaceleración de  $a = (-0.4v^3)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $v$  está en m/s. Determine la velocidad del proyectil y su posición 4 s después de que se dispara.

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Como el movimiento es hacia abajo, la coordenada de posición es positiva hacia abajo, con su origen localizado en  $O$  (fig. 12-3).

En este caso,  $a = f(v)$  y, por lo tanto, debemos determinar la velocidad como una función del tiempo con  $a = dv/dt$ , ya que esta ecuación relaciona  $v$ ,  $a$  y  $t$ . (¿Por qué no se utiliza  $v = v_0 + at$ ?). Al separar las variables e integrar, con  $v_0 = 60$  m/s cuando  $t = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad a &= \frac{dv}{dt} = -0.4v^3 \\
 \int_{60 \text{ m/s}}^v \frac{dv}{-0.4v^3} &= \int_0^t dt \\
 -\frac{1}{0.4} \left( \frac{1}{-2} \right) \frac{1}{v^2} \Big|_{60}^v &= t - 0 \\
 \frac{1}{0.8} \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2} \right] &= t \\
 v &= \left\{ \left[ \frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{1/2} \right\} \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

En este caso, se toma la raíz positiva ya que el proyectil continuará moviéndose hacia abajo. Cuando  $t = 4$  s,

$$v = 0.559 \text{ m/s} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

**Posición.** Con  $v = f(t)$  conocida, podemos obtener la posición del proyectil mediante  $v = ds/dt$ , pues esta ecuación relaciona  $s$ ,  $v$  y  $t$ . Al utilizar la condición inicial  $s = 0$ , cuando  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad v &= \frac{ds}{dt} = \left[ \frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{-1/2} \\
 \int_0^s ds &= \int_0^t \left[ \frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{-1/2} dt \\
 s &= \frac{2}{0.8} \left[ \frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{1/2} \Big|_0^t \\
 s &= \frac{1}{0.4} \left\{ \left[ \frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{1/2} - \frac{1}{60} \right\} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Cuando  $t = 4$  s,

$$s = 4.43 \text{ m}$$



Fig. 12-3

## EJEMPLO

## 12.4

Durante una prueba un cohete asciende a 75 m/s y su motor falla cuando está a 40 m del suelo. Determine la altura máxima  $s_B$  alcanzada por el cohete y su velocidad justo antes de chocar contra el suelo. Mientras está en movimiento, el cohete se ve sometido a una aceleración constante dirigida hacia abajo de  $9.81 \text{ m/s}^2$  debido a la gravedad. Ignore la resistencia del aire.

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** El origen  $O$  de la coordenada de posición  $s$  se considera al nivel del suelo con signo positivo hacia arriba (fig. 12-4).

**Altura máxima.** Como el cohete *asciende*,  $v_A = +75 \text{ m/s}$  cuando  $t = 0$ . A la altura máxima  $s = s_B$  la velocidad  $v_B = 0$ . Durante todo el movimiento, la aceleración es  $a_c = -9.81 \text{ m/s}^2$  (negativa puesto que actúa en el sentido *opuesto* a la velocidad positiva o al desplazamiento positivo). Como  $a_c$  es *constante*, la posición del cohete se puede relacionar con su velocidad en los dos puntos  $A$  y  $B$  de la trayectoria mediante la ecuación 12-6, es decir,

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad v_B^2 &= v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A) \\ 0 &= (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m}) \\ s_B &= 327 \text{ m} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Para obtener la velocidad del cohete justo antes de que choque contra el suelo, aplicamos la ecuación 12-6 entre los puntos  $B$  y  $C$  (fig. 12-4).

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad v_C^2 &= v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B) \\ &= 0 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 327 \text{ m}) \\ v_C &= -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Se eligió la raíz negativa pues el cohete está descendiendo. Del mismo modo, también se puede aplicar la ecuación 12-6 entre los puntos  $A$  y  $C$ , es decir,

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad v_C^2 &= v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A) \\ &= (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 40 \text{ m}) \\ v_C &= -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Observe que el cohete está sujeto a una *desaceleración* de  $A$  y  $B$  de  $9.81 \text{ m/s}^2$  y, luego, de  $B$  a  $C$  se *acelera* a esta razón. Asimismo, aun cuando el cohete se *detiene* momentáneamente en  $B$  ( $v_B = 0$ ), ¡la aceleración en  $B$  sigue siendo de  $9.81 \text{ m/s}^2$  hacia abajo!

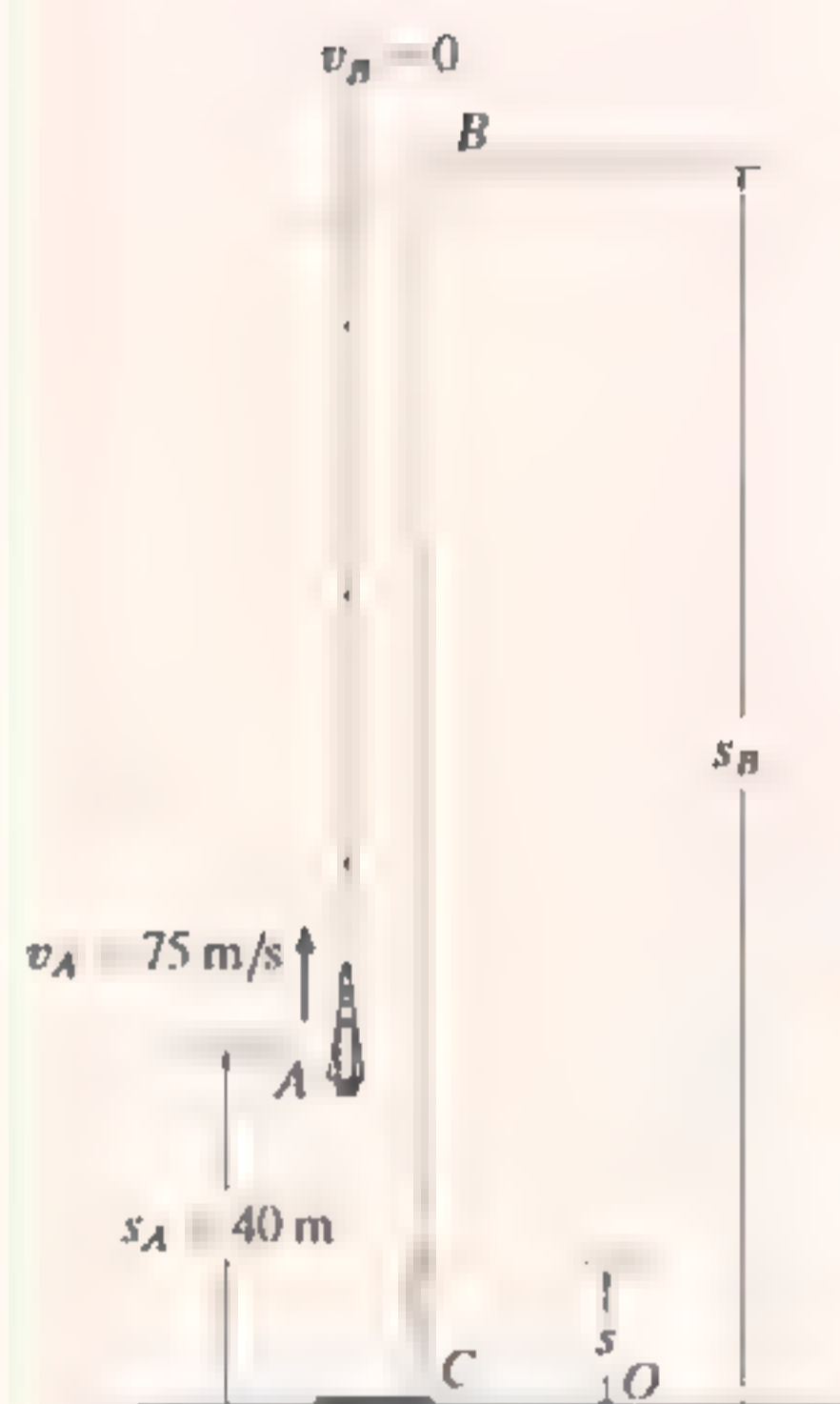


Fig. 12-4

## EJEMPLO

Una partícula metálica se somete a la influencia de un campo magnético a medida que desciende a través de un fluido que se extiende de la placa *A* a la placa *B* (fig. 12-5). Si la partícula se libera del reposo en el punto medio *C*,  $s = 100$  mm y la aceleración es  $a = (4s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  está en metros, determine la velocidad de la partícula cuando llega a la placa *B*,  $s = 200$  mm, y el tiempo que le lleva para ir de *C* a *B*.

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Como se indica en la figura 12-5,  $s$  es positiva hacia abajo, medida a partir de la placa *A*.

**Velocidad.** Como  $a = f(s)$ , la velocidad como una función de la posición se obtiene con  $v dv = a ds$ . Ya que  $v = 0$  en  $s = 0.1$  m, tenemos

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad v dv &= a ds \\
 \int_0^v v dv &= \int_{0.1 \text{ m}}^s 4s ds \\
 \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^v &= \frac{4}{2} s^2 \Big|_{0.1 \text{ m}}^s \\
 v &= 2(s^2 - 0.01)^{1/2} \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

En  $s = 200$  mm = 0.2 m,

$$v_B = 0.346 \text{ m/s} = 346 \text{ mm/s} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

Se elige la raíz positiva porque la partícula está descendiendo, es decir, viaja en la dirección  $+s$ .

**Tiempo.** El tiempo para que la partícula vaya de *C* a *B* se obtiene con  $v = ds/dt$  y la ecuación 1, donde  $s = 0.1$  m cuando  $t = 0$ . Del apéndice A,

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad ds &= v dt \\
 &= 2(s^2 - 0.01)^{1/2} dt \\
 \int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} &= \int_0^t 2 dt \\
 \ln(\sqrt{s^2 - 0.01} + s) \Big|_{0.1}^s &= 2t \Big|_0^t \\
 \ln(\sqrt{s^2 - 0.01} + s) + 2.303 &= 2t
 \end{aligned}$$

At  $s = 0.2$  m,

$$t = \frac{\ln \sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2 + 2.303}{2} = 0.658 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

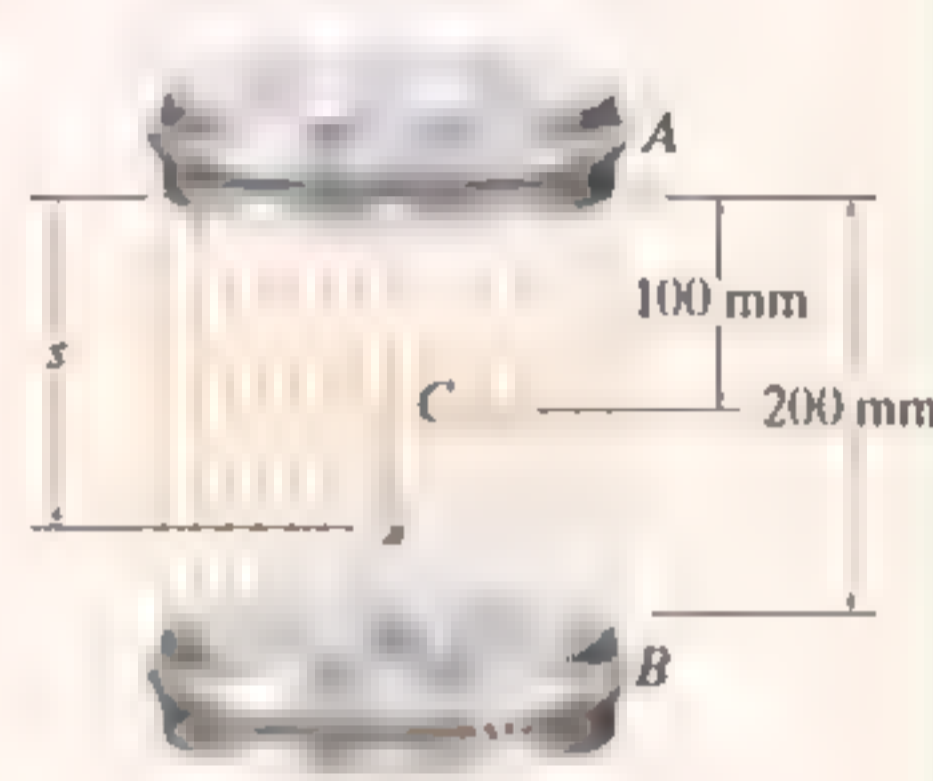


Fig. 12-5

**NOTA:** Las fórmulas de aceleración constante no pueden utilizarse en este ejemplo porque la aceleración cambia con la posición, es decir,  $a = 4s$ .

## EJEMPLO 12.1

Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria horizontal con una velocidad de  $v = (3t^2 - 6t)$  m/s, donde  $t$  es el tiempo en segundos. Si inicialmente se encuentra en el origen  $O$ , determine la distancia recorrida en 3.5 s y la velocidad promedio, así como la rapidez promedio de la partícula, durante el intervalo de tiempo.

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Aquí el movimiento positivo es hacia la derecha, medido a partir del origen  $O$  (fig. 12-6a).

**Distancia recorrida.** Como  $v = f(t)$ , la posición como una función del tiempo se determina integrando  $v = ds/dt$  con  $t = 0, s = 0$ .

$$\begin{aligned}
 (\pm) \quad ds &= v dt \\
 &= (3t^2 - 6t) dt \\
 \int_0^s ds &= \int_0^t (3t^2 - 6t) dt \\
 s &= (t^3 - 3t^2) \text{ m} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Para determinar la distancia recorrida en 3.5 s, es necesario investigar la trayectoria del movimiento. Si consideramos una gráfica de la función de velocidad (fig. 12-6b), se observa que con  $0 < t < 2$  s la velocidad es *negativa*, lo cual significa que la partícula se está desplazando hacia la *izquierda*; y para  $t > 2$  s la velocidad es *positiva* y, por consiguiente, la partícula se desplaza hacia la *derecha*. Asimismo, observe que  $v = 0$  cuando  $t = 2$  s. La posición de la partícula cuando  $t = 0, t = 2$  s y  $t = 3.5$  s se determina ahora con la ecuación 1:

$$s|_{t=0} = 0 \quad s|_{t=2\text{ s}} = -4.0 \text{ m} \quad s|_{t=3.5\text{ s}} = 6.125 \text{ m}$$

La trayectoria se muestra en la figura 12-6a. De ahí que la distancia recorrida en 3.5 s sea

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125 \text{ m} = 14.1 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

**Velocidad.** El desplazamiento de  $t = 0$  a  $t = 3.5$  s es

$$\Delta s = s|_{t=3.5\text{ s}} - s|_{t=0} = 6.125 \text{ m} - 0 = 6.125 \text{ m}$$

y, por lo tanto, la velocidad promedio es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125 \text{ m}}{3.5 \text{ s} - 0} = 1.75 \text{ m/s} \rightarrow \quad \text{Resp.}$$

La rapidez promedio se define en función de la *distancia recorrida*  $s_T$ . Este escalar positivo es

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125 \text{ m}}{3.5 \text{ s} - 0} = 4.04 \text{ m/s}$$

**NOTA:** En este problema, la aceleración es  $a = dv/dt = (6t - 6) \text{ m/s}^2$ , la cual no es constante.

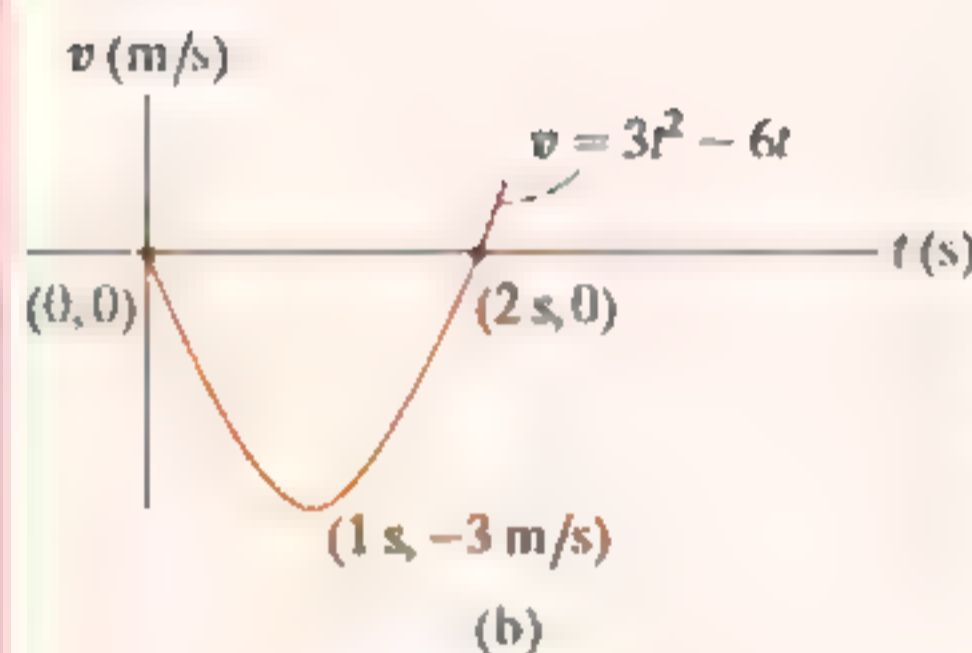
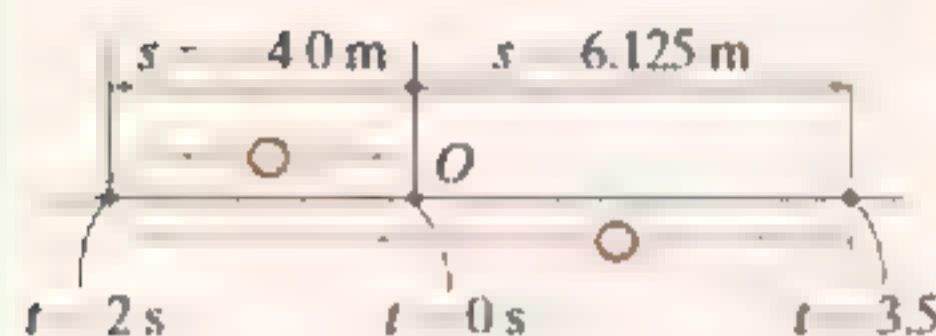


Fig. 12-6

Es muy recomendable que usted se ponga a prueba resolviendo los ejemplos; repáselos una y otra vez tratando de pensar qué ecuaciones de cinemática se deben utilizar y la forma como se aplican para determinar las incógnitas. Luego, antes de solucionar cualesquiera de los problemas, intente resolver algunos de los problemas preliminares y de los problemas fundamentales que se dan en las siguientes páginas. Las soluciones y las respuestas a todos estos problemas se incluyen en la parte final del libro. Si hace esto a lo largo del texto, le ayudará a comprender cómo se aplica la teoría y, de este modo, desarrollará sus habilidades para resolver problemas.

### PROBLEMAS PRELIMINARES

#### P12-1.

- Si  $s = (2t^3)$  m, donde  $t$  se da en segundos, determine  $v$  cuando  $t = 2$  s.
- Si  $v = (5s)$  m/s, donde  $s$  se da en metros, determine  $a$  en  $s = 1$  m.
- Si  $v = (4t + 5)$  m/s, donde  $t$  se da en segundos, determine  $a$  cuando  $t = 2$  s.
- Si  $a = 2$  m/s<sup>2</sup>, determine  $v$  cuando  $t = 2$  s si  $v = 0$  cuando  $t = 0$ .
- Si  $a = 2$  m/s<sup>2</sup>, determine  $v$  en  $s = 4$  m si  $v = 3$  m/s en  $s = 0$ .
- Si  $a = (s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  se da en metros, determine  $v$  cuando  $s = 5$  m si  $v = 0$  en  $s = 4$  m.
- Si  $a = 4$  m/s<sup>2</sup>, determine  $s$  cuando  $t = 3$  s si  $v = 2$  m/s y  $s = 2$  m cuando  $t = 0$ .
- Si  $a = (8t^2)$  m/s<sup>2</sup>, determine  $v$  cuando  $t = 1$  s si  $v = 0$  en  $t = 0$ .
- Si  $s = (3t^2 + 2)$  m, determine  $v$  cuando  $t = 2$  s.
- Cuando  $t = 0$  la partícula está en  $A$ . En cuatro segundos viaja hasta  $B$ , luego de otros seis segundos viaja hasta  $C$ . Determine la velocidad promedio y la rapidez promedio. El origen de las coordenadas está en  $O$ .

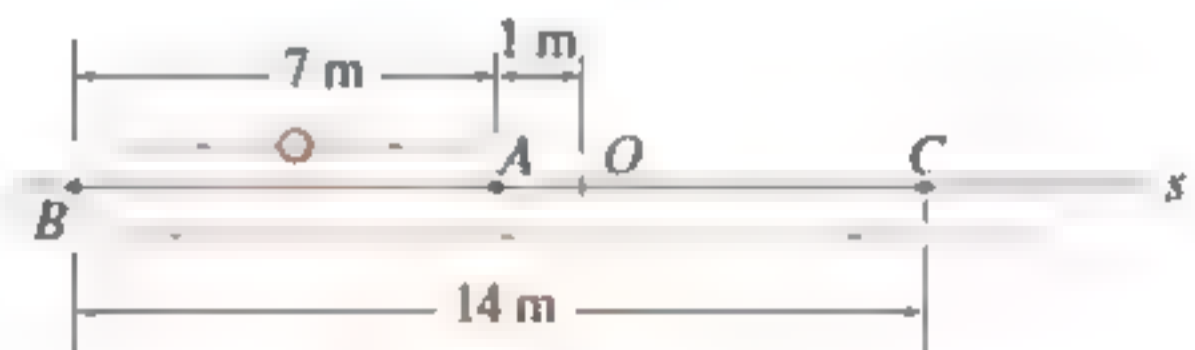


Fig. P12-1

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F12-1.** Inicialmente, el automóvil viaja a lo largo de una carretera recta a una rapidez de 35 m/s. Si se aplican los frenos y la rapidez del auto se reduce a 10 m/s en 15 s, determine su desaceleración constante.



Fig. F12-1

**F12-2.** Se lanza una bola verticalmente hacia arriba con una rapidez de 15 m/s. Determine el tiempo de vuelo cuando regresa a su posición original.



Fig. F12-2

**F12-3.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una velocidad de  $v = (4t - 3t^2)$  m/s, donde  $t$  está en segundos. Determine la posición de la partícula cuando  $t = 4$  s.  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .

**F12-4.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una rapidez de  $v = (0.5t^3 - 8t)$  m/s, donde  $t$  está en segundos. Determine su aceleración cuando  $t = 2$  s.

**F12-5.** La posición de una partícula está dada por  $s = (2t^2 - 8t + 6)$  m, donde  $t$  está en segundos. Determine el tiempo cuando su velocidad es cero y la distancia total que recorre cuando  $t = 3$  s.



Fig. F12-5

**F12-6.** Una partícula viaja a lo largo de una línea recta con una aceleración de  $a = (10 - 0.2s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  se mide en metros. Determine su velocidad cuando  $s = 10$  m, si  $v = 5$  m/s cuando  $s = 0$ .

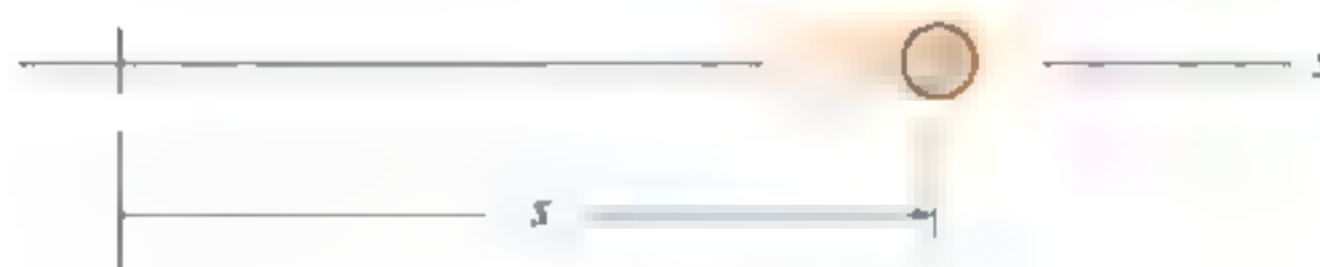


Fig. F12-6

**F12-7.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta, de modo que su aceleración es  $a = (4t^2 - 2)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $t$  está en segundos. Cuando  $t = 0$ , la partícula está 2 m a la izquierda del origen y cuando  $t = 2$  s, está 20 m a la izquierda del origen. Determine su posición cuando  $t = 4$  s.

**F12-8.** Una partícula viaja a lo largo de una línea recta a una velocidad de  $v = (20 - 0.05s^2)$  m/s, donde  $s$  está en metros. Determine la aceleración de la partícula cuando  $s = 15$  m.

## PROBLEMAS

**12.1.** Partiendo del reposo, una partícula que se mueve en línea recta tiene una aceleración de  $a = (2t - 6) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando  $t = 6 \text{ s}$ , y cuál es su posición cuando  $t = 11 \text{ s}$ ?

**12.2.** Si una partícula tiene una velocidad inicial de  $v_0 = 12 \text{ ft/s}$  a la derecha, en  $s_0 = 0$ , determine su posición cuando  $t = 10 \text{ s}$ , si  $a = 2 \text{ ft/s}^2$  hacia la izquierda.

**12.3.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con una velocidad  $v = (12 - 3t^2) \text{ m/s}$ , donde  $t$  se da en segundos. Cuando  $t = 1 \text{ s}$ , la partícula se encuentra a 10 metros a la izquierda del origen. Determine la aceleración cuando  $t = 4 \text{ s}$ , el desplazamiento desde  $t = 0$  hasta  $t = 10 \text{ s}$  y la distancia que recorre la partícula durante este periodo de tiempo.

**\*12.4.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con aceleración constante. Cuando  $s = 4 \text{ ft}$ ,  $v = 3 \text{ ft/s}$  y cuando  $s = 10 \text{ ft}$ ,  $v = 8 \text{ ft/s}$ . Determine la velocidad como una función de la posición.

**12.5.** La velocidad de una partícula que viaja en línea recta está dada por  $v = (6t - 3t^2) \text{ m/s}$ , donde  $t$  se da en segundos. Si  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , determine la desaceleración de la partícula y su posición cuando  $t = 3 \text{ s}$ . ¿Hasta dónde ha viajado la partícula durante el intervalo de tiempo de 3 s, y cuál ha sido su rapidez promedio?

**12.6.** La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por  $s = (1.5t^3 - 13.5t^2 + 22.5t) \text{ ft}$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine la posición de la partícula cuando  $t = 6 \text{ s}$  y la distancia total que se desplaza durante el intervalo de tiempo de 6 s. *Sugerencia:* Grafique la trayectoria para determinar la distancia total recorrida.

**12.7.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, de manera que su posición está definida por  $s = (t^2 - 6t + 5) \text{ m}$ . Determine la velocidad promedio, la rapidez promedio y la aceleración de la partícula cuando  $t = 6 \text{ s}$ .

**\*12.8.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, de manera que su posición está definida por  $s = (10t^2 + 20) \text{ mm}$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine (a) el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo desde  $t = 1 \text{ s}$  hasta  $t = 5 \text{ s}$ , (b) la velocidad promedio de la partícula durante este intervalo de tiempo, y (c) la aceleración cuando  $t = 1 \text{ s}$ .

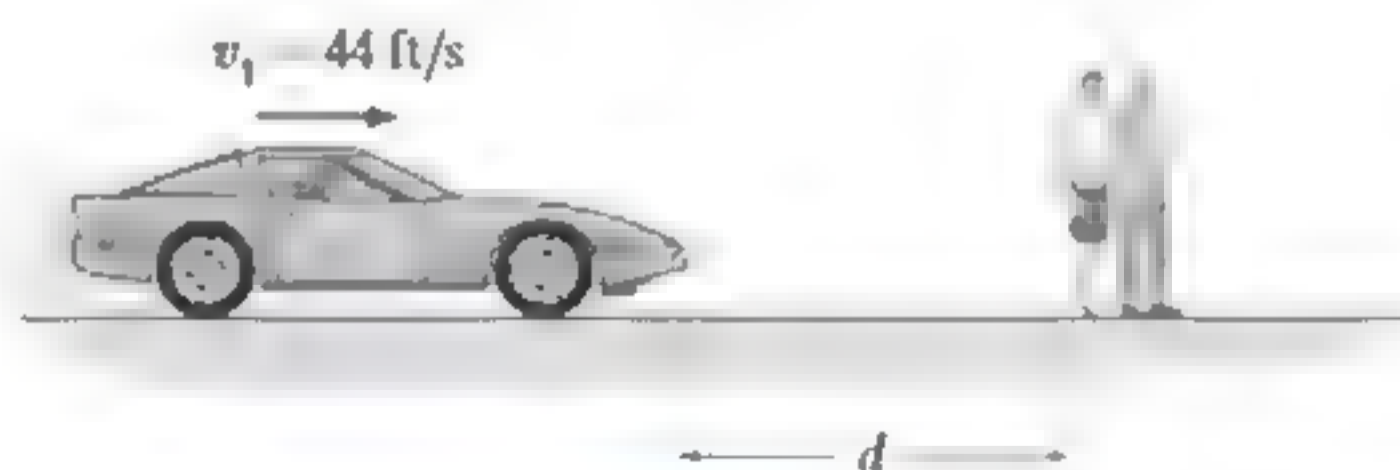
**12.9.** La aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por  $a = (2t - 1) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. Si  $s = 1 \text{ m}$  y  $v = 2 \text{ m/s}$  cuando  $t = 0$ , determine la velocidad y la posición de la partícula cuando  $t = 6 \text{ s}$ . Asimismo, determine la distancia total que viaja la partícula durante este periodo de tiempo.

**12.10.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración de  $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2}) \text{ m/s}^2$ , donde  $s$  se da en metros. Determine la velocidad de la partícula cuando  $s = 2 \text{ m}$ , si inicia desde el reposo cuando  $s = 1 \text{ m}$ . Use un método numérico para evaluar la integral.

**12.11.** Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria en línea recta, de modo que en 4 s se mueve desde una posición inicial  $s_A = -8 \text{ m}$  hasta una posición  $s_B = +3 \text{ m}$ . Luego, en otros 5 s se mueve desde  $s_B$  hasta  $s_C = -6 \text{ m}$ . Determine la velocidad promedio y la rapidez promedio de la partícula durante el intervalo de tiempo de 9 s.

**\*12.12.** Un automóvil que se desplaza con una rapidez inicial de 70 km/h acelera a  $6000 \text{ km/h}^2$  a lo largo de un camino recto. ¿Cuánto tiempo se tarda en alcanzar una rapidez de 120 km/h? Además, ¿qué distancia viaja el automóvil durante este tiempo?

**12.13.** Las pruebas revelan que un conductor normal requiere alrededor de 0.75 s para *reaccionar* ante una situación y evitar una colisión. Un conductor que tiene un nivel de 0.1% de alcohol en su sangre se tarda alrededor de 3 s para hacer lo mismo. Si estos conductores están viajando en una carretera recta a 30 mph (44 ft/s) y sus automóviles pueden desacelerar a  $2 \text{ ft/s}^2$ , determine la menor distancia de frenado  $d$  que requieren desde el momento en que ven a los peatones. *Moraleja:* Si usted bebe, ¡por favor no maneje!



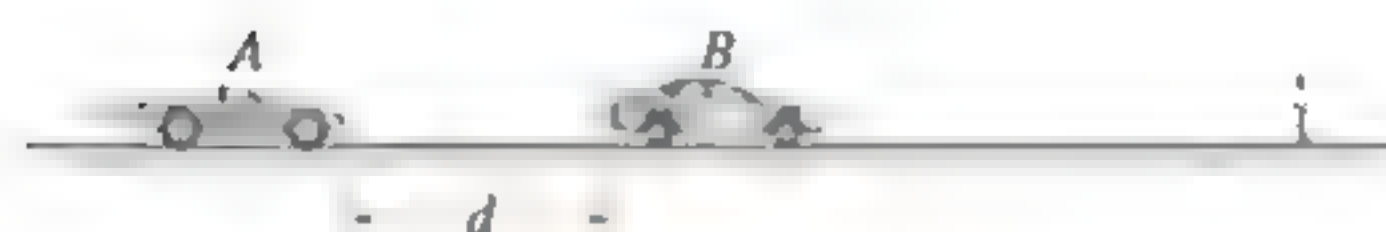
Prob. 12-13

**12-14.** La posición de una partícula a lo largo de una trayectoria en línea recta está definida por  $s = (t^3 - 6t^2 - 15t + 7)$  ft, donde  $t$  se da en segundos. Determine la distancia total recorrida cuando  $t = 10$  s. ¿Cuáles son la velocidad promedio, la rapidez promedio, la velocidad instantánea y la aceleración de la partícula en este momento?

**12-15.** Una partícula se mueve con una velocidad  $v_0$  cuando  $s = 0$  y  $t = 0$ . Si se somete a una desaceleración de  $a = -kv^3$ , donde  $k$  es una constante, determine su velocidad y su posición en función del tiempo.

**\*12-16.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad inicial de 6 m/s, cuando se somete a una desaceleración de  $a = (-1.5v^{1/2})$  m/s<sup>2</sup>, donde  $v$  se da en m/s. Determine qué tan lejos viaja antes de detenerse. ¿Cuánto tiempo toma esto?

**12-17.** El automóvil  $B$  viaja a una distancia  $d$  adelante del automóvil  $A$ . Ambos autos se desplazan a 60 ft/s cuando el conductor del auto  $B$  aplica súbitamente los frenos, haciendo que su vehículo desacelere a 12 ft/s<sup>2</sup>. Al conductor del automóvil  $A$  le toman 0.75 s reaccionar (éste es el tiempo de reacción normal para los conductores). Cuando aplica los frenos, desacelera a 15 ft/s<sup>2</sup>. Determine la distancia mínima  $d$  entre los autos que evitaría una colisión.



Prob. 12-17

**12-18.** La aceleración de un cohete que viaja hacia arriba está dada por  $a = (6 + 0.02s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  se da en metros. Determine el tiempo necesario para que el cohete llegue a una altitud de  $s = 100$  m. Inicialmente,  $v = 0$  y  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .

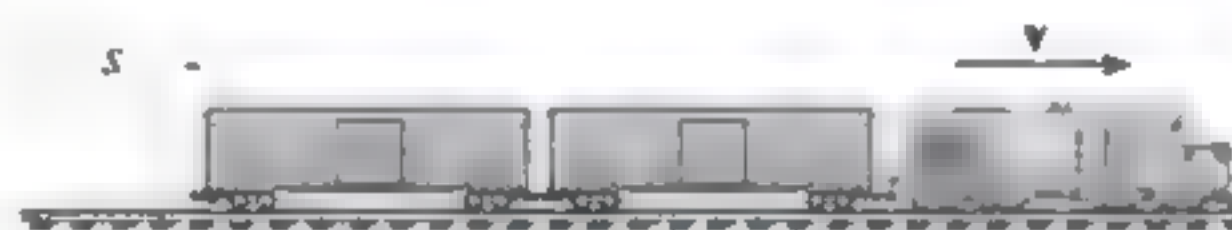


Prob. 12-18

**12-19.** Un tren parte del reposo en la estación  $A$  y acelera a 0.5 m/s<sup>2</sup> durante 60 s. Después se desplaza con una velocidad constante durante 15 minutos. A continuación, desacelera a 1 m/s<sup>2</sup> hasta que alcanza el reposo en la estación  $B$ . Determine la distancia entre las estaciones.

**\*12-20.** La velocidad de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es  $v = (3t^2 - 6t)$  ft/s, donde  $t$  se da en segundos. Si  $s = 4$  ft cuando  $t = 0$ , determine la posición de la partícula cuando  $t = 4$  s. ¿Cuál es la distancia total recorrida durante el intervalo de tiempo de  $t = 0$  a  $t = 4$  s? Además, ¿cuál es la aceleración cuando  $t = 2$  s?

**12-21.** Un tren de carga se desplaza a  $v = 60(1 - e^{-t})$  ft/s, donde  $t$  es el tiempo transcurrido en segundos. Determine la distancia recorrida en tres segundos, y la aceleración en ese instante de tiempo.



Prob. 12-21

**12-22.** Una bolsa de arena se deja caer desde un globo que asciende verticalmente a una rapidez constante de 6 m/s. Si la bolsa se libera con la misma velocidad ascendente de 6 m/s cuando  $t = 0$  y golpea el suelo cuando  $t = 8$  s, determine la rapidez de la bolsa al golpear el suelo y la altitud del globo en ese instante.

**12-23.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, de modo que su aceleración está definida por  $a = (-2v) \text{ m/s}^2$ , donde  $v$  se da en metros por segundo. Si  $v = 20 \text{ m/s}$  cuando  $s = 0$  y  $t = 0$ , determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

**\*12-24.** La aceleración de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es  $a = \frac{1}{4} s^{1/2} \text{ m/s}^2$ , donde  $s$  se da en metros. Si  $v = 0$ ,  $s = 1 \text{ m}$  cuando  $t = 0$ , determine la velocidad de la partícula en  $s = 2 \text{ m}$ .

**12-25.** Si se tienen en cuenta los efectos de la resistencia atmosférica, un cuerpo en caída libre tiene una aceleración definida por la ecuación  $a = 9.81[1 - v^2(10^{-4})] \text{ m/s}^2$ , donde  $v$  se da en m/s y la dirección positiva es hacia abajo. Si el cuerpo se libera desde el reposo a una gran altura, determine (a) la velocidad cuando  $t = 5 \text{ s}$ , y (b) la velocidad terminal o máxima alcanzable del cuerpo (cuando  $t \rightarrow \infty$ ).

**12-26.** La aceleración de una partícula a lo largo de una línea recta está definida por  $a = (2t - 9) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. En  $t = 0$ ,  $s = 1 \text{ m}$  y  $v = 10 \text{ m/s}$ . Cuando  $t = 9 \text{ s}$ , determine (a) la posición de la partícula, (b) la distancia total recorrida y (c) la velocidad.

**12-27.** Cuando una partícula cae a través del aire, su aceleración inicial  $a = g$  disminuye hasta llegar a cero y, a partir de entonces, cae a una velocidad constante o terminal  $v_f$ . Si esta variación de la aceleración se puede expresar como  $a = (g/v_f^2)(v_f^2 - v^2)$ , determine el tiempo necesario para que la velocidad sea  $v = v_f/2$ . En un inicio, la partícula cae desde el reposo.

**\*12-28.** Dos partículas  $A$  y  $B$  parten desde el reposo en el origen  $s = 0$  y se mueven a lo largo de una línea recta, de modo que  $a_A = (6t - 3) \text{ ft/s}^2$  y  $a_B = (12t^2 - 8) \text{ ft/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine la distancia entre ellas cuando  $t = 4 \text{ s}$  y la distancia total que cada una ha viajado en  $t = 4 \text{ s}$ .

**12-29.** Una bola  $A$  se lanza verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 30 m de altura con una velocidad inicial de 5 m/s. En el mismo instante, otra bola  $B$  se lanza hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s. Determine la altura desde el suelo y el tiempo en que ambas se encuentran a la misma altura.

**12-30.** Una esfera se dispara hacia abajo en un medio con una rapidez inicial de 27 m/s. Si la esfera experimenta una desaceleración de  $a = (-6t) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos, determine la distancia que recorre antes de detenerse.

**12-31.** La velocidad de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es  $v = v_0 - ks$ , donde  $k$  es constante. Si  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , determine la posición y la aceleración de la partícula como una función del tiempo.

**\*12-32.** La bola  $A$  se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad  $v_0$ . La bola  $B$  se lanza hacia arriba desde el mismo punto y con la misma velocidad, pero  $t$  segundos después. Determine el tiempo transcurrido  $t < 2v_0/g$  desde el instante en que se lanza la bola  $A$  hasta que las bolas pasan una junto a la otra, y encuentre la velocidad de cada bola en ese instante.

**12-33.** Cuando se lanza un cuerpo a una gran altitud por encima de la superficie de la Tierra, se debe tomar en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad con respecto a la altitud  $y$ . Despreciando la resistencia del aire, esta aceleración se determina con la fórmula  $a = -g_0[R^2/(R + y)^2]$ , donde  $g_0$  es la constante de aceleración gravitacional al nivel del mar,  $R$  es el radio de la Tierra y la dirección positiva se mide hacia arriba. Si  $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$  y  $R = 6356 \text{ km}$ , determine la velocidad inicial mínima (velocidad de escape) a la que se debe disparar un proyectil verticalmente desde la superficie terrestre, de modo que no caiga de regreso a la Tierra. *Sugerencia:* Esto requiere que  $v = 0$  a medida que  $y \rightarrow \infty$ .

**12-34.** Teniendo en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad  $a$  con respecto a la altitud  $y$  (vea el problema 12-36), derive una ecuación que relacione la velocidad de una partícula que cae libremente con su altitud. Suponga que la partícula se suelta desde el reposo a una altitud  $y_0$  de la superficie de la Tierra. ¿Con qué velocidad choca la partícula contra la Tierra, si se suelta del reposo a una altitud  $y_0 = 500 \text{ km}$ ? Use los datos numéricos del problema 12-33.

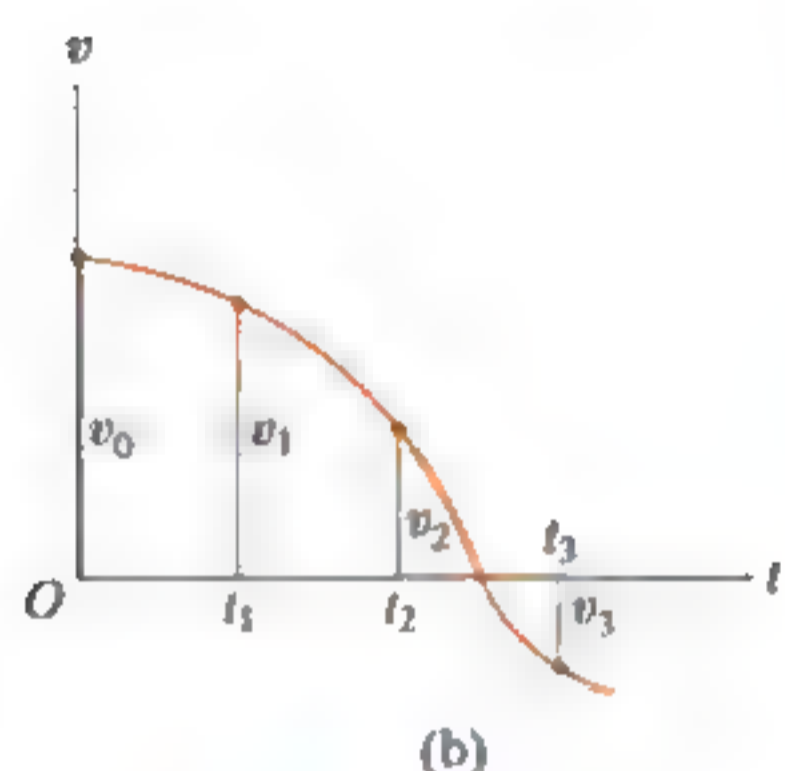
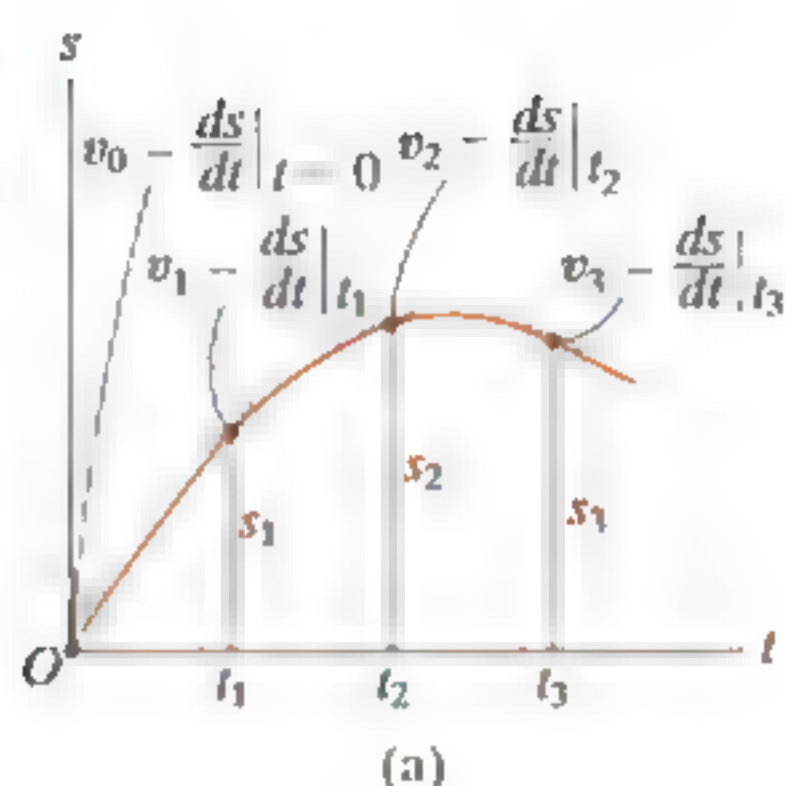


Fig. 12-7

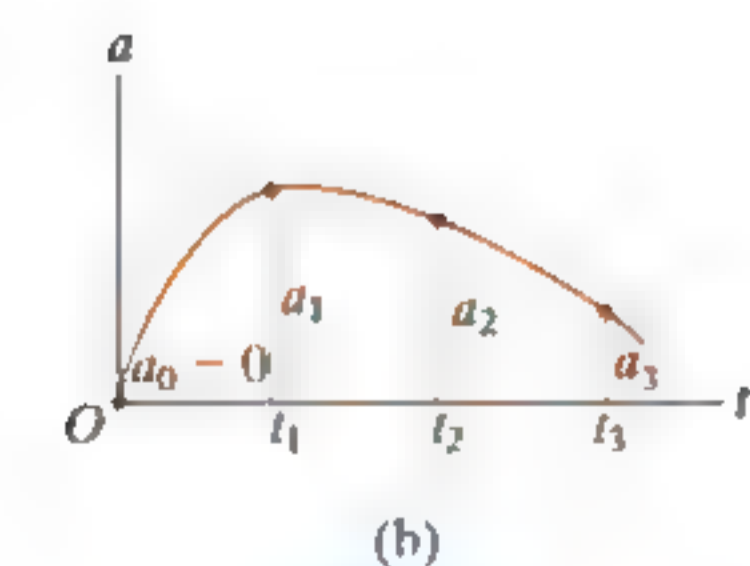
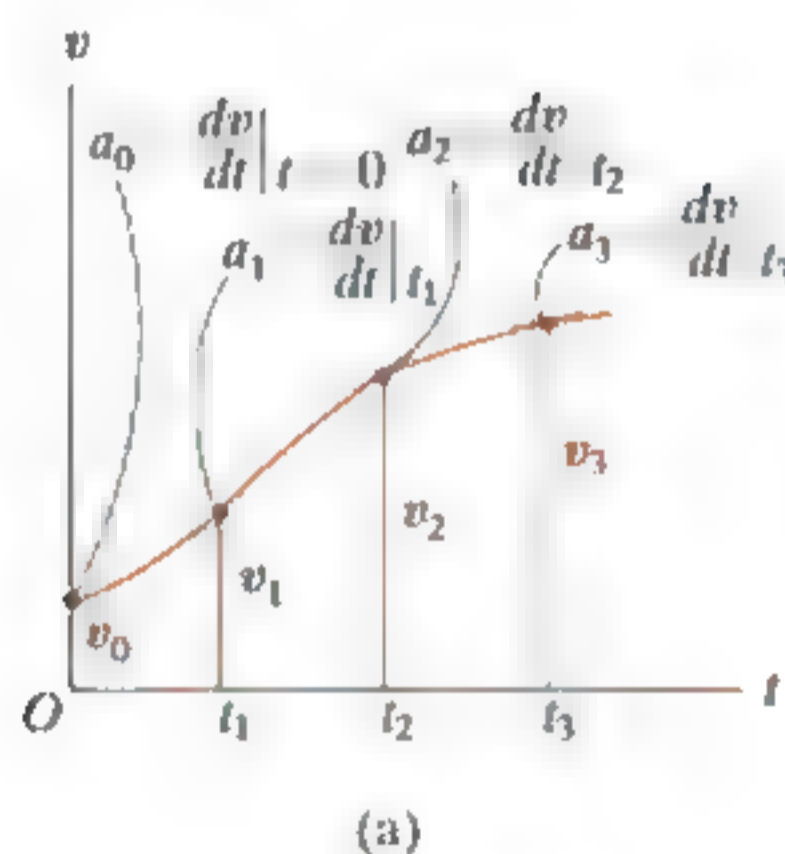


Fig. 12-8

## 12.3 Cinemática rectilínea: movimiento errático

Cuando el movimiento de una partícula es errático o variable, su posición, velocidad y aceleración *no pueden* describirse mediante una sola función matemática continua a lo largo de toda la trayectoria. En su lugar, se requerirá una serie de funciones para especificar el movimiento en diferentes intervalos. Por eso, conviene representar gráficamente el movimiento. Si se puede trazar una gráfica del movimiento que relacione dos variables cualesquiera de las variables  $s, v, a, t$ , entonces esta gráfica puede utilizarse para construir gráficas subsecuentes que relacionen las dos variables restantes, ya que las variables están relacionadas por las relaciones diferenciales  $v = ds/dt$ ,  $a = dv/dt$  o  $a ds = v dv$ . Con frecuencia ocurren varias situaciones.

**Construcción de  $v-t$  y  $a-t$ .** Para construir la gráfica de  $v-t$  dada la gráfica de  $s-t$  (fig. 12-7a), debería utilizarse la ecuación  $v = ds/dt$ , ya que relaciona las variables  $s$  y  $t$  con  $v$ . Esta ecuación establece que

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Pendiente de la  
gráfica de  $s-t$  = velocidad

Por ejemplo, si se mide la pendiente en la gráfica de  $s-t$  cuando  $t = t_1$ , la velocidad es  $v_1$ , la cual se traza en la figura 12-7b. La gráfica de  $v-t$  se construye trazando este punto y los otros valores en cada instante.

La gráfica de  $a-t$  se construye a partir de la gráfica de  $v-t$  del mismo modo (fig. 12-8), ya que

$$\frac{dv}{dt} = a$$

pendiente de la  
gráfica de  $v-t$  = aceleración

En la figura 12-8a se muestran ejemplos de varias mediciones de la pendiente de la gráfica  $v-t$  y se grafican en la figura 12-8b.

Si la curva  $s-t$  correspondiente en cada intervalo de movimiento puede expresarse mediante una función matemática  $s = s(t)$ , entonces la ecuación de la gráfica de  $v-t$  correspondiente al mismo intervalo se obtiene diferenciando esta función con respecto al tiempo, ya que  $v = ds/dt$ . Asimismo, la ecuación de la gráfica de  $a-t$  en el mismo intervalo se determina al diferenciar  $v = v(t)$ , dado que  $a = dv/dt$ . Como la diferenciación reduce un polinomio de grado  $n$  a uno de grado  $n - 1$ , entonces si la gráfica de  $s-t$  es parabólica (una curva de segundo grado), la gráfica de  $v-t$  será una línea recta inclinada (una curva de primer grado) y la gráfica de  $a-t$  será una constante o una línea horizontal (una curva de grado cero).

Si se proporciona la gráfica de  $a-t$  (fig. 12-9a), la gráfica de  $v-t$  se construye por medio de  $a = dv/dt$ , escrita como

$$\Delta v = \int a dt$$

cambio de  
velocidad = área bajo la  
gráfica de  $a-t$

Por consiguiente, para construir la gráfica de  $v-t$ , comenzamos con la velocidad inicial de la partícula  $v_0$  y, luego, agregamos a ésta pequeños incrementos de área ( $\Delta v$ ) determinados a partir de la gráfica de  $a-t$ . De este modo, se determinan puntos sucesivos,  $v_1 = v_0 + \Delta v$ , etcétera, para la gráfica de  $v-t$  (fig. 12-9b). Observe que es necesaria la suma algebraica de los incrementos de área de la gráfica de  $a-t$ , ya que las áreas situadas por encima del eje  $t$  corresponden a un incremento de  $v$  (área "positiva"), mientras que las que quedan debajo del eje indican una reducción de  $v$  (área "negativa").

Asimismo, si se presenta la gráfica de  $v-t$  (fig. 12-10a), es posible determinar la gráfica de  $s-t$  mediante  $v = ds/dt$ , escrita como

$$\Delta s = \int v dt$$

desplazamiento = área bajo la  
gráfica de  $v-t$

Como se indicó previamente, comenzamos con la posición inicial de la partícula  $s_0$  y sumamos a ésta (algebraicamente) pequeños incrementos de área  $\Delta s$  determinados a partir de la gráfica de  $v-t$  (fig. 12-10b).

Si segmentos de la gráfica de  $a-t$  pueden describirse mediante una serie de ecuaciones, entonces cada una de éstas puede *integrarse* para obtener las ecuaciones que describen los segmentos correspondientes de la gráfica de  $v-t$ . Del mismo modo, la gráfica de  $s-t$  se obtiene integrando las ecuaciones que describen los segmentos de la gráfica de  $v-t$ . Por consiguiente, si la gráfica de  $a-t$  es lineal (una curva de primer grado), la integración dará una gráfica de  $v-t$  que sea parabólica (una curva de segundo grado) y una gráfica de  $s-t$  que sea cúbica (una curva de tercer grado).

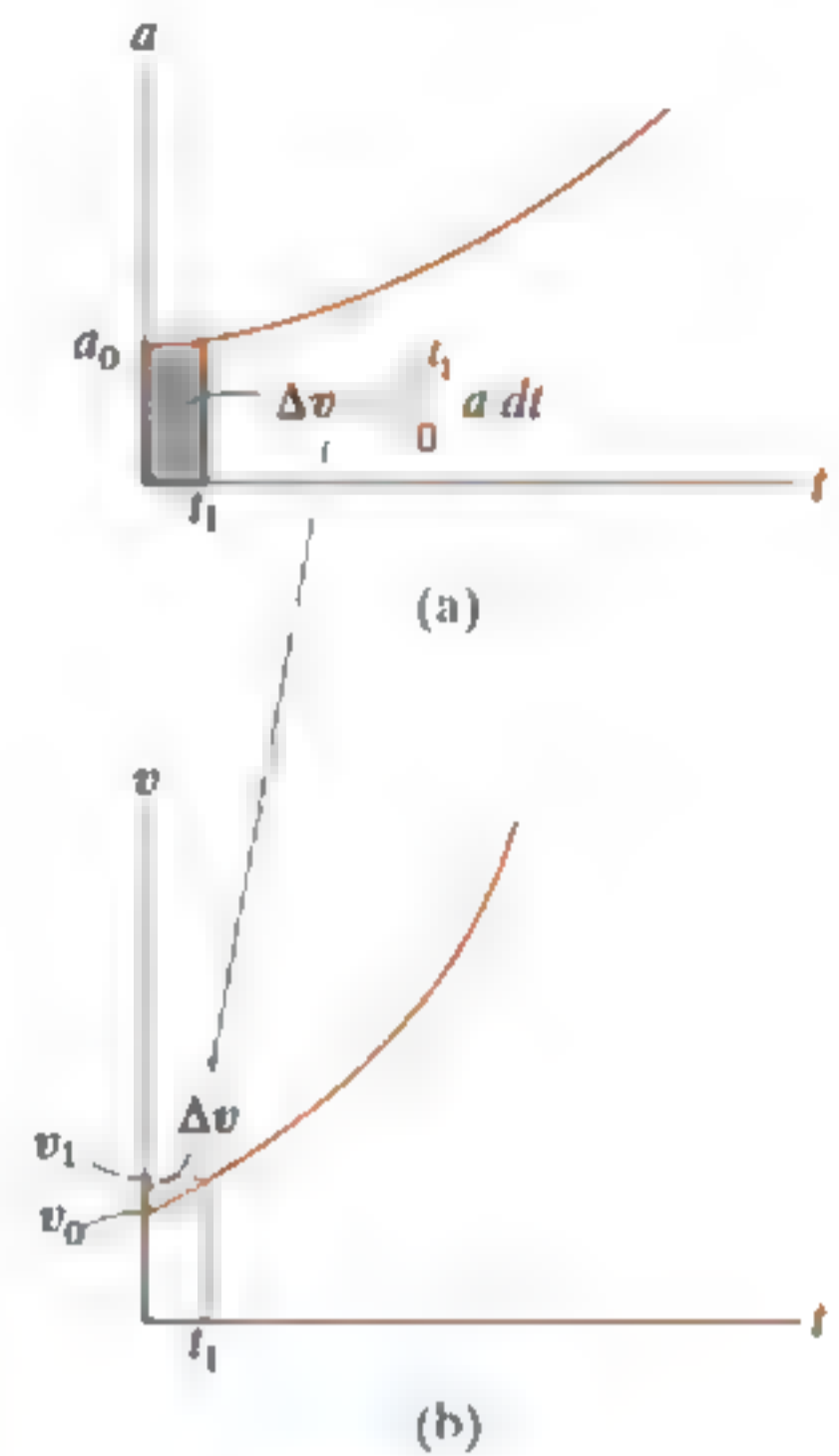


Fig. 12-9

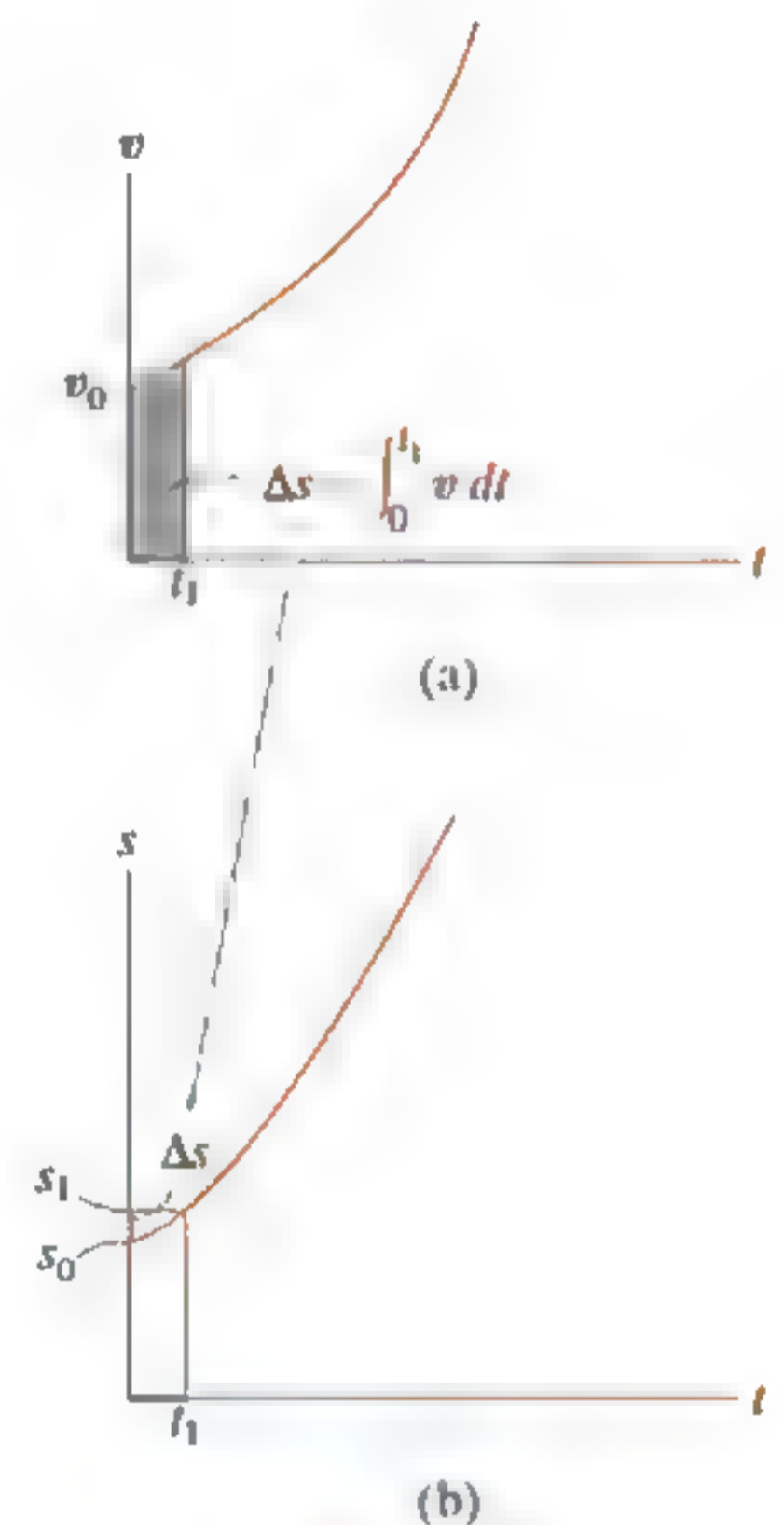
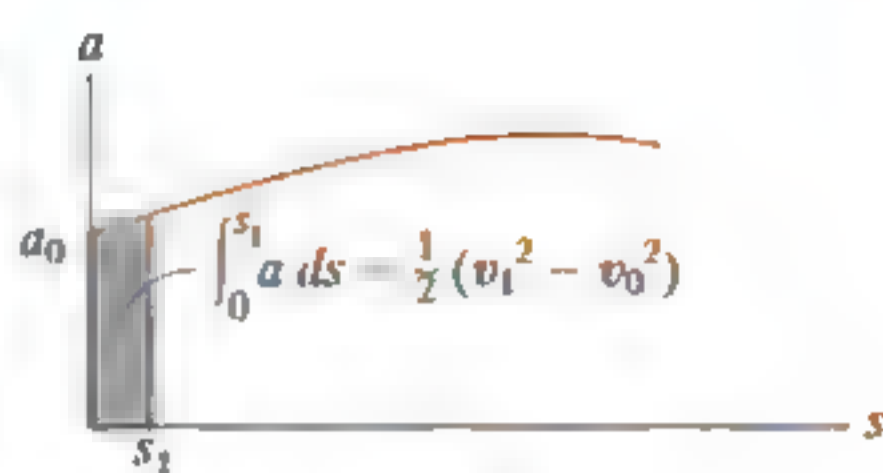
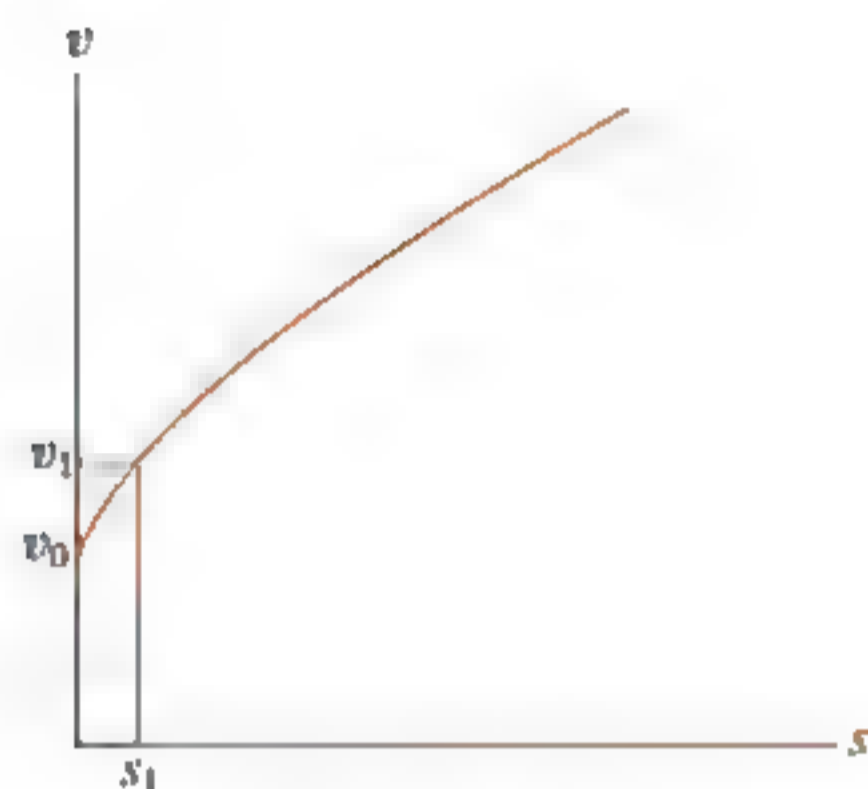


Fig. 12-10

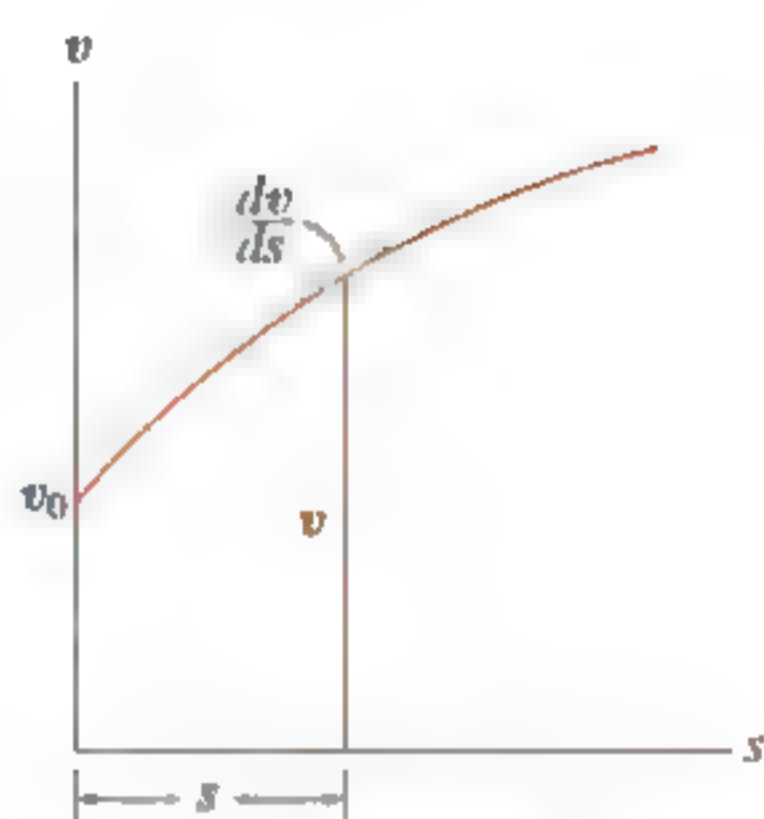


(a)

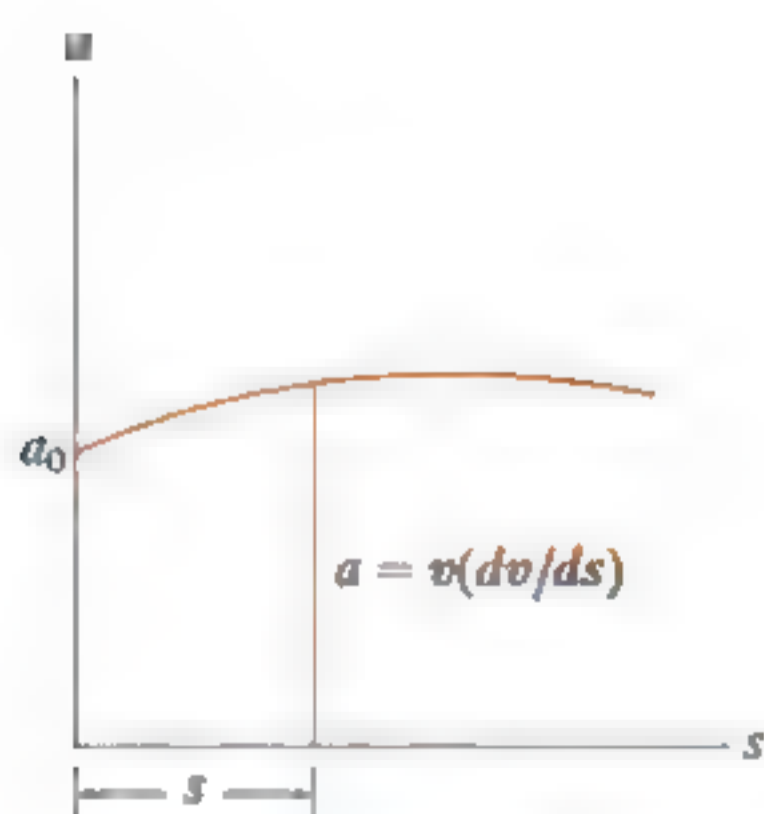


(b)

Fig. 12-11



(a)



(b)

Fig. 12-12

**Gráficas de  $v$  y  $a$ .** Si puede construirse la gráfica de  $a$ - $s$ , entonces los puntos en la gráfica de  $v$ - $s$  se determinan mediante  $v dv = a ds$ . Si integramos esta ecuación entre los límites  $v = v_0$  con  $s = s_0$  y  $v = v_1$  con  $s = s_1$ , tenemos

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a ds$$

área bajo la  
gráfica de  $a$ - $s$

Por lo tanto, si se determina el área sombreada en la figura 12-11a y se conoce la velocidad inicial  $v_0$  en  $s_0 = 0$ , entonces  $v_1 = (2 \int_0^{s_1} a ds + v_0^2)^{1/2}$ , (fig. 12-11b). De esta manera se pueden construir puntos sucesivos en la gráfica de  $v$ - $s$ .

Si se conoce la gráfica de  $v$ - $s$ , la aceleración  $a$  en cualquier posición  $s$  se determina mediante  $a ds = v dv$ , escrita como

$$a = v \left( \frac{dv}{ds} \right)$$

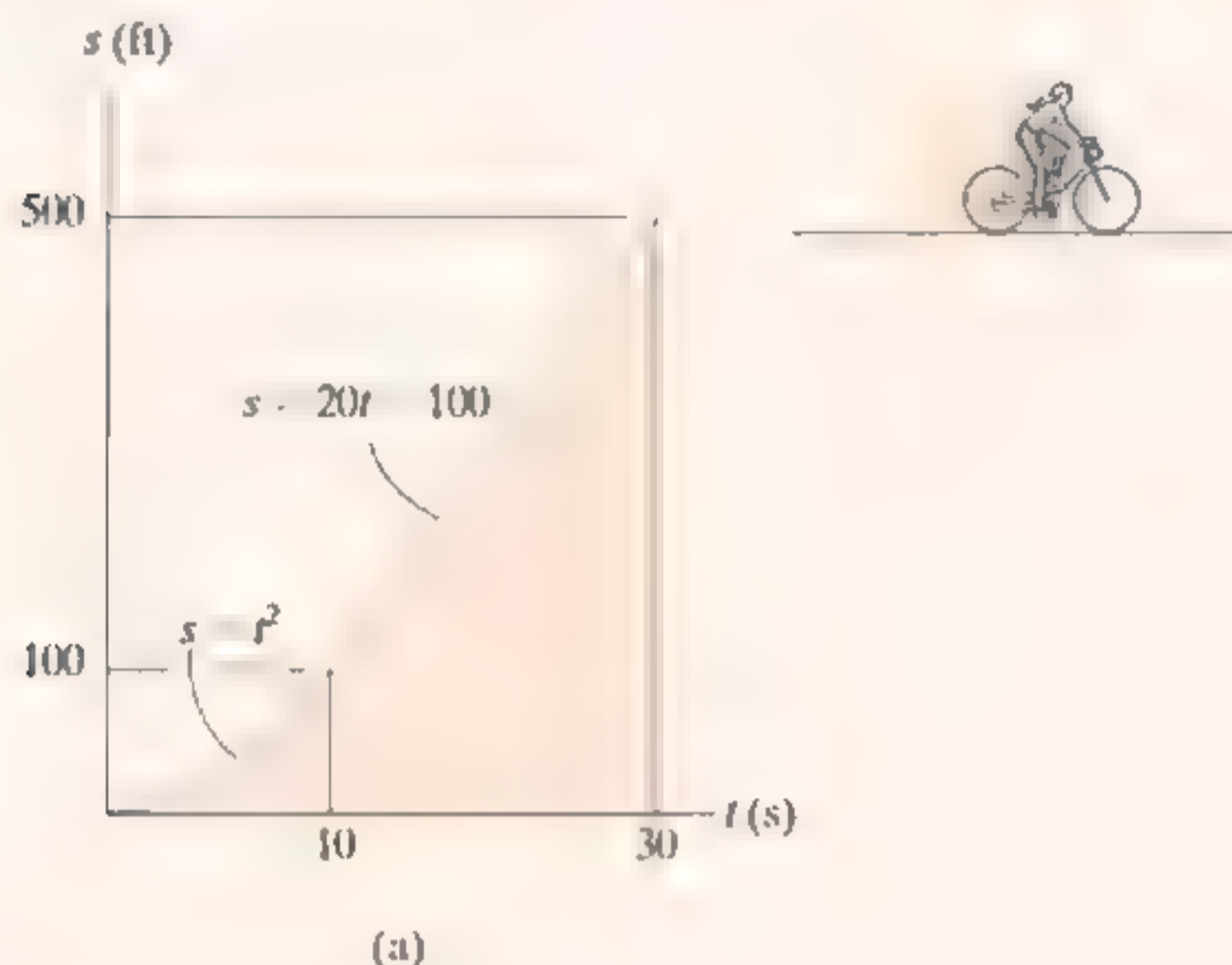
velocidad por la  
aceleración = pendiente de  
la gráfica de  $v$ - $s$

De ahí que, en cualquier punto  $(s, v)$  de la figura 12-12a, se mide la pendiente  $dv/ds$  de la gráfica de  $v$ - $s$ . Entonces, con  $v$  y  $dv/ds$  conocidas, se calcula el valor de  $a$  (fig. 12-12b).

La gráfica de  $v$ - $s$  también se construye a partir de la gráfica de  $a$ - $s$  o viceversa, por aproximación de la gráfica conocida en varios intervalos con funciones matemáticas,  $v = f(s)$  o  $a = g(s)$  y, luego, mediante  $a ds = v dv$  para obtener la otra gráfica.

## EJEMPLO

Una bicicleta rueda a lo largo de una carretera recta, de modo que la gráfica de la figura 12-13a describe su posición. Construya las gráficas de  $v-t$  y  $a-t$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 30$  s.



## SOLUCIÓN

**Gráfica de  $v-t$ .** Como  $v = ds/dt$ , la gráfica de  $v-t$  se determina diferenciando las ecuaciones que definen la gráfica de  $s-t$  (fig. 12-13a). Tenemos

$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \quad s = (t^2) \text{ ft} \quad v = \frac{ds}{dt} = (2t) \text{ ft/s}$$

$$10 \text{ s} < t \leq 30 \text{ s}; \quad s = (20t - 100) \text{ ft} \quad v = \frac{ds}{dt} = 20 \text{ ft/s}$$

Los resultados se grafican en la figura 12-13b. También obtenemos valores específicos de  $v$  midiendo la *pendiente* de la gráfica de  $s-t$  en un instante dado. Por ejemplo, con  $t = 20$  s, la pendiente de la gráfica de  $s-t$  se determina a partir de la línea recta de 10 s a 30 s, es decir,

$$t = 20 \text{ s}; \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500 \text{ ft} - 100 \text{ ft}}{30 \text{ s} - 10 \text{ s}} = 20 \text{ ft/s}$$

**Gráfica de  $a-t$ .** Como  $a = dv/dt$ , la gráfica de  $a-t$  se determina si se diferencian las ecuaciones que definen las líneas rectas de la gráfica de  $v-t$ . Esto da como resultado

$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \quad v = (2t) \text{ ft/s} \quad a = \frac{dv}{dt} = 2 \text{ ft/s}^2$$

$$10 < t \leq 30 \text{ s}; \quad v = 20 \text{ ft/s} \quad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Los resultados se grafican en figura 12-13c.

**NOTA:** Compruebe que  $a = 2 \text{ ft/s}^2$  cuando  $t = 5$  s al medir la pendiente de la gráfica de  $v-t$ .

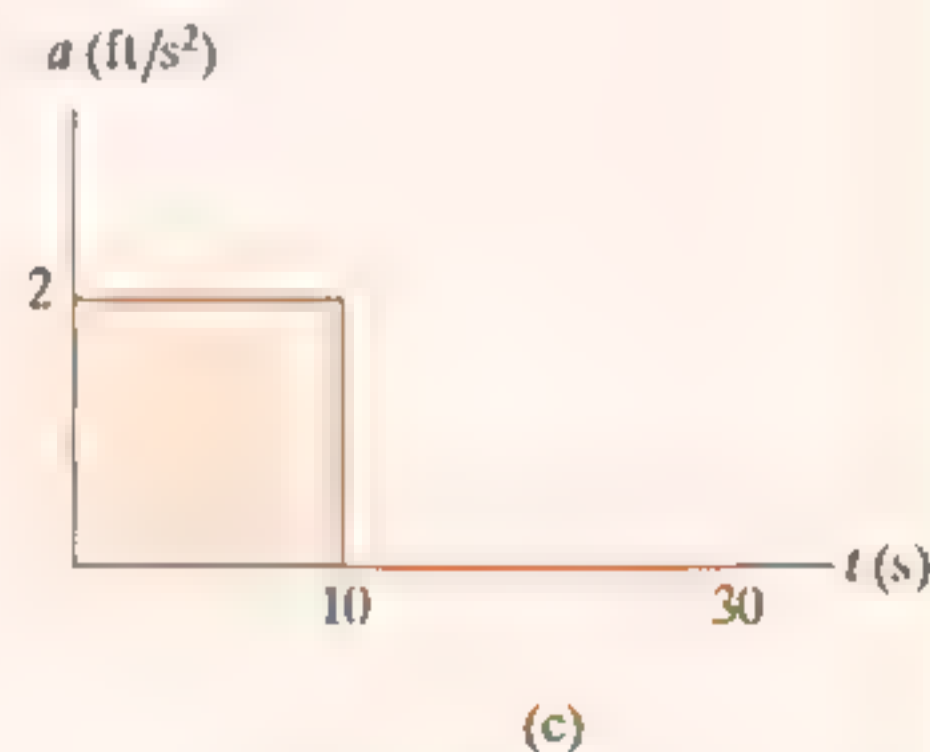
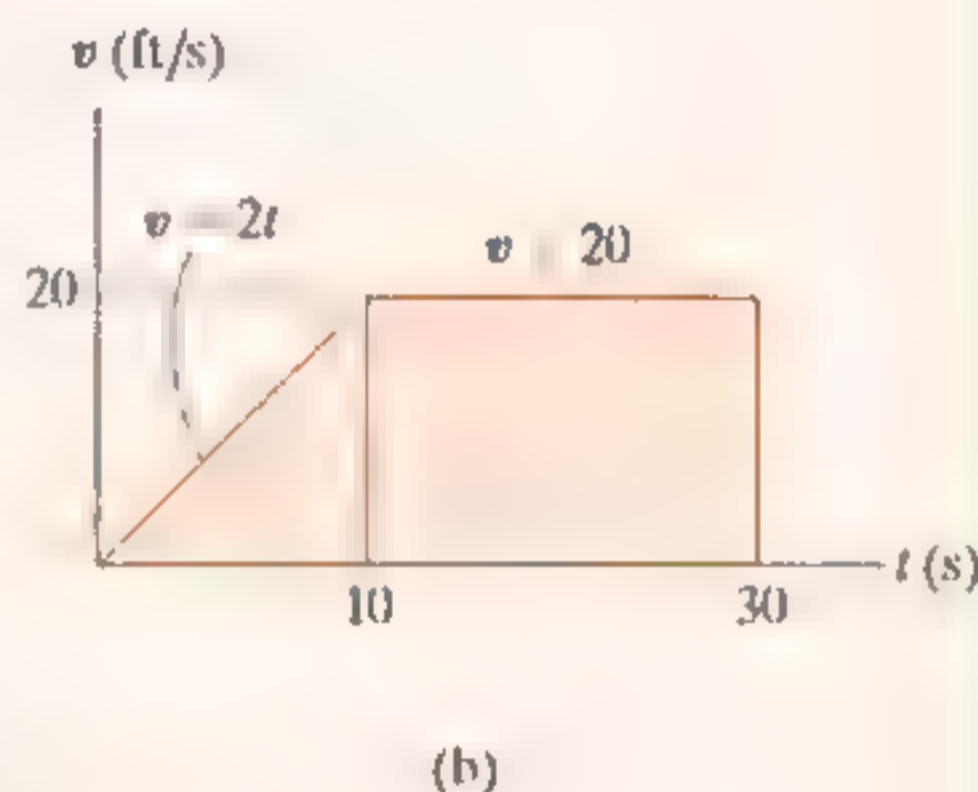
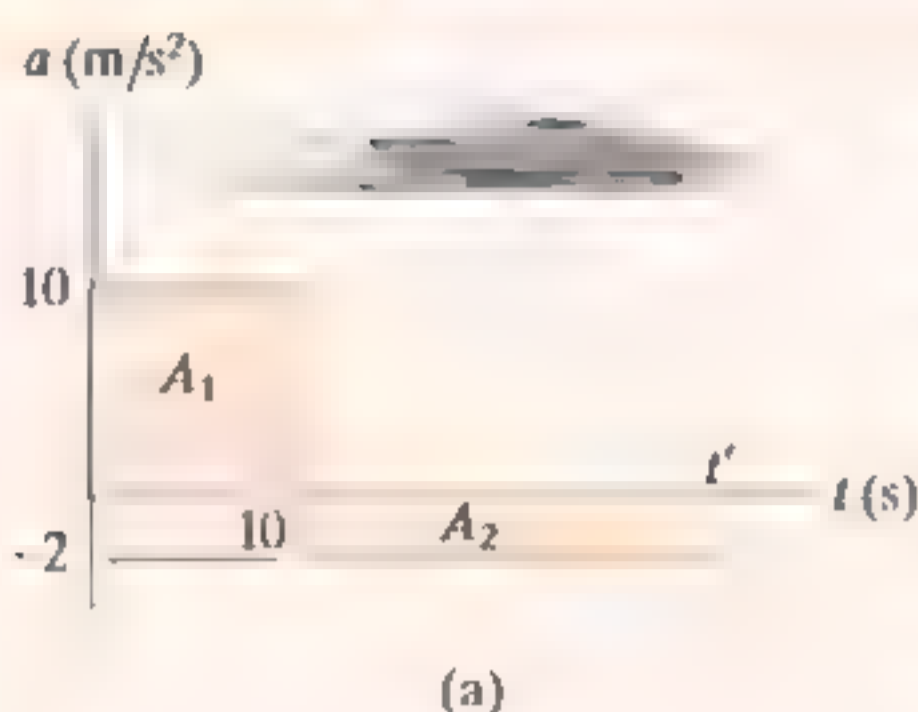


Fig. 12-13



El automóvil de la figura 12-14a arranca del reposo y viaja a lo largo de una pista recta, de modo que acelera a  $10 \text{ m/s}^2$  durante  $10 \text{ s}$  y, luego, desacelera a  $2 \text{ m/s}^2$ . Trace las gráficas de  $v-t$  y  $s-t$  y determine el tiempo  $t'$  necesario para detener el vehículo. ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil?

### SOLUCIÓN

**Gráfica de  $v-t$ .** Como  $dv = a dt$  la gráfica de  $v-t$  se determina integrando los segmentos de las líneas rectas de la gráfica de  $a-t$ . Con la condición inicial  $v = 0$  cuando  $t = 0$ , tenemos

$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \quad a = (10) \text{ m/s}^2; \quad \int_0^v dv = \int_0^t 10 dt, \quad v = 10t$$

Cuando  $t = 10 \text{ s}$ ,  $v = (10)(10) = 100 \text{ m/s}$ . Con esto como la condición inicial para el siguiente intervalo de tiempo, tenemos

$$10 \text{ s} < t \leq t'; \quad a = (-2) \text{ m/s}^2; \quad \int_{100 \text{ m/s}}^v dv = \int_{10 \text{ s}}^t -2 dt, \quad v = (-2t + 120) \text{ m/s}$$

Cuando  $t = t'$  requerimos  $v = 0$ . Esto resulta en (fig. 12-14b)

$$t' = 60 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

Una solución más directa para  $t'$  es posible si se tiene en cuenta que el área bajo la gráfica de  $a-t$  es igual al cambio de la velocidad del automóvil. Requerimos  $\Delta v = 0 = A_1 + A_2$  (fig. 12-14a). Por lo tanto,

$$0 = 10 \text{ m/s}^2(10 \text{ s}) + (-2 \text{ m/s}^2)(t' - 10 \text{ s})$$

$$t' = 60 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

**Gráfica de  $s-t$ .** Ya que  $ds = v dt$ , al integrar las ecuaciones de la gráfica de  $v-t$  se obtienen las ecuaciones correspondientes de la gráfica de  $s-t$ . Al usar la condición inicial  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , tenemos

$$0 \leq t \leq 10 \text{ s}; \quad v = (10t) \text{ m/s}; \quad \int_0^s ds = \int_0^t 10t dt, \quad s = (5t^2) \text{ m}$$

Cuando  $t = 10 \text{ s}$ ,  $s = 5(10)^2 = 500 \text{ m}$ . Al usar esta condición inicial,

$$10 \text{ s} \leq t \leq 60 \text{ s}; \quad v = (-2t + 120) \text{ m/s}; \quad \int_{500 \text{ m}}^s ds = \int_{10 \text{ s}}^t (-2t + 120) dt$$

$$s - 500 = -t^2 + 120t - [-(10)^2 + 120(10)]$$

$$s = (-t^2 + 120t - 600) \text{ m}$$

Cuando  $t' = 60 \text{ s}$ , la posición es

$$s = -(60)^2 + 120(60) - 600 = 3000 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

La gráfica de  $s-t$  se muestra en la figura 12-14c.

**NOTA:** Una solución directa para  $s$  es posible cuando  $t' = 60 \text{ s}$ , puesto que el área triangular bajo la gráfica de  $v-t$  resulta en el desplazamiento  $\Delta s = s - 0$  desde  $t = 0$  a  $t' = 60 \text{ s}$ . Por consiguiente,

$$\Delta s = \frac{1}{2}(60 \text{ s})(100 \text{ m/s}) = 3000 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

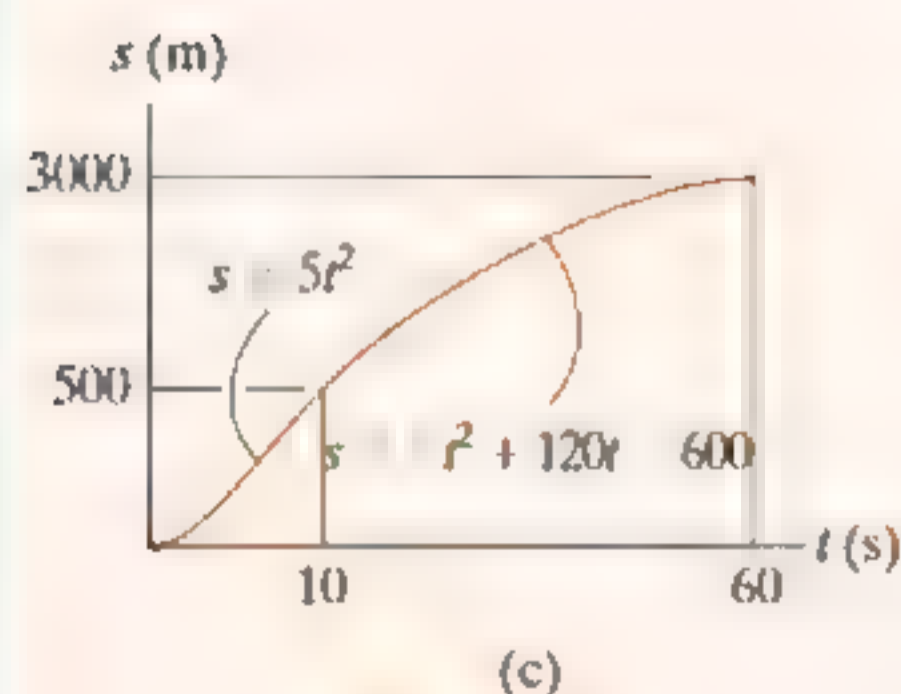
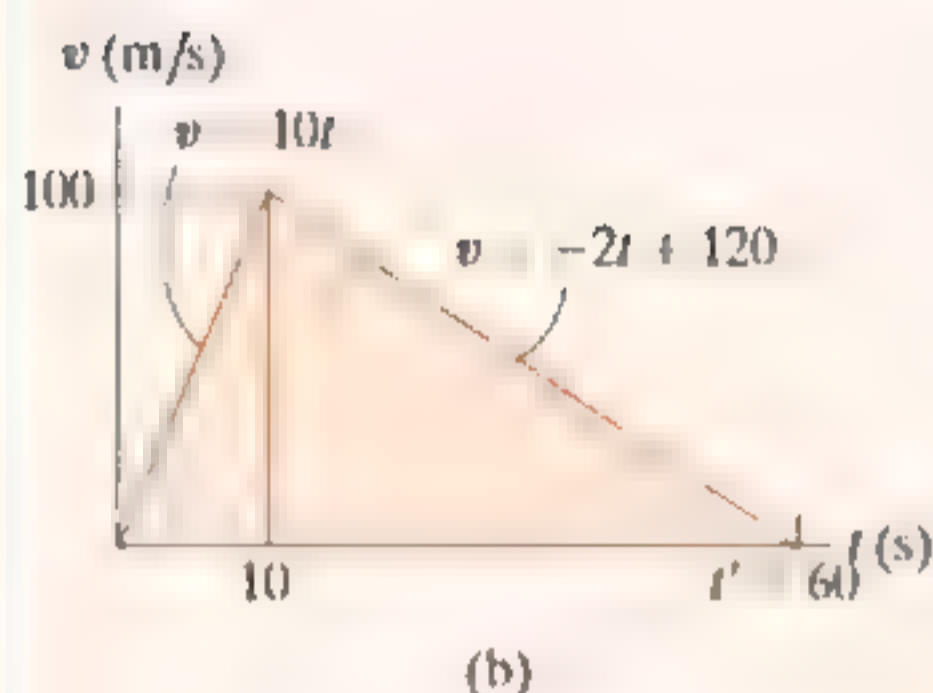


Fig. 12-14

## EJEMPLO

La gráfica de  $v$ - $s$  que describe el movimiento de una motocicleta se muestra en la figura 12-15a. Trace la gráfica de  $a$ - $s$  del movimiento y determine el tiempo requerido para que la motocicleta alcance la posición  $s = 400$  ft.

## SOLUCIÓN

**Gráfica de  $a$ - $s$ .** Como se dan las ecuaciones de los segmentos de la gráfica de  $v$ - $s$ , la gráfica de  $a$ - $s$  se determina con  $a \, ds = v \, dv$ .

$$0 \leq s < 200 \text{ ft}; \quad v = (0.2s + 10) \text{ ft/s}$$

$$a = v \frac{dv}{ds} = (0.2s + 10) \frac{d}{ds}(0.2s + 10) = 0.04s + 2$$

$$200 \text{ ft} < s \leq 400 \text{ ft}; \quad v = 50 \text{ ft/s}$$

$$a = v \frac{dv}{ds} = (50) \frac{d}{ds}(50) = 0$$

Los resultados se grafican en la figura 12-15b.

**Tiempo.** El tiempo se obtiene con la gráfica  $v$ - $s$  y  $v = ds/dt$ , porque esta ecuación relaciona  $v$ ,  $s$  y  $t$ . Para el primer segmento del movimiento,  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , por lo tanto,

$$0 \leq s < 200 \text{ ft}; \quad v = (0.2s + 10) \text{ ft/s}; \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$t = (5 \ln(0.2s + 10) - 5 \ln 10) \text{ s}$$

Cuando  $s = 200$  ft,  $t = 5 \ln[0.2(200) + 10] - 5 \ln 10 = 8.05$  s. Por consiguiente, si utilizamos estas condiciones iniciales para el segundo segmento del movimiento,

$$200 \text{ ft} < s \leq 400 \text{ ft}; \quad v = 50 \text{ ft/s}; \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{50}$$

$$\int_{8.05 \text{ s}}^t dt = \int_{200 \text{ m}}^s \frac{ds}{50};$$

$$t - 8.05 = \frac{s}{50} - 4; \quad t = \left( \frac{s}{50} + 4.05 \right) \text{ s}$$

Entonces, cuando  $s = 400$  ft,

$$t = \frac{400}{50} + 4.05 = 12.0 \text{ s}$$

**NOTA:** Los resultados gráficos se comprueban en parte al calcular las pendientes. Por ejemplo, cuando  $s = 0$ ,  $a = v(dv/ds) = 10(50 - 10)/200 = 2 \text{ m/s}^2$ . Además, los resultados se comprueban en parte por inspección. La gráfica de  $v$ - $s$  indica el incremento inicial de la velocidad (aceleración) seguido por velocidad constante ( $a = 0$ ).

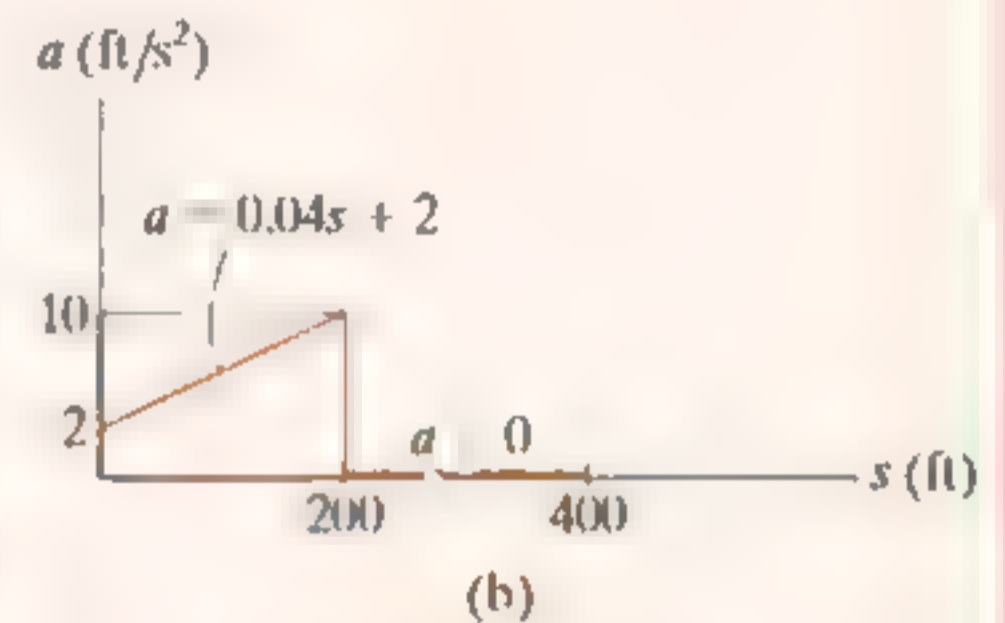
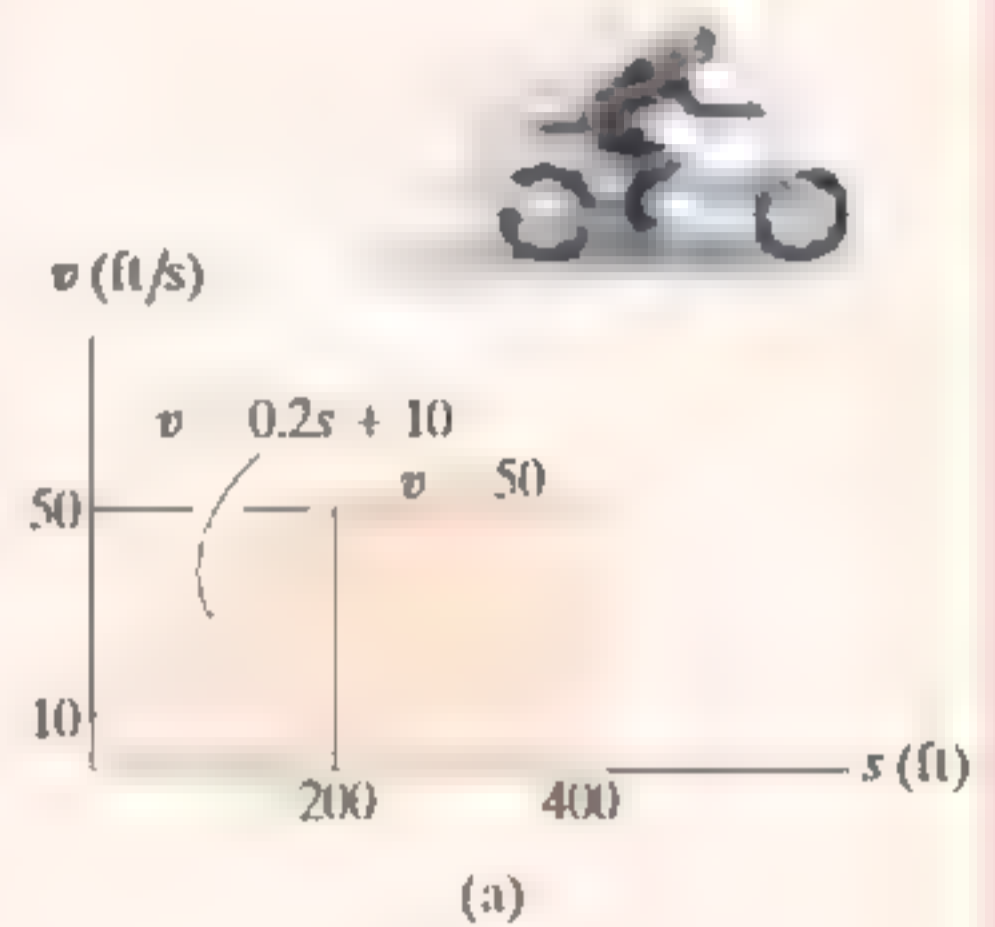
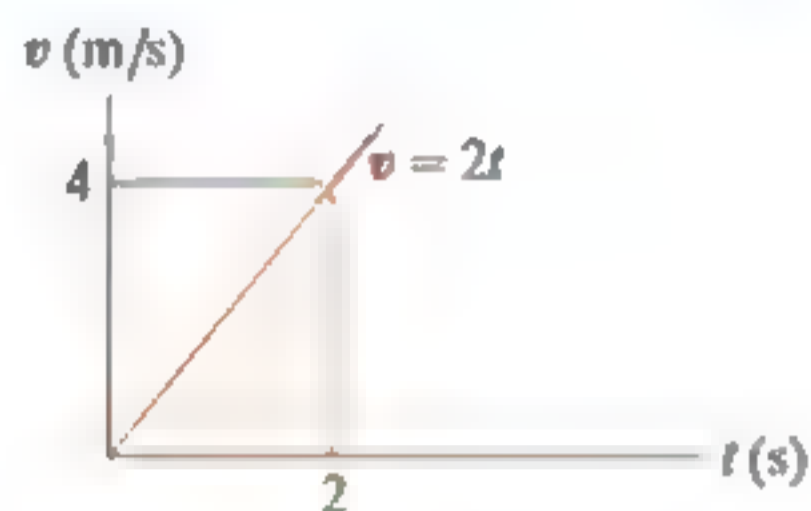


Fig. 12-15

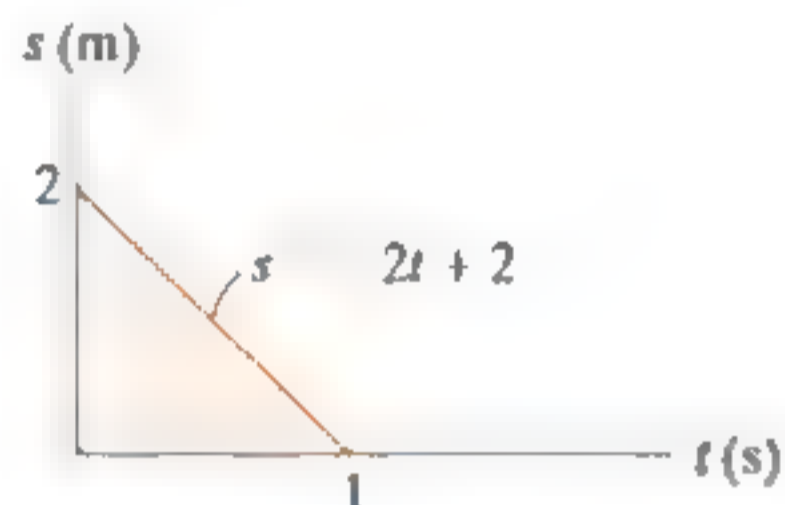
## PROBLEMAS PRELIMINARES

## P12-2.

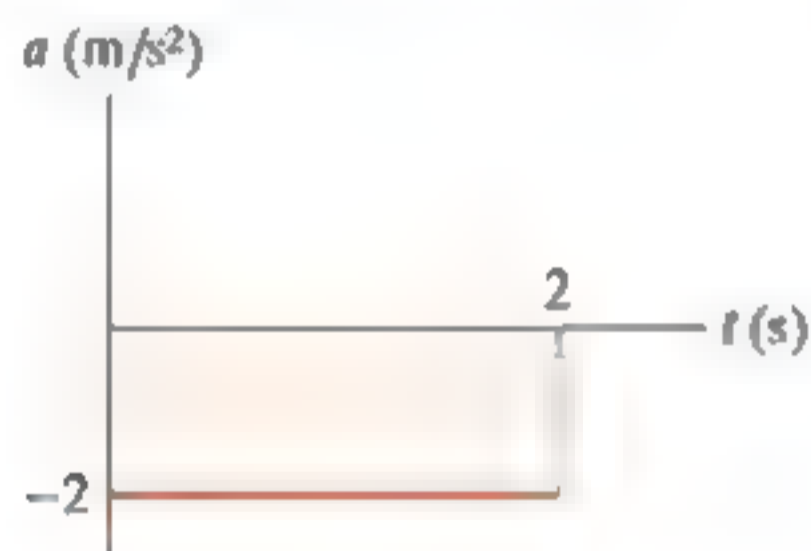
a) Trace las gráficas de  $s-t$  y  $a-t$ , si  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .



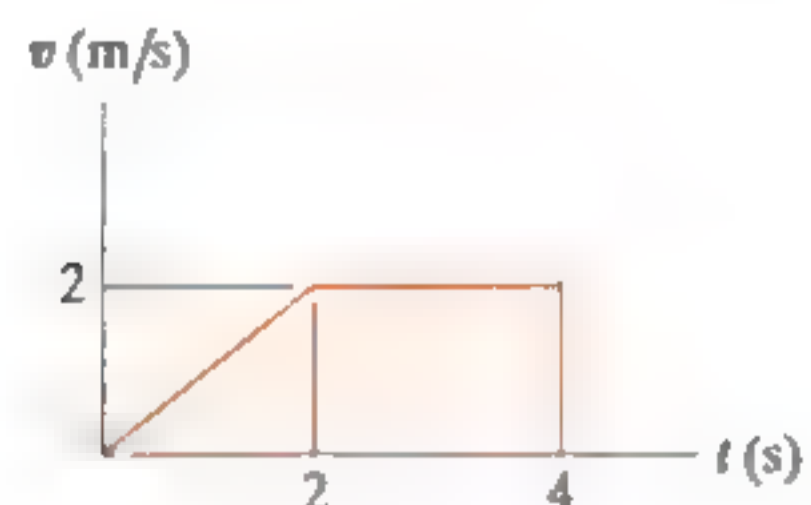
b) Trace las gráficas de  $a-t$  y  $v-t$ .



c) Trace las gráficas de  $v-t$  y  $s-t$ , si  $v = 0$ ,  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .



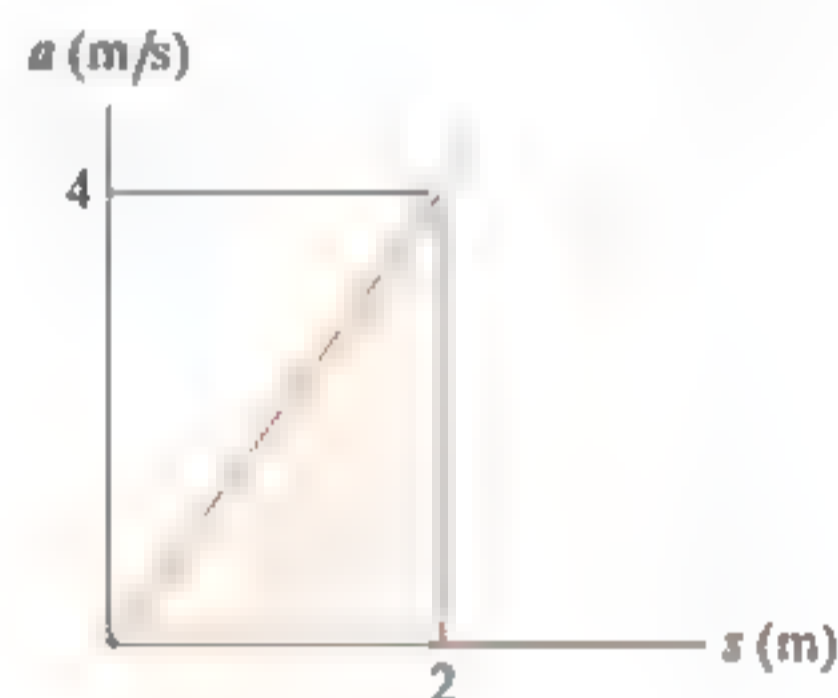
d) Determine  $s$  y  $a$  cuando  $t = 3$  s, si  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .



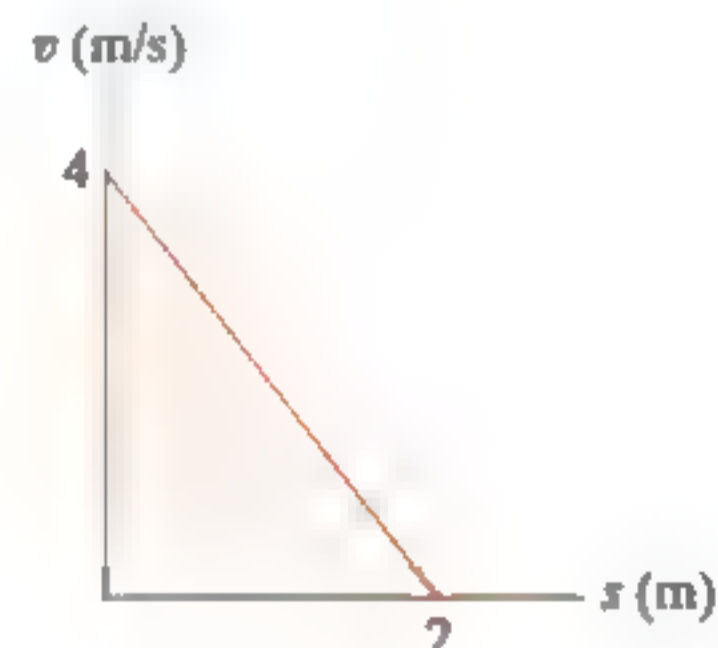
e) Trace la gráfica de  $v-t$  si  $v = 0$  cuando  $t = 0$ . Encuentre la ecuación  $v = f(t)$  para cada segmento.



f) Determine  $v$  en  $s = 2$  m, si  $v = 1$  m/s en  $s = 0$ .



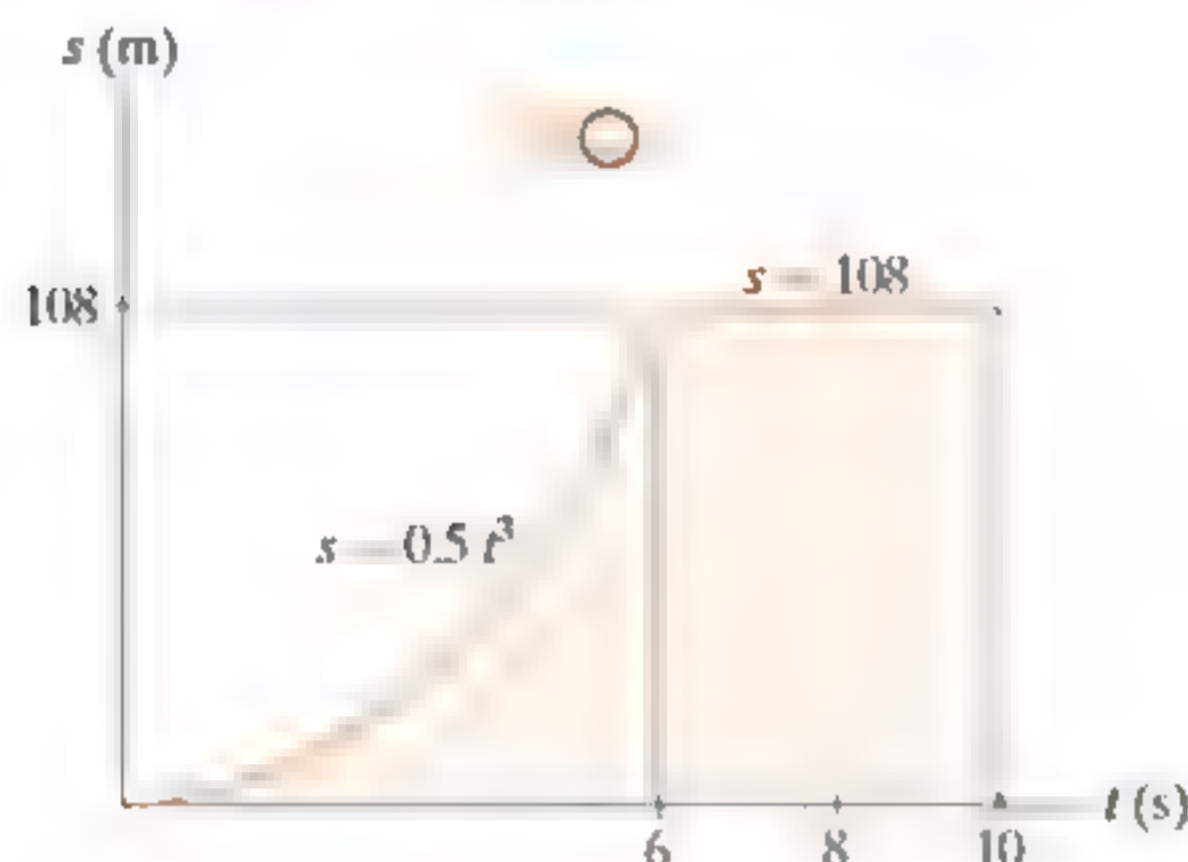
g) Determine  $a$  en  $s = 1$  m.



Prob. P12-2

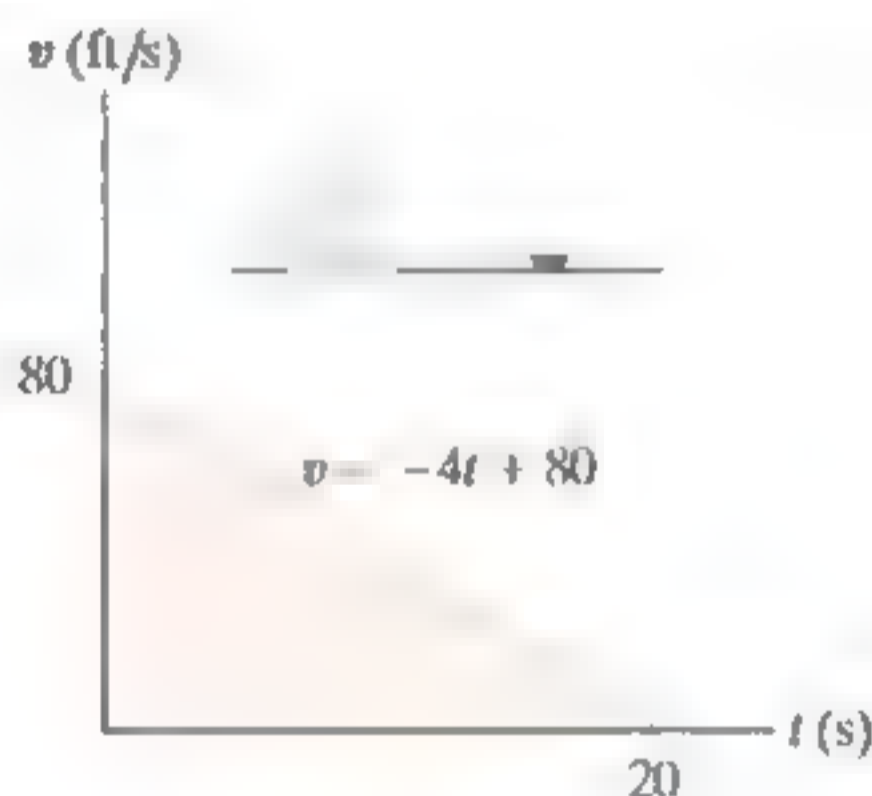
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F12-9.** La partícula viaja a lo largo de una pista recta de modo que la gráfica de  $s-t$  describe su posición. Trace la gráfica de  $v-t$  para el mismo intervalo de tiempo.



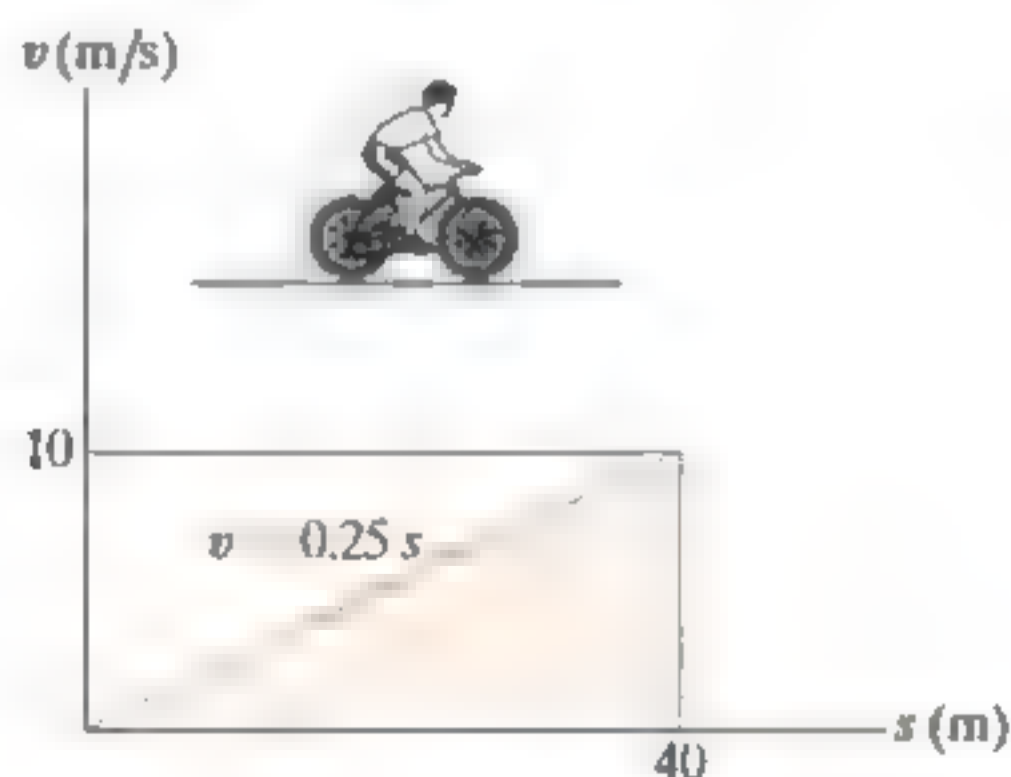
Prob. F12-9

**F12-10.** Una furgoneta viaja a lo largo de una carretera recta con una velocidad descrita por la gráfica. Trace las gráficas de  $s-t$  y  $a-t$  durante el mismo periodo. Considere  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .



Prob. F12-10

**F12-11.** Una bicicleta rueda por una carretera recta donde la gráfica de  $v-s$  describe su velocidad. Construya la gráfica de  $a-s$  durante el mismo intervalo.



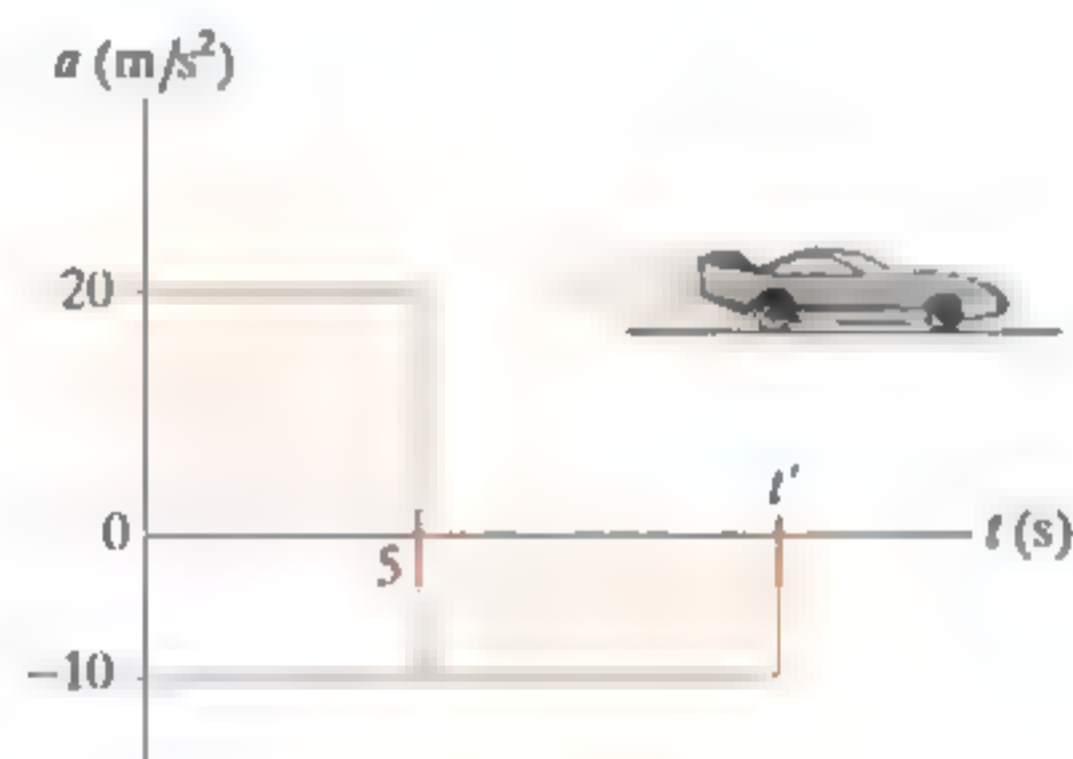
Prob. F12-11

**F12-12.** El auto deportivo viaja a lo largo de una carretera recta, de modo que su aceleración está descrita mediante la gráfica mostrada. Construya la gráfica de  $v-s$  para el mismo intervalo y especifique la velocidad del automóvil cuando  $s = 10$  m y  $s = 15$  m.



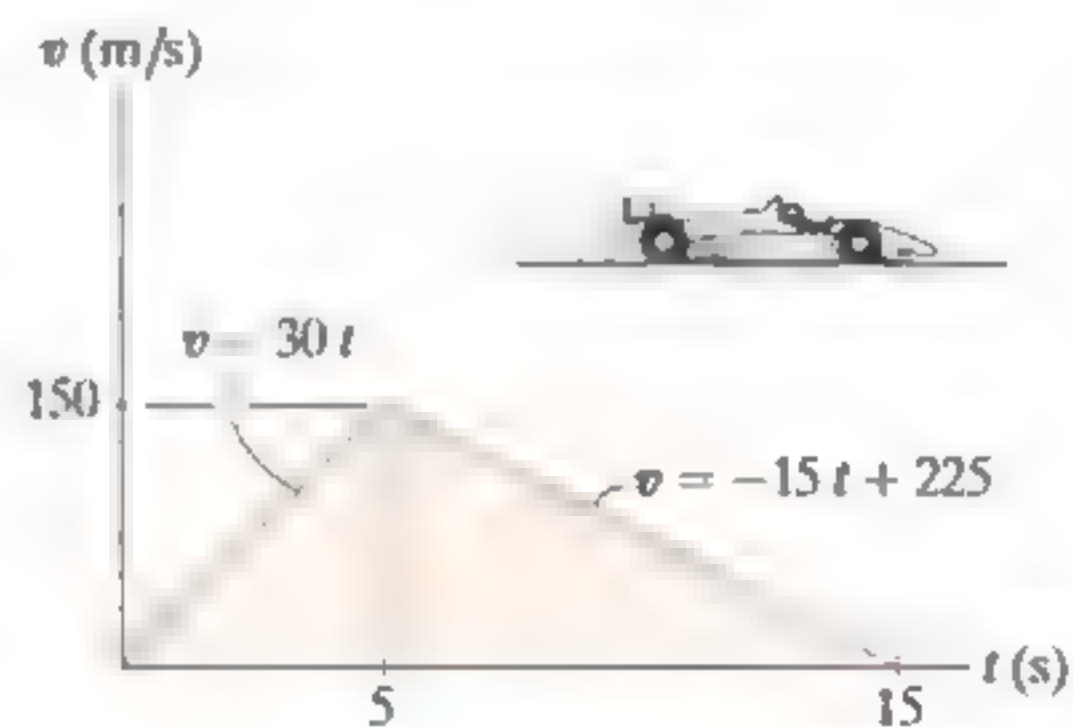
Prob. F12-12

**F12-13.** El *dragster* arranca del reposo con una aceleración descrita por la gráfica. Construya la gráfica de  $v-t$  durante el intervalo  $0 \leq t \leq t'$ , donde  $t'$  es el tiempo que le lleva al auto detenerse.



Prob. F12-13

**F12-14.** El *dragster* arranca del reposo y su velocidad es la descrita por la gráfica. Trace la gráfica de  $s-t$  durante el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 15$  s. Asimismo, determine la distancia total recorrida durante este intervalo.

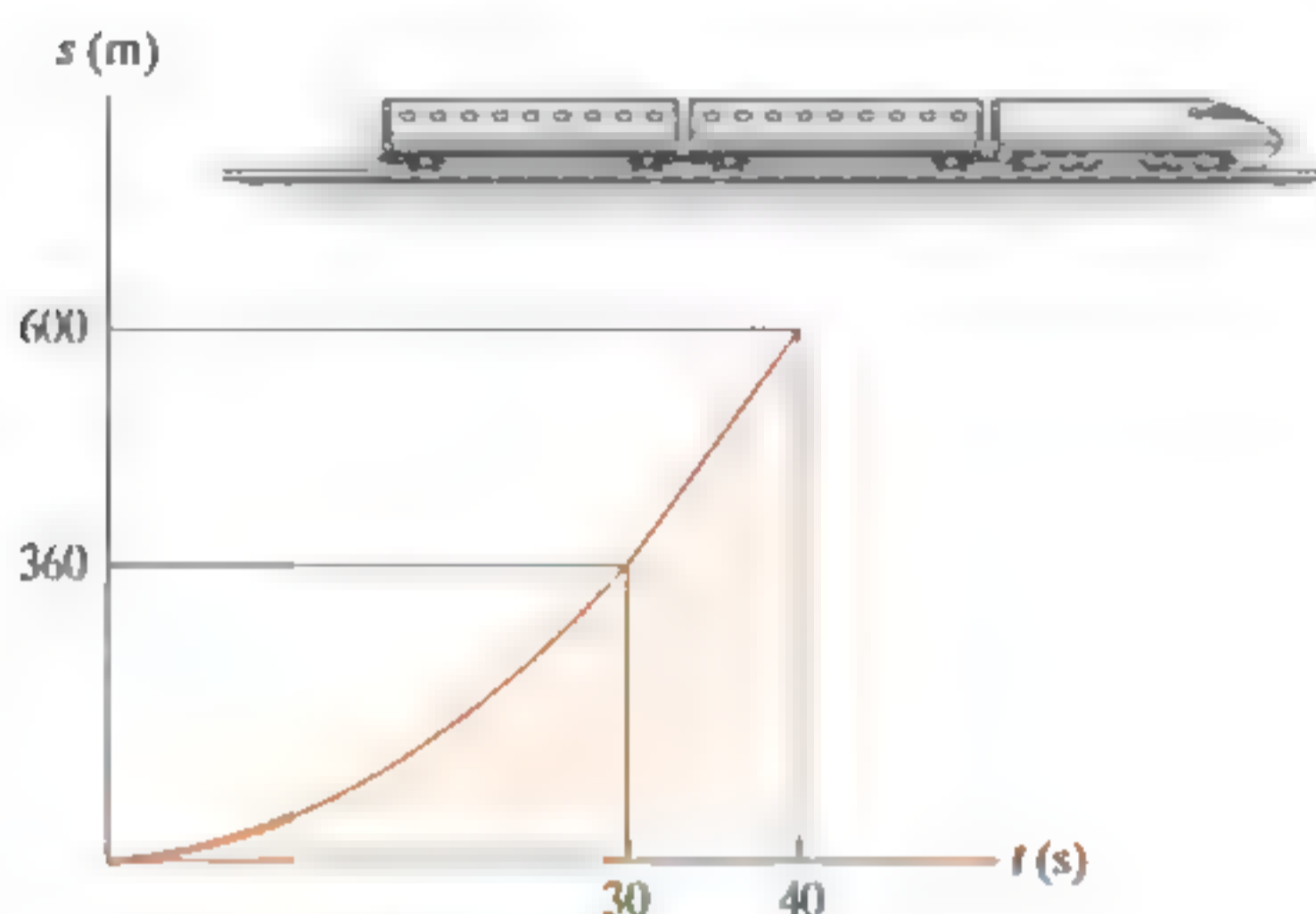


Prob. F12-14

## PROBLEMAS

**12-35.** Un tren de carga parte del reposo y viaja con una aceleración constante de  $0.5 \text{ ft/s}^2$ . Después de un tiempo  $t'$  mantiene una rapidez constante, de modo que cuando  $t = 160 \text{ s}$  ha recorrido  $2000 \text{ ft}$ . Determine el tiempo  $t'$  y trace la gráfica de  $v-t$  del movimiento.

**\*12-36.** La gráfica de  $s-t$  de un tren se ha determinado experimentalmente. A partir de los datos, construya las gráficas de  $v-t$  y  $a-t$  del movimiento;  $0 \leq t \leq 40 \text{ s}$ . Para  $0 \leq t \leq 30 \text{ s}$ , la curva es  $s = (0.4t^2) \text{ m}$  y después se vuelve recta para  $t \geq 30 \text{ s}$ .



Prob. 12-36

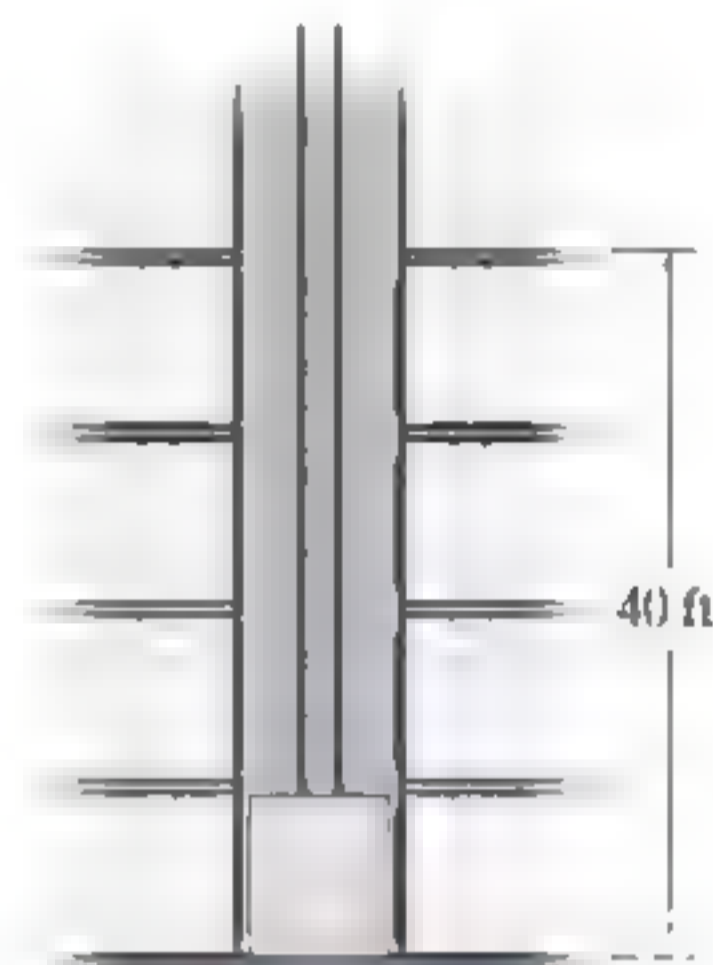
**12-37.** Dos cohetes parten desde el reposo a la misma elevación. El cohete *A* acelera verticalmente a  $20 \text{ m/s}^2$  durante  $12 \text{ s}$  y luego mantiene una rapidez constante. El cohete *B* acelera a  $15 \text{ m/s}^2$  hasta llegar a una rapidez constante de  $150 \text{ m/s}$ . Construya las gráficas de  $a-t$ ,  $v-t$  y  $s-t$  para cada cohete hasta  $t = 20 \text{ s}$ . ¿Cuál es la distancia entre los cohetes cuando  $t = 20 \text{ s}$ ?

**12-38.** Una partícula parte desde  $s = 0$  y se desplaza a lo largo de una línea recta con una velocidad  $v = (t^2 - 4t + 3) \text{ m/s}$ , donde  $t$  se da en segundos. Construya las gráficas de  $v-t$  y  $a-t$  para el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$ .

**12-39.** Si la posición de una partícula está definida por  $s = [2 \sin(\pi/5)t + 4] \text{ m}$ , donde  $t$  se da en segundos, construya las gráficas de  $s-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$  para  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$ .

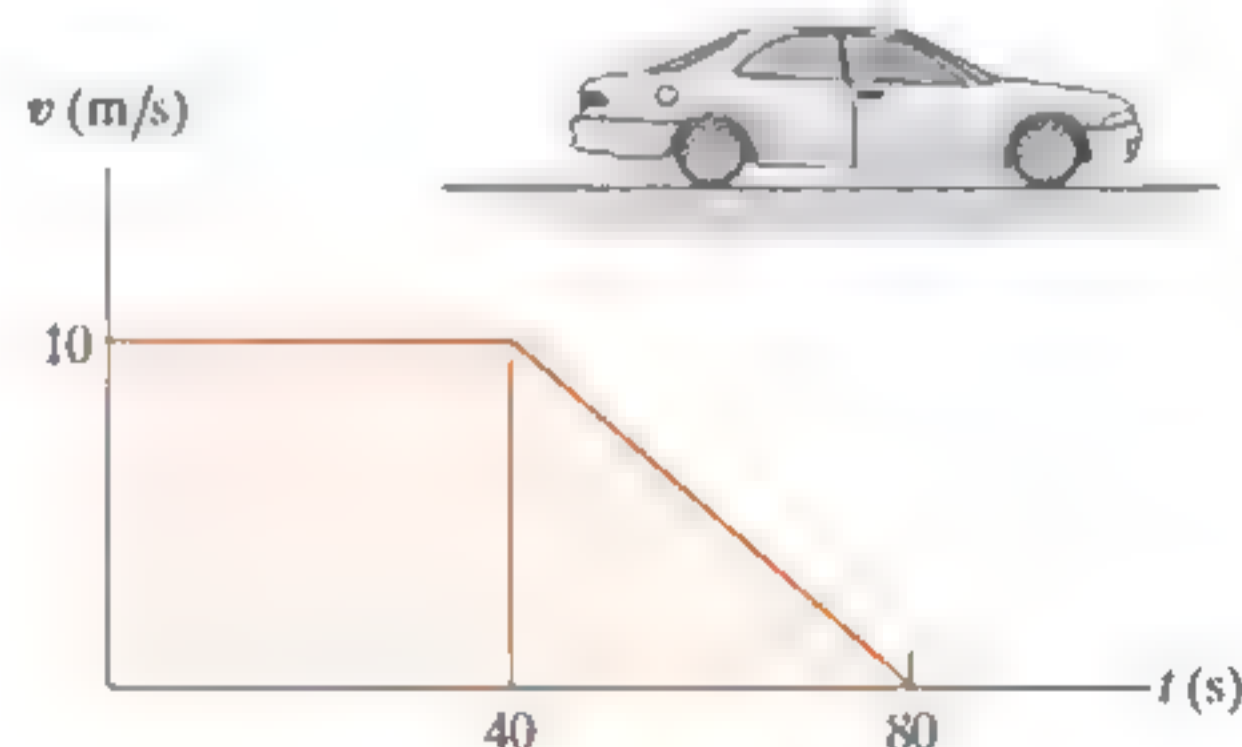
**\*12-40.** Un avión parte del reposo, se desplaza  $5000 \text{ ft}$  por una pista y, después de una aceleración uniforme, despegue con una rapidez de  $162 \text{ mi/h}$ . Luego, se eleva en línea recta con una aceleración uniforme de  $3 \text{ ft/s}^2$  hasta que alcanza una rapidez constante de  $220 \text{ mi/h}$ . Trace las gráficas de  $s-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$  que describen el movimiento.

**12-41.** El elevador parte del reposo en el primer piso del edificio. Puede acelerar a  $5 \text{ ft/s}^2$  y, luego, desacelerar a  $2 \text{ ft/s}^2$ . Determine el menor tiempo que se requiere para llegar a un piso que está a  $40 \text{ ft}$  por encima del suelo. El elevador parte del reposo y después se detiene. Trace las gráficas de  $a-t$ ,  $v-t$  y  $s-t$  para el movimiento.



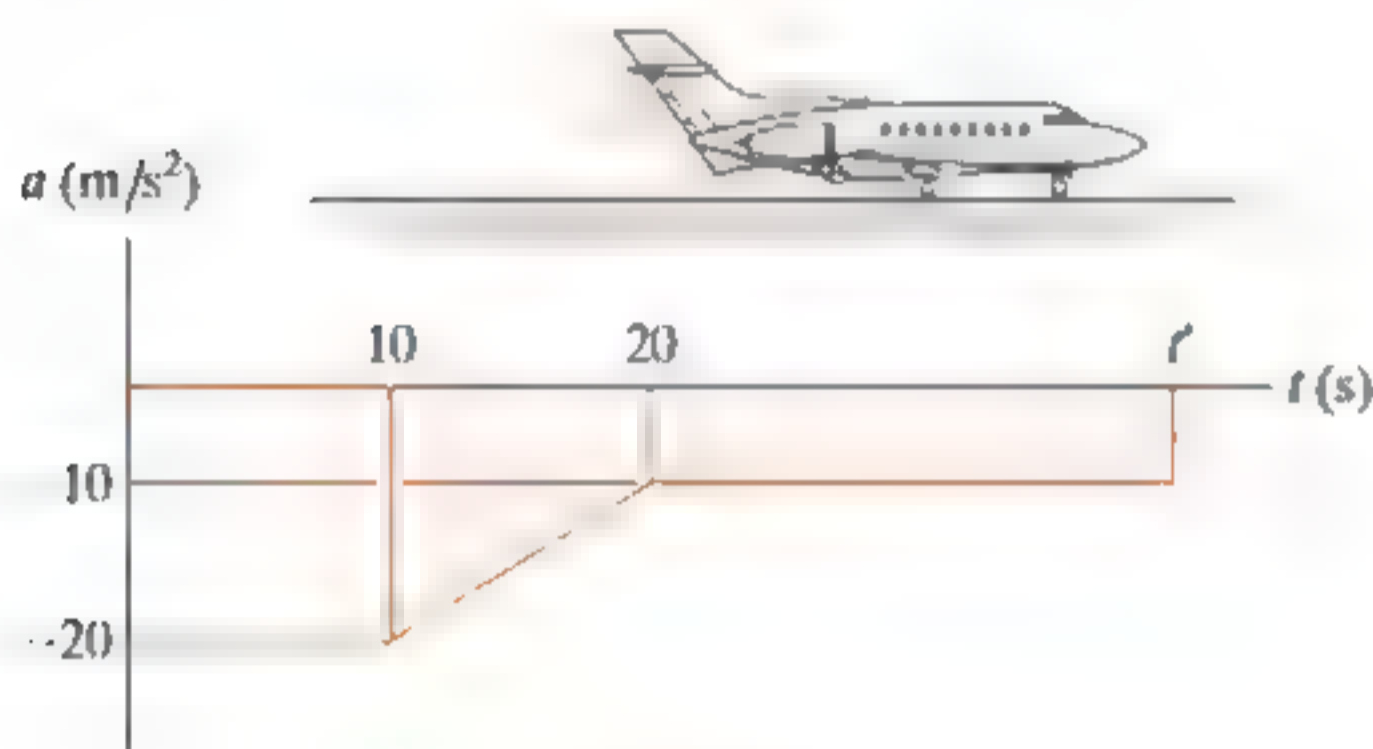
Prob. 12-41

**12-42.** La velocidad de un automóvil se representa gráficamente de la manera ilustrada. Determine la distancia total que se desplaza el automóvil hasta que se detiene ( $t = 80 \text{ s}$ ). Construya la gráfica de  $a-t$ .



Prob. 12-42

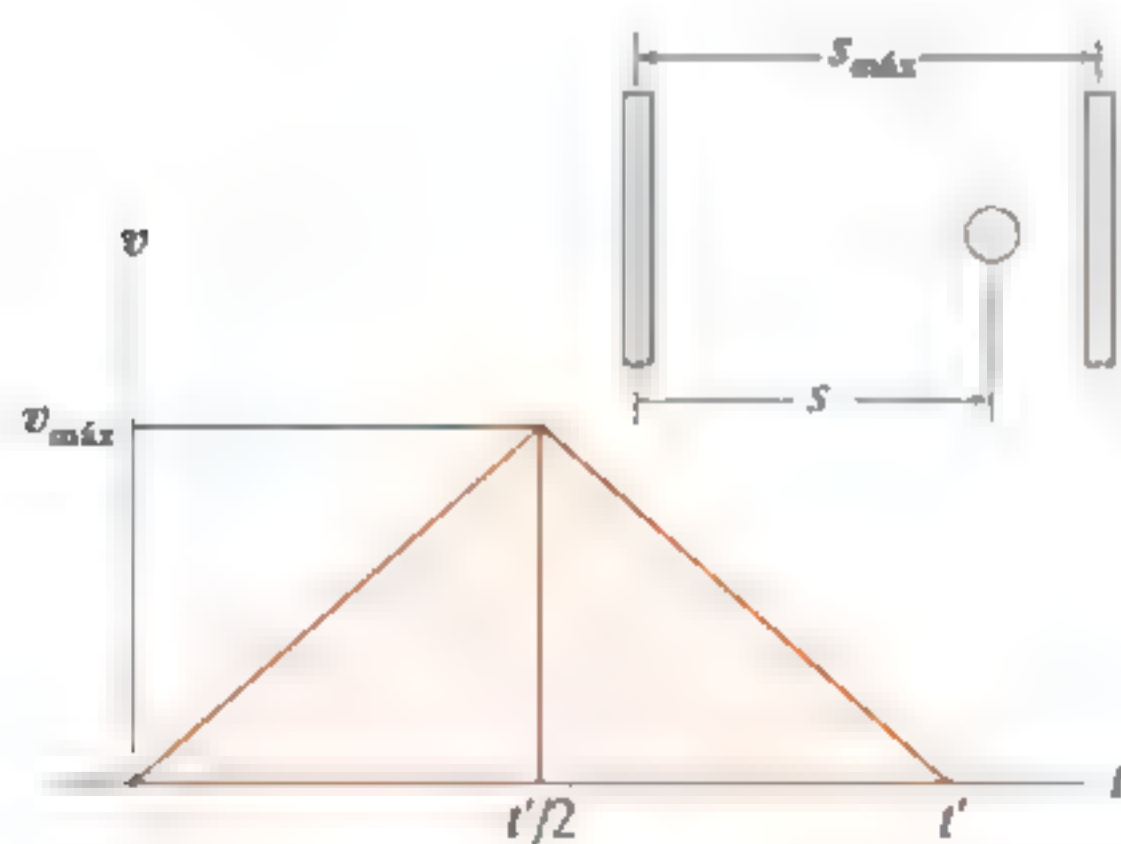
**12-43.** El movimiento de un avión a propulsión justo después de aterrizar en una pista se describe mediante la gráfica de  $a-t$ . Determine el tiempo  $t'$  cuando el avión se detiene. Construya las gráficas de  $v-t$  y  $s-t$  para el movimiento. Aquí,  $s = 0$  y  $v = 300$  ft/s cuando  $t = 0$ .



Prob. 12-43

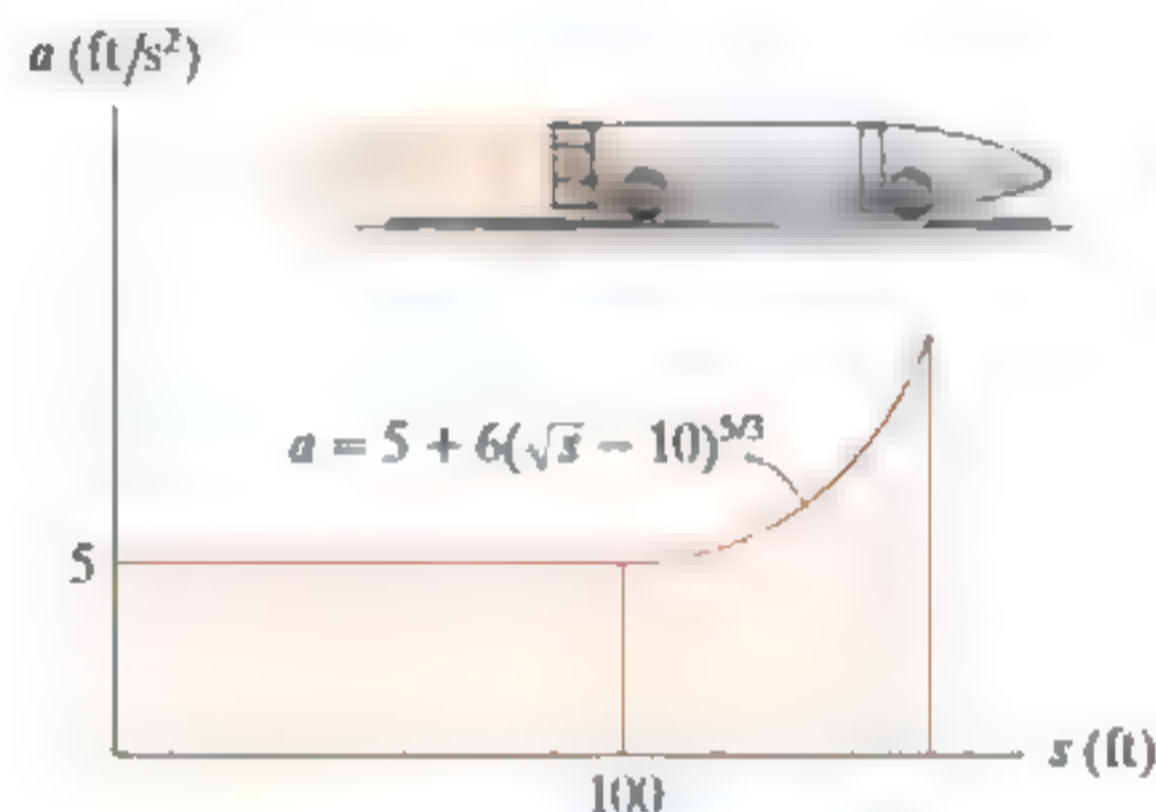
**\*12-44.** La gráfica de  $v-t$  para una partícula que se mueve a través de un campo eléctrico, desde una placa hasta otra, tiene la forma mostrada en la figura. La aceleración y la desaceleración que se producen son constantes y ambas tienen una magnitud de  $4$  m/s<sup>2</sup>. Si las placas están a  $200$  mm entre sí, determine la velocidad máxima  $v_{\text{máx}}$  y el tiempo  $t'$  que requiere la partícula para viajar de una placa a la otra; además, trace la gráfica de  $s-t$ . Cuando  $t = t'/2$  la partícula está en  $s = 100$  mm.

**12-45.** La gráfica de  $v-t$  para una partícula que se mueve a través de un campo eléctrico, desde una placa hasta otra, tiene la forma que se muestra en la figura, donde  $t' = 0.2$  s y  $v_{\text{máx}} = 10$  m/s. Trace las gráficas de  $s-t$  y  $a-t$  para la partícula. Cuando  $t = t'/2$  la partícula está en  $s = 0.5$  m.



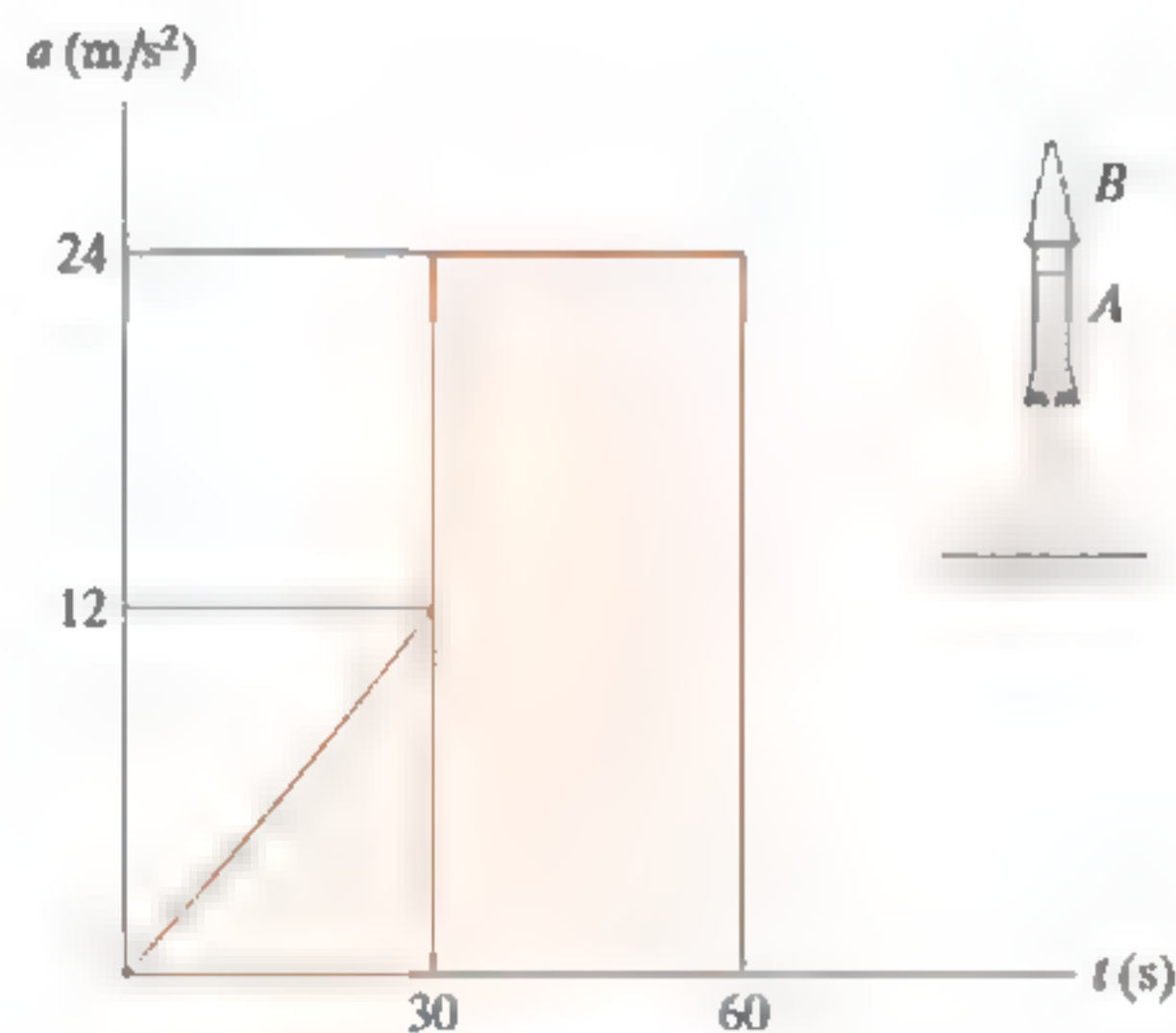
Probs. 12-44/45

**12-46.** La gráfica de  $a-s$  de un cohete en movimiento a lo largo de una pista recta se ha determinado experimentalmente. Si el cohete parte de  $s = 0$  cuando  $v = 0$ , determine su rapidez cuando está en  $s = 75$  ft y  $125$  ft, respectivamente. Use la regla de Simpson con  $n = 100$  para evaluar  $v$  en  $s = 125$  ft.



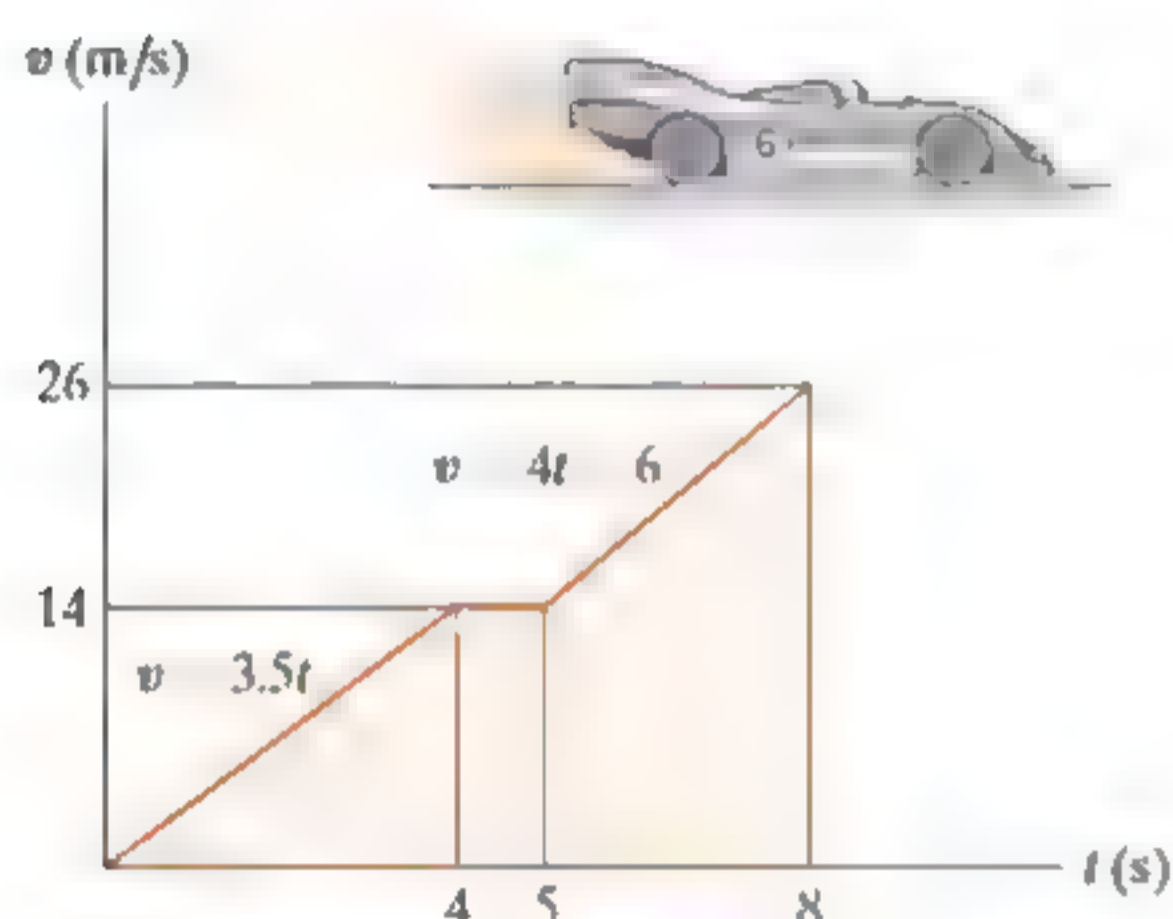
Prob. 12-46

**12-47.** Un cohete de dos módulos se dispara verticalmente desde el reposo en  $s = 0$  con la aceleración mostrada. Después de  $30$  s el primer módulo,  $A$ , se consume y el segundo módulo,  $B$ , empieza su ignición. Trace las gráficas de  $v-t$  y  $s-t$  que describen el movimiento del segundo módulo para  $0 \leq t \leq 60$  s.



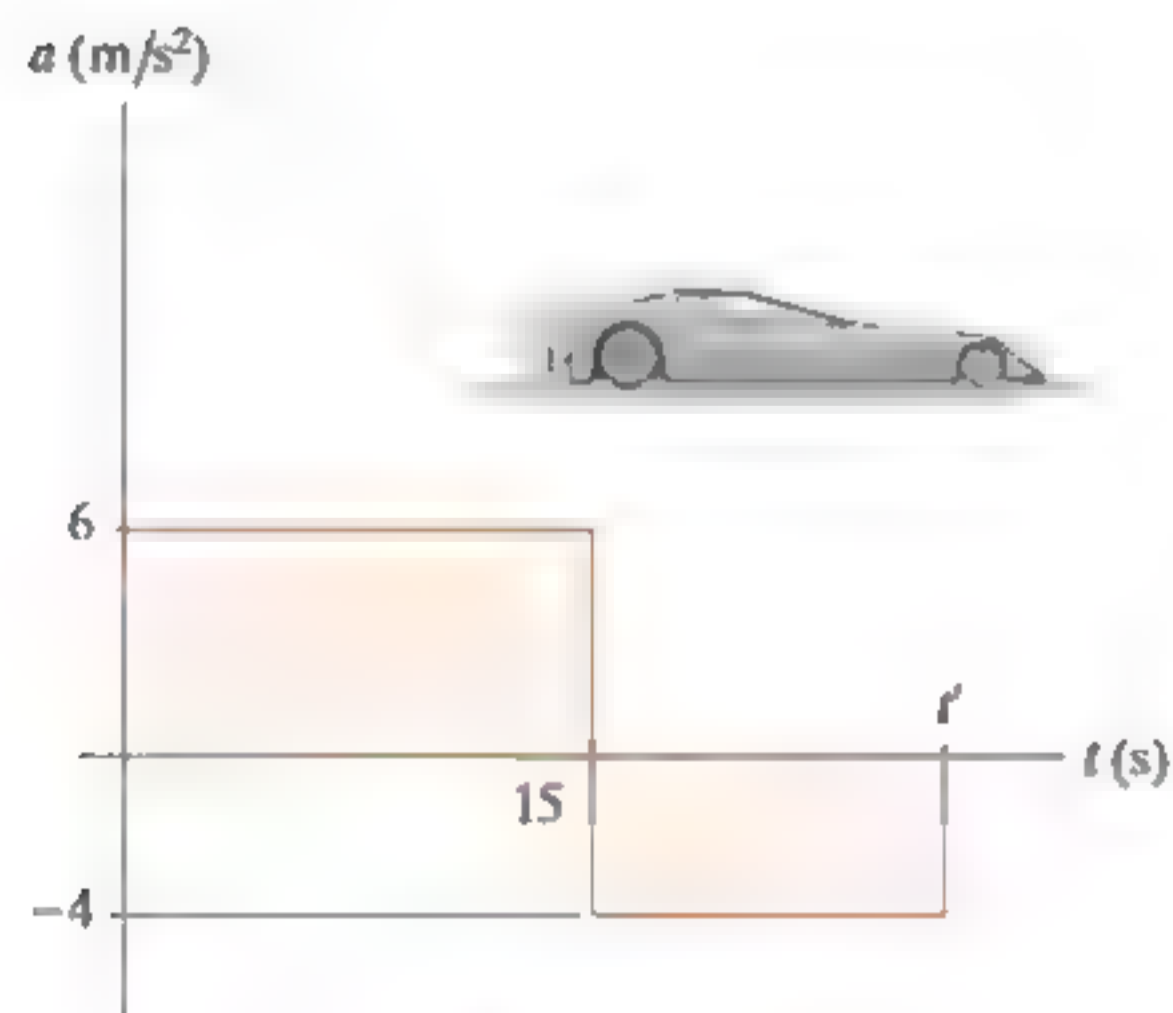
Prob. 12-47

**\*12-48.** El auto de carreras parte desde el reposo y viaja a lo largo de una carretera recta hasta que alcanza una rapidez de 26 m/s en 8 s, como se muestra en la gráfica de  $v-t$ . La parte plana de la gráfica es causada por un cambio en la palanca de cambios. Trace la gráfica de  $a-t$  y determine la aceleración máxima del automóvil.



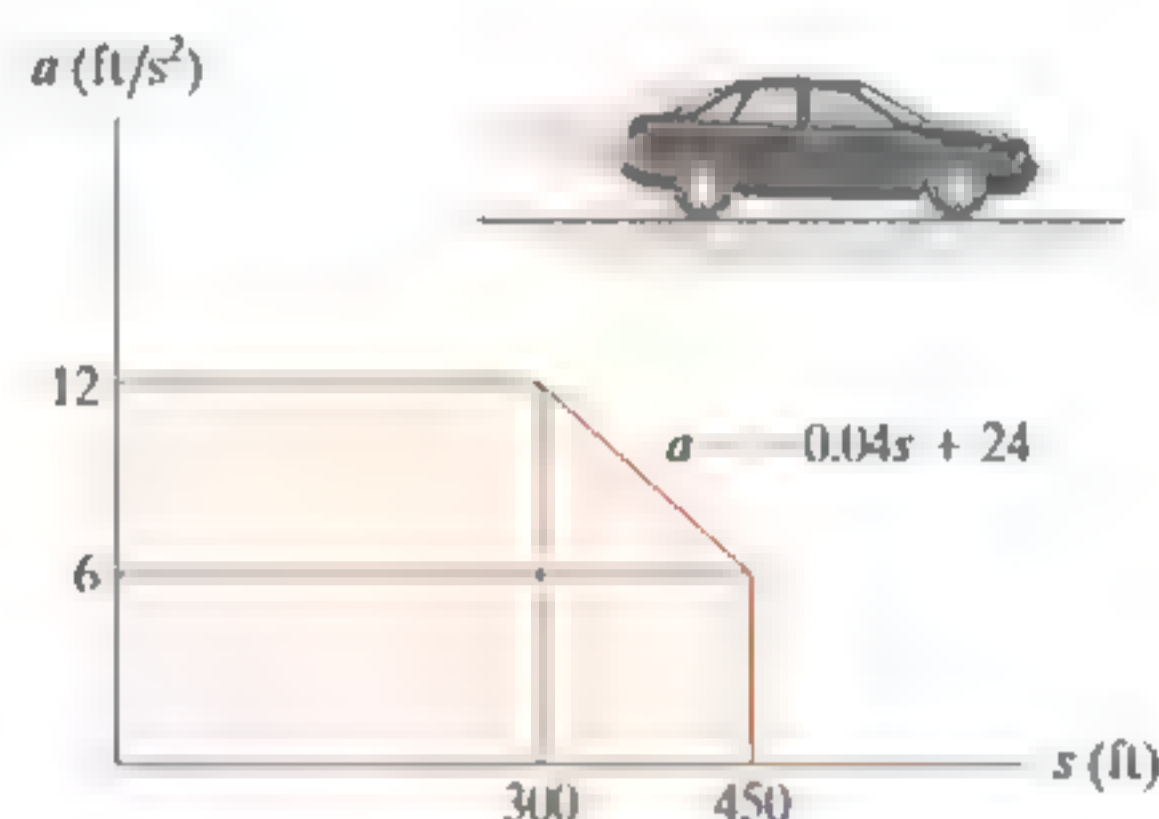
Prob. 12-48

**12-49.** El automóvil a propulsión viaja inicialmente a una velocidad de 10 m/s cuando se somete a la aceleración mostrada. Determine la velocidad máxima del vehículo y el tiempo  $t'$  cuando se detiene. Cuando  $t = 0, s = 0$ .



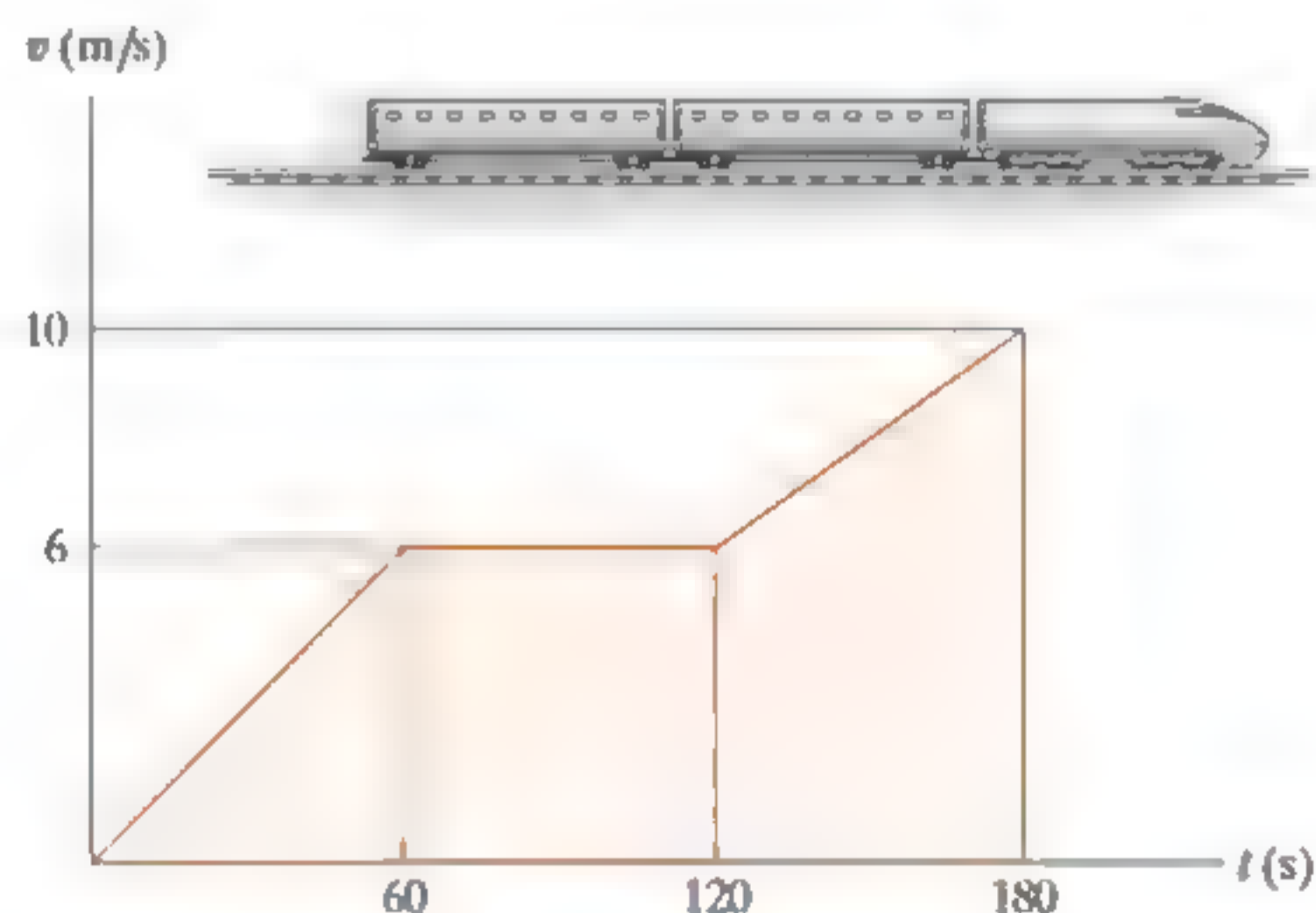
Prob. 12-49

**12-50.** El automóvil parte desde el reposo en  $s = 0$  y se somete a una aceleración mostrada por la gráfica de  $a-s$ . Trace la gráfica de  $v-s$  y determine el tiempo necesario para recorrer 200 ft.



Prob. 12-50

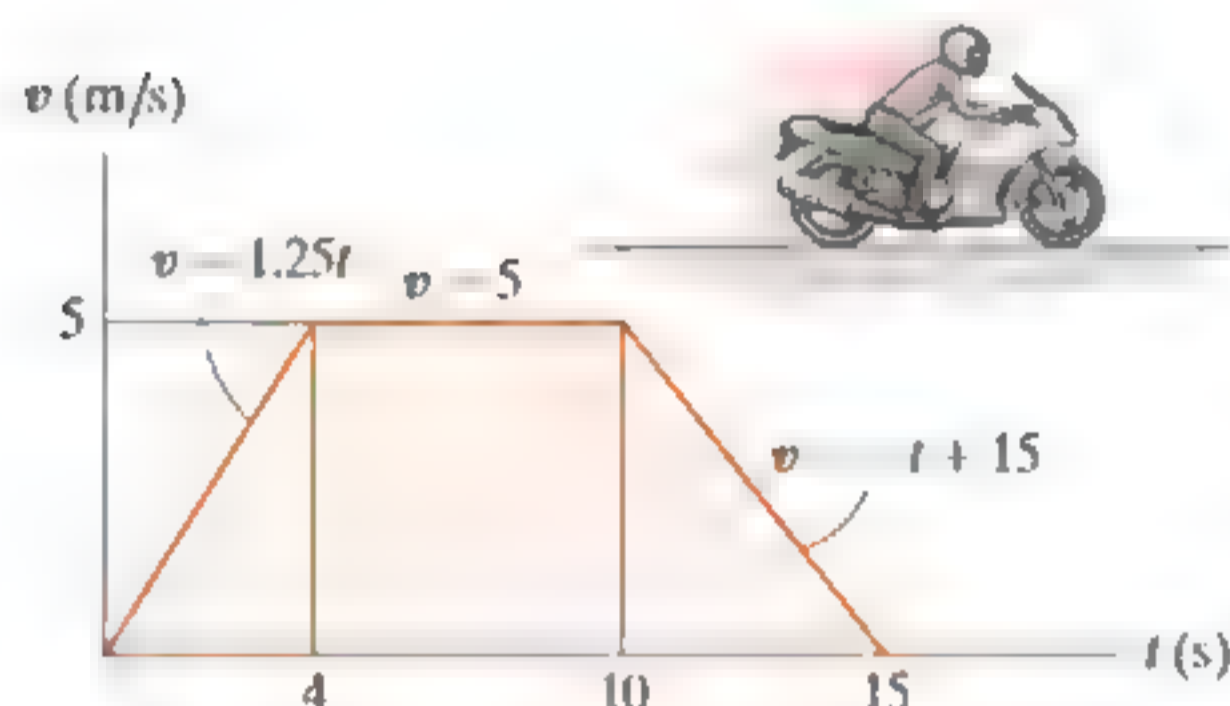
**12-51.** La gráfica de  $v-t$  para un tren se ha determinado experimentalmente. A partir de los datos, construya las gráficas de  $s-t$  y  $a-t$  del movimiento para  $0 \leq t \leq 180$  s. Cuando  $t = 0, s = 0$ .



Prob. 12-51

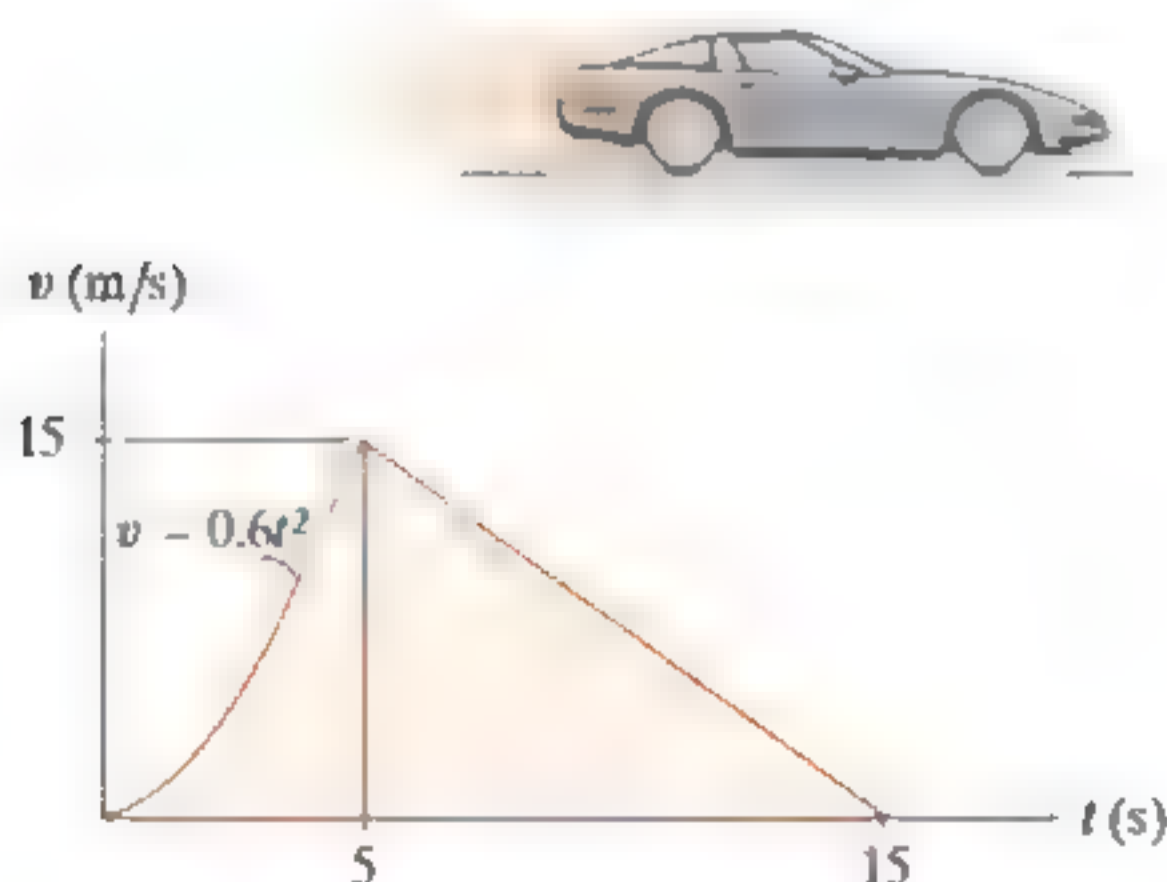
**\*12-52.** Una motocicleta parte del reposo en  $s = 0$  y viaja por una carretera recta con la rapidez indicada por la gráfica de  $v-t$ . Determine la distancia total que recorre la motocicleta hasta que se detiene cuando  $t = 15$  s. También trace las gráficas de  $a-t$  y  $s-t$ .

**12-53.** Una motocicleta parte del reposo en  $s = 0$  y viaja por una carretera recta con la rapidez indicada por la gráfica de  $v-t$ . Determine la aceleración y la posición de la motocicleta cuando  $t = 8$  s y  $t = 12$  s.



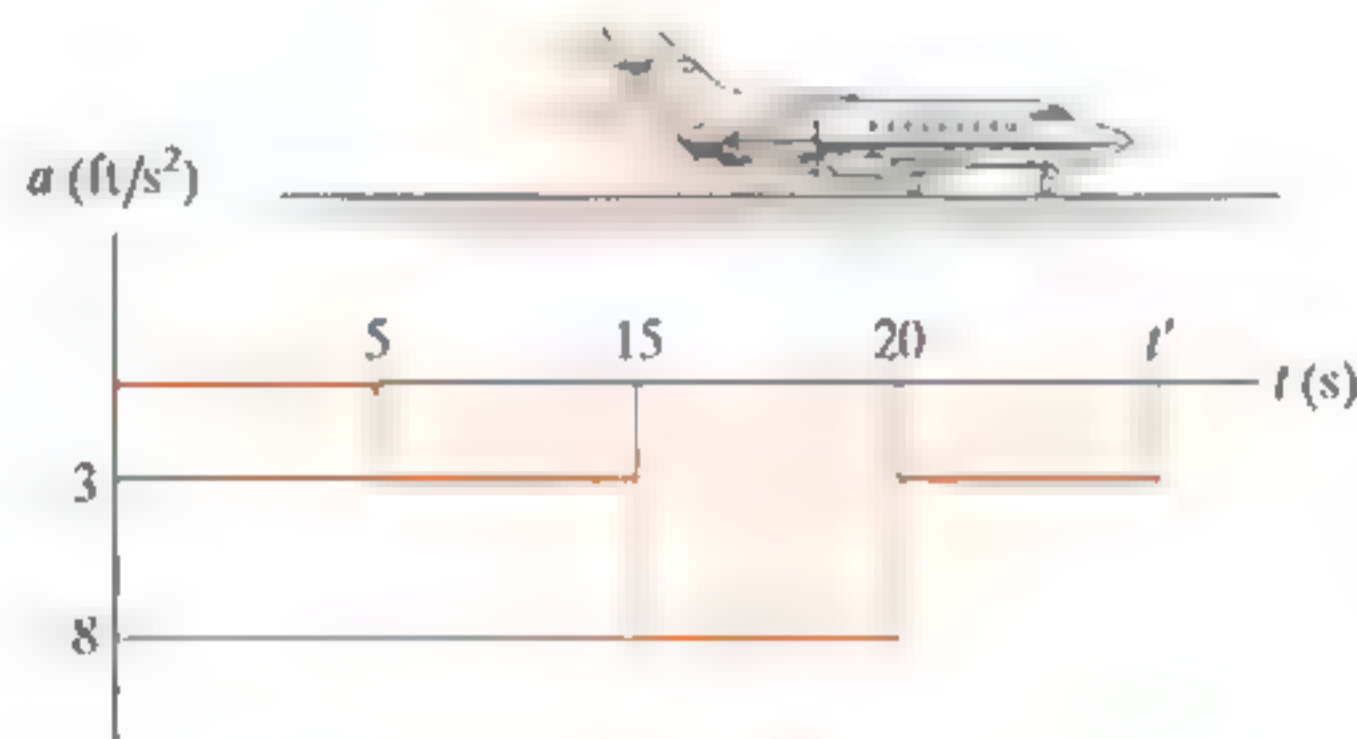
Probs. 12-52-53

**12-54.** Se muestra la gráfica  $v-t$  para el movimiento de un automóvil que se desplaza a lo largo de una carretera recta. Trace las gráficas de  $s-t$  y  $a-t$ . También determine la rapidez promedio y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de 15 s. Cuando  $t = 0$ ,  $s = 0$ .



Prob. 12-54

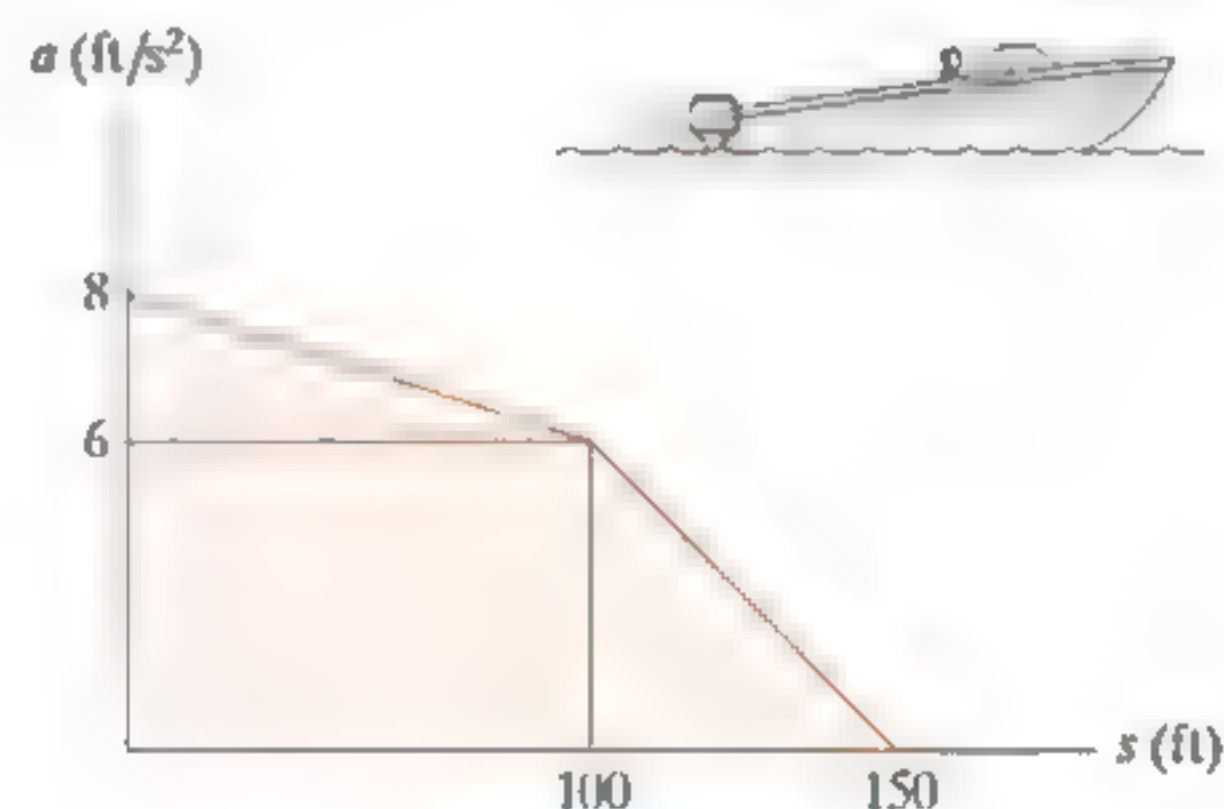
**12-55.** Un avión que aterriza sobre la pista recta originalmente viajaba a 110 ft/s, cuando  $s = 0$ . Si se somete a las desaceleraciones mostradas, determine el tiempo  $t'$  necesario para que el avión se detenga y construya la gráfica  $s-t$  para el movimiento.



Prob. 12-55

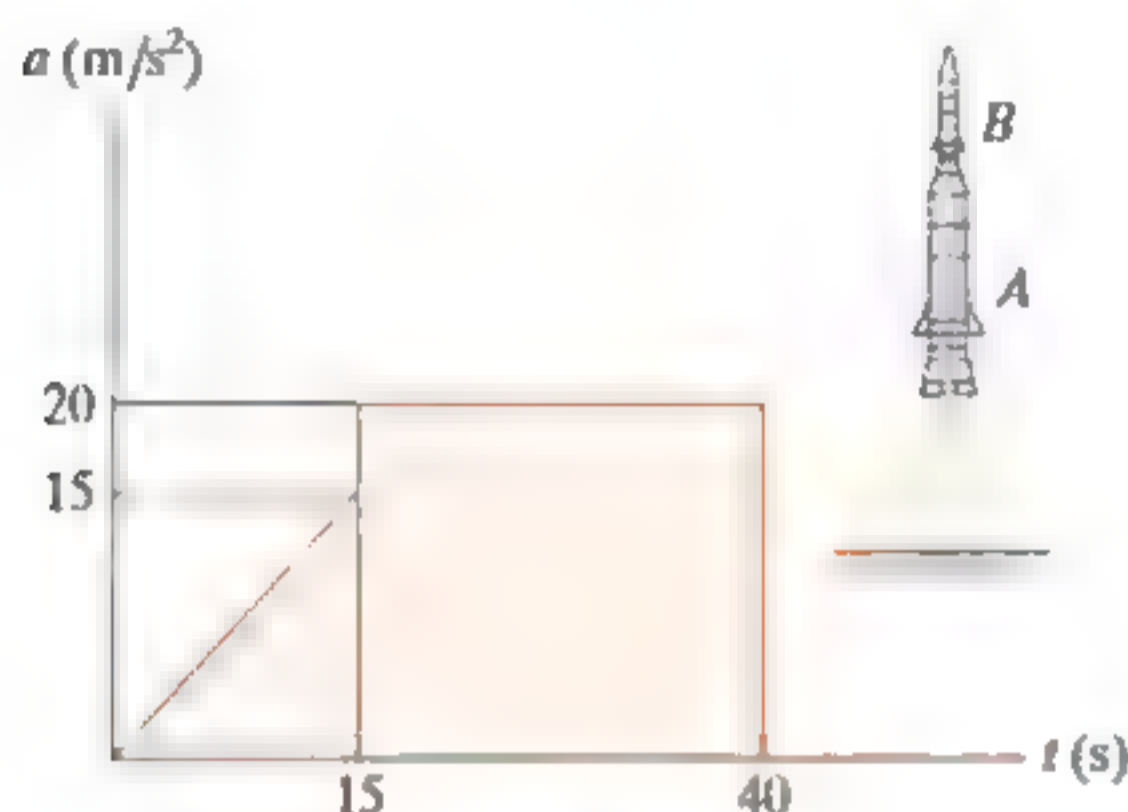
**\*12-56.** La lancha parte del reposo en  $s = 0$  y se desplaza en línea recta con la aceleración indicada en la gráfica de  $a-s$ . Determine la rapidez de la lancha cuando  $s = 50$  ft, 100 ft y 150 ft.

**12-57.** La lancha parte del reposo en  $s = 0$  y se desplaza en línea recta con la aceleración mostrada en la gráfica de  $a-s$ . Construya la gráfica de  $v-s$ .



Probs. 12-56-57

**12-58.** Un cohete de dos módulos se dispara verticalmente desde el reposo con la aceleración mostrada. Después de 15 s el primer módulo, A, se consume y el segundo módulo, B, empieza su ignición. Trace las gráficas de  $v-t$  y  $s-t$  que describen el movimiento del segundo módulo para  $0 \leq t \leq 40$  s.



Prob. 12-58

**12-59.** La rapidez de un tren durante el primer minuto se registró como sigue:

$t$ (s)	0	20	40	60
$v$ (m/s)	0	16	21	24

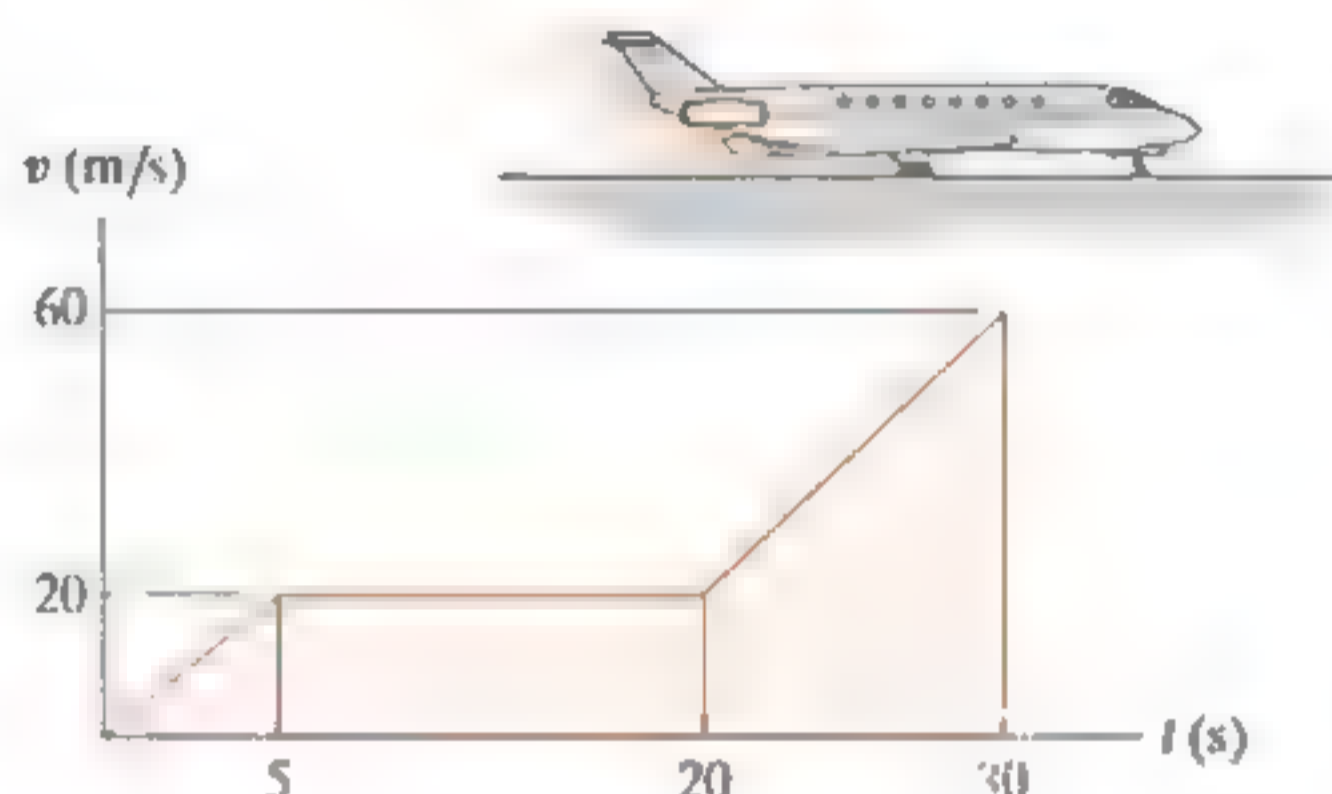
Trace la gráfica de  $v-t$  aproximando la curva a través de segmentos de línea recta entre los puntos dados. Determine la distancia total recorrida.

**\*12-60.** Un hombre que se encuentra sobre un elevador de carga, que está subiendo, deja caer accidentalmente un paquete del elevador cuando está a 100 ft del suelo. Si el elevador mantiene una velocidad constante hacia arriba de 4 ft/s, determine qué tan alto está el elevador con respecto a la tierra en el instante en que el paquete llega al suelo. Trace la curva de  $v-t$  para el paquete durante el tiempo que está en movimiento. Suponga que el paquete se libera con la misma rapidez ascendente del elevador.

**12-61.** Dos automóviles parten del reposo uno al lado del otro y se desplazan a lo largo de una carretera recta. El auto A acelera a  $4 \text{ m/s}^2$  durante 10 s y, después, mantiene una rapidez constante. El auto B acelera a  $5 \text{ m/s}^2$  hasta llegar a una rapidez constante de 25 m/s y luego mantiene esa rapidez. Construya las gráficas de  $a-t$ ,  $v-t$  y  $s-t$  para cada vehículo hasta  $t = 15$  s. ¿Cuál es la distancia entre los dos automóviles cuando  $t = 15$  s?

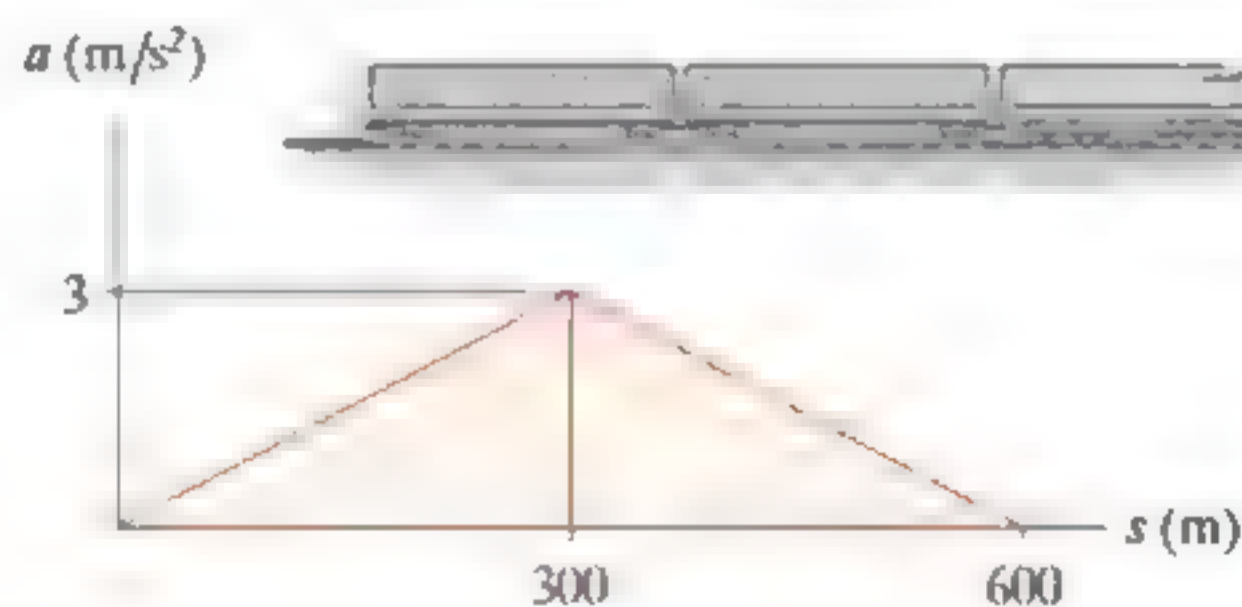
**12-62.** Si la posición de una partícula se define como  $s = (5t - 3t^2)$  ft, donde  $t$  se da en segundos, construya las gráficas de  $s-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$  para  $0 \leq t \leq 10$  s.

**12-63.** A partir de datos experimentales, el movimiento de un avión a propulsión, mientras viaja a lo largo de una pista de aterrizaje, está definido por la gráfica de  $v-t$ . Construya las gráficas de  $s-t$  y  $a-t$  para el movimiento. Cuando  $t = 0$ ,  $s = 0$ .



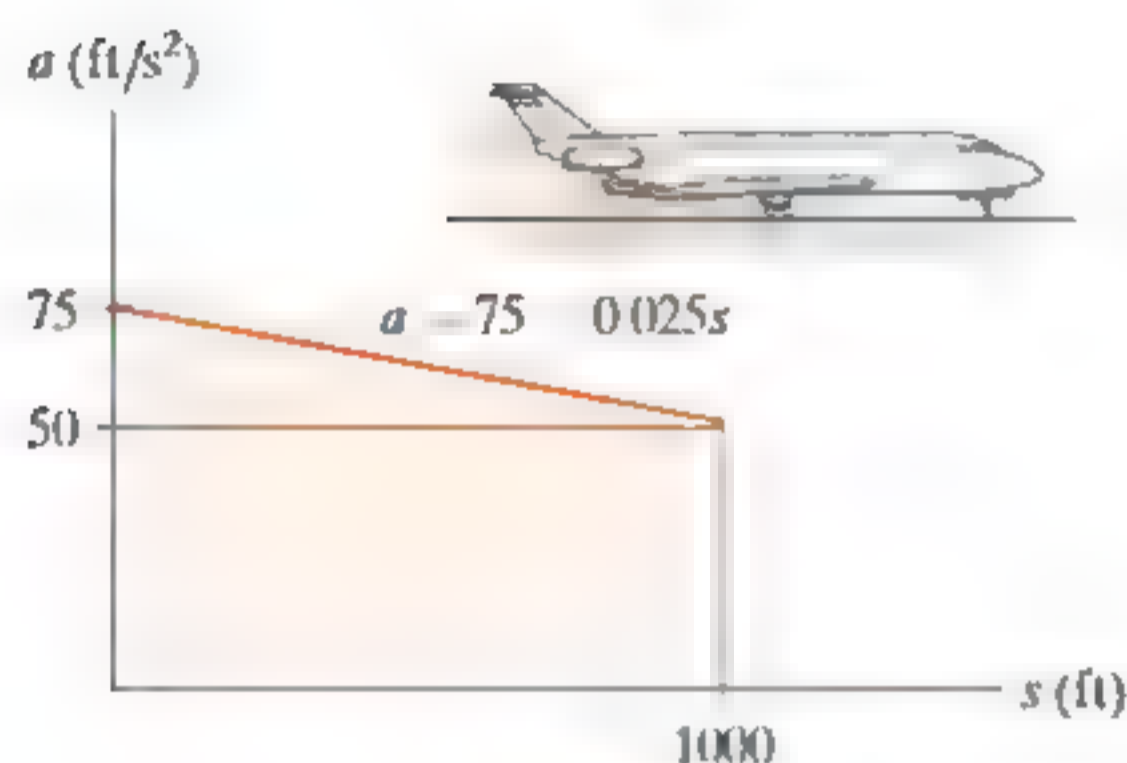
Prob. 12-63

**\*12-64.** El movimiento de un tren se describe mediante la gráfica de  $a-s$  mostrada. Trace la gráfica de  $v-s$  si  $v = 0$  en  $s = 0$ .



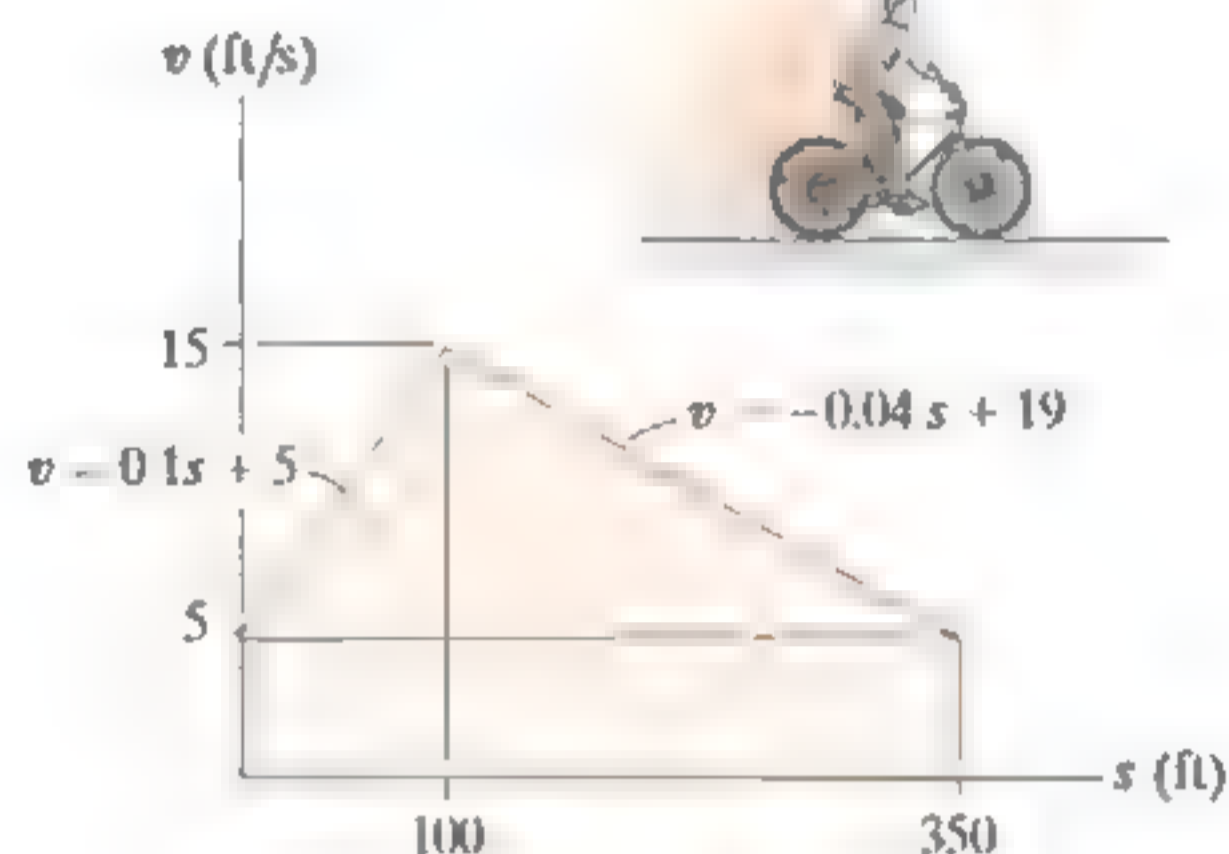
Prob. 12-64

**12-65.** El avión de propulsión parte del reposo en  $s = 0$  y se somete a la aceleración indicada. Determine la rapidez del avión cuando ha recorrido 1000 ft. Además, ¿cuánto tiempo requiere el avión para viajar los 1000 ft?



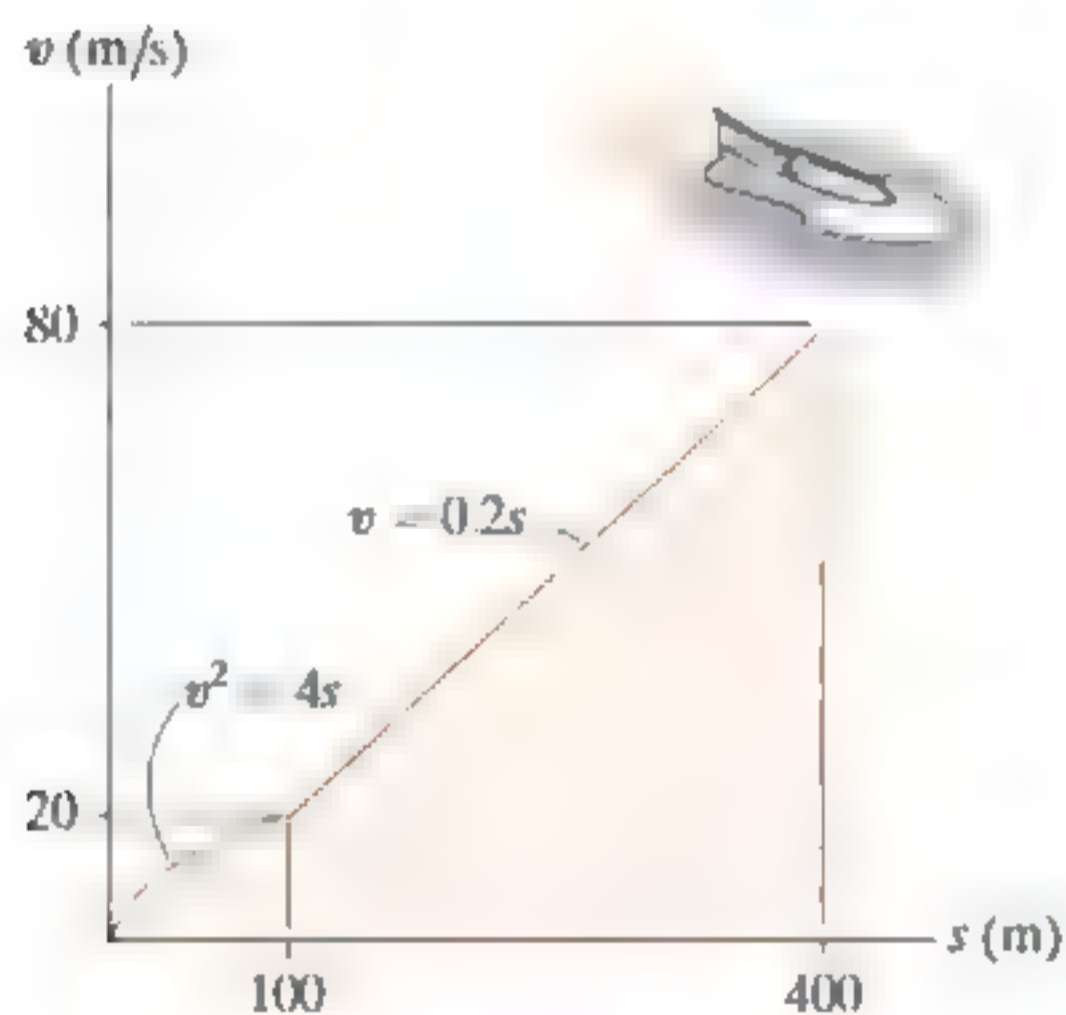
Prob. 12-65

**12-67.** Se muestra la gráfica de  $v$ - $s$  de un ciclista que viaja a lo largo de una carretera recta. Construya la gráfica de  $a$ - $s$ .



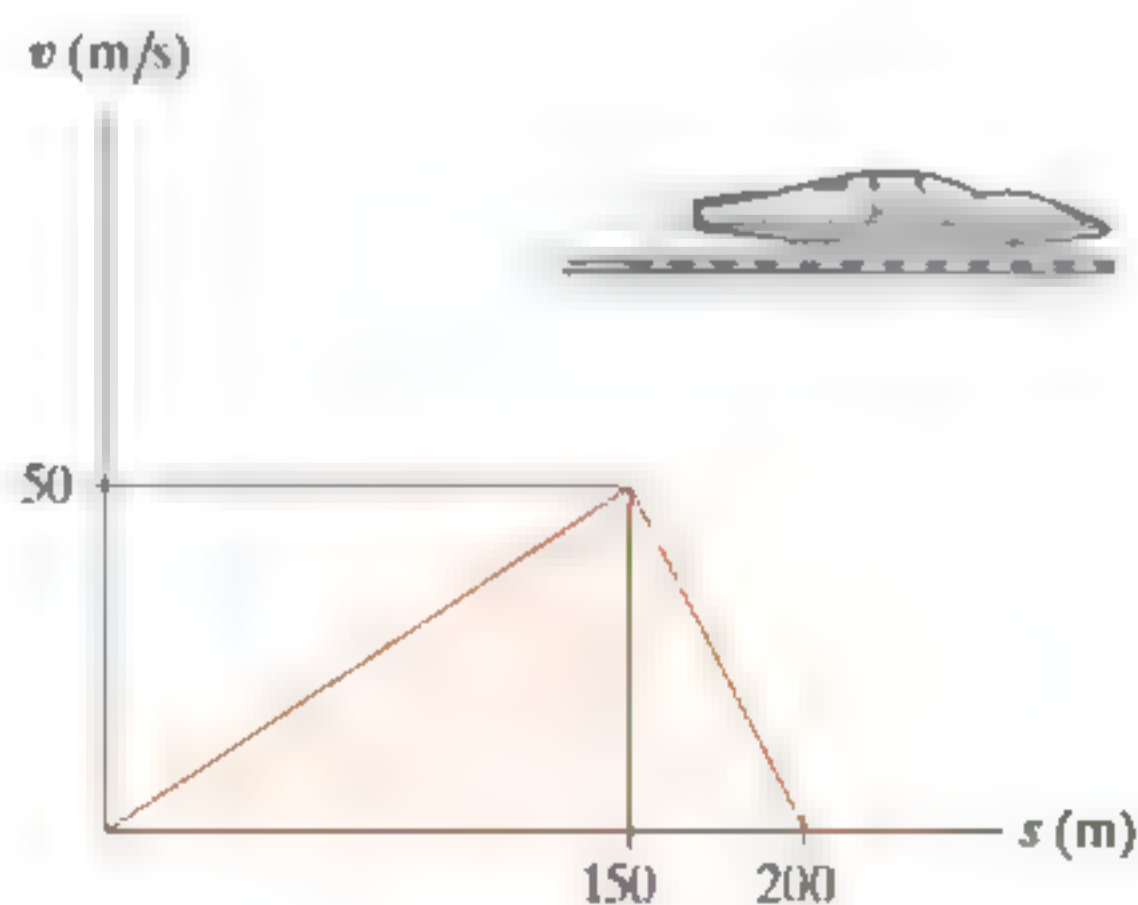
Prob. 12-67

**12-66.** La lancha viaja a lo largo de una línea recta con la rapidez descrita por la gráfica. Construya las gráficas de  $s$ - $t$  y  $a$ - $s$ . Asimismo, determine el tiempo necesario para que la lancha recorra una distancia  $s = 400$  m si  $s = 0$  cuando  $t = 0$ .



Prob. 12-66

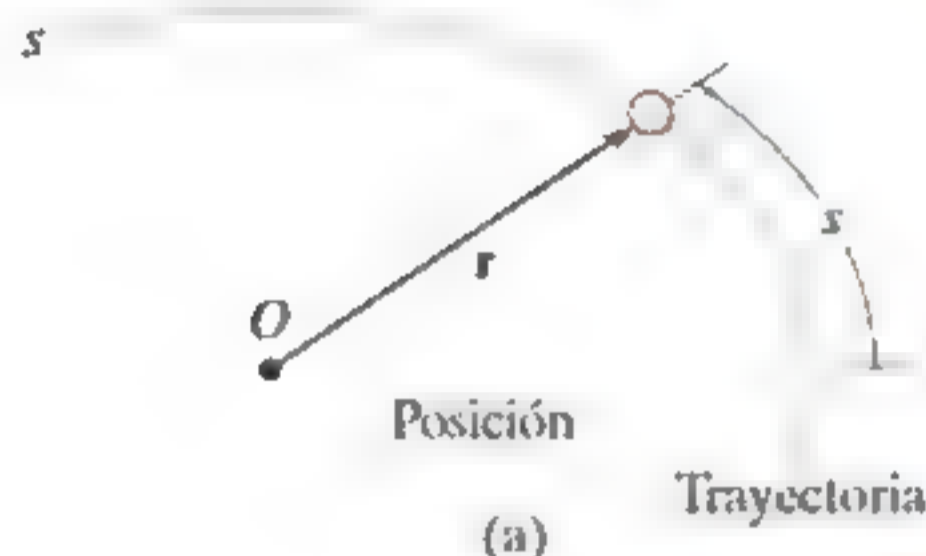
**\*12-68.** Se muestra la gráfica de  $v$ - $s$  de un vehículo de pruebas. Determine su aceleración cuando  $s = 100$  m y cuando  $s = 175$  m.



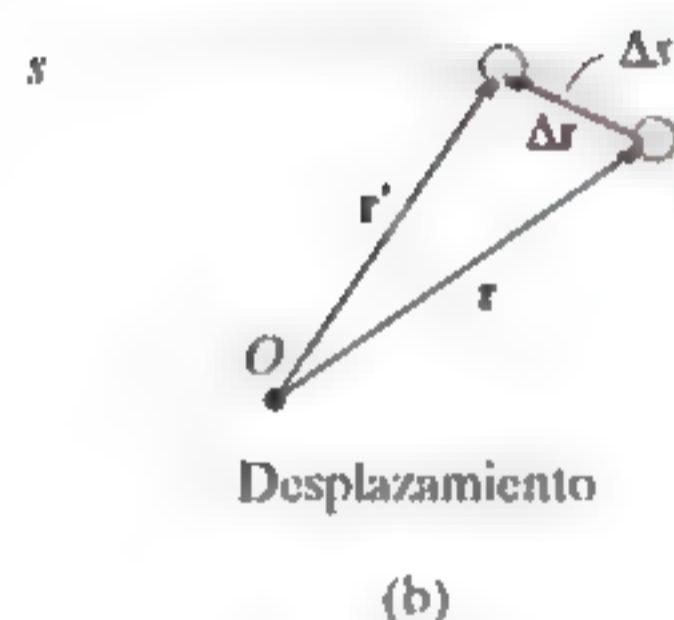
Prob. 12-68

## 12.4 Movimiento curvilíneo general

El **movimiento curvilíneo** ocurre cuando una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva. Como esta trayectoria a menudo se describe en tres dimensiones, se utilizará el análisis vectorial para formular la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula\*. En esta sección se analizan los aspectos generales del movimiento curvilíneo y en secciones subsiguientes consideraremos tres tipos de sistemas de coordenadas que se usan con frecuencia para analizar este movimiento.



**Posición.** Considere una partícula situada en un punto de una curva en el espacio, definida por la función de trayectoria  $s(t)$  (fig. 12-16a). El **vector de posición**  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  designará la posición de la partícula, medida con respecto a un punto fijo  $O$ . Observe que tanto la magnitud como la dirección de este vector cambiarán a medida que la partícula se mueve a lo largo de la curva.



**Desplazamiento.** Suponga que durante un breve intervalo  $\Delta t$  la partícula se mueve una distancia  $\Delta s$  a lo largo de la curva hacia una nueva posición, definida por  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$  (fig. 12-16b). El **desplazamiento**  $\Delta \mathbf{r}$  representa el cambio de posición de la partícula y se determina mediante una resta vectorial, es decir,  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ .

**Velocidad.** Durante el tiempo  $\Delta t$ , la **velocidad promedio** de la partícula es

$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

La **velocidad instantánea** se determina con esta ecuación cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y, por consiguiente, la dirección de  $\Delta \mathbf{r}$  *aproxima* a la *tangente* hacia la curva. Entonces,  $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t)$  o

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (12-7)$$

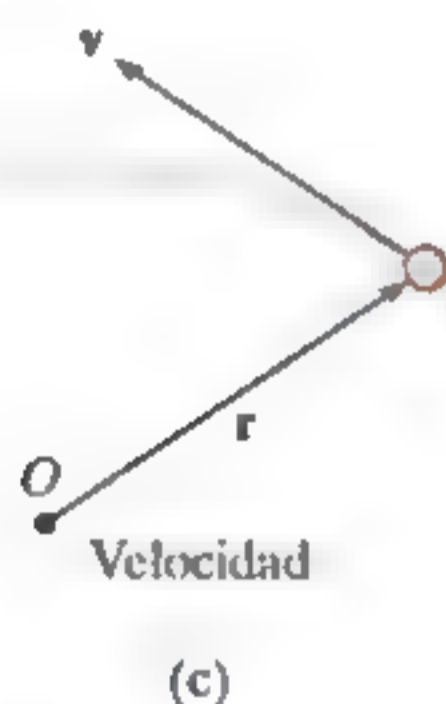
Como  $d\mathbf{r}$  será tangente a la curva, la **dirección** de  $\mathbf{v}$  también es *tangente a la curva* (fig. 12-16c). La **magnitud** de  $\mathbf{v}$ , conocida como la **rapidez**, se obtiene al considerar que la longitud del segmento de línea recta  $\Delta r$  (fig. 12-16b) se aproxima a la longitud de arco  $\Delta s$  a medida que  $\Delta t \rightarrow 0$ , y tenemos  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta r / \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta s / \Delta t)$ , o

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (12-8)$$

Por lo tanto, la **rapidez** se obtiene al diferenciar la función de la trayectoria  $s$  con respecto al tiempo.

\* En el apéndice B se presenta un resumen de algunos de los conceptos importantes del análisis vectorial.

Fig. 12-16



**Aceleración.** Si la velocidad de la partícula es  $\mathbf{v}$  en el instante  $t$  y la velocidad es  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$  en el instante  $t + \Delta t$  (fig. 12-16d), entonces la *aceleración promedio* de la partícula durante el intervalo  $\Delta t$  es

$$\mathbf{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

donde  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ . Para estudiar este cambio, los dos vectores de velocidad en la figura 12-16d se trazan en la figura 12-16e, de modo que sus colas queden en el punto fijo  $O'$  y sus puntas de flecha toquen puntos situados en la curva. Esta curva se llama *hodógrafa* y, cuando se construye, describe el lugar geométrico de puntos para la punta de flecha del vector de velocidad, del mismo modo en que la *trayectoria* describe el lugar geométrico de puntos para la punta de flecha del vector de posición (fig. 12-16a).

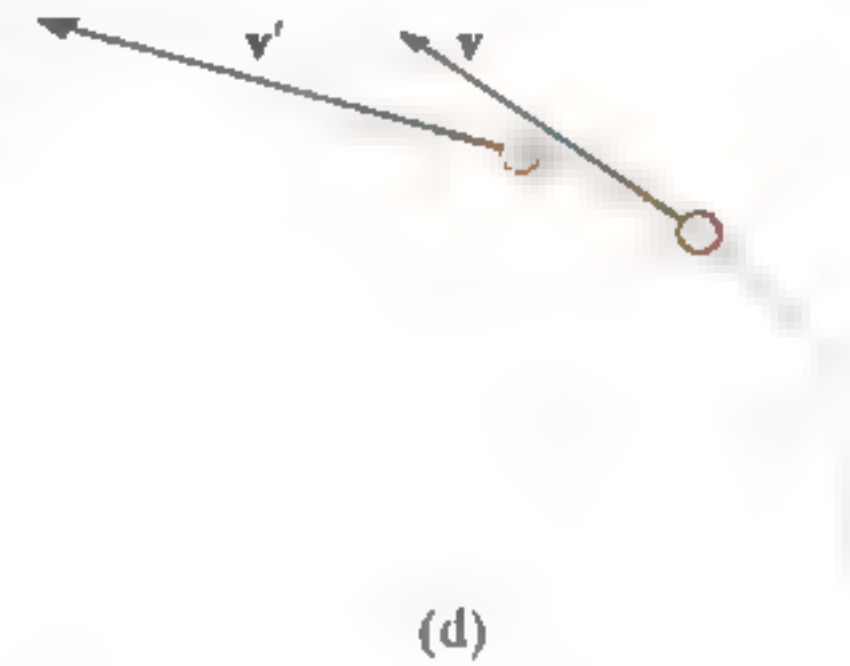
Para obtener la *aceleración instantánea*, hacemos que  $\Delta t \rightarrow 0$  en la ecuación anterior. En el límite  $\Delta \mathbf{v}$  tenderá a la *tangente de la hodógrafa* y por ende  $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{v} / \Delta t)$ , o bien,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (12-9)$$

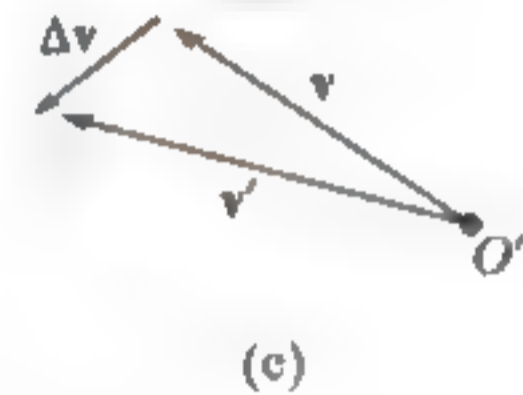
Si sustituimos la ecuación 12-7 en este resultado, también podemos escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

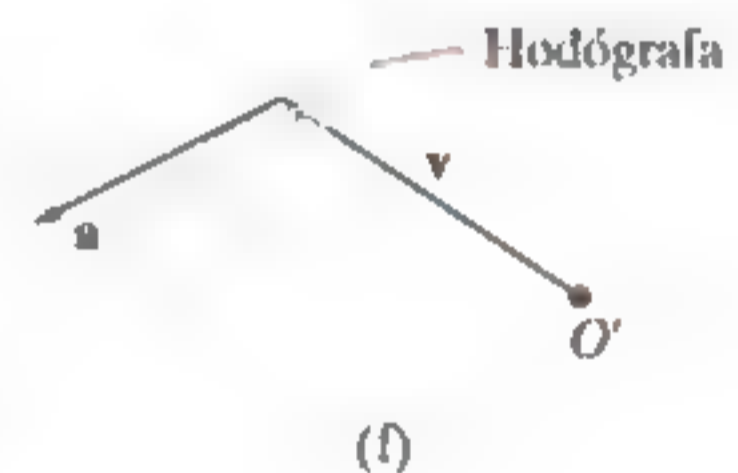
Por definición de la derivada,  $\mathbf{a}$  actúa *tangente a la hodógrafa* (fig. 12-16f) y, en general *no es tangente a la trayectoria del movimiento* (fig. 12-16g). Para aclarar este punto, tenga en cuenta que  $\Delta \mathbf{v}$ , y por consiguiente  $\mathbf{a}$ , deben responder el cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de la velocidad  $\mathbf{v}$ , a medida que la partícula se mueve de un punto al siguiente a lo largo de la trayectoria (fig. 12-16d). Sin embargo, para que la partícula siga cualquier trayectoria curva, el cambio direccional siempre “cambia” el vector de velocidad hacia el “interior” o “lado cóncavo” de la trayectoria y, por consiguiente,  $\mathbf{a}$  *no puede* permanecer tangente a la trayectoria. En resumen,  $\mathbf{v}$  siempre es tangente a la *trayectoria* y  $\mathbf{a}$  siempre es tangente a la *hodógrafa*.



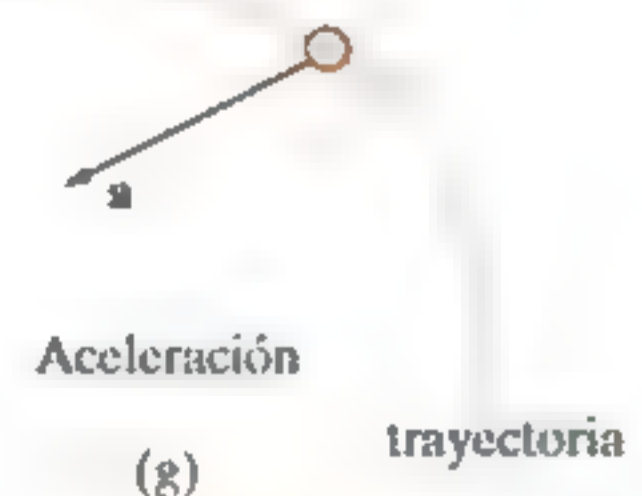
(d)



(e)



(f)



(g)

Fig. 12-16 (cont.)

## 12.5 Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares

De vez en cuando el movimiento de una partícula puede describirse mejor a lo largo de una trayectoria que logre expresarse en función de sus coordenadas  $x, y, z$ .

**Fig. 12-17a.** Si la partícula está en el punto  $(x, y, z)$  de la trayectoria curva  $s$  mostrada en la figura 12-17a, entonces su posición se define mediante el *vector de posición*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (12-10)$$

Cuando la partícula se mueve, las componentes  $x, y, z$  de  $\mathbf{r}$  serán funciones del tiempo, es decir,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , de modo que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

En cualquier instante la ecuación B-3 del apéndice B define la *magnitud* de  $\mathbf{r}$ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Y la *dirección* de  $\mathbf{r}$  se especifica por el vector unitario  $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ .

**Fig. 12-17b.** La primera derivada con respecto al tiempo de  $\mathbf{r}$  proporciona la velocidad de la partícula. Por consiguiente,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

Cuando se toma esta derivada, es necesario tener en cuenta los cambios tanto de la magnitud como de la dirección en cada una de las componentes vectoriales. Por ejemplo, la derivada de la componente  $i$  de  $\mathbf{r}$  es

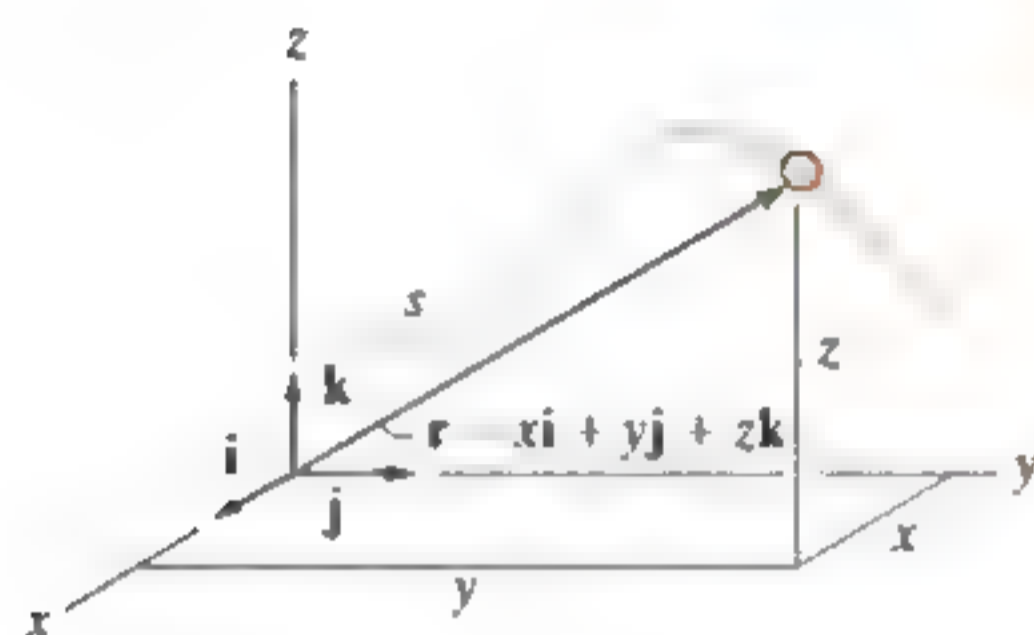
$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

El segundo término del lado derecho es cero, siempre que el marco de referencia  $x, y, z$  esté *fijo* y, por consiguiente, la *dirección* (y la *magnitud*) de  $\mathbf{i}$  no cambie con el tiempo. La diferenciación de las componentes  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  se realiza de la misma manera, la cual proporciona el resultado final,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (12-11)$$

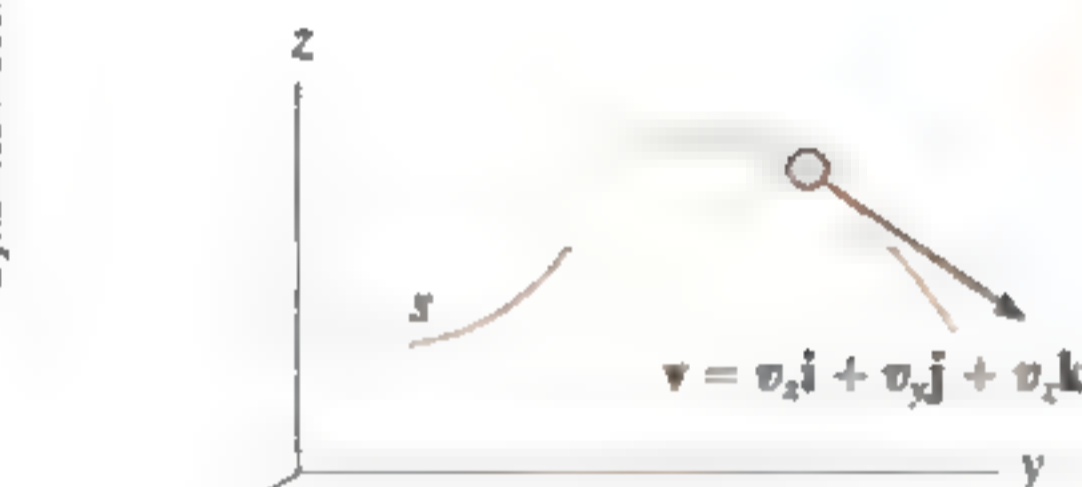
donde

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad (12-12)$$



Posición

(a)



Velocidad

(b)

Fig. 12-17

La notación “de punto”,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  representa las primeras derivadas con respecto al tiempo de  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , respectivamente.

La *magnitud* de la velocidad se determina como

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y el vector unitario  $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$  especifica su *dirección*. Como se vio en la sección 12.4, esta dirección *siempre es tangente a la trayectoria*, como se indica en la figura 12-17b.

**Ejemplo 12.1.** La aceleración de la partícula se obtiene de la primera derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-11 (o la segunda derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-10). Tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (12-13)$$

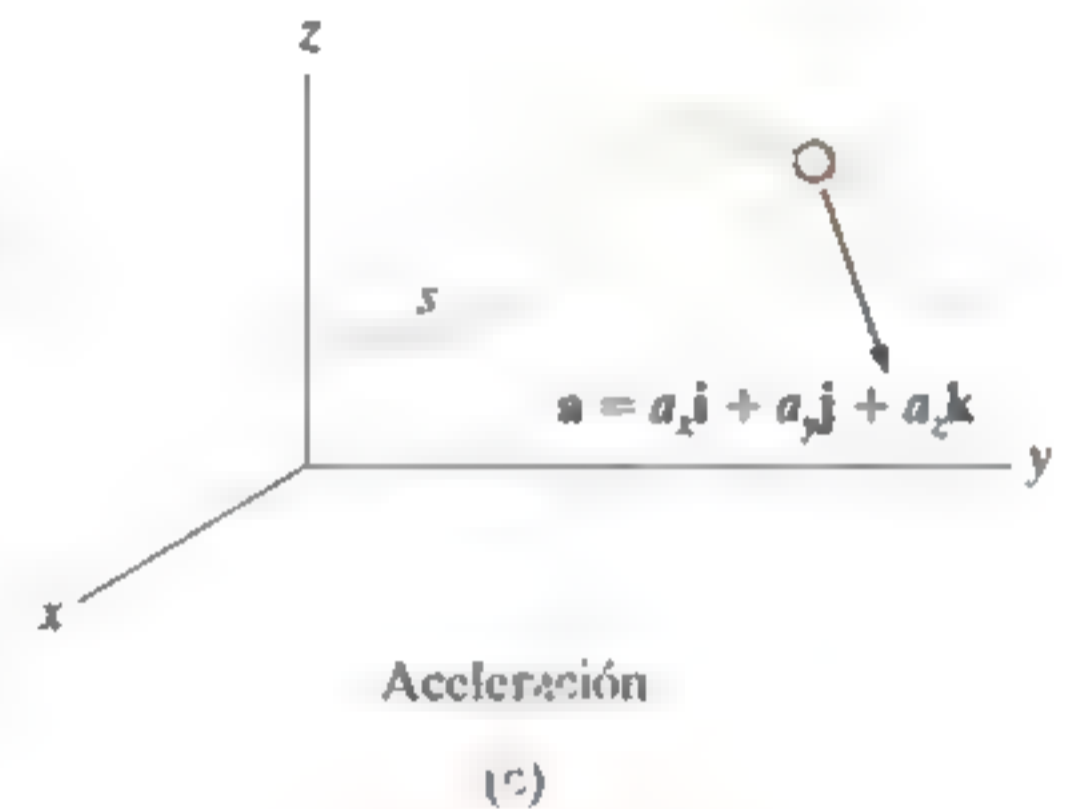


Fig. 12-17 (cont.)

donde

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \quad (12-14)$$

Aquí,  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  representan, respectivamente, las primeras derivadas con respecto al tiempo de  $v_x = v_x(t)$ ,  $v_y = v_y(t)$ ,  $v_z = v_z(t)$  o las segundas derivadas con respecto al tiempo de las funciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

La aceleración tiene una *magnitud*

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

y una *dirección* especificada por el vector unitario  $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a$ . Como  $\mathbf{a}$  representa el *cambio* tanto de la magnitud como de la dirección de la velocidad, en general  $\mathbf{a}$  *no* será tangente a la trayectoria (fig. 12-17c).

### Puntos importantes

- El movimiento curvilíneo puede hacer que cambie *tanto* la magnitud *como* la dirección de los vectores de posición, velocidad y aceleración.
- El vector de velocidad siempre es *tangente* a la trayectoria.
- En general, el vector de aceleración *no* es tangente a la trayectoria, sino que más bien es tangente a la hodógrafa.
- Si el movimiento se describe mediante coordenadas cartesianas, entonces las componentes a lo largo de cada uno de los ejes no cambian de dirección, sólo cambiarán su magnitud y sentido (signo algebraico).
- Al considerar los movimientos de las componentes, el cambio de magnitud y dirección de la posición y velocidad de la partícula se toman automáticamente en cuenta.

### Procedimiento para el análisis

#### Sistema de coordenadas

- Un sistema de coordenadas rectangulares puede usarse para resolver problemas para los cuales el movimiento puede expresarse en términos de sus componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

#### Cantidades cinemáticas

- Como el *movimiento rectilíneo* ocurre a lo largo de *cada eje de coordenadas*, el movimiento a lo largo de cada eje se determina mediante  $v = ds/dt$  y  $a = dv/dt$ ; o cuando el movimiento no está expresado en función del tiempo, puede utilizarse la ecuación  $a ds = v dv$ .
- La ecuación de la trayectoria  $y = f(x)$  puede utilizarse, en dos dimensiones, para relacionar las componentes  $x$  y  $y$  de la velocidad y aceleración, si se aplica la regla de la cadena del cálculo. Este concepto se revisa en el apéndice C.
- Una vez que se determinan las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  las magnitudes de estos vectores se calculan con el teorema de Pitágoras, ecuación B-3, y sus ángulos de dirección coordenados a partir de las componentes de sus vectores unitarios, ecuaciones B-4 y B-5.

## EJEMPLO 12.5

En cualquier instante,  $x = (8t)$  ft, donde  $t$  está en segundos, define la posición horizontal del globo atmosférico de la figura 12-18a. Si la ecuación de la trayectoria es  $y = x^2/10$ , determine la magnitud y dirección de la velocidad y la aceleración cuando  $t = 2$  s.

## SOLUCIÓN

**Velocidad.** La componente de velocidad en la dirección  $x$  es

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ ft/s} \rightarrow$$

Para determinar la relación entre las componentes de velocidad utilizaremos la regla de la cadena del cálculo. Cuando  $t = 2$  s,  $x = 8(2) = 16$  ft (fig. 12-18a) y, por lo tanto,

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ ft/s} \uparrow$$

Cuando  $t = 2$  s, la magnitud de la velocidad es entonces

$$v = \sqrt{(8 \text{ ft/s})^2 + (25.6 \text{ ft/s})^2} = 26.8 \text{ ft/s} \quad \text{Resp.}$$

La dirección es tangente a la trayectoria (fig. 12-18b), donde

$$\theta_v = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{25.6}{8} = 72.6^\circ \quad \text{Resp.}$$

**Aceleración.** La relación entre las componentes de aceleración se determina con la regla de la cadena. (Vea el apéndice C). Tenemos,

$$\begin{aligned} a_x = \dot{v}_x &= \frac{d}{dt}(8) = 0 \\ a_y = \dot{v}_y &= \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10 \\ &= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ ft/s}^2 \uparrow \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ ft/s}^2$$

La dirección de  $\mathbf{a}$ , como se muestra en la figura 12-18c, es

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{12.8}{0} = 90^\circ \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** También es posible obtener  $v_y$  y  $a_y$  si se expresa primero  $y = f(t) = (8t)^2/10 = 6.4t^2$  y luego se toman sucesivamente las derivadas con respecto al tiempo.

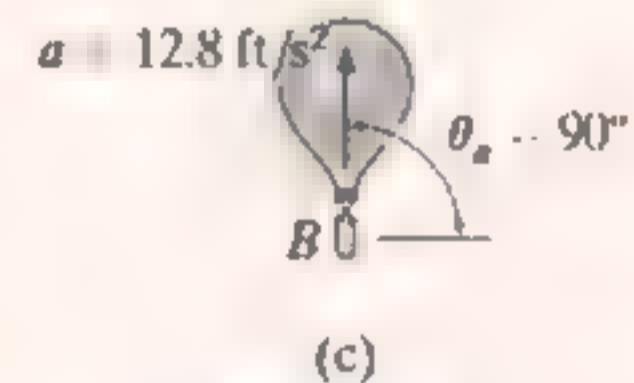
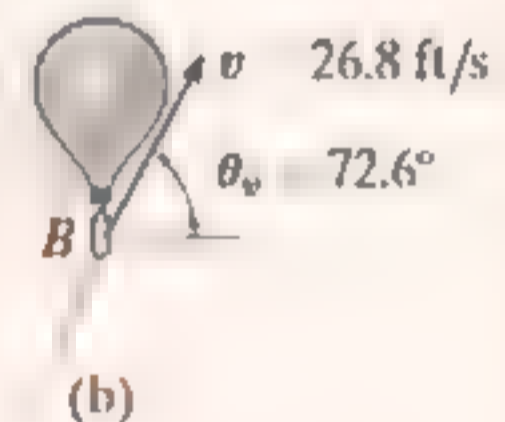
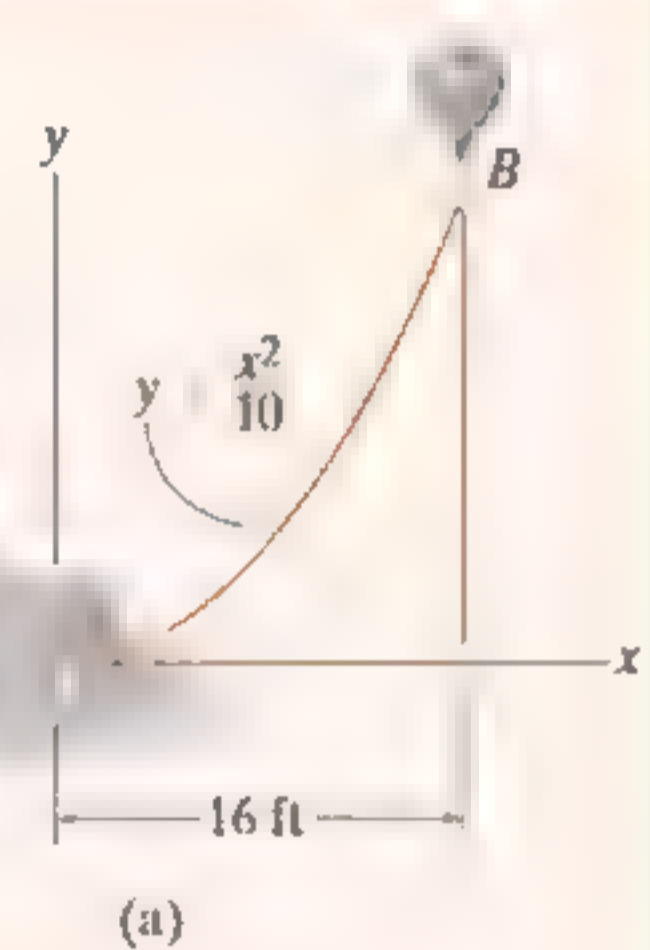


Fig. 12-18



(© R. C. Hibbeler)

Durante un breve lapso,  $y = (0.001x^2)$  m describe la trayectoria del avión que se muestra en la figura 12-19a. Si el avión se eleva con una velocidad constante hacia arriba de 10 m/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del avión cuando alcanza una altitud de  $y = 100$  m.

### SOLUCIÓN

Cuando  $y = 100$  m, entonces  $100 = 0.001x^2$ , o bien,  $x = 316.2$  m. También, debido a la velocidad constante,  $v_y = 10$  m/s, por lo tanto,

$$y = v_y t \quad 100 \text{ m} = (10 \text{ m/s})t \quad t = 10 \text{ s}$$

Si utilizamos la regla de la cadena (vea el apéndice C) para determinar la relación entre las componentes de la velocidad, tenemos

$$y = 0.001x^2$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(0.001x^2) = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x \quad (1)$$

Por lo tanto,

$$10 \text{ m/s} = 0.002(316.2 \text{ m})(v_x) \\ v_x = 15.81 \text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad es, por consiguiente,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81 \text{ m/s})^2 + (10 \text{ m/s})^2} = 18.7 \text{ m/s}$$

**Aceleración.** Con la regla de la cadena, la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (1) proporciona la relación entre las componentes de la aceleración.

$$a_y = \dot{v}_y = (0.002\dot{x})\dot{x} + 0.002x(\ddot{x}) = 0.002(v_x^2 + xa_x)$$

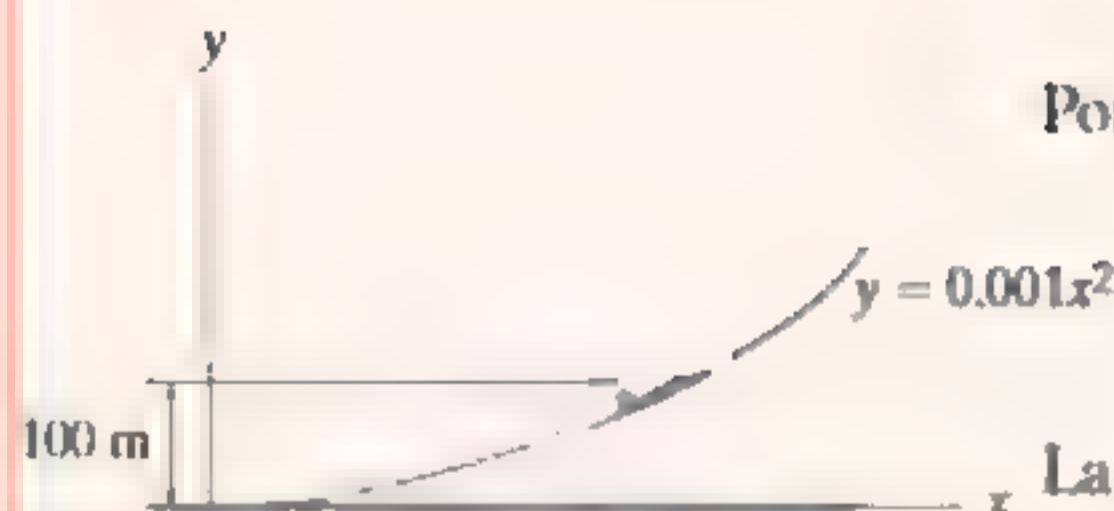
Cuando  $x = 316.2$  m,  $v_x = 15.81$  m/s,  $\dot{v}_y = a_y = 0$ ,

$$0 = 0.002[(15.81 \text{ m/s})^2 + 316.2 \text{ m}(a_x)] \\ a_x = -0.791 \text{ m/s}^2$$

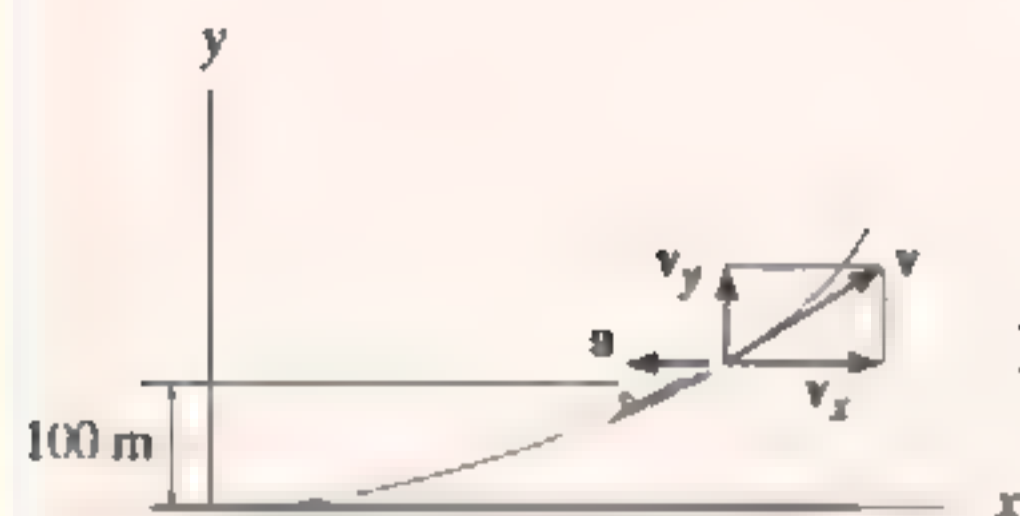
La magnitud de la aceleración del avión es, por consiguiente,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791 \text{ m/s}^2)^2 + (0 \text{ m/s}^2)^2} \\ = 0.791 \text{ m/s}^2$$

Estos resultados se muestran en la figura 12-19b.



(a)



(b)

Fig. 12-19

## 12.6 Movimiento de un proyectil

El movimiento de vuelo libre de un proyectil a menudo se estudia en función de sus componentes rectangulares. Para ilustrar el análisis cinemático, considere un proyectil lanzado en el punto  $(x_0, y_0)$ , con una velocidad inicial de  $v_0$ , cuyas componentes son  $(v_0)_x$  y  $(v_0)_y$  (fig. 12-20). Cuando se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa en el proyectil es su peso, el cual hace que el proyectil tenga una *aceleración dirigida hacia abajo constante* de aproximadamente  $a_c = g = 9.81 \text{ m/s}^2$  o bien  $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ .\*

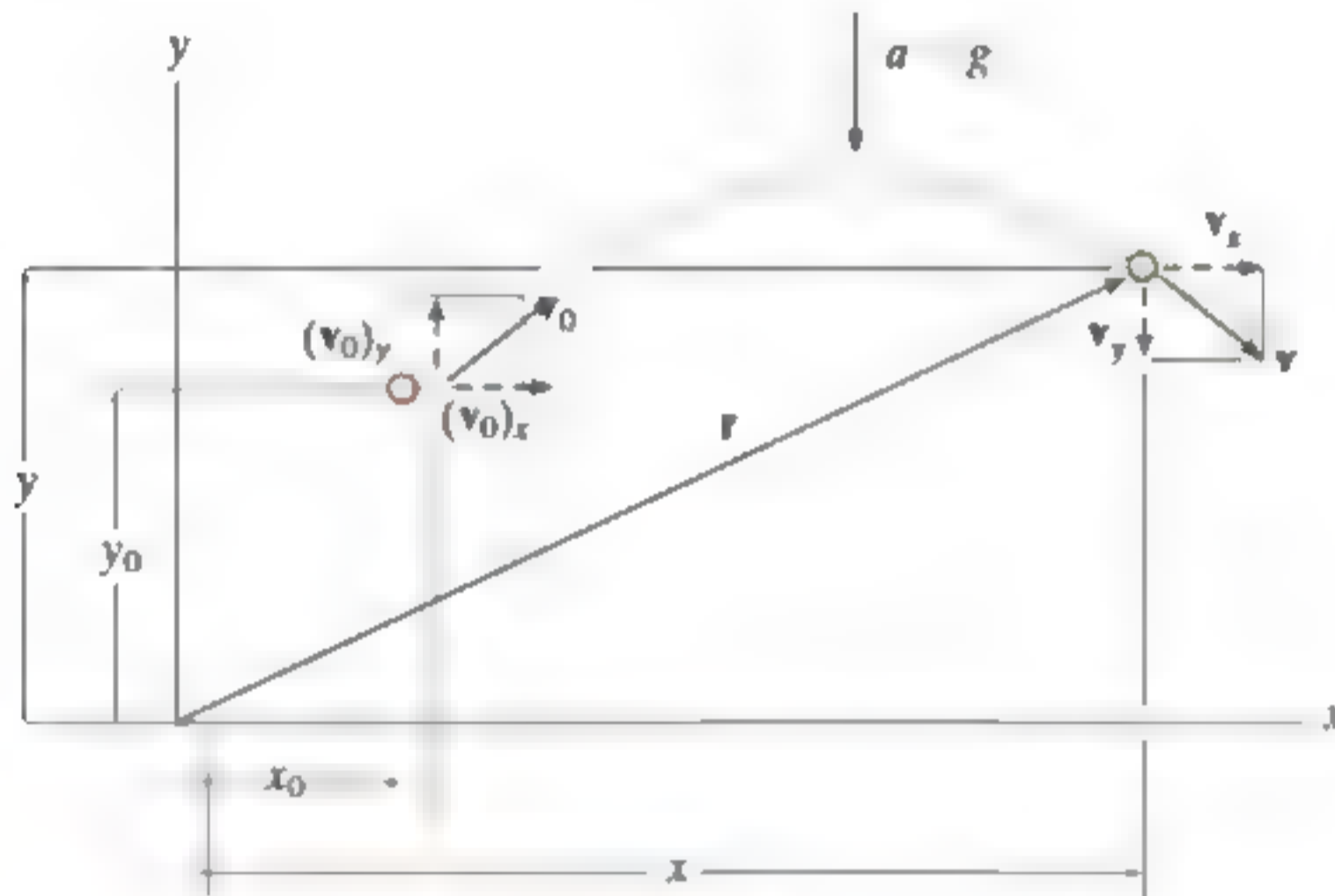


Fig. 12-20

**Movimiento horizontal.** Como  $a_x = 0$ , la aplicación de las ecuaciones de aceleración constante, 12-4 a 12-6, resulta en

$$\begin{aligned} (\rightarrow) \quad & v = v_0 + a_c t; & v_x &= (v_0)_x \\ (\rightarrow) \quad & x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; & x &= x_0 + (v_0)_x t \\ (\rightarrow) \quad & v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0); & v_x &= (v_0)_x \end{aligned}$$

La primera y la última de las ecuaciones indican que la *componente horizontal de la velocidad siempre permanece constante durante el movimiento*.

**Movimiento vertical.** Como el eje  $y$  positivo está dirigido hacia arriba, entonces  $a_y = -g$ . Al aplicar las ecuaciones 12-4 a 12-6, obtenemos

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad & v = v_0 + a_c t; & v_y &= (v_0)_y - gt \\ (+\uparrow) \quad & y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; & y &= y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} g t^2 \\ (+\uparrow) \quad & v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); & v_y^2 &= (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0) \end{aligned}$$

Recuerde que la última ecuación puede formularse con base en la eliminación del tiempo  $t$  de las dos primeras ecuaciones y, por consiguiente, *sólo dos de las tres ecuaciones anteriores son independientes entre sí*.

\*Esto supone que el campo gravitacional terrestre no varía con la altitud.



Cada imagen en esta secuencia se tomó separada por el mismo intervalo de tiempo. La bola gris oscuro cae del reposo, en tanto que la bola gris claro recibe una velocidad horizontal cuando se libera. Ambas bolas se aceleran hacia abajo a la misma razón y, por lo tanto, permanecen a la misma altura en todo momento. Esta aceleración hace que la diferencia de altura entre las dos bolas se incremente entre fotografías sucesivas. También, observe que la distancia horizontal entre fotos sucesivas de la bola gris es constante, ya que la velocidad en la dirección horizontal permanece constante. (© R. C. Hibbeler)



Una vez lanzado, el balón de basketbol sigue una trayectoria parabólica. (© R. C. Hibbeler)

En resumen, los problemas que implican el movimiento de un proyectil pueden tener cuando mucho tres incógnitas, puesto que sólo pueden escribirse tres ecuaciones independientes, es decir, *una* ecuación en la *dirección horizontal* y *dos* en la *dirección vertical*. Una vez obtenidas  $v_x$  y  $v_y$ , la velocidad resultante  $v$ , la cual *siempre es tangente* a la trayectoria, se determina mediante la *suma vectorial* como se indica en la figura 12-20.

## Problemas para el análisis

### Sistema de coordenadas

- Establezca el eje de coordenadas  $x, y$ , fijo y trace la trayectoria de la partícula. Entre *dos puntos* cualesquiera de la trayectoria, especifique los datos dados del problema e identifique las *tres incógnitas*. En todos los casos, la aceleración de la gravedad actúa hacia abajo y es igual a  $9.81 \text{ m/s}^2$  o  $32.2 \text{ ft/s}^2$ . Las velocidades inicial y final de la partícula se representarán en función de sus componentes  $x$  y  $y$ .
- Recuerde que las componentes positivas y negativas de posición, velocidad y aceleración siempre actúan de acuerdo con sus direcciones coordenadas asociadas.

### Ecuaciones cinemáticas

- Dependiendo de los datos conocidos y de lo que se va a determinar, se decidirá cuáles tres de las cuatro ecuaciones siguientes se aplicarán entre los dos puntos de la trayectoria, para obtener la solución más directa del problema.

### Movimiento horizontal

- La *velocidad* en la dirección horizontal o  $x$  es *constante*, es decir,  $v_x = (v_0)_x$

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

### Movimiento vertical

- En la dirección vertical o  $y$ , *sólo dos* de las tres ecuaciones siguientes pueden utilizarse para la solución.

$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

Por ejemplo, si no se requiere la velocidad final  $v_y$  de la partícula, no serán útiles la primera ni la tercera de estas ecuaciones.



La grava que cae por el extremo de esta banda transportadora sigue una trayectoria que puede pronosticarse con las ecuaciones de aceleración constante. De esta manera se determina la ubicación de la pila acumulada. Se utilizan coordenadas rectangulares para el análisis, puesto que la aceleración ocurre sólo en la dirección vertical. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

Un saco se desliza por la rampa, como se indica en la figura 12-21, con una velocidad horizontal de 12 m/s. Si la altura de la rampa es de 6 m con respecto al piso, determine el tiempo necesario para que el saco choque contra el suelo y la distancia  $R$  donde los sacos comienzan a apilarse.

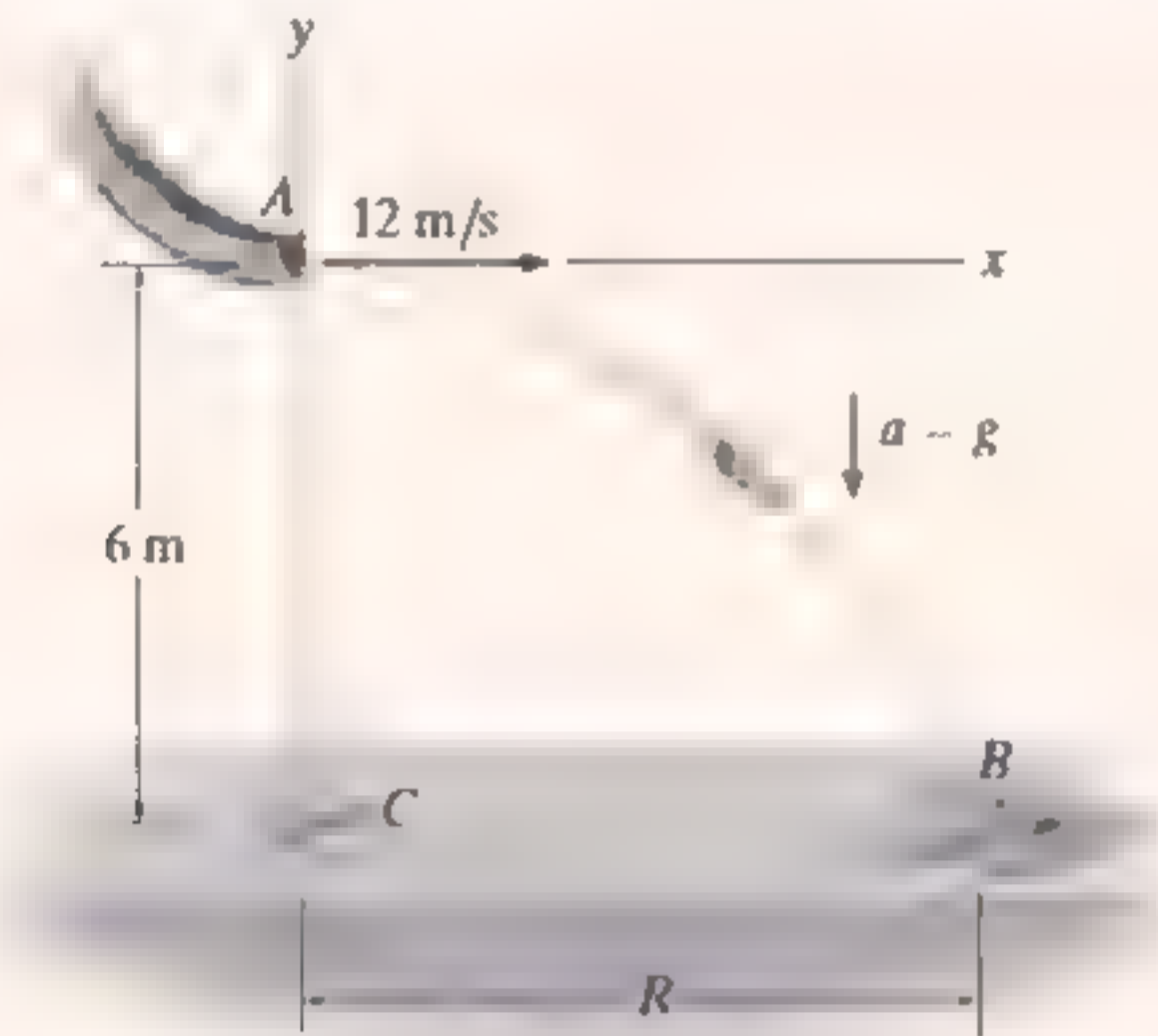


Fig. 12-21

## SOLUCIÓN

El origen de las coordenadas se establece al principio de la trayectoria, punto  $A$  (fig. 12-21). La velocidad inicial de un saco tiene las componentes  $(v_A)_x = 12 \text{ m/s}$  y  $(v_A)_y = 0$ . Asimismo, entre los puntos  $A$  y  $B$  la aceleración es de  $a_y = -9.81 \text{ m/s}^2$ . En vista de que  $(v_B)_x = (v_A)_x = 12 \text{ m/s}$ , las tres incógnitas son  $(v_B)_y$ ,  $R$  y el tiempo de vuelo  $t_{AB}$ . En este caso, no necesitamos determinar  $(v_B)_y$ .

**Movimiento vertical.** Se conoce la distancia vertical de  $A$  a  $B$  y, por consiguiente, podemos obtener una solución directa para  $t_{AB}$  con la ecuación

$$\begin{aligned}
 (+\uparrow) \quad y_B &= y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a_y t_{AB}^2 \\
 -6 \text{ m} &= 0 + 0 + \frac{1}{2} (-9.81 \text{ m/s}^2) t_{AB}^2 \\
 t_{AB} &= 1.11 \text{ s} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Con  $t_{AB}$  calculado,  $R$  se determina como sigue:

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad x_B &= x_A + (v_A)_x t_{AB} \\
 R &= 0 + 12 \text{ m/s} (1.11 \text{ s}) \\
 R &= 13.3 \text{ m} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

**NOTA:** El cálculo de  $t_{AB}$  también indica que si se soltara un saco desde el reposo en  $A$ , le llevaría el mismo tiempo chocar contra el suelo en  $C$  (fig. 12-21).

## EJEMPLO 12.11

La máquina desmenuzadora está diseñada para expulsar virutas de madera a  $v_O = 25$  ft/s, como se ilustra en la figura 12-22. Si el tubo está orientado a  $30^\circ$  con respecto a la horizontal, determine a qué altura,  $h$ , las virutas chocan contra la pila, si en este instante caen en la pila a 20 ft del tubo.

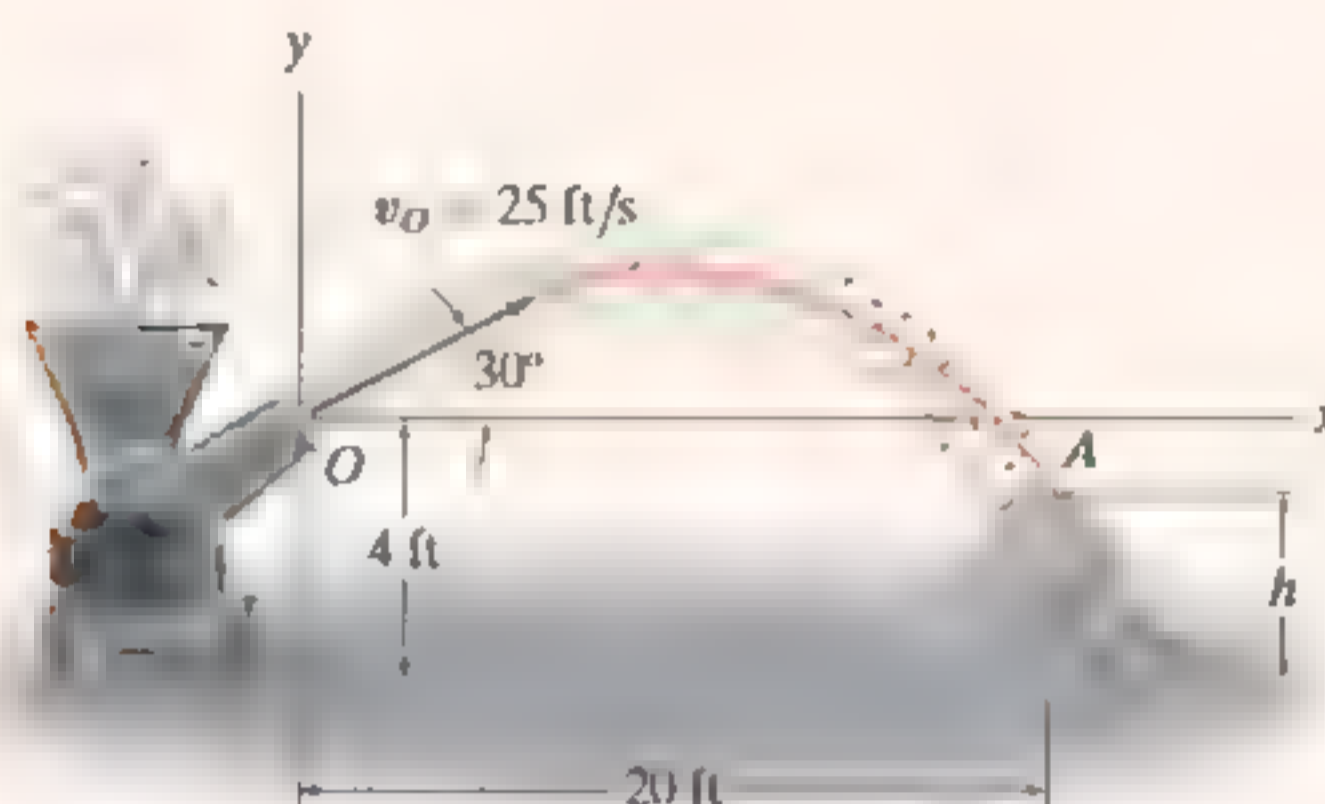


Fig. 12-22

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Cuando se analiza el movimiento entre los puntos  $O$  y  $A$ , las tres incógnitas son la altura  $h$ , el tiempo de vuelo  $t_{OA}$  y la componente vertical de la velocidad  $(v_A)_y$  [observe que  $(v_A)_x = (v_O)_x$ ]. Con el origen de las coordenadas en  $O$  (fig. 12-22), la velocidad inicial de una viruta tiene las componentes de

$$(v_O)_x = (25 \cos 30^\circ) \text{ ft/s} = 21.65 \text{ ft/s} \rightarrow$$

$$(v_O)_y = (25 \sin 30^\circ) \text{ ft/s} = 12.5 \text{ ft/s} \uparrow$$

Asimismo,  $(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$  ft/s y  $a_y = -32.2$  ft/s<sup>2</sup>. Como no necesitamos determinar  $(v_A)_y$ , entonces

**Movimiento horizontal**

$$(\rightarrow)$$

$$x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$

$$20 \text{ ft} = 0 + (21.65 \text{ ft/s}) t_{OA}$$

$$t_{OA} = 0.9238 \text{ s}$$

**Movimiento vertical.** Si relacionamos  $t_{OA}$  con las elevaciones inicial y final de una viruta,

$$(+\uparrow) \quad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \frac{1}{2} a_y t_{OA}^2$$

$$(h - 4 \text{ ft}) = 0 + (12.5 \text{ ft/s})(0.9238 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-32.2 \text{ ft/s}^2)(0.9238 \text{ s})^2$$

$$h = 1.81 \text{ ft}$$

Resp.

**NOTA:** Podemos determinar  $(v_A)_y$  por medio de  $(v_A)_y = (v_O)_y + a_y t_{OA}$ .

## EJEMPLO

La pista para este evento de carreras se diseñó de manera que los competidores salten la pendiente a  $30^\circ$ , desde una altura de 1 m. Durante una carrera se observó que el corredor de la figura 12-23a permanecía en el aire durante 1.5 s. Determine la rapidez a la cual estaba saliendo de la rampa, la distancia horizontal que recorre antes de chocar contra el suelo y la altura máxima que alcanza. No tome en cuenta el tamaño de la motocicleta ni del corredor.



(© R. C. Hibbeler)

(a)

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Como se muestra en la figura 12-23b, el origen de las coordenadas se establece en A. Entre los puntos extremos de la trayectoria AB las tres incógnitas son la velocidad inicial  $v_A$ , la distancia  $R$  y la componente vertical de la velocidad  $(v_B)_y$ .

**Movimiento vertical.** Como se conocen el tiempo de vuelo y la distancia vertical entre los extremos de la trayectoria, podemos determinar  $v_A$ .

$$\begin{aligned}
 (+\uparrow) \quad y_B &= y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a_c t_{AB}^2 \\
 -1 \text{ m} &= 0 + v_A \sin 30^\circ (1.5 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-9.81 \text{ m/s}^2) (1.5 \text{ s})^2 \\
 v_A &= 13.38 \text{ m/s} = 13.4 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

**Movimiento horizontal.** Ahora determinamos la distancia  $R$ .

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad x_B &= x_A + (v_A)_x t_{AB} \\
 R &= 0 + 13.38 \cos 30^\circ \text{ m/s} (1.5 \text{ s}) \\
 &= 17.4 \text{ m} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Para determinar la altura máxima  $h$  consideraremos la trayectoria AC (fig. 12-23b). En este caso, las tres incógnitas son el tiempo de vuelo  $t_{AC}$ , la distancia horizontal de A a C y la altura  $h$ . A la altura máxima  $(v_C)_y = 0$  y como  $v_A$  se conoce, podemos determinar  $h$  directamente sin considerar  $t_{AC}$  mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 (v_C)_y^2 &= (v_A)_y^2 + 2a_c[y_C - y_A] \\
 0^2 &= (13.38 \sin 30^\circ \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)[(h - 1 \text{ m}) - 0] \\
 h &= 3.28 \text{ m} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

**NOTA:** Demuestre que la motocicleta golpeará el suelo en B con una velocidad cuyas componentes son

$$(v_B)_x = 11.6 \text{ m/s} \rightarrow, \quad (v_B)_y = 8.02 \text{ m/s} \downarrow$$

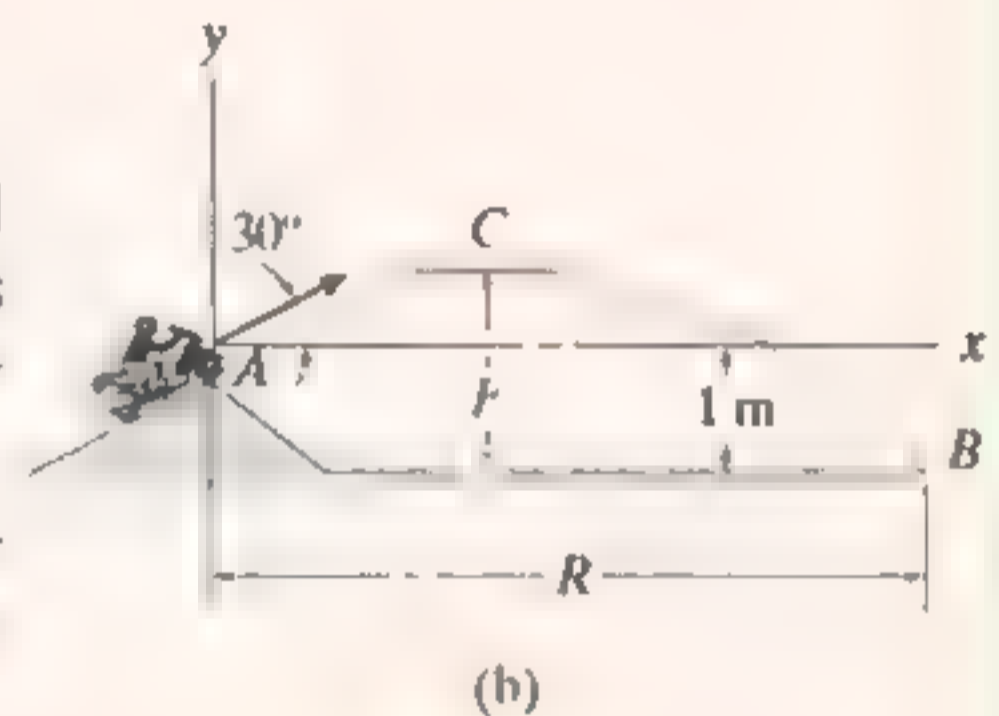


Fig. 12-23

## PROBLEMA PRELIMINAR

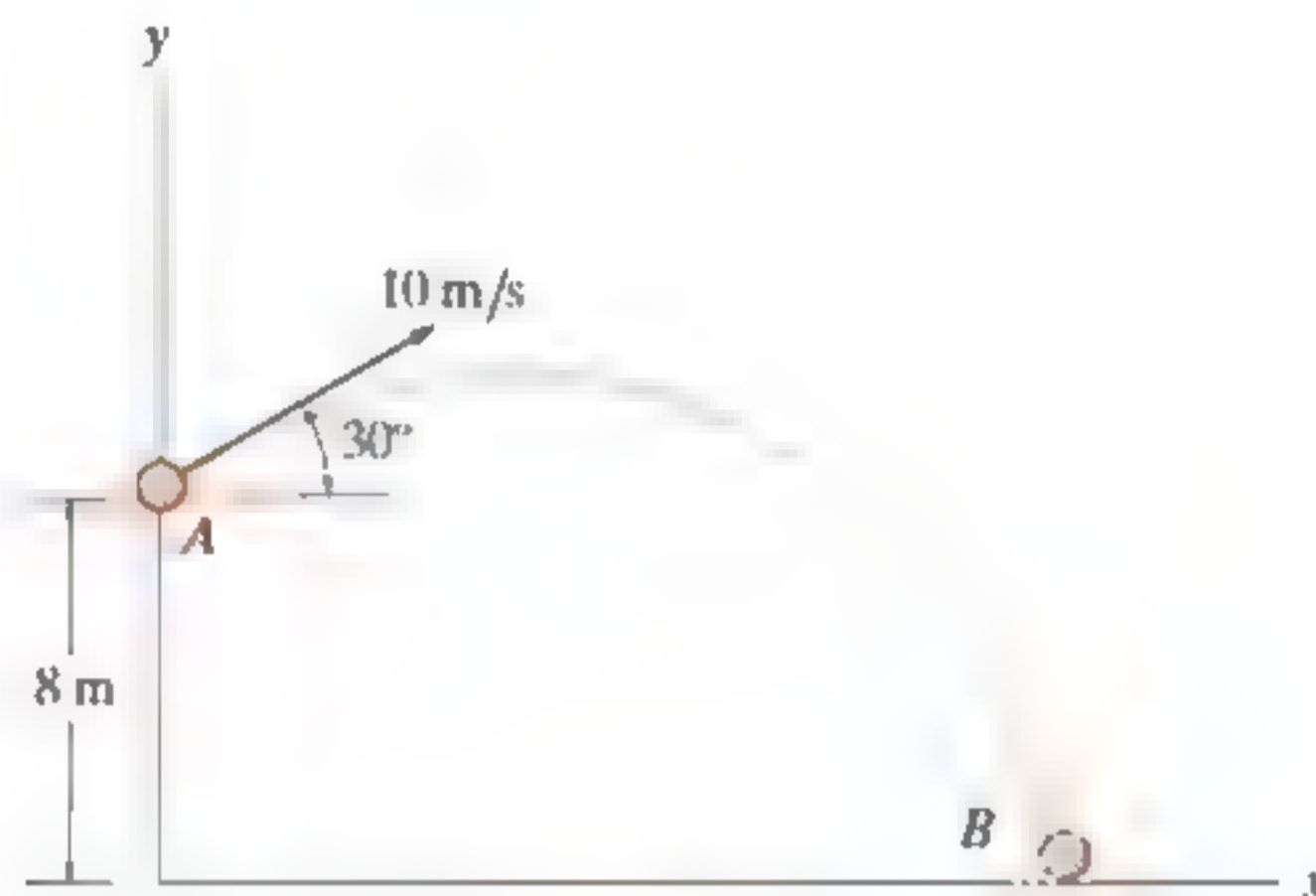
**P12-3.** Use la regla de la cadena y encuentre  $\dot{y}$  y  $\ddot{y}$  en términos de  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$  si

a)  $y = 4x^2$

b)  $y = 3e^x$

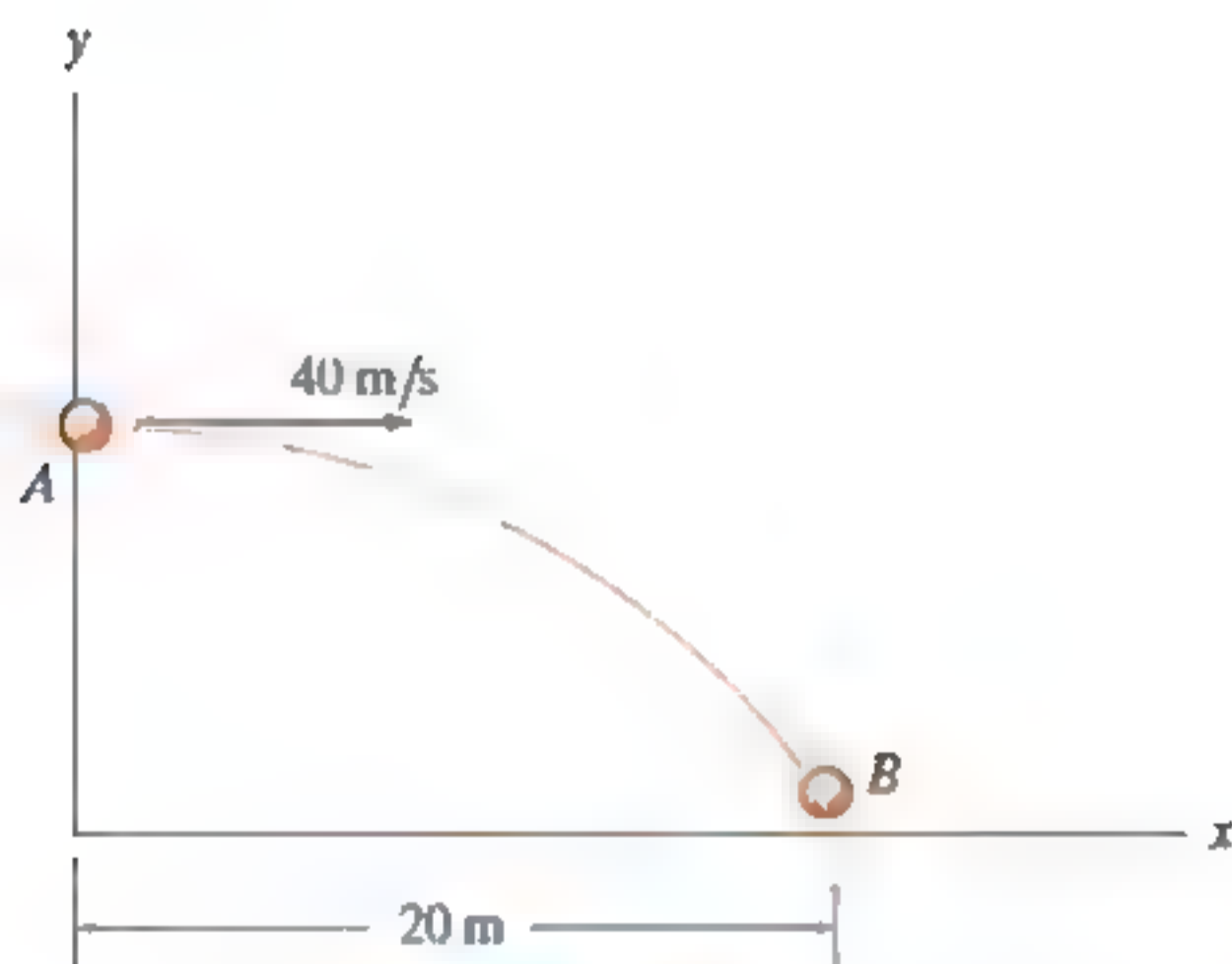
c)  $y = 6 \sin x$

**P12-5.** La partícula viaja desde  $A$  hasta  $B$ . Identifique las tres incógnitas y escriba las tres ecuaciones necesarias para resolverlas.



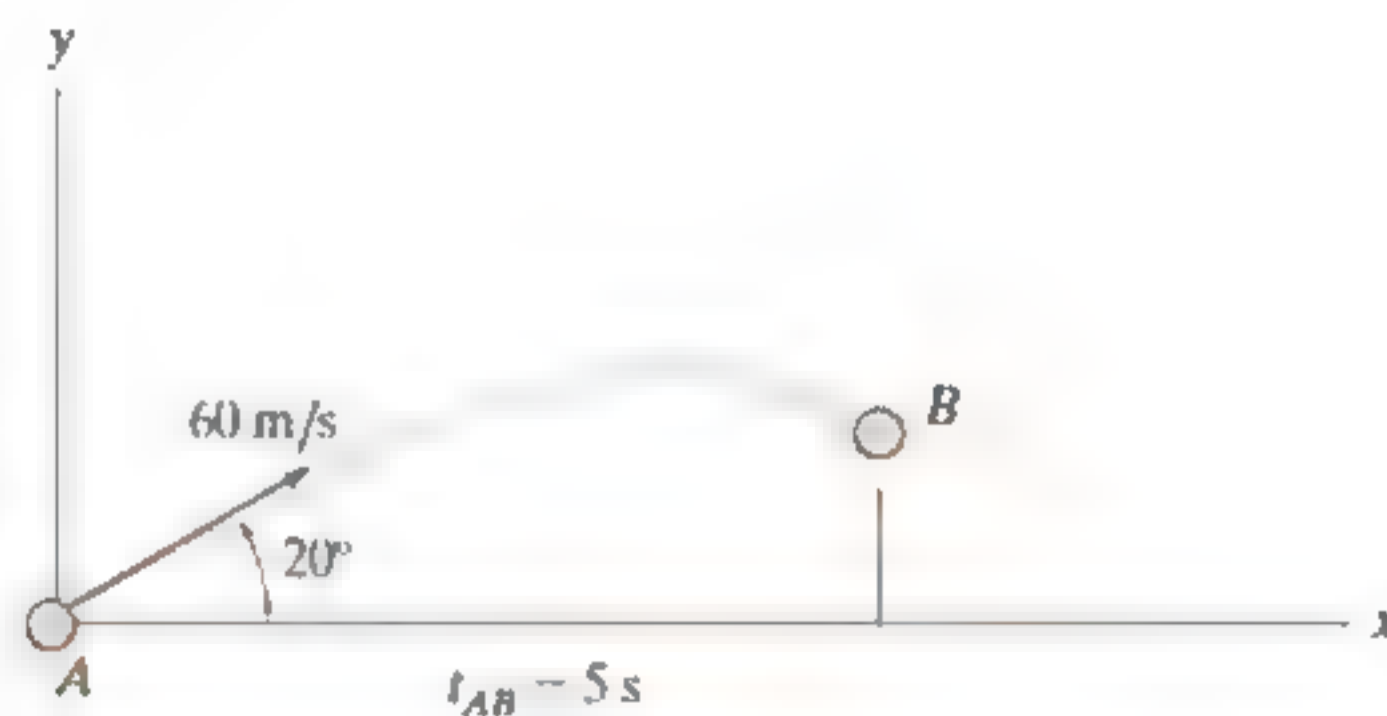
Prob. P12-5

**P12-4.** La partícula viaja desde  $A$  hasta  $B$ . Identifique las tres incógnitas y escriba las tres ecuaciones necesarias para resolverlas.



Prob. P12-4

**P12-6.** La partícula viaja desde  $A$  hasta  $B$ . Identifique las tres incógnitas y escriba las tres ecuaciones necesarias para resolverlas.

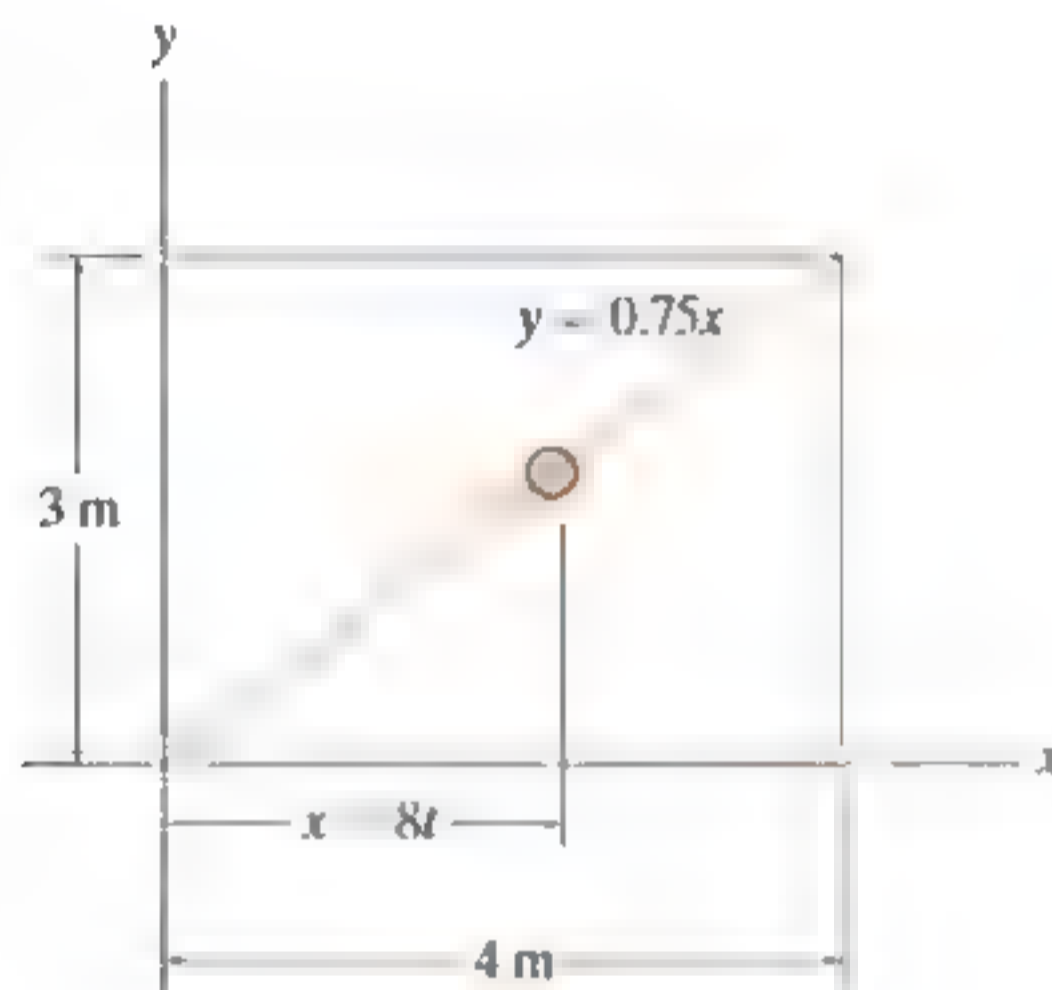


Prob. P12-6

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

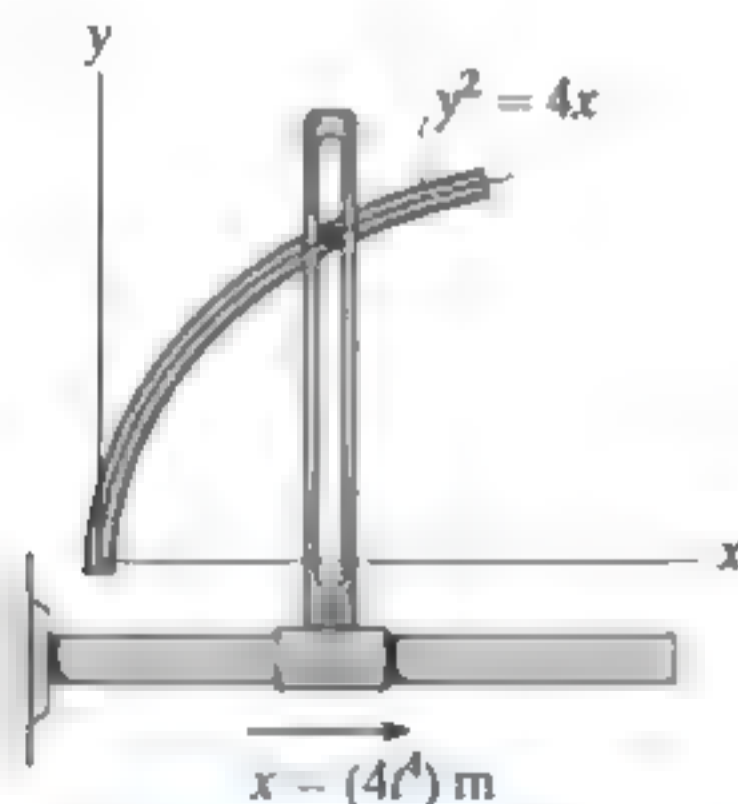
**F12-15.** Si las componentes  $x$  y  $y$  de la velocidad de una partícula son  $v_x = (32t)$  m/s y  $v_y = 8$  m/s, determine la ecuación de la trayectoria  $y = f(x)$ , si  $x = 0$  y  $y = 0$  cuando  $t = 0$ .

**F12-16.** Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria recta. Si su posición a lo largo del eje  $x$  es  $x = (8t)$  m, donde  $t$  está en segundos, determine la rapidez cuando  $t = 2$  s.



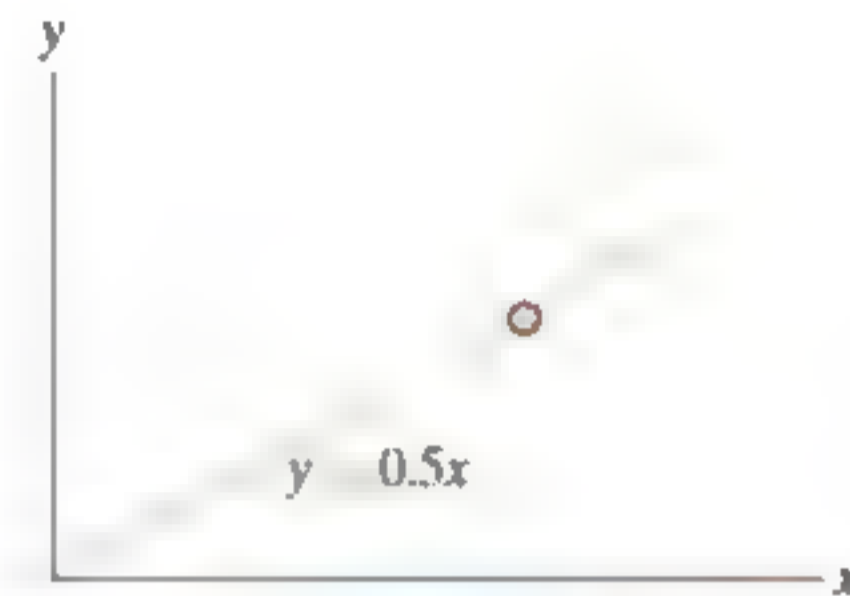
Prob. F12-16

**F12-17.** Se hace que una partícula viaje a lo largo de la trayectoria. Si  $x = (4t^4)$  m, donde  $t$  está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando  $t = 0.5$  s.



Prob. F12-17

**F12-18.** Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria de línea recta  $y = 0.5x$ . Si la componente  $x$  de la velocidad de la partícula es  $v_x = (2t^2)$  m/s, donde  $t$  está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando  $t = 4$  s.



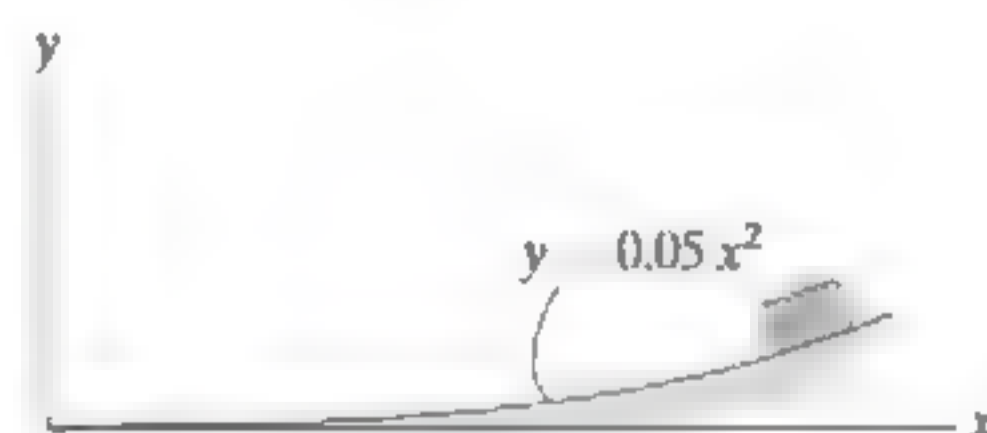
Prob. F12-18

**F12-19.** Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria parabólica  $y = 0.25x^2$ . Si  $x = 8$  m,  $v_x = 8$  m/s y  $a_x = 4$  m/s<sup>2</sup> cuando  $t = 2$  s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en este instante.



Prob. F12-19

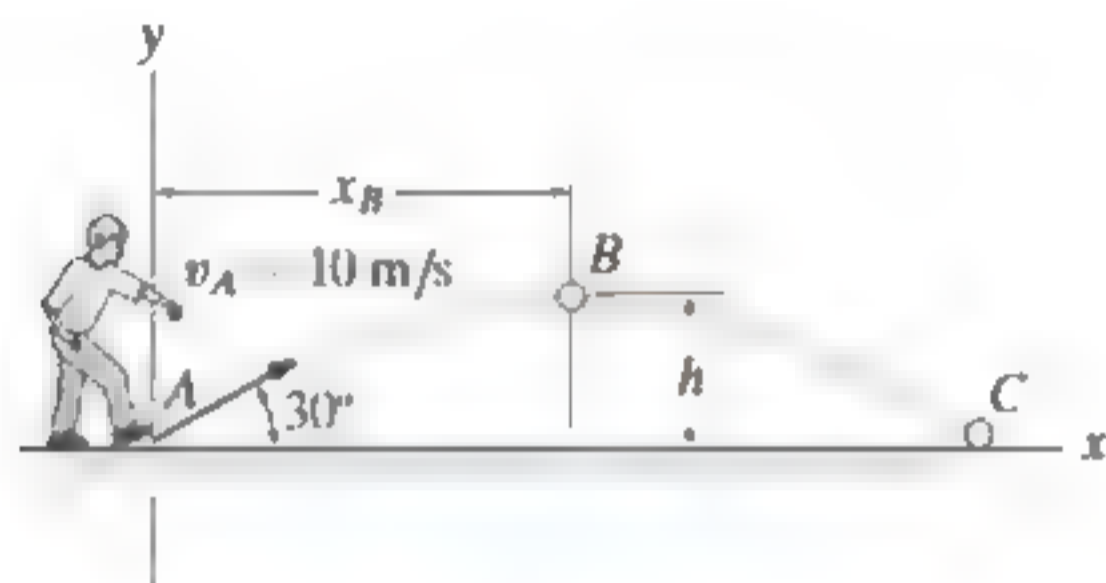
**F12-20.** La caja se desliza hacia abajo sobre la pendiente descrita por la ecuación  $y = (0.05x^2)$  m, donde  $x$  se da en metros. Si la caja tiene las componentes  $x$  de la velocidad y la aceleración de  $v_x = -3$  m/s y  $a_x = -1.5$  m/s<sup>2</sup> en  $x = 5$  m, determine las componentes  $y$  de la velocidad y la aceleración de la caja en ese instante.



Prob. F12-20

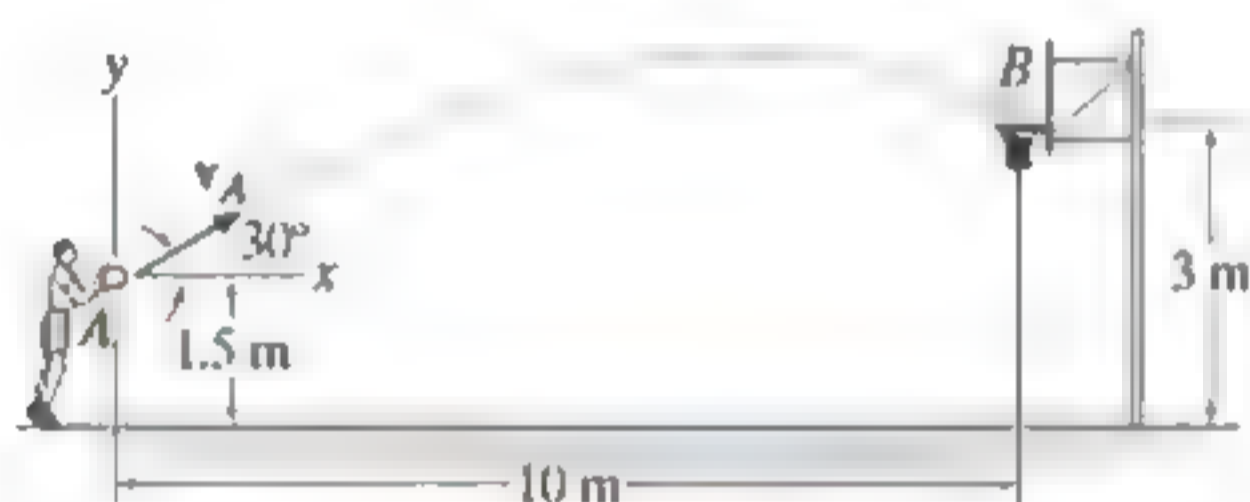
**F12-21.** La pelota se patea desde el punto  $A$  con la velocidad inicial  $v_A = 10$  m/s. Determine la altura máxima  $h$  que alcanza.

**F12-22.** La pelota se patea desde el punto  $A$  con la velocidad inicial  $v_A = 10$  m/s. Determine la distancia  $R$  y la rapidez con que la pelota golpea el suelo.



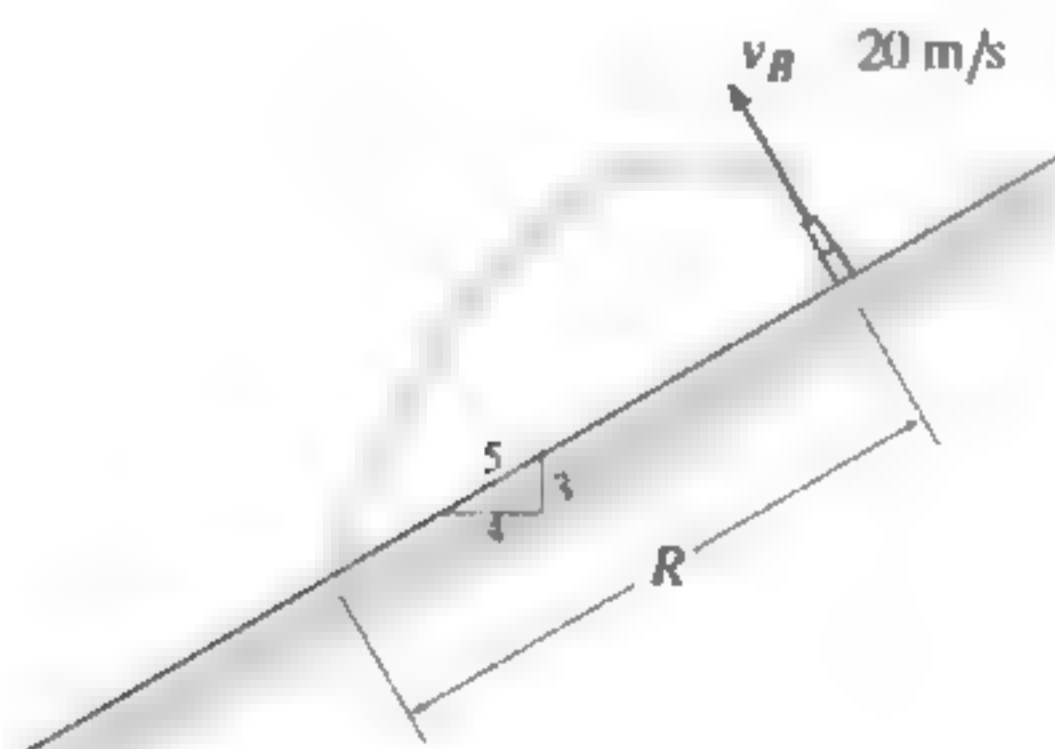
Probs. F12-21/22

**F12-23.** Determine la rapidez  $a$  que se debe lanzar el balón de basketbol en  $A$  al ángulo de  $30^\circ$ , de modo que llegue a la canasta en  $B$ .



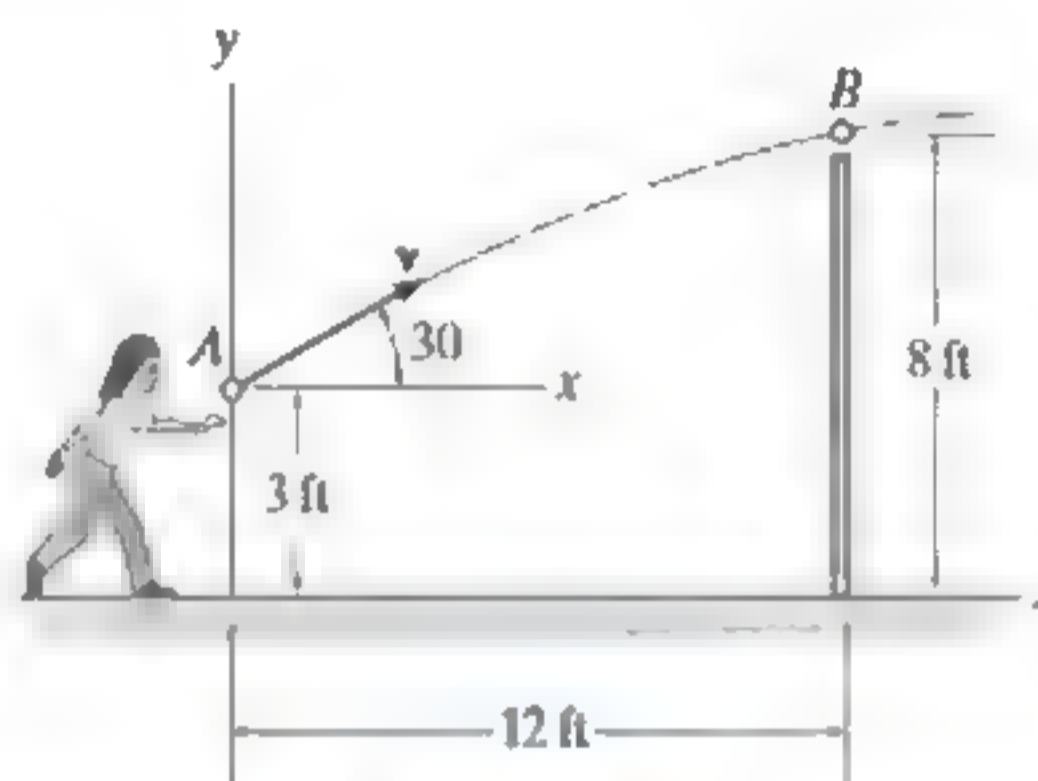
Prob. F12-23

**F12-24.** Se rocía agua a un ángulo de  $90^\circ$  desde la pendiente a  $20$  m/s. Determine la distancia  $R$ .



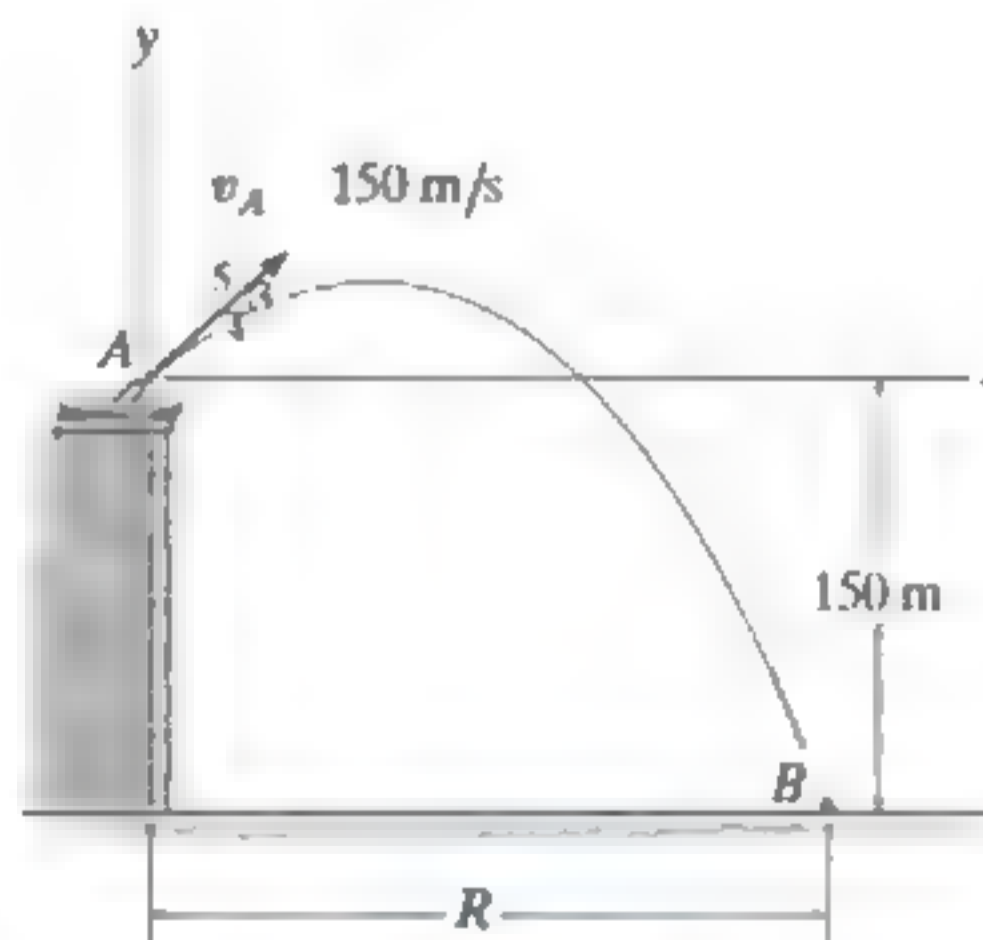
Prob. F12-24

**F12-25.** Se lanza una pelota desde  $A$ . Si se requiere salvar el muro en  $B$ , determine la magnitud mínima de su velocidad inicial  $v_A$ .



Prob. F12-25

**F12-26.** Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de  $v_A = 150$  m/s desde la azotea de un edificio. Determine la distancia  $R$  donde golpea el suelo en  $B$ .



Prob. F12-26

## PROBLEMAS

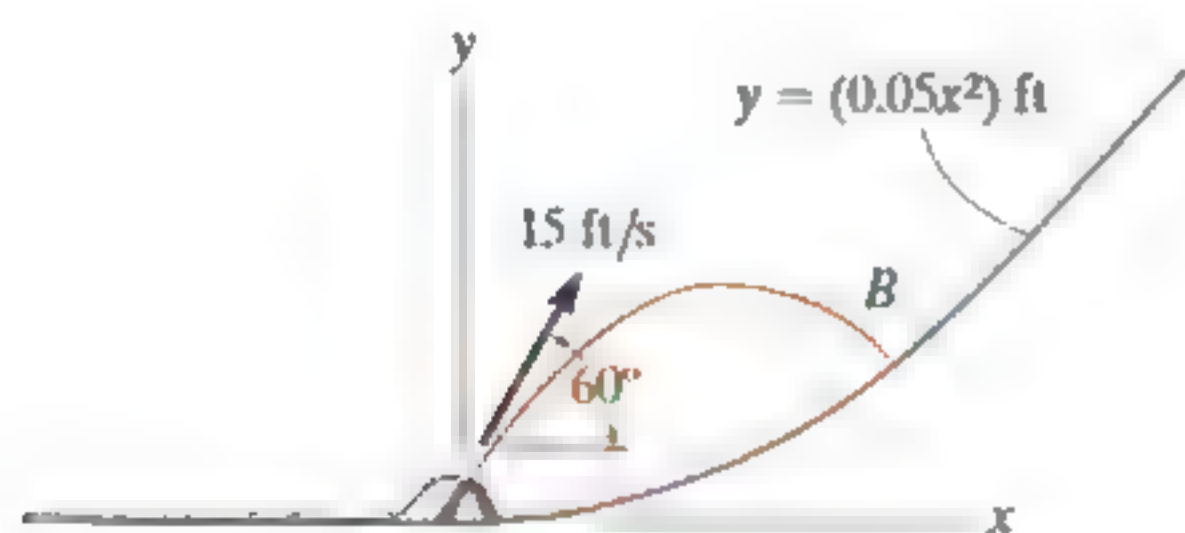
**12-69.** Si la velocidad de una partícula se define como  $\mathbf{v}(t) = [0.8t^2\mathbf{i} + 12t^{1/2}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}]$  m/s, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de la aceleración de la partícula, cuando  $t = 2$  s.

**12-70.** La velocidad de una partícula es  $\mathbf{v} = [3\mathbf{i} + (6 - 2t)\mathbf{j}]$  m/s, donde  $t$  se da en segundos. Si  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  cuando  $t = 0$ , determine el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo desde  $t = 1$  s hasta  $t = 3$  s.

**12-71.** Una partícula que originalmente está en reposo, y que se ubica en el punto (3 ft, 2 ft, 5 ft), se somete a una aceleración de  $\mathbf{a} = [6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{k}]$  ft/s<sup>2</sup>. Determine la posición  $(x, y, z)$  de la partícula en  $t = 1$  s.

**\*12-72.** La velocidad de una partícula está dada por  $\mathbf{v} = [16t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}]$  m/s, donde  $t$  se da en segundos. Si la partícula está en el origen cuando  $t = 0$ , determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando  $t = 2$  s. Además, ¿cuál es la posición  $x, y, z$  de la partícula en ese instante?

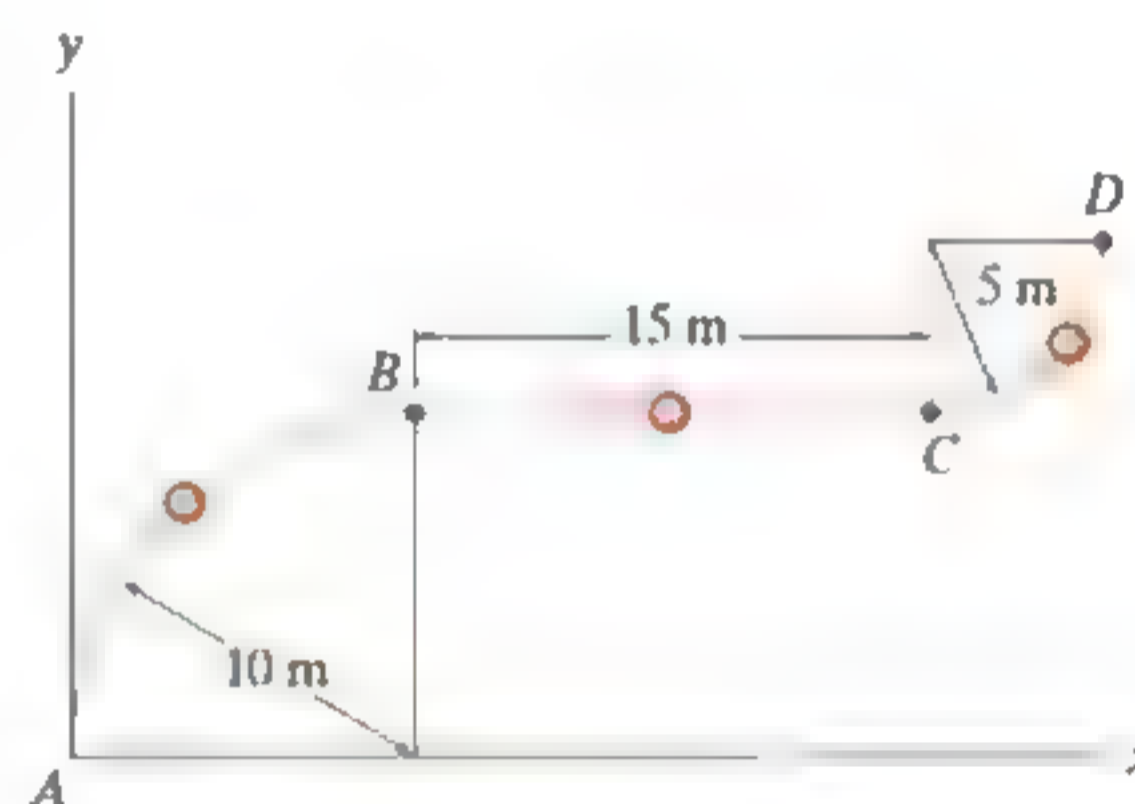
**12-73.** El aspersor de agua, colocado en la base de una colina, lanza un chorro de agua con una velocidad de 15 ft/s, de la manera indicada. Determine el punto  $B(x, y)$ , donde el agua golpea al suelo en la colina. Suponga que la colina está definida por la ecuación  $y = (0.05x^2)$  ft y desprecie el tamaño del aspersor.



Prob. 12-73

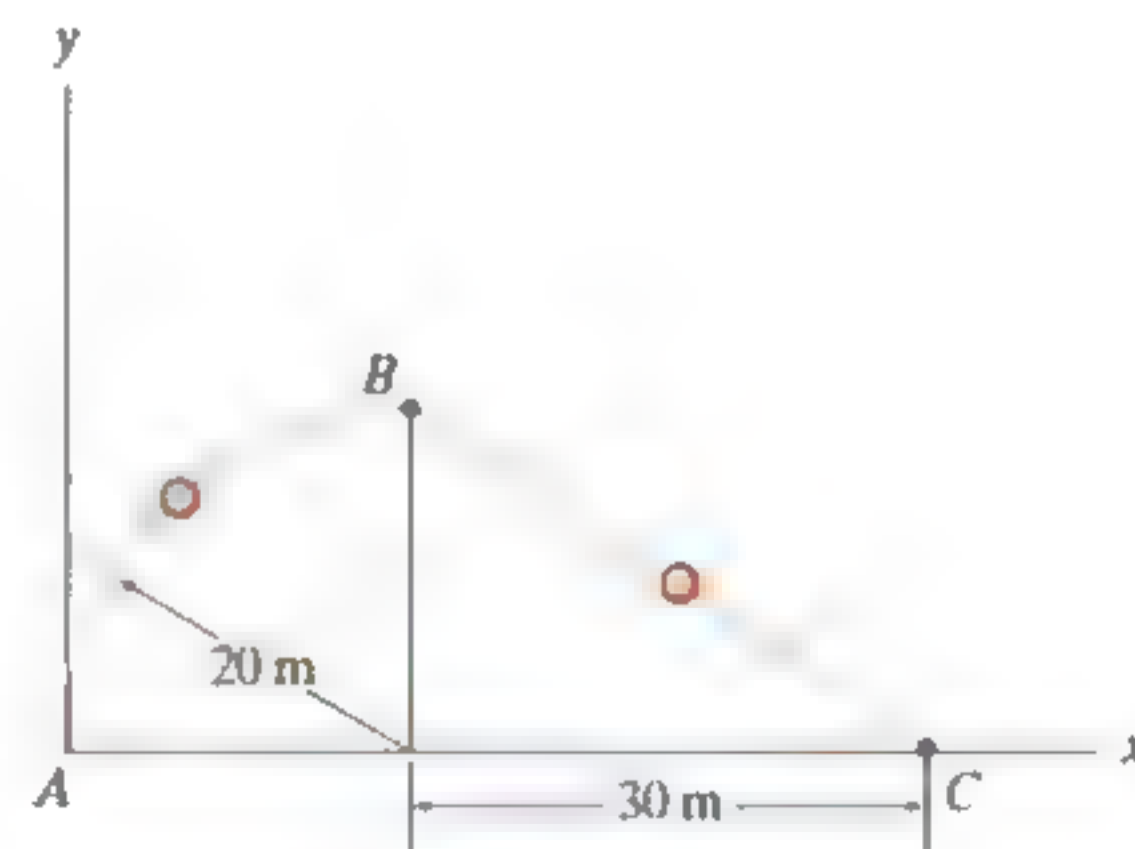
**12-74.** Una partícula, que inicialmente está en reposo y que se encuentra en el punto (3 ft, 2 ft, 5 ft), se somete a una aceleración  $\mathbf{a} = [6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{k}]$  ft/s<sup>2</sup>. Determine la posición  $(x, y, z)$  de la partícula cuando  $t = 2$  s.

**12-75.** Una partícula se desplaza a lo largo de la curva desde  $A$  hasta  $B$  en 2 s. Tarda 4 s en ir de  $B$  a  $C$  y, luego, 3 s en ir de  $C$  a  $D$ . Determine su rapidez promedio cuando va desde  $A$  hasta  $D$ .



Prob. 12-75

**\*12-76.** Una partícula se desplaza a lo largo de la curva desde  $A$  hasta  $B$  en 5 s. Tarda 8 s en ir desde  $B$  hasta  $C$  y después 10 s en ir desde  $C$  hasta  $A$ . Determine su rapidez promedio cuando recorre toda la trayectoria cerrada.

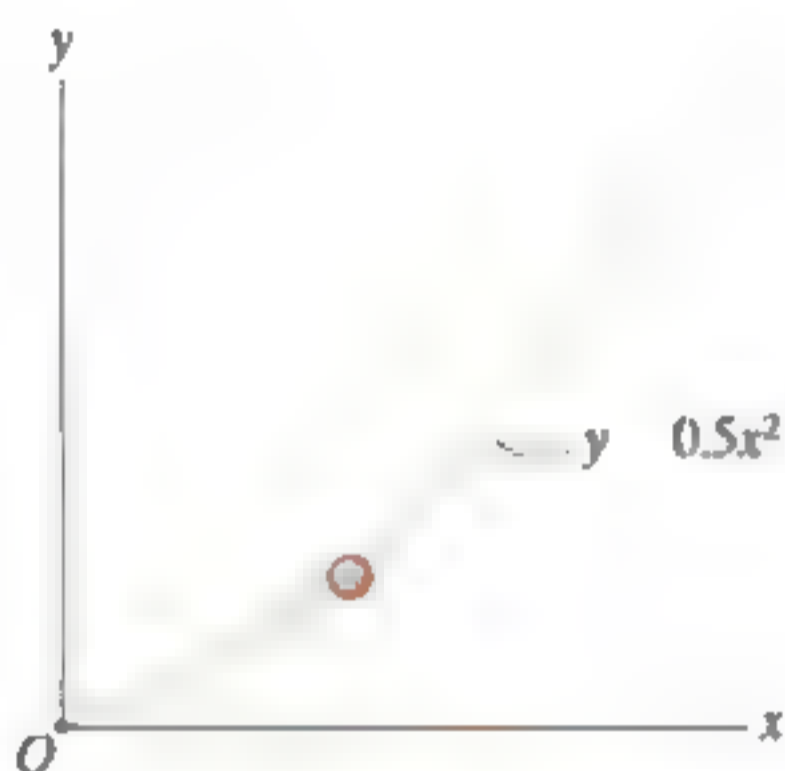


Prob. 12-76

**12-77.** La posición de una caja que se desliza hacia abajo sobre una rampa está dada por  $x = (0.25t^3)$  m,  $y = (1.5t^2)$  m,  $z = (6 - 0.75t^{5/2})$  m, donde  $t$  está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la caja, cuando  $t = 2$  s.

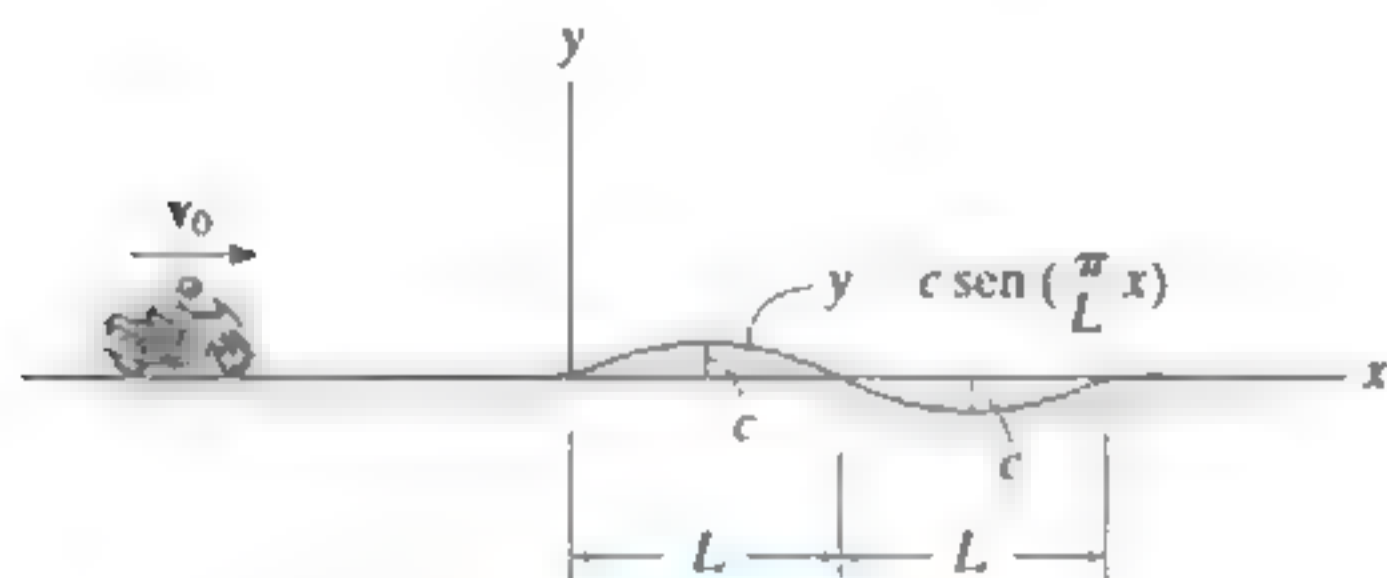
**12-78.** Un cohete se dispara desde el reposo en  $x = 0$  y viaja a lo largo de una trayectoria parabólica descrita por  $y^2 = [120(10^3)x]$  m. Si la componente  $x$  de la aceleración es  $a_x = \left(\frac{1}{4}t^2\right)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $t$  se da en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del cohete cuando  $t = 10$  s.

**12-79.** La partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria definida por la parábola  $y = 0.5x^2$ . Si la componente de velocidad a lo largo del eje  $x$  es  $v_x = (5t)$  ft/s, donde  $t$  está en segundos, determine la distancia de la partícula desde el origen  $O$  y la magnitud de su aceleración cuando  $t = 1$  s. Cuando  $t = 0$ ,  $x = 0$  y  $y = 0$ .



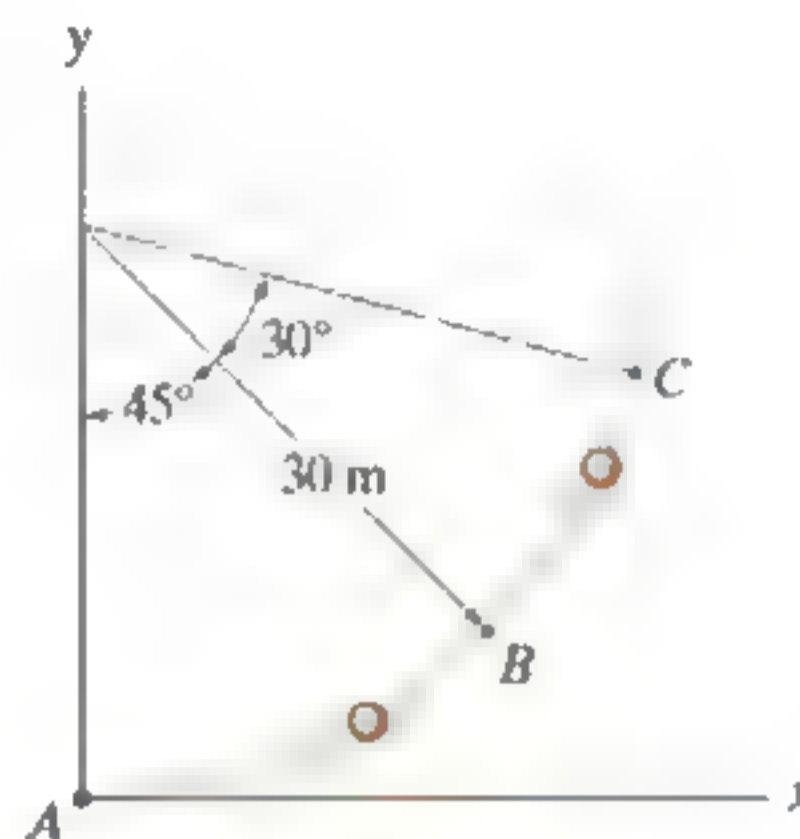
Prob. 12-79

**\*12-80.** La motocicleta viaja con rapidez constante  $v_0$  a lo largo de la trayectoria que, durante una corta distancia, adopta la forma de una curva sinusoidal. Determine las componentes  $x$  y  $y$  de su velocidad en cualquier instante sobre la curva.



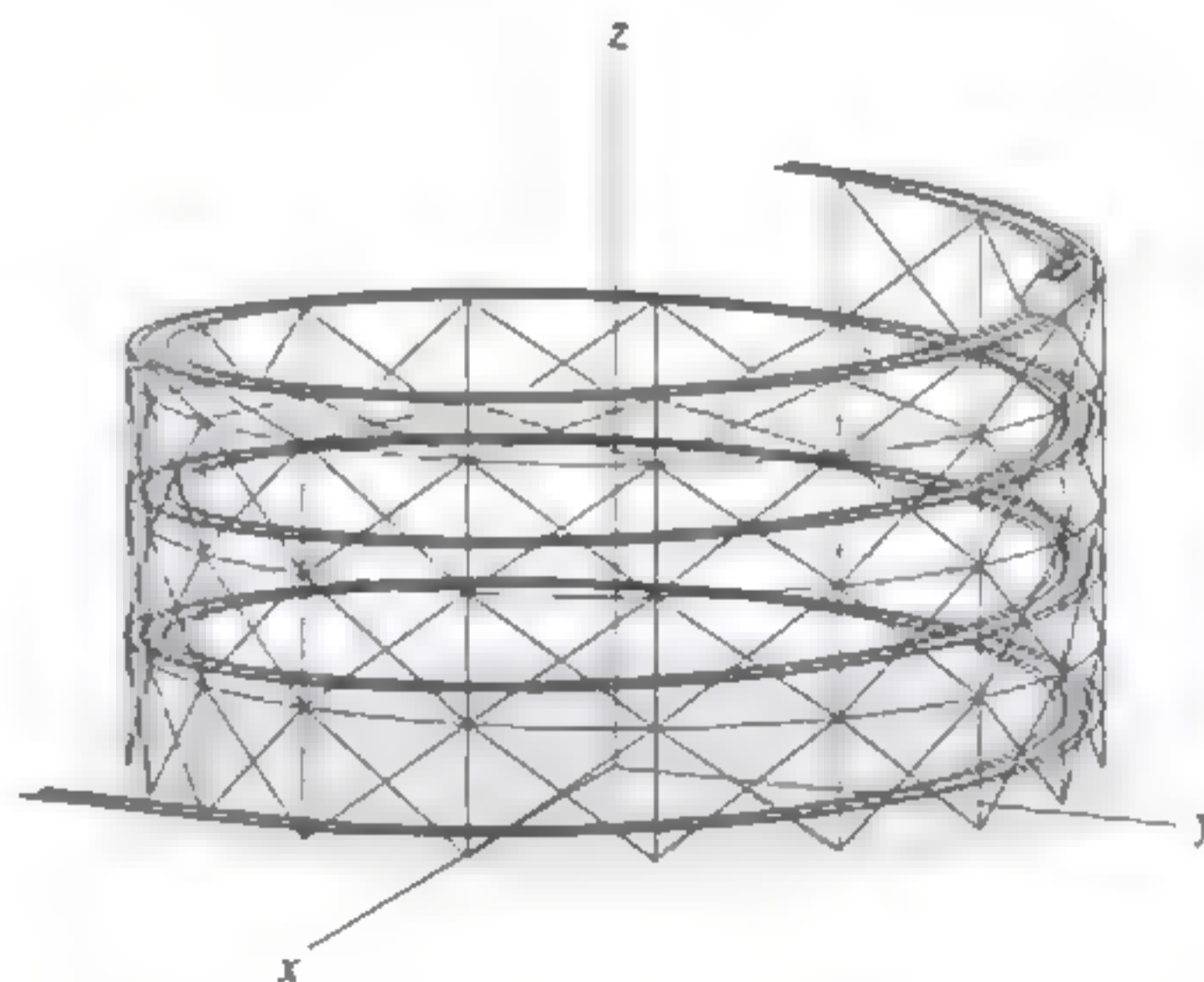
Prob. 12-80

**12-81.** Una partícula se desplaza a lo largo de la curva desde  $A$  hasta  $B$  en 1 s. Si tarda 3 s para ir desde  $A$  hasta  $C$ , determine su *velocidad promedio* cuando va de  $B$  a  $C$ .



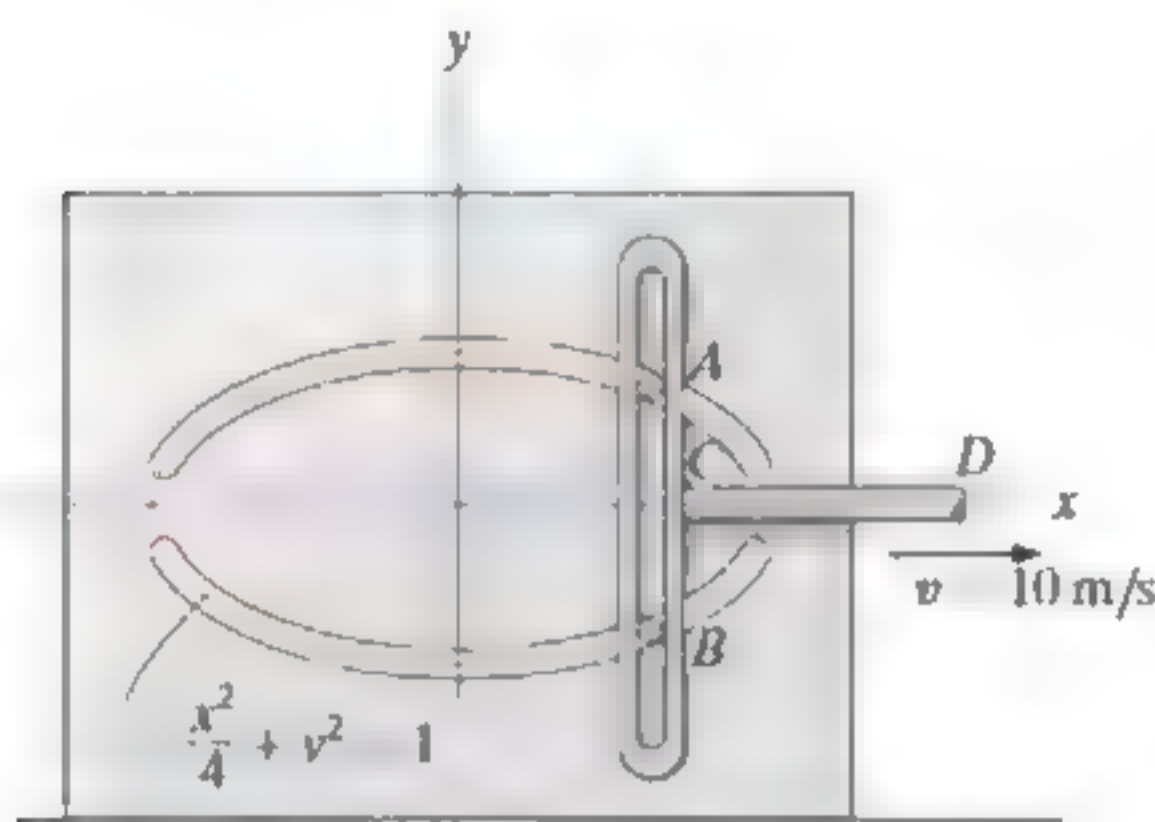
Prob. 12-81

**12-82.** El carro de montaña rusa desciende por la trayectoria helicoidal a una rapidez constante, de modo que las ecuaciones paramétricas que definen su posición son  $x = c \sin kt$ ,  $y = c \cos kt$ ,  $z = h - bt$ , donde  $c$ ,  $h$  y  $b$  son constantes. Determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración.



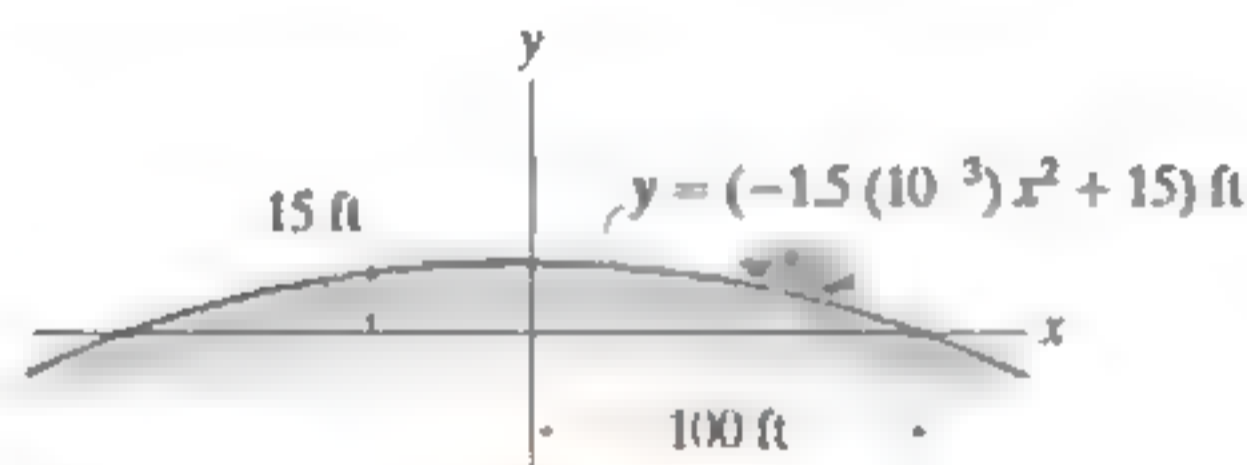
Prob. 12-82

**12-83.** Los pernos guía  $A$  y  $B$  están restringidos a moverse en las ranuras elípticas debido al movimiento del eslabón ranurado. Si el eslabón se mueve con una rapidez constante de  $10 \text{ m/s}$ , determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del perno guía  $A$  cuando  $x = 1 \text{ m}$ .



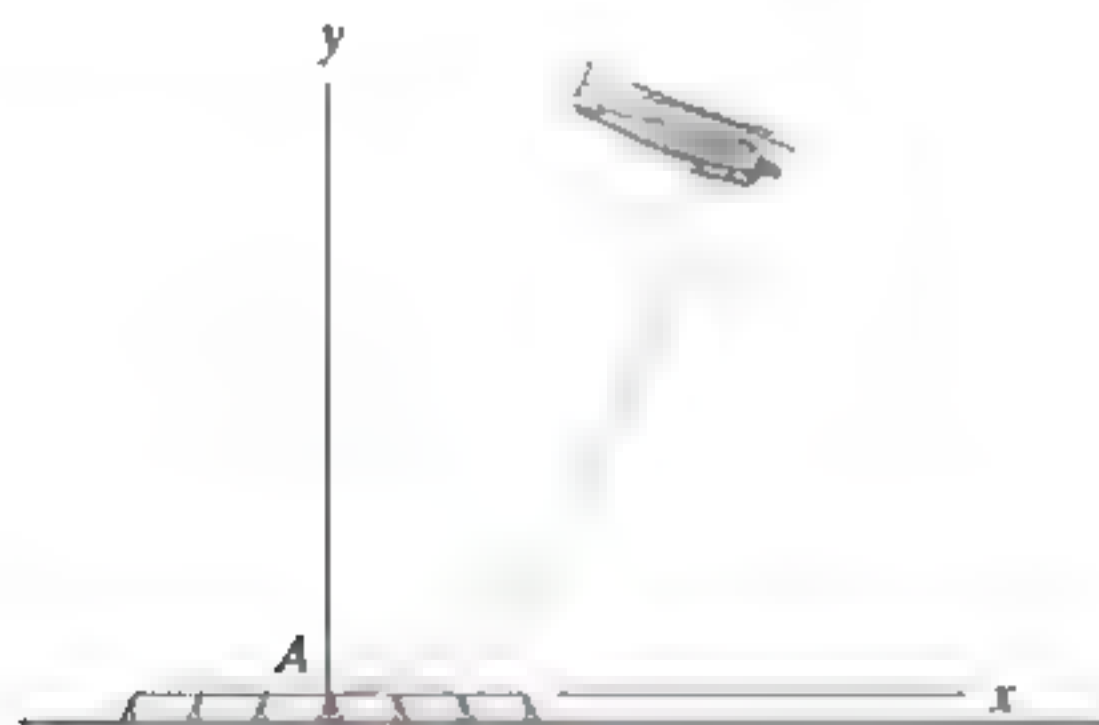
Prob. 12-83

**\*12-84.** La furgoneta se desplaza sobre la colina descrita por  $y = (-1.5(10^{-3})x^2 + 15) \text{ ft}$ . Si tiene una rapidez constante de  $75 \text{ ft/s}$ , determine las componentes  $x$  y  $y$  de la velocidad y la aceleración de la furgoneta cuando  $x = 50 \text{ ft}$ .



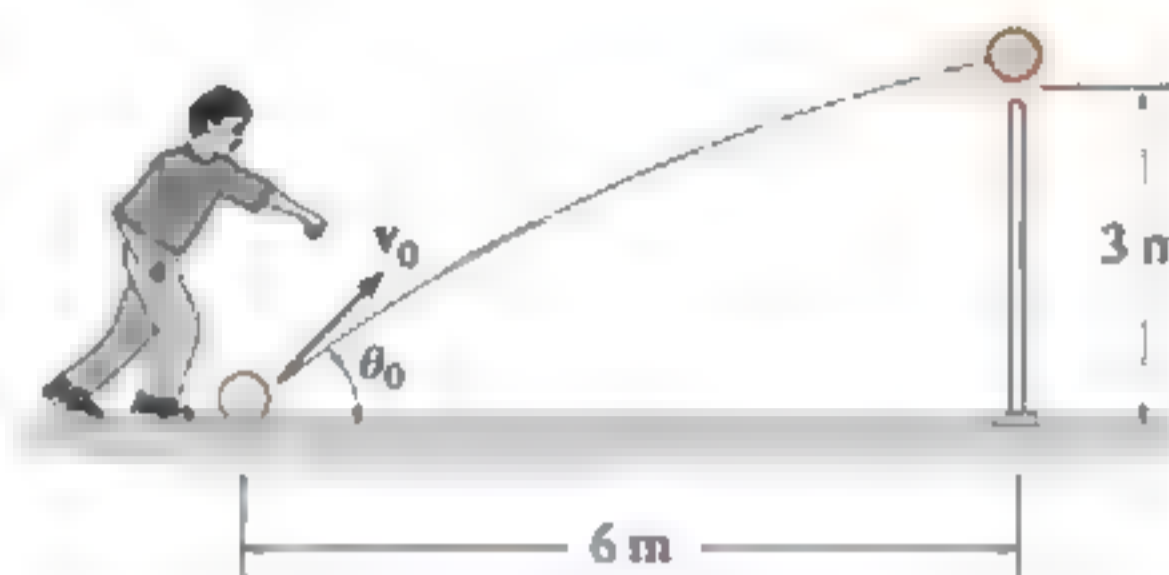
Prob. 12-84

**12-85.** La trayectoria de vuelo del helicóptero cuando despegue desde  $A$  está definida por las ecuaciones paramétricas  $x = (2t^2) \text{ m}$  y  $y = (0.04t^3) \text{ m}$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos. Determine la distancia a la que está el helicóptero desde el punto  $A$  y las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando  $t = 10 \text{ s}$ .



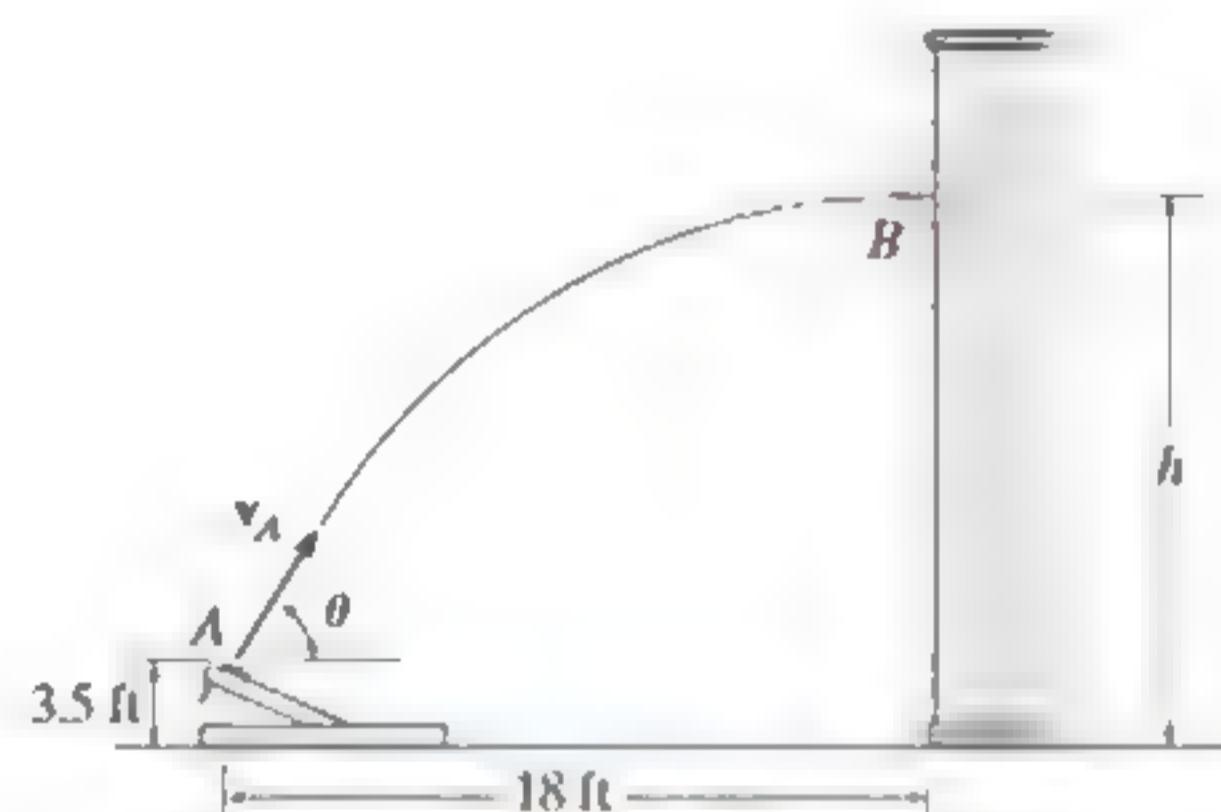
Prob. 12-85

**12-86.** Determine la velocidad inicial  $v_0$  mínima y el ángulo correspondiente  $\theta_0$  a los cuales debe patearse el balón para que pase justo sobre la valla que tiene  $3 \text{ m}$  de altura.



Prob. 12-86

**12-87.** La catapulta se utiliza para lanzar una bola de modo que golpee la pared del edificio en la altura máxima de su trayectoria. Si tarda  $1.5 \text{ s}$  en desplazarse desde  $A$  hasta  $B$ , determine la velocidad  $v_A$  a la que se lanza, el ángulo  $\theta$  del lanzamiento y la altura  $h$ .



Prob. 12-87

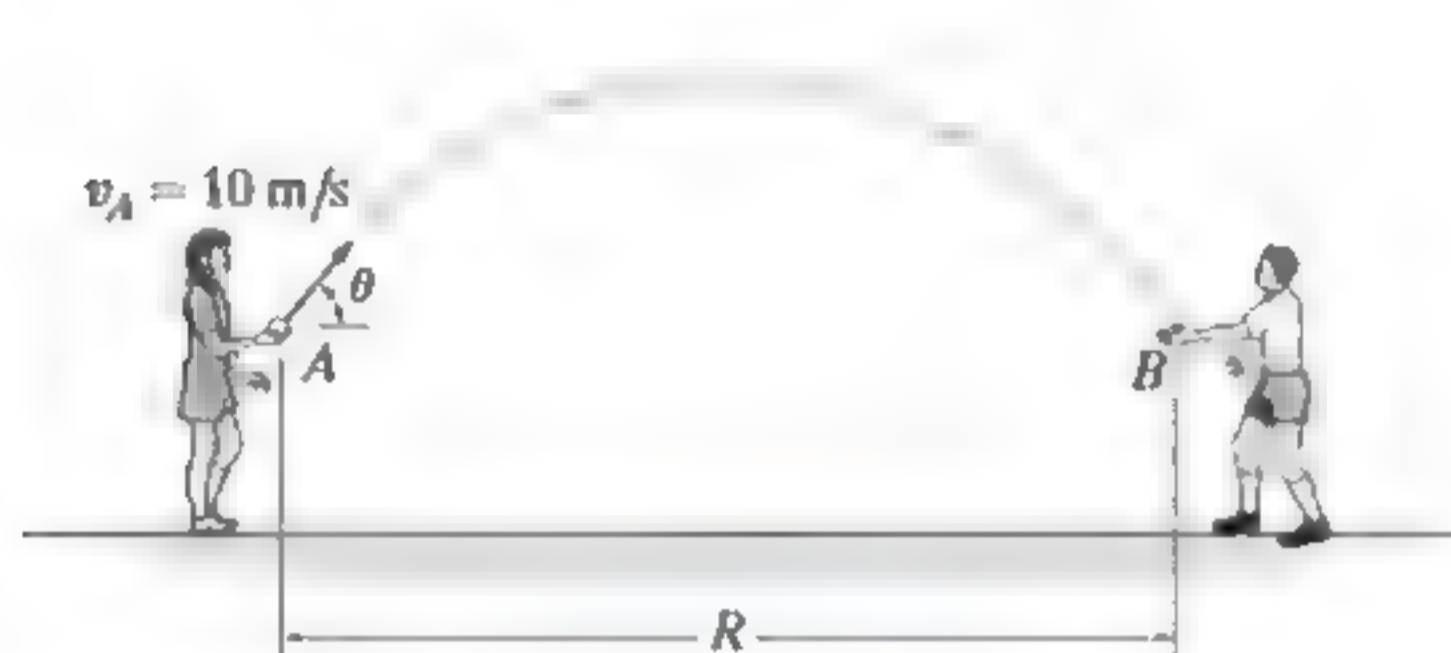
**\*12-88.** Si se desprecia el tamaño del balón, determine la magnitud  $v_A$  de la velocidad inicial del balón de basketbol y su velocidad cuando pasa a través de la canasta.



Prob. 12-88

**12-89.** La niña en  $A$  puede lanzar una pelota con  $v_A = 10 \text{ m/s}$ . Calcule la distancia máxima,  $R = R_{\text{máx}}$ , que puede alcanzar y el ángulo  $\theta$  asociado al que se debería lanzar. Suponga que la pelota es atrapada en  $B$  a la misma altura desde la que se lanza.

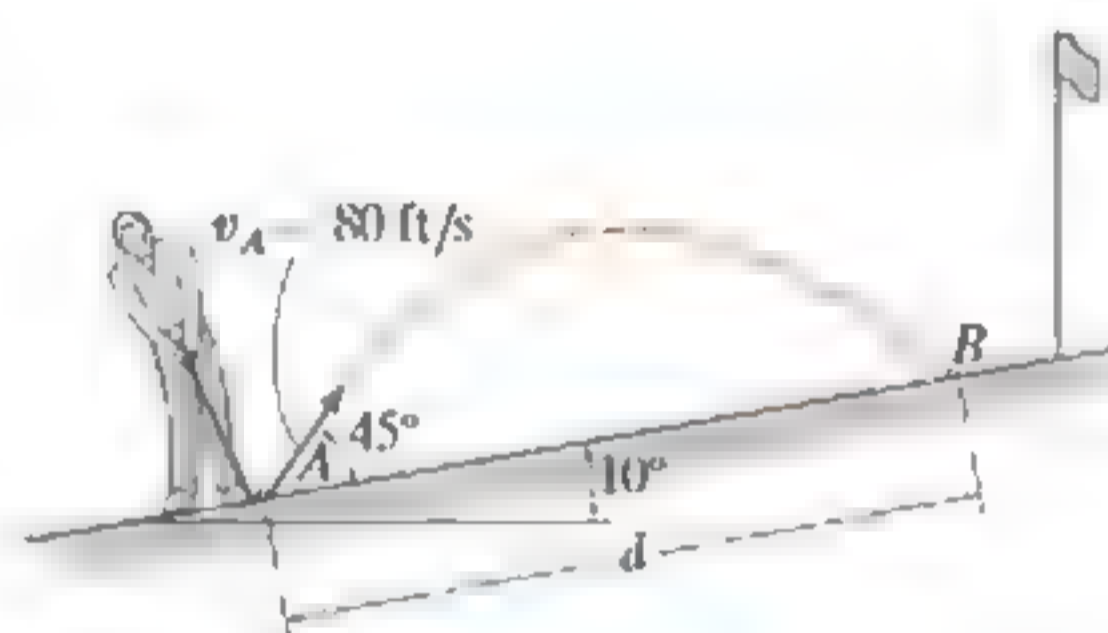
**12-90.** Demuestre que la niña en  $A$  puede arrojar la pelota al niño en  $B$  al lanzarla a cualquiera de los ángulos  $45^\circ - \alpha$  o  $45^\circ + \alpha$ . Si  $v_A = 10 \text{ m/s}$ , determine la distancia  $R$  si  $\alpha = 15^\circ$ , es decir,  $\theta_1 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$  y  $\theta_2 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ . Suponga que la pelota es atrapada a la misma elevación desde la que se lanza.



Probs. 12-89/90

**12-93.** Una pelota de golf es golpeada con una velocidad de  $80 \text{ ft/s}$  como se muestra. Determine la distancia  $d$  donde caerá.

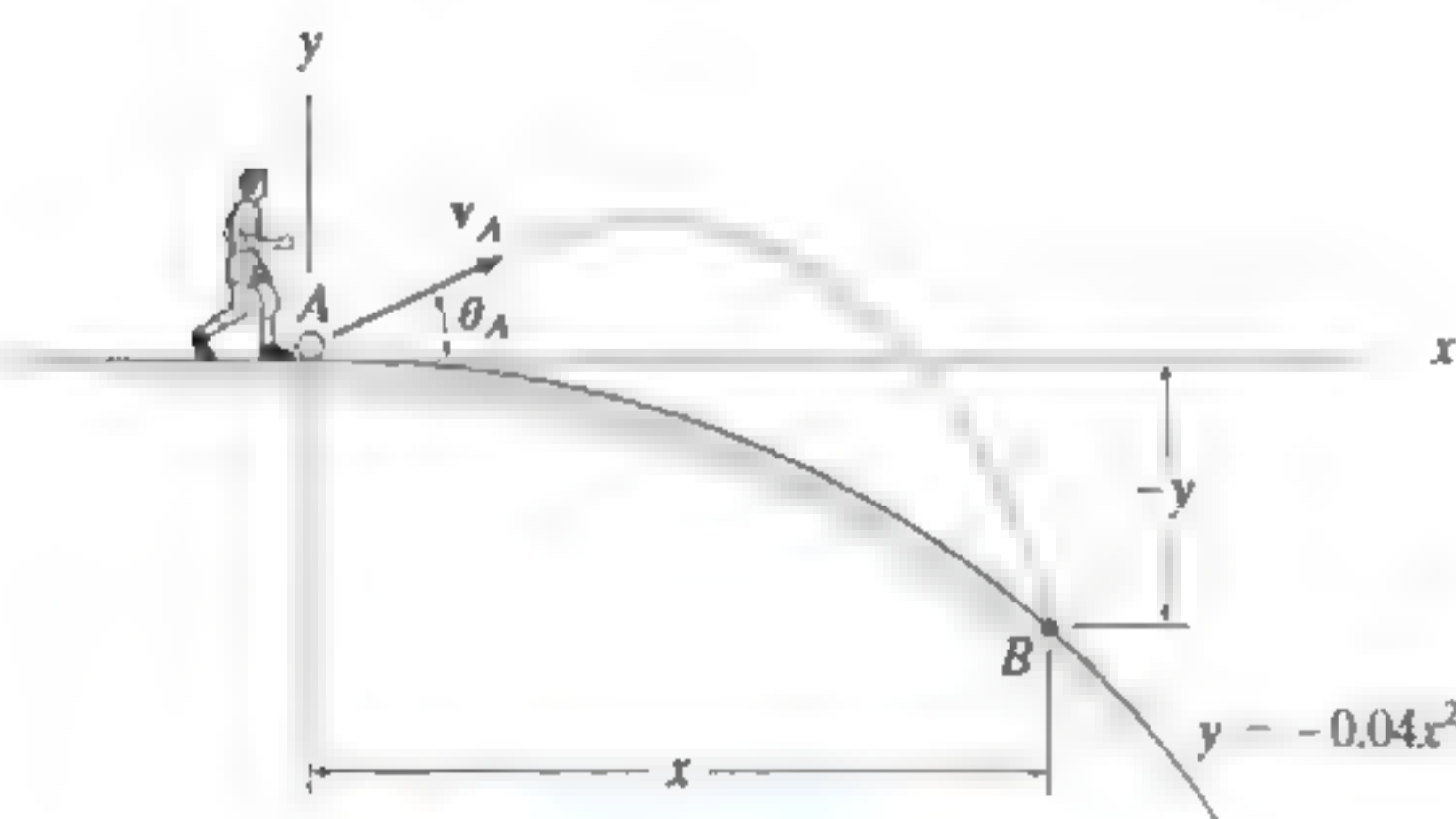
**12-94.** Una pelota de golf es golpeada con una velocidad de  $80 \text{ ft/s}$  como se indica. Determine la rapidez con la que golpea el suelo en  $B$  y su tiempo de vuelo desde  $A$  hasta  $B$ .



Probs. 12-93/94

**12-91.** El balón se pateó en  $A$  con una rapidez  $v_A = 80 \text{ ft/s}$  y a un ángulo  $\theta_A = 30^\circ$ . Determine el punto  $(x, -y)$  donde golpea el suelo. Suponga que el suelo tiene la forma de la parábola que se muestra en la figura.

**\*12-92.** El balón se pateó en  $A$  de modo que  $\theta_A = 30^\circ$ . Si golpea el suelo en  $B$ , que tiene coordenadas  $x = 15 \text{ ft}$ ,  $y = -9 \text{ ft}$ , determine la rapidez con la que fue pateado y la rapidez con la que golpea el suelo.



Probs. 12-91/92

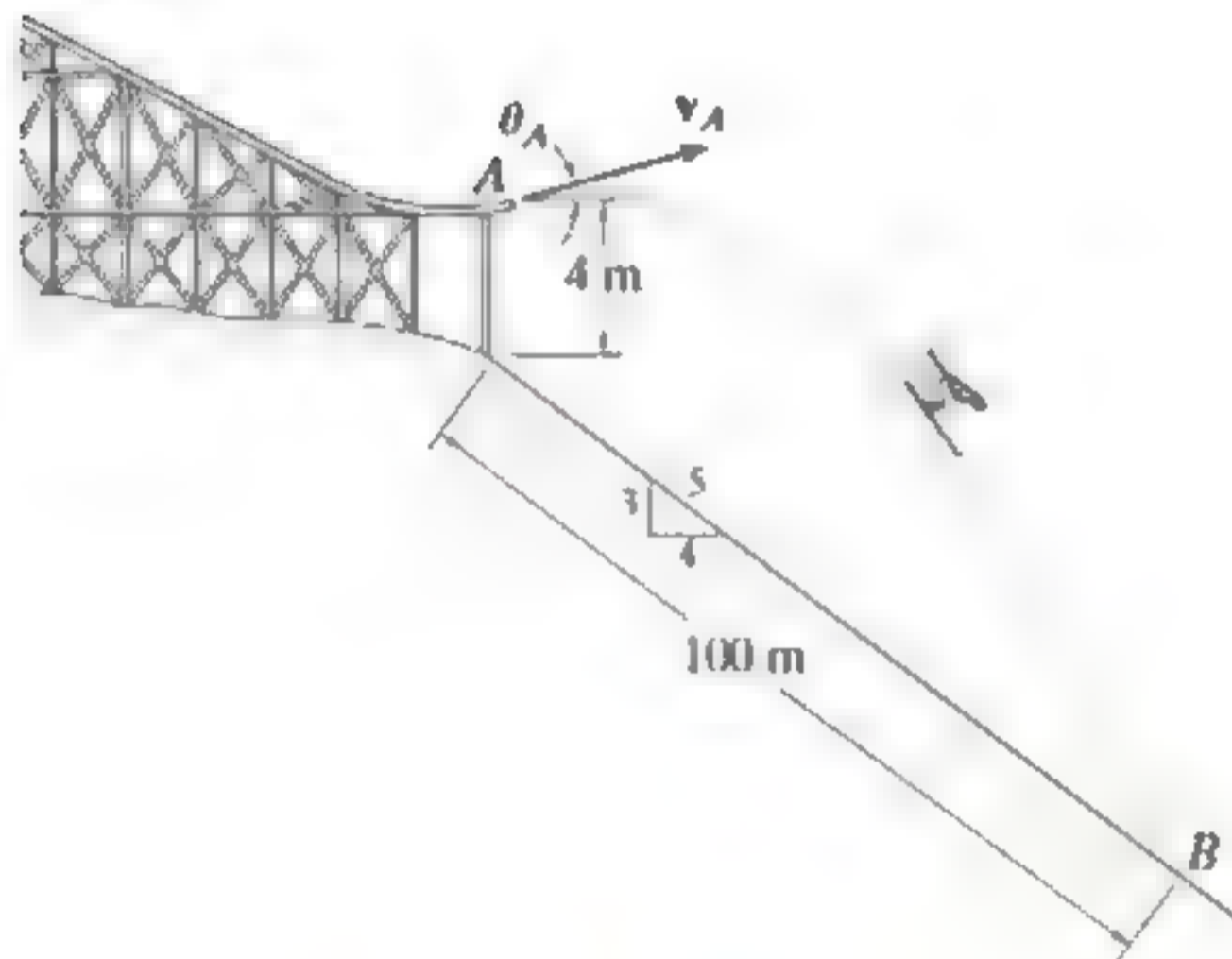
**12-95.** El balón de básquetbol pasó a través del aro aunque apenas superó las manos del jugador  $B$ , quien intentaba bloquearlo. Sin tomar en cuenta el tamaño del balón, determine la magnitud  $v_A$  de su velocidad inicial y la altura  $h$  del balón cuando pasa por encima del jugador  $B$ .



Prob. 12-95

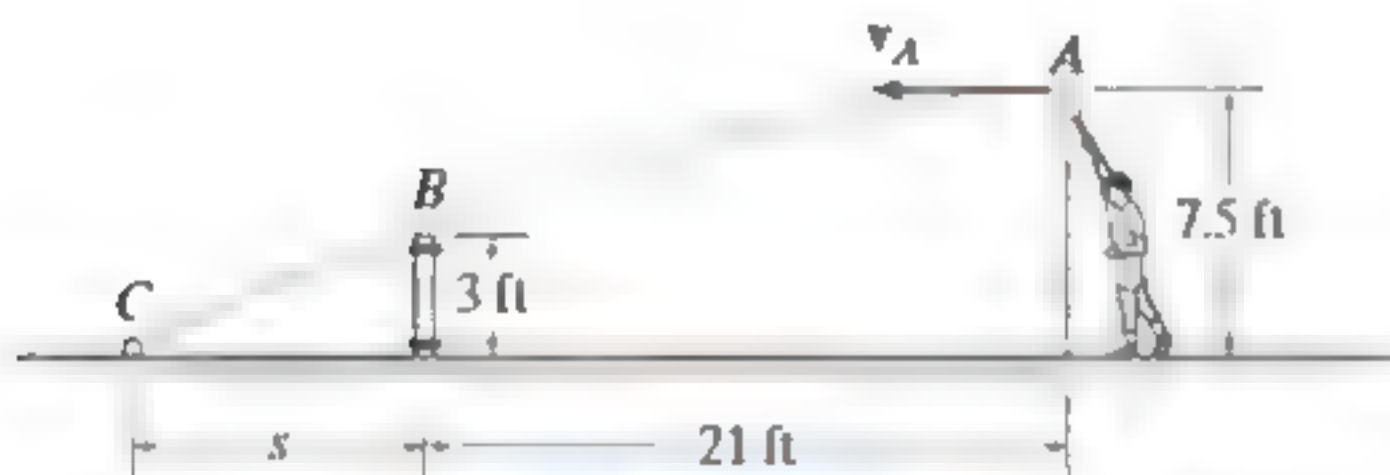
**12-96.** Se observa que el esquiador sale de la rampa en  $A$  a un ángulo  $\theta_A = 25^\circ$  con respecto a la horizontal. Si golpea el suelo en  $B$ , determine su rapidez inicial  $v_A$  y el tiempo de vuelo  $t_{AB}$ .

**12-97.** Se observa que el esquiador sale de la rampa en  $A$  a un ángulo  $\theta_A = 25^\circ$  con respecto a la horizontal. Si golpea el suelo en  $B$ , determine su rapidez inicial  $v_A$  y la rapidez con la que golpea el suelo.



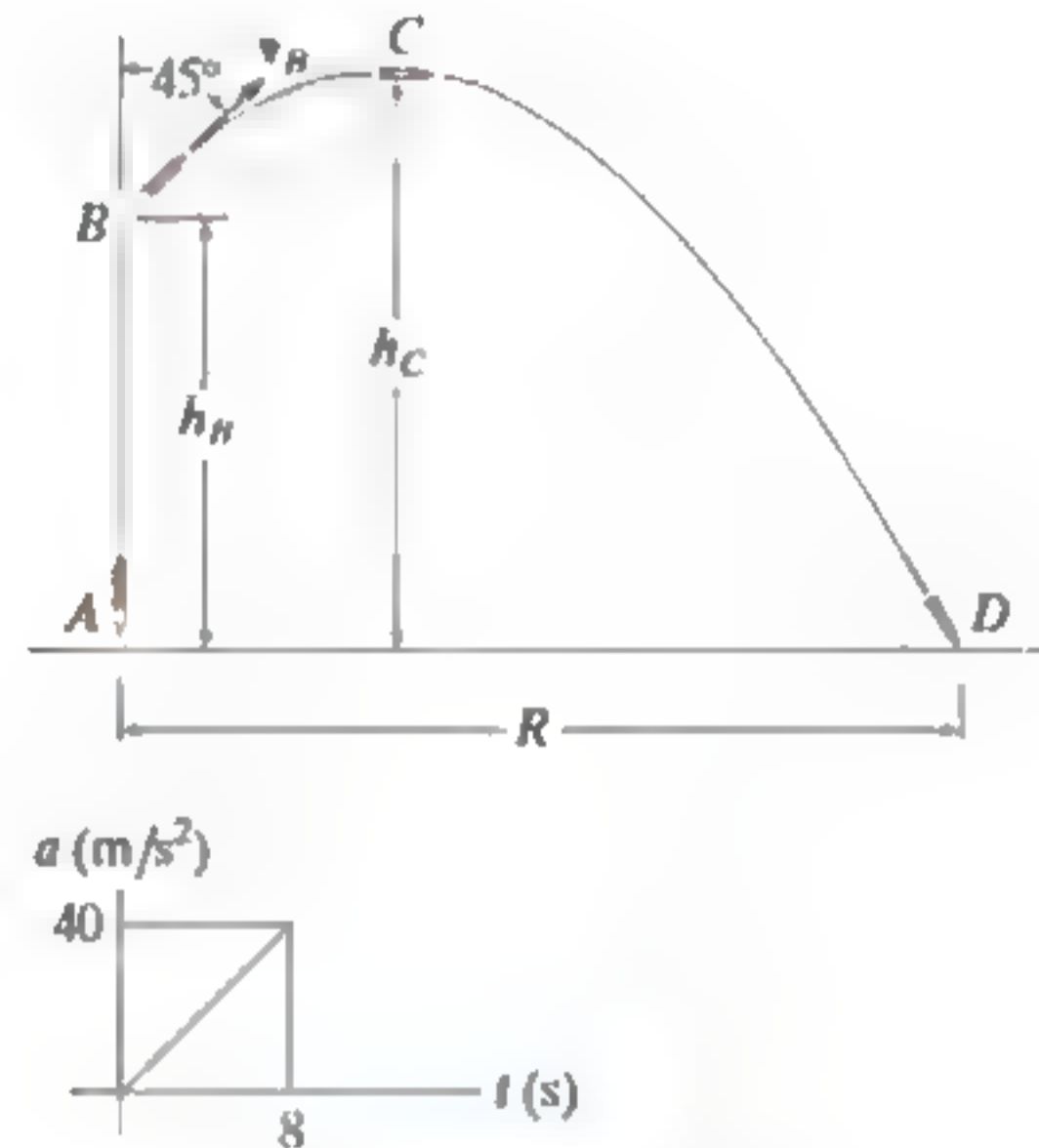
Probs. 12-96/97

**12-98.** Determine la velocidad horizontal  $v_A$  de una pelota de tenis en  $A$  para que apenas pasa la red en  $B$ . Asimismo, calcule la distancia  $s$  donde la pelota golpea el suelo.



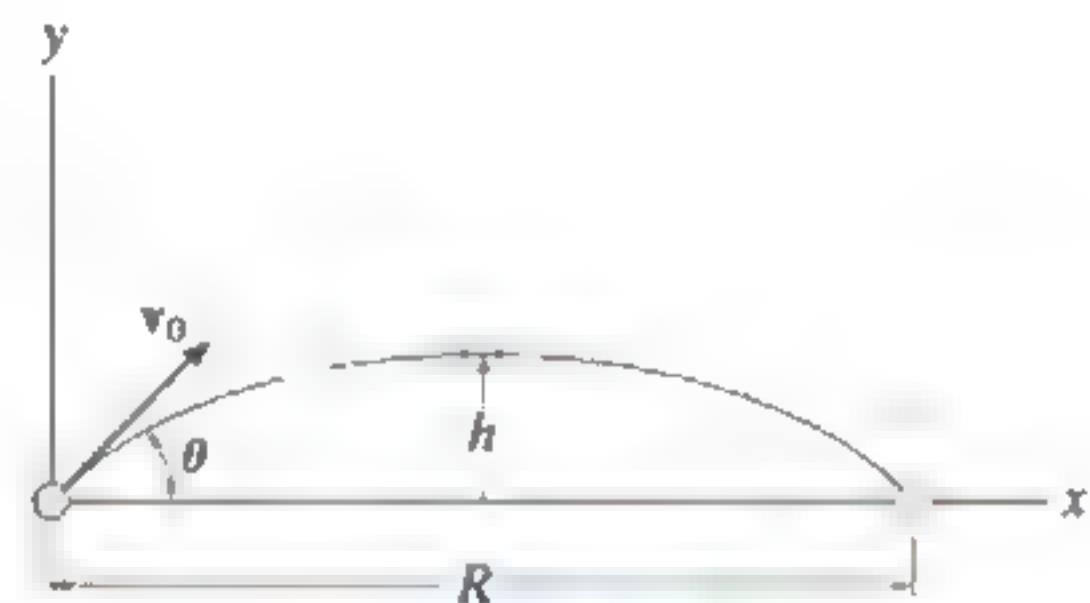
Prob. 12-98

**12-99.** El misil en  $A$  parte del reposo y se eleva verticalmente hasta  $B$ , donde su combustible se agota en 8 s. Si la aceleración varía con el tiempo de la manera mostrada, determine la altura  $h_B$  y la rapidez  $v_B$  del misil. Si mediante los controles internos del misil, éste se apunta repentinamente a  $45^\circ$ , de la forma mostrada en la figura, y se le deja viajar en vuelo libre, determine su altura máxima alcanzada,  $h_C$ , y la distancia  $R$  en la que choca en  $D$ .



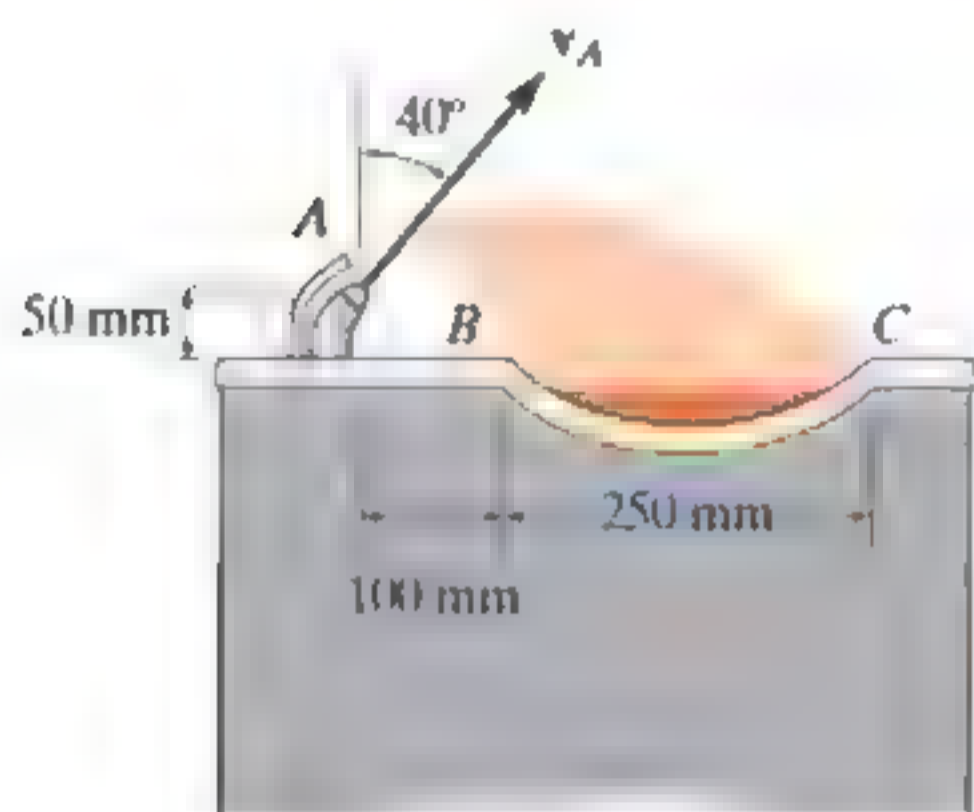
Prob. 12-99

**\*12-100.** El proyectil se lanza con una velocidad  $v_0$ . Determine la distancia  $R$ , la altura máxima  $h$  alcanzada, y el tiempo de vuelo. Expresé los resultados en términos del ángulo  $\theta$  y de  $v_0$ . La aceleración debida a la gravedad es  $g$ .



Prob. 12-100

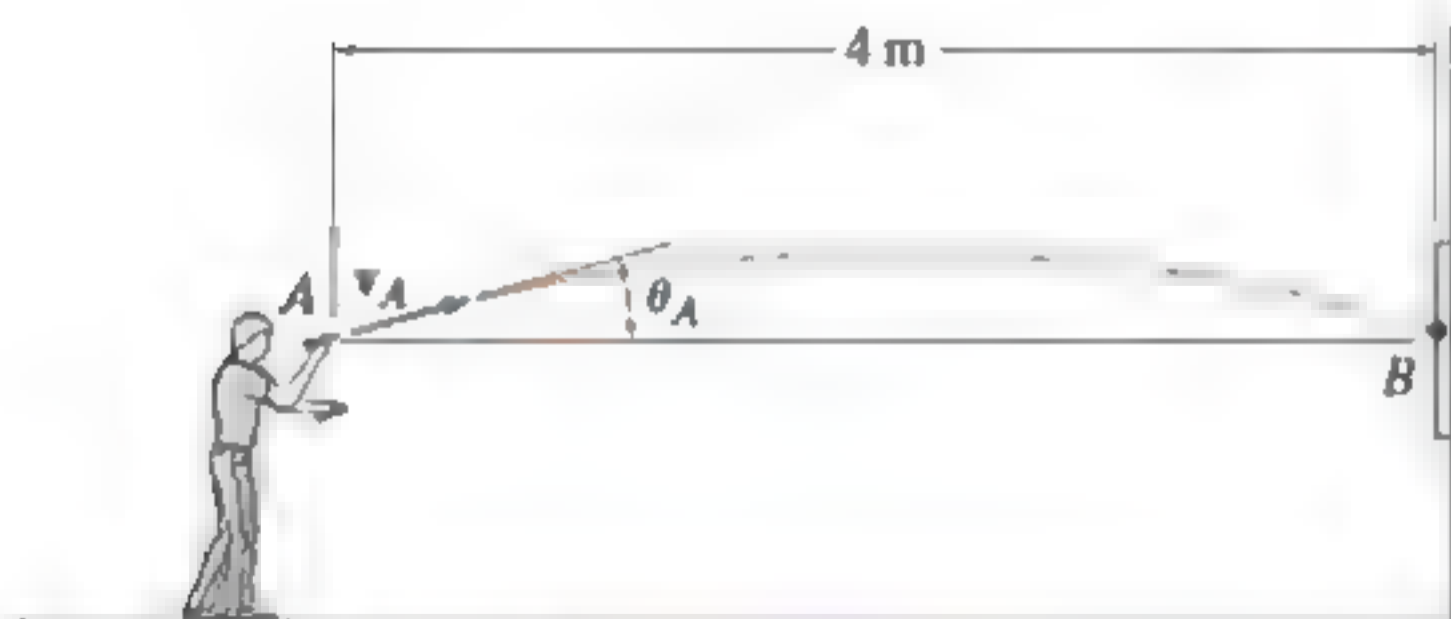
**12-101.** El bebedero de agua está diseñado de modo que la boquilla se ubica a la distancia mostrada desde el borde del lavabo. Determine la rapidez máxima y la rapidez mínima a las que puede lanzarse el agua desde la boquilla para que no salpique los lados de la cavidad del lavabo en  $B$  y  $C$ .



Prob. 12-101

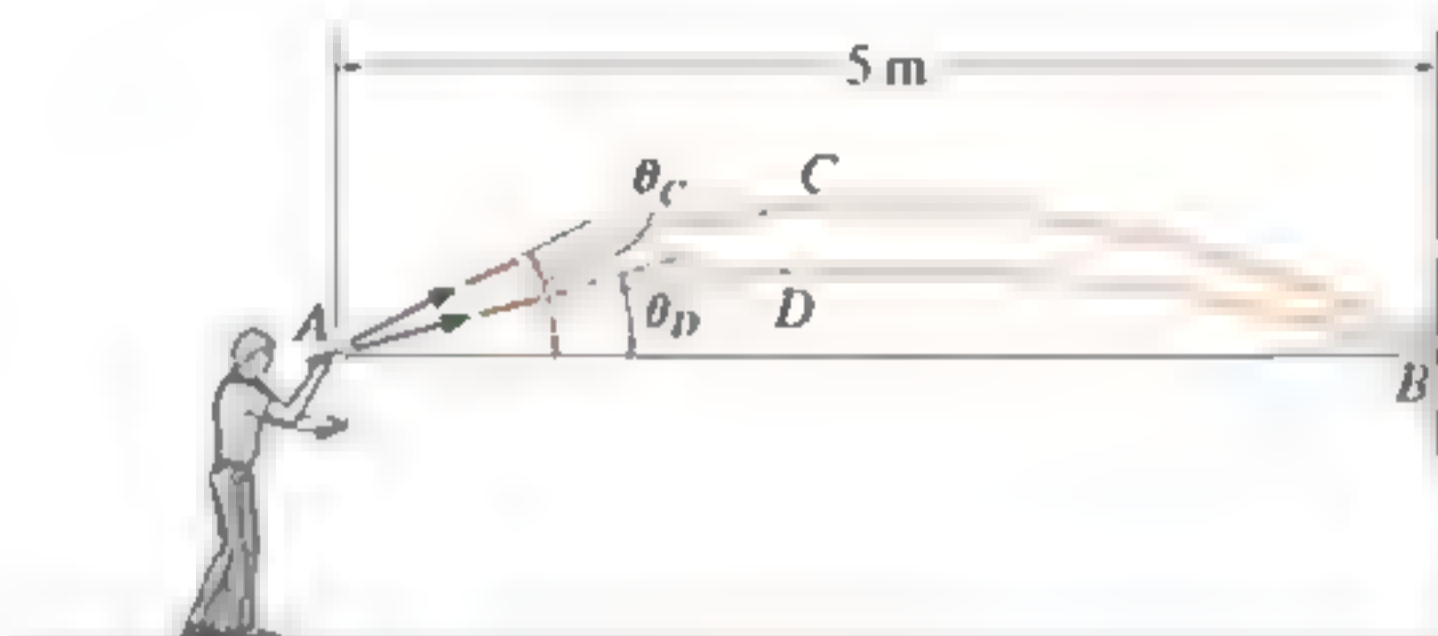
**12-102.** Si el dardo se lanza con una rapidez de 10 m/s, determine el menor tiempo que puede transcurrir hasta golpear el blanco. Además, ¿cuál es el ángulo correspondiente  $\theta_A$  al que debería lanzarse y cuál es la velocidad del dardo cuando golpea el blanco?

**12-103.** Si el dardo se lanza con una rapidez de 10 m/s, determine el mayor tiempo que puede transcurrir hasta golpear el blanco. Además, ¿cuál es el ángulo correspondiente  $\theta_A$  al que debería lanzarse y cuál es la velocidad del dardo cuando golpea el blanco?



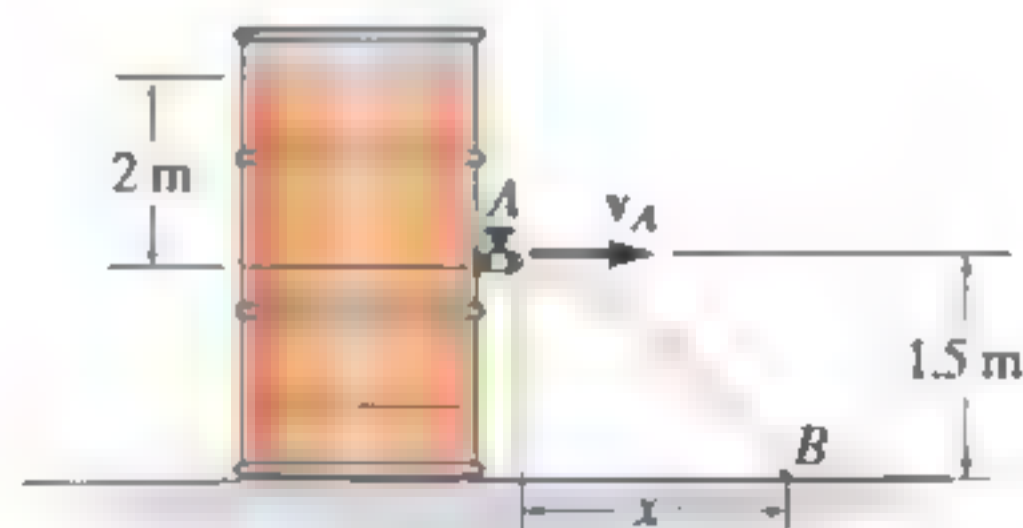
Probs. 12-102/103

**\*12-104.** El hombre en  $A$  desea lanzar dos dardos hacia el blanco en  $B$ , de modo que lleguen *al mismo tiempo*. Si cada dardo se lanza con una rapidez de 10 m/s, determine los ángulos  $\theta_C$  y  $\theta_D$  a los que deberían lanzarse los dardos y el tiempo entre cada uno de los lanzamientos. Tenga en cuenta que el primer dardo debe lanzarse a  $\theta_C$  ( $> \theta_D$ ), entonces el segundo dardo se lanza a  $\theta_D$ .



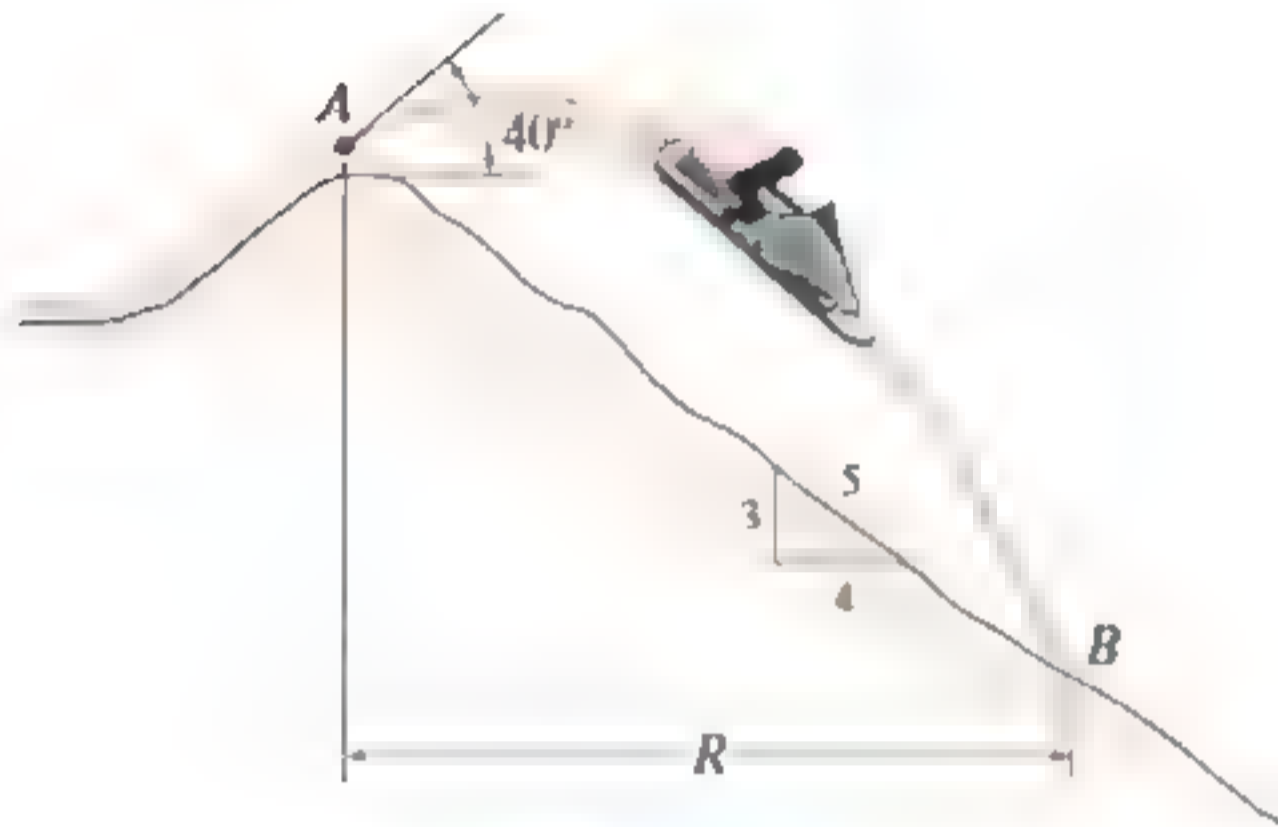
Prob. 12-104

**12-105.** La velocidad del chorro de agua que sale por el orificio se obtiene con  $v = \sqrt{2gh}$ , donde  $h = 2$  m es la profundidad del orificio con respecto a la superficie libre del agua. Determine el tiempo para que una partícula de agua que salga por el orificio llegue al punto  $B$ , así como la distancia horizontal  $x$  donde golpea la superficie.



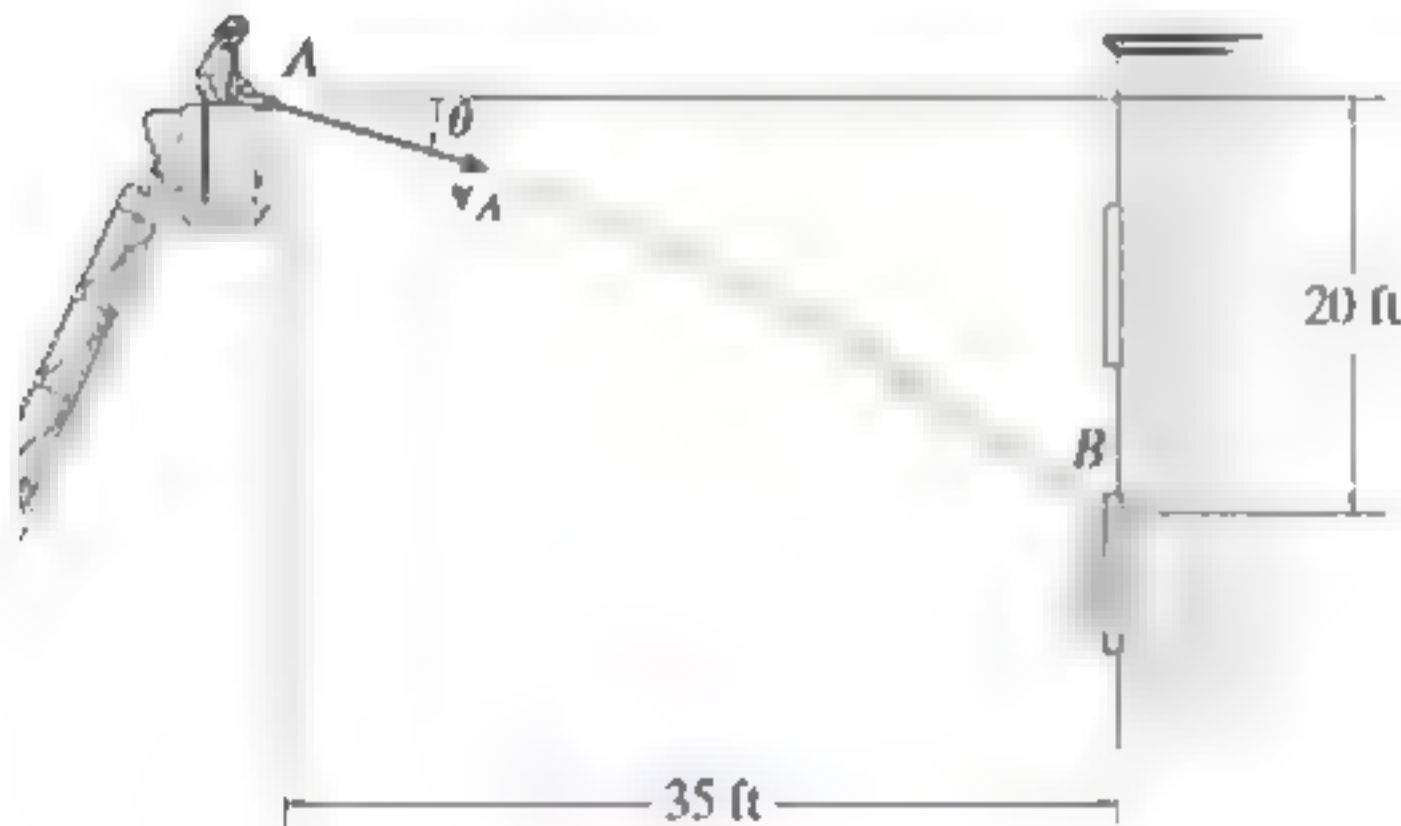
Prob. 12-105

**12-106.** La moto de nieve viaja a  $10 \text{ m/s}$  cuando sale del terraplén en  $A$ . Determine el tiempo de vuelo desde  $A$  hasta  $B$ , y la distancia  $R$  de la trayectoria.



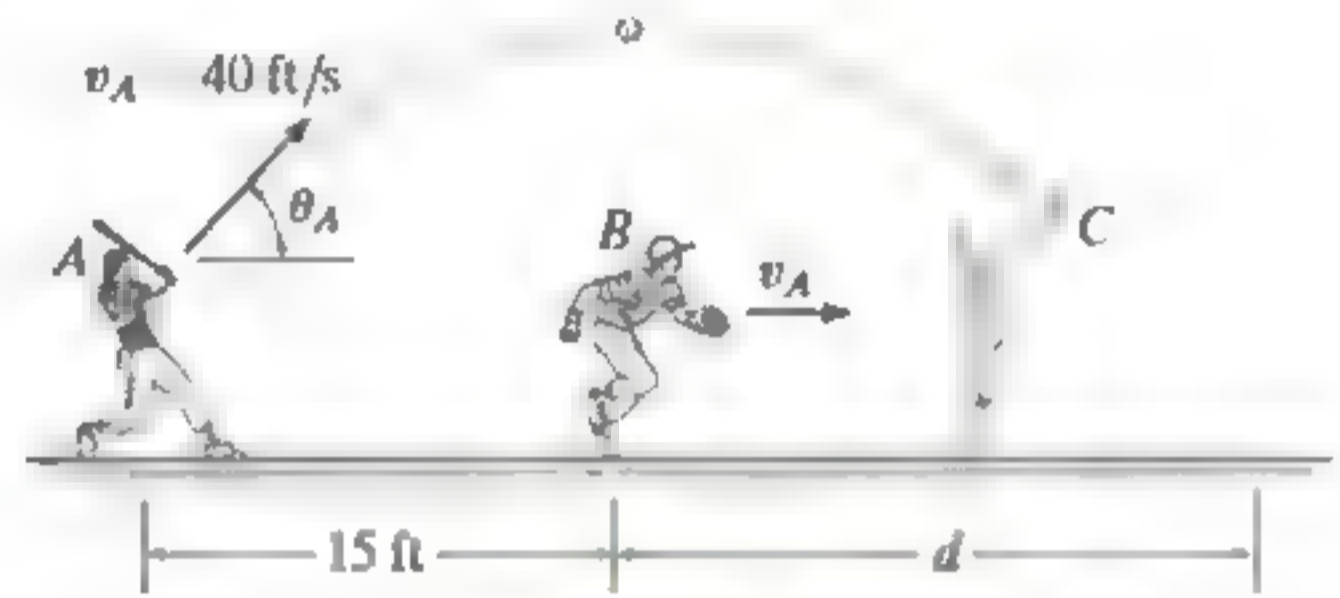
Prob. 12-106

**12-107.** El bombero desea dirigir el flujo de agua de su manguera al fuego en  $B$ . Determine los dos ángulos posibles  $\theta_1$  y  $\theta_2$  a los cuales puede hacerse esto. El agua fluye de la manguera a  $v_A = 80 \text{ ft/s}$ .



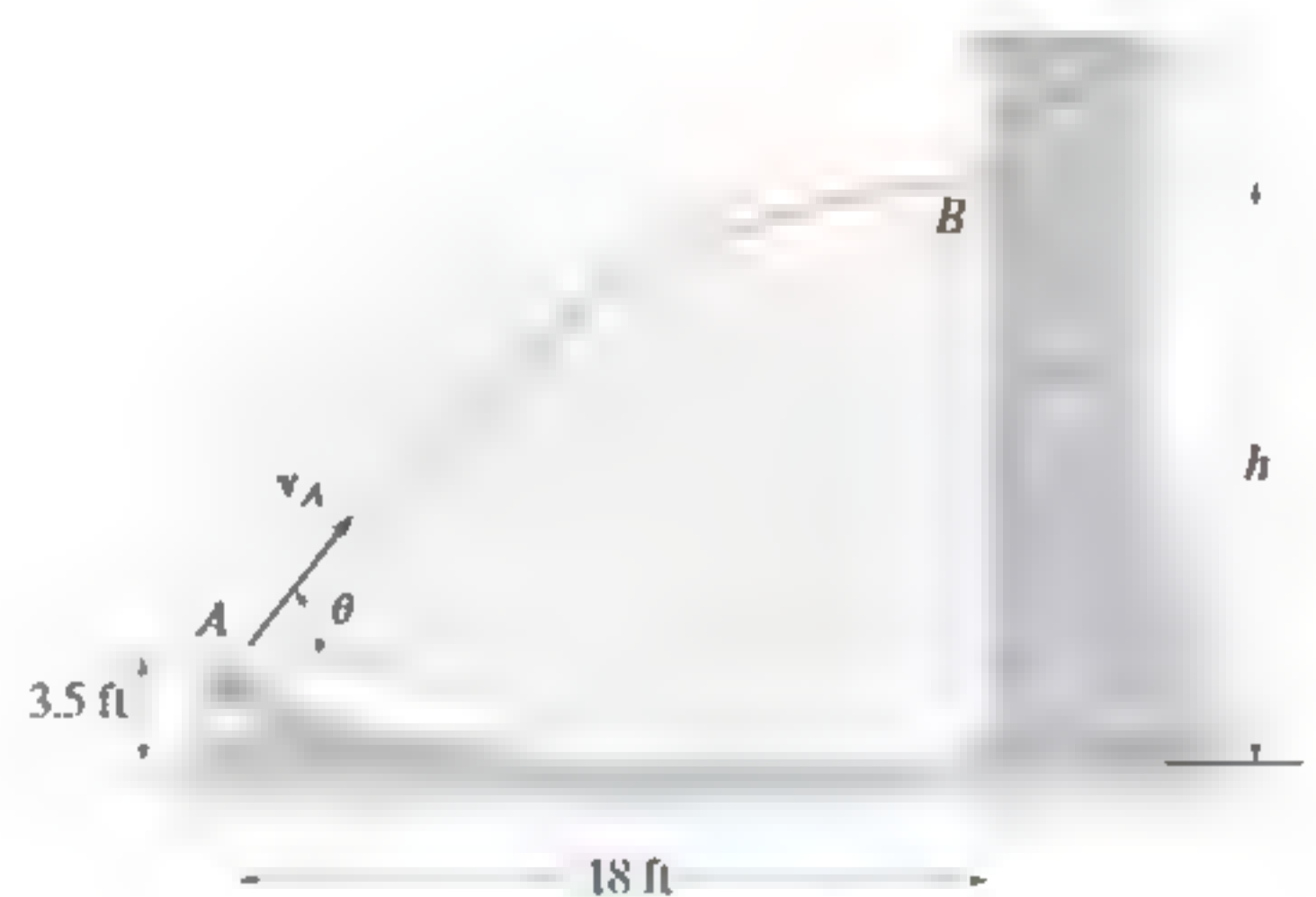
Prob. 12-107

**12-108.** El beisbolista  $A$  batea la pelota con  $v_A = 40 \text{ ft/s}$  y  $\theta_A = 60^\circ$  con respecto a la horizontal. Cuando la pelota está exactamente arriba del jugador  $B$  éste comienza a correr debajo de ella. Determine la rapidez constante y la distancia  $d$  a la cual  $B$  debe correr para hacer la atrapada a la misma altura a la cual se bateó la pelota.



Prob. 12-108

**12-109.** La catapulta se utiliza para lanzar una bola de modo que golpee la pared del edificio en la altura máxima de su trayectoria. Si tarda  $1.5 \text{ s}$  en desplazarse desde  $A$  hasta  $B$ , determine la velocidad  $v_A$  a la que se lanza, el ángulo  $\theta$  del lanzamiento y la altura  $h$ .



Prob. 12-109

## 12.7 Movimiento curvilíneo: componentes normal y tangencial

Cuando se *conoce* la trayectoria a lo largo de la cual viaja una partícula, entonces a menudo conviene describir el movimiento por medio de los ejes de coordenadas  $n$  y  $t$ , los cuales actúan de manera normal y tangente a la trayectoria, respectivamente, y en el instante considerado tienen su *origen en la partícula*.

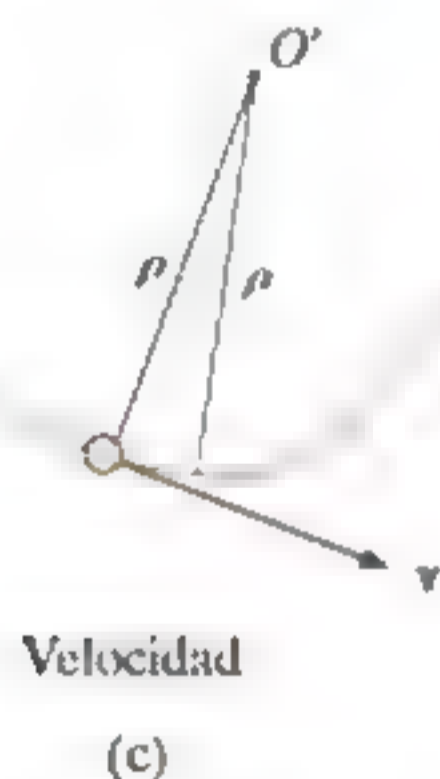
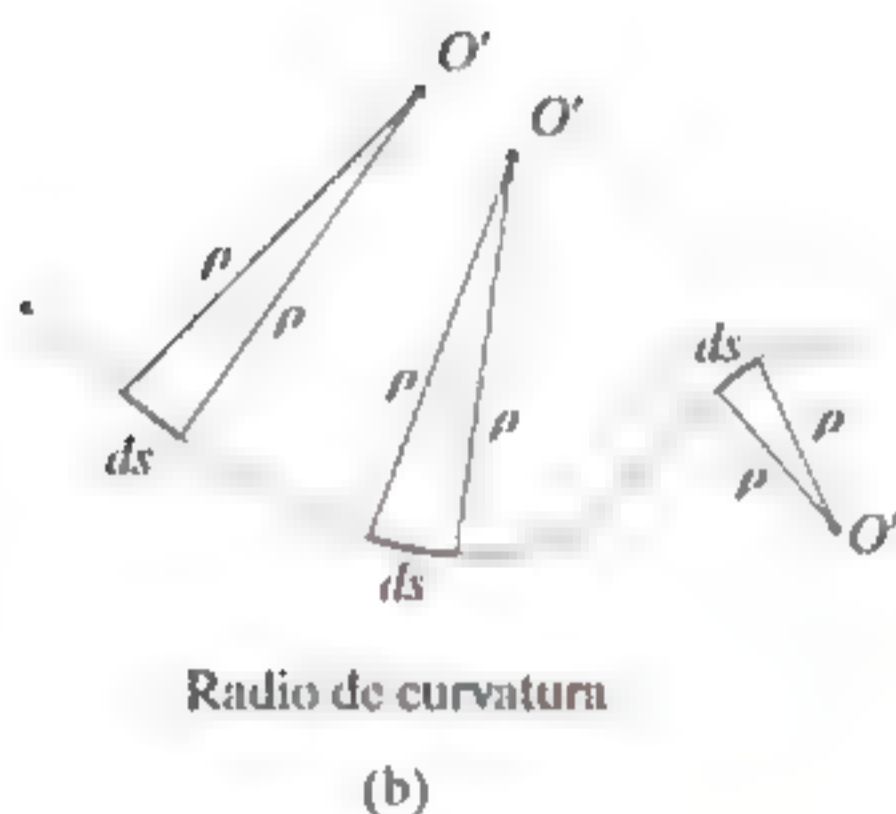
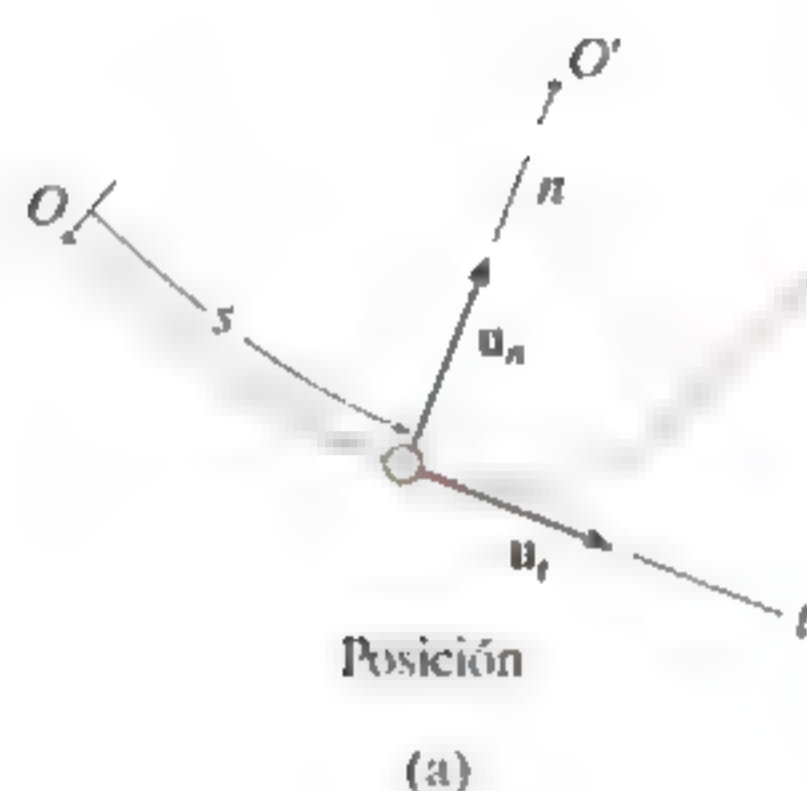


Fig. 12-24

Considere la partícula de la figura 12-24a, la cual se desplaza en un plano a lo largo de una curva fija, de modo que en un instante dado está en la posición  $s$ , medida con respecto al punto  $O$ . A continuación consideraremos un sistema de coordenadas que tiene su origen sobre la curva, y en el instante considerado este origen *coincide* con la ubicación de la partícula. El eje  $t$  es *tangente* a la curva en el punto y es positivo en la dirección de  $s$  *creciente*. Designaremos esta dirección positiva con el vector unitario  $u_t$ . Sólo puede haber una opción para el *eje normal*, ya que geométricamente la curva está formada por una serie de segmentos de arco diferenciales  $ds$  (fig. 12-24b). Cada segmento  $ds$  está formado por el arco de un círculo asociado con un *radio de curvatura*  $\rho$  (rho) y un *centro de curvatura*  $O'$ . El eje normal  $n$  es perpendicular al eje  $t$  con su sentido positivo dirigido *hacia* el centro de curvatura  $O'$  (fig. 12-24a). Esta dirección positiva, la cual *siempre* está en el lado cóncavo de la curva, será designada por el vector unitario  $u_n$ . El plano que contiene los ejes  $n$  y  $t$  se conoce como *plano osculador* y, en este caso, se encuentra fijo en el plano del movimiento\*.

Como la partícula se mueve,  $s$  es una función del tiempo. Como se indica en la sección 12.4, la *dirección* de la velocidad  $v$  de la partícula *siempre es tangente a la trayectoria* (fig. 12-24c) y su *magnitud* se determina por la derivada con respecto al tiempo de la función de la trayectoria  $s = s(t)$ , es decir,  $v = ds/dt$  (ecuación 12-8). Por consiguiente,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t \quad (12-15)$$

donde

$$v = \dot{s} \quad (12-16)$$

\*El plano osculador también se define como el plano que tiene el mayor contacto con la curva en un punto. Es la posición limitante de un plano que está en contacto con el punto y con el segmento de arco  $ds$ . Como vimos antes, el plano osculador siempre coincide con una curva plana; sin embargo, cada uno de los puntos de una curva tridimensional tiene un plano osculador único.

**Definición.** La aceleración de la partícula es la razón de cambio de la **velocidad con respecto al tiempo**. Por lo tanto,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t \quad (12-17)$$

Para determinar la derivada con respecto al tiempo  $\dot{\mathbf{u}}_t$ , observe que a medida que la partícula se desplaza a lo largo del arco  $ds$  en el tiempo  $dt$ ,  $\mathbf{u}_t$  conserva su magnitud de la unidad; no obstante, su *dirección* cambia y se vuelve  $\mathbf{u}'_t$ , (fig. 12-24d). Como se indica en la figura 12-24e, requerimos  $\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$ . En este caso,  $d\mathbf{u}_t$  se extiende entre las puntas de flecha de  $\mathbf{u}_t$  y  $\mathbf{u}'_t$ , las cuales quedan en un arco infinitesimal de radio  $u_t = 1$ . Por consiguiente,  $d\mathbf{u}_t$  tiene una *magnitud* de  $du_t = (1)d\theta$  y  $\mathbf{u}_n$  define su *dirección*. Por consiguiente,  $d\mathbf{u}_t = d\theta\mathbf{u}_n$  y, por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo es  $\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n$ . Como  $ds = \rho d\theta$  (fig. 12-24d, entonces  $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho$ , y de esta manera

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$

Al sustituir en la ecuación 12-17,  $\mathbf{a}$  se escribe como la suma de sus dos componentes,

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n \quad (12-18)$$

donde

$$a_t = \dot{v} \quad \text{o} \quad |a_t ds = v dv| \quad (12-19)$$

y

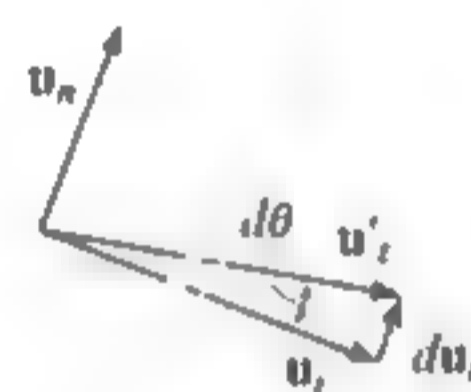
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (12-20)$$

Estas dos componentes mutuamente perpendiculares se muestran en la figura 12-24f. Por consiguiente, la *magnitud* de la aceleración es el valor positivo de

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (12-21)$$



(d)



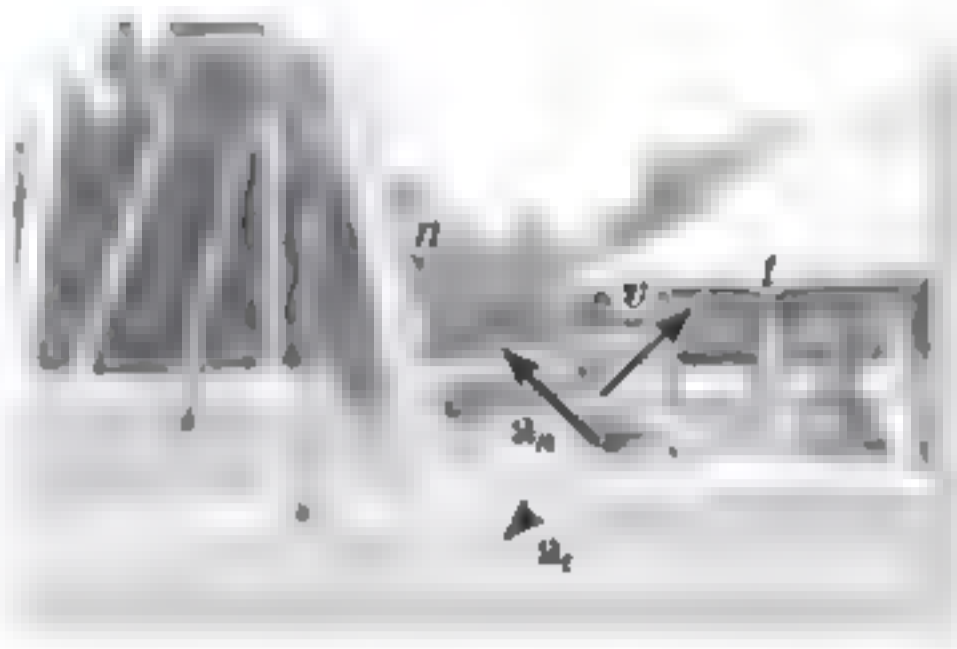
(e)



Aceleración

(f)

Fig. 12-24 (cont.)



Cuando el niño se balancea hacia arriba con una velocidad  $v$ , su movimiento puede analizarse usando las coordenadas  $n-t$ . Al elevarse, la magnitud de su velocidad (rapidez) está disminuyendo, por lo que  $a_t$  será negativa. La razón a la que cambia la dirección de su velocidad es  $a_n$ , que siempre será positiva, esto es, se dirige hacia el centro de la rotación. (© R. C. Hibbeler)

Para entender mejor estos resultados, considere los dos casos especiales de movimiento.

1. Si la partícula se mueve a lo largo de una línea recta, entonces  $\rho \rightarrow \infty$ , según la ecuación 12-20,  $a_n = 0$ . Por lo tanto,  $a = a_t = \dot{v}$ , y podemos concluir que la *componente tangencial de la aceleración representa la razón de cambio con respecto al tiempo en la magnitud de la velocidad*.
2. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva con una rapidez constante, entonces  $a_t = \dot{v} = 0$  y  $a = a_n = v^2/\rho$ . Por consiguiente, la *componente normal de la aceleración representa la razón de cambio con respecto al tiempo en la dirección de la velocidad*. Como  $a_n$  siempre actúa hacia el centro de la curvatura, esta componente en ocasiones se conoce como la *aceleración centrípeta* (o que busca el centro).

Como consecuencia de estas interpretaciones, una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria curva de la figura 12-25 tendrá una dirección para su aceleración como se muestra.

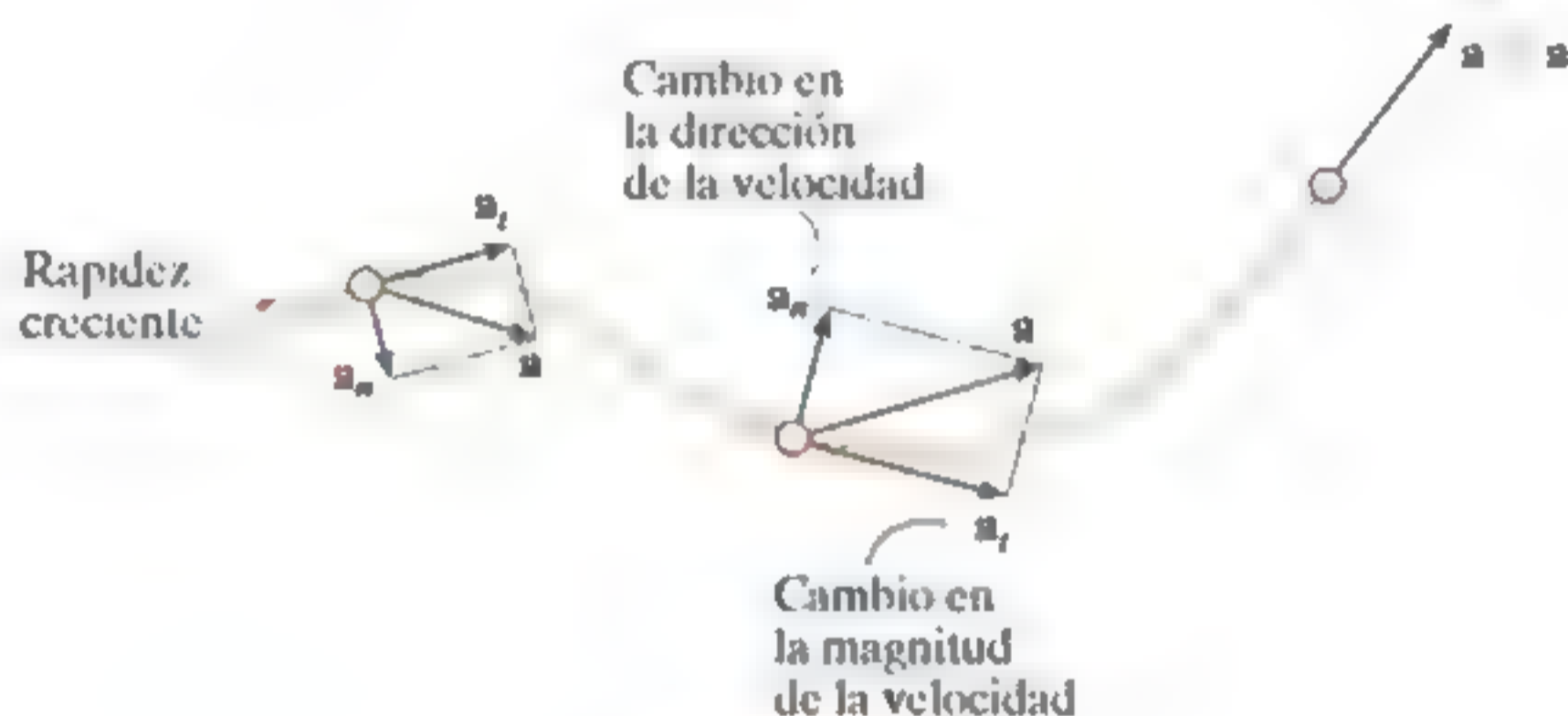


Fig. 12-25

Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial (fig. 12-26), entonces en un instante dado, el eje  $t$  queda especificado de forma única; sin embargo, puede construirse un número infinito de líneas rectas normales al eje tangencial. Como en el caso del movimiento plano, elegiremos el eje  $n$  positivo dirigido hacia el centro de curvatura  $O'$  de la trayectoria. Este eje se conoce como la *normal principal* a la curva. Con los ejes  $n$  y  $t$  así definidos, se utilizan las ecuaciones 12-15 a 12-21 para determinar  $v$  y  $a$ . Como  $u_t$  y  $u_n$  siempre son perpendiculares entre sí y quedan en el plano osculador, en el caso de movimiento espacial un tercer vector unitario,  $u_b$ , define el *eje binormal*  $b$  que es perpendicular a  $u_t$  y  $u_n$  (fig. 12-26).

Como los tres vectores unitarios están relacionados entre sí por el producto cruz vectorial,  $u_b = u_t \times u_n$  (fig. 12-26), es posible utilizar esta relación para establecer la dirección de uno de los ejes, si se conocen las direcciones de los otros dos. Por ejemplo, si no ocurre movimiento en la dirección  $u_b$  y se conocen esta dirección y  $u_t$ , entonces  $u_n$  puede determinarse, donde en este caso  $u_n = u_b \times u_t$  (fig. 12-26). Recuerde, sin embargo, que  $u_n$  siempre está en el lado cóncavo de la curva.

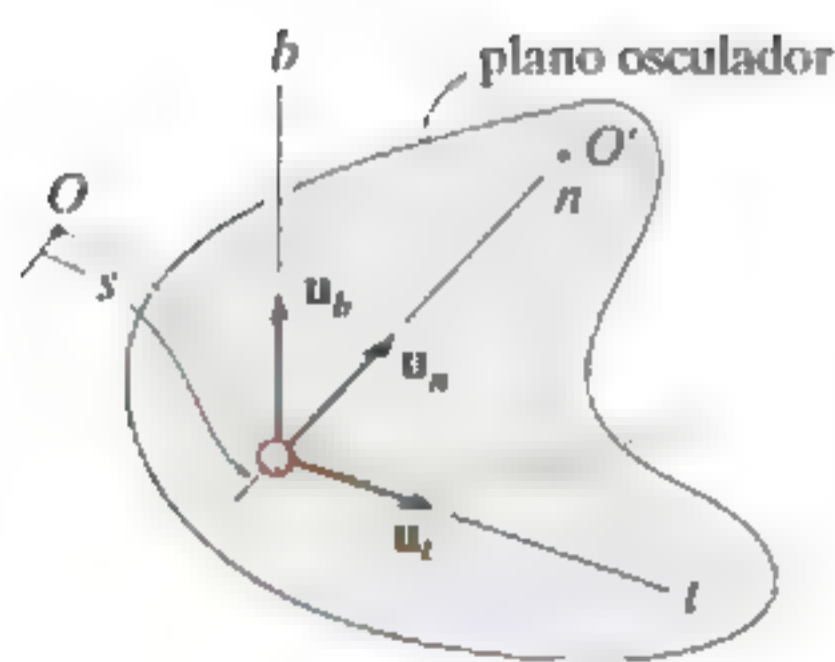


Fig. 12-26

## Procedimiento para el análisis

### Sistema de coordenadas

- Siempre que se *conozca* la *trayectoria* de la partícula, podremos establecer un sistema de coordenadas  $n$  y  $t$  con *origen fijo*, el cual coincide con la partícula en el instante considerado.
- El eje tangencial positivo actúa en la dirección del movimiento y el eje normal positivo está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

### Velocidad

- La *velocidad de la partícula* siempre es tangente a la trayectoria.
- La magnitud de la velocidad se determina a partir de la derivada con respecto al tiempo de la función de trayectoria

$$v = \dot{s}$$

### Aceleración tangencial

- La componente tangencial de aceleración es el resultado de la razón de cambio con respecto al tiempo en la *magnitud* de la velocidad. Esta componente actúa en la dirección  $s$  positiva, si la rapidez de la partícula se incrementa, o en la dirección opuesta si la rapidez se reduce.
- Las relaciones entre  $a_t$ ,  $v$ ,  $t$  y  $s$  son las mismas que las del movimiento rectilíneo, es decir,

$$a_t = \dot{v} \quad a_t ds = v dv$$

- Si  $a_t$  es constante,  $a_t = (a_t)_c$  y cuando se integran las ecuaciones anteriores resultan

$$\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(a_t)_c t^2 \\ v &= v_0 + (a_t)_c t \\ v^2 &= v_0^2 + 2(a_t)_c(s - s_0) \end{aligned}$$

### Aceleración normal

- La componente normal de la aceleración es el resultado de la razón de cambio con respecto al tiempo en la *dirección* de la velocidad. Esta componente *siempre* está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria, es decir, a lo largo del eje  $n$  positivo.
- La magnitud de esta componente se determina como sigue:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- Si la trayectoria se expresa como  $y = f(x)$ , el radio de curvatura  $\rho$  en cualquier punto de la trayectoria se determina con la ecuación

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

La derivación de este resultado aparece en cualquier texto estándar de cálculo.



Una vez que la rotación sea constante, los pasajeros tendrán solamente una componente normal de aceleración. (© R. C. Hibbeler)



Los automovilistas que circulan por este trébol experimentan una aceleración normal provocada por el cambio en la dirección de su velocidad. Se presenta una componente tangencial de la aceleración cuando se incrementa o se reduce la rapidez de los automóviles. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO 12.14

Cuando el esquiador llega al punto *A* a lo largo de la trayectoria parabólica en la figura 12-27*a*, su rapidez es de 6 m/s, la cual se incrementa a 2 m/s<sup>2</sup>. Determine la dirección de su velocidad y la dirección y magnitud de su aceleración en este instante. Al hacer el cálculo, desprecie la estatura del esquiador.

## SOLUCIÓN

**ANÁLISIS:** Aunque la trayectoria está expresada en función de sus coordenadas *x* y *y*, aun así podemos establecer el origen de los ejes *n, t* en el punto fijo *A* de la trayectoria, y determinar las componentes de *v* y *a* a lo largo de tales ejes (fig. 12-27*a*).

**DESARROLLO:** Por definición, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria. Como  $y = \frac{1}{20}x^2$ ,  $dy/dx = \frac{1}{10}x$ , entonces cuando  $x = 10$  m,  $dy/dx = 1$ . Por consiguiente, en *A*, *v* forma un ángulo  $\theta = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$  con respecto al eje *x* (fig. 12-27*b*). De esta manera,

$$v_A = 6 \text{ m/s} \quad 45^\circ \nearrow \quad \text{Resp.}$$

La aceleración está determinada por  $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n$ . Sin embargo, primero se tiene que determinar el radio de curvatura de la trayectoria en *A* (10 m, 5 m). Como  $d^2y/dx^2 = \frac{1}{10}$ , entonces

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{[1 + (\frac{1}{10}x)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{10}|} \bigg|_{x=10 \text{ m}} = 28.28 \text{ m}$$

La aceleración es

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n \\ &= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{28.28 \text{ m}}\mathbf{u}_n \\ &= \{2\mathbf{u}_t + 1.273\mathbf{u}_n\} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Como se indica en la figura 12-27*b*,

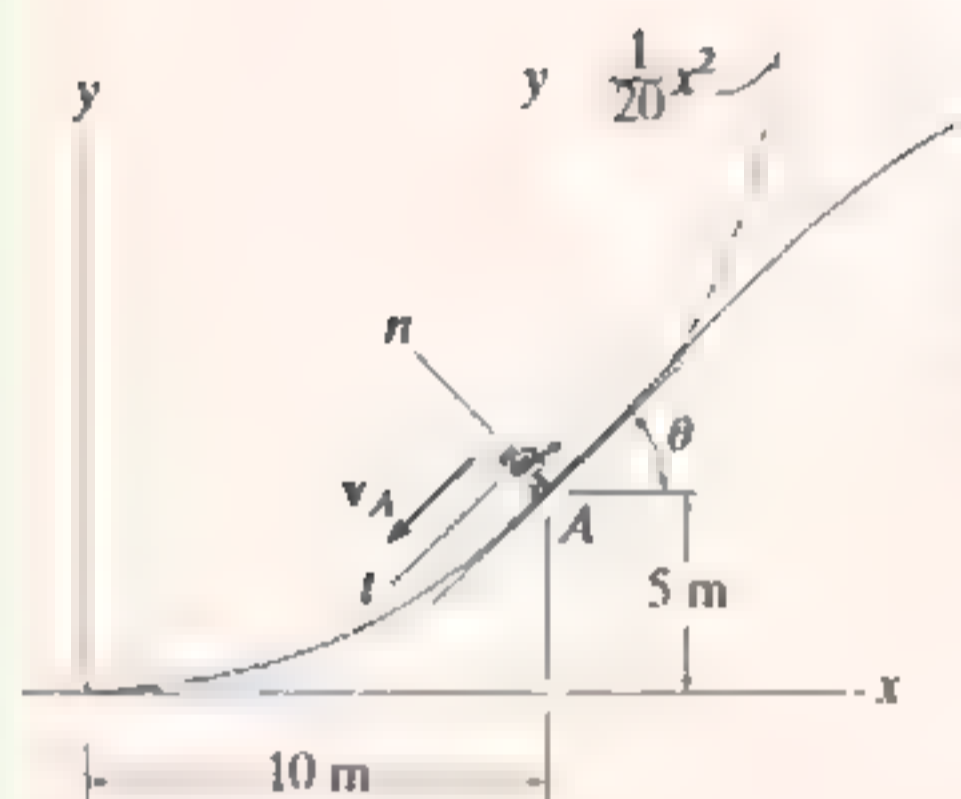
$$a = \sqrt{(2 \text{ m/s}^2)^2 + (1.273 \text{ m/s}^2)^2} = 2.37 \text{ m/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2}{1.273} = 57.5^\circ$$

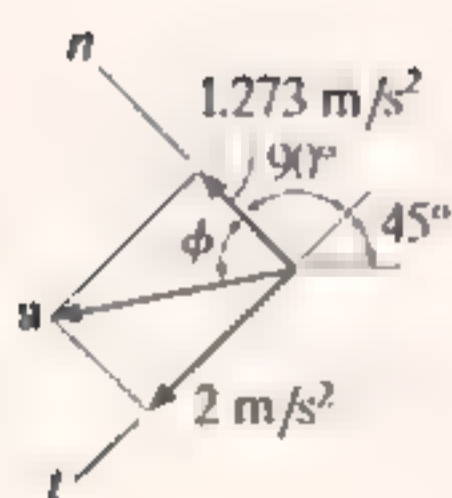
Por lo tanto,  $45^\circ + 90^\circ + 57.5^\circ = 180^\circ = 12.5^\circ$  de modo que,

$$a = 2.37 \text{ m/s}^2 \quad 12.5^\circ \nearrow \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Al utilizar las coordenadas *n, t*, fuimos capaces de resolver con facilidad este problema mediante la ecuación 12-18, puesto que considera por separado los cambios en la magnitud y la dirección de *v*.



(a)



(b)

Fig. 12-27

## EJEMPLO

Un automóvil de carreras  $C$  circula alrededor de la pista circular horizontal de 300 ft de radio (fig. 12-28). Si el auto aumenta su rapidez a un ritmo constante de  $7 \text{ ft/s}^2$ , a partir del reposo, determine el tiempo que necesita para alcanzar una aceleración de  $8 \text{ ft/s}^2$ . ¿Cuál es su rapidez en este instante?

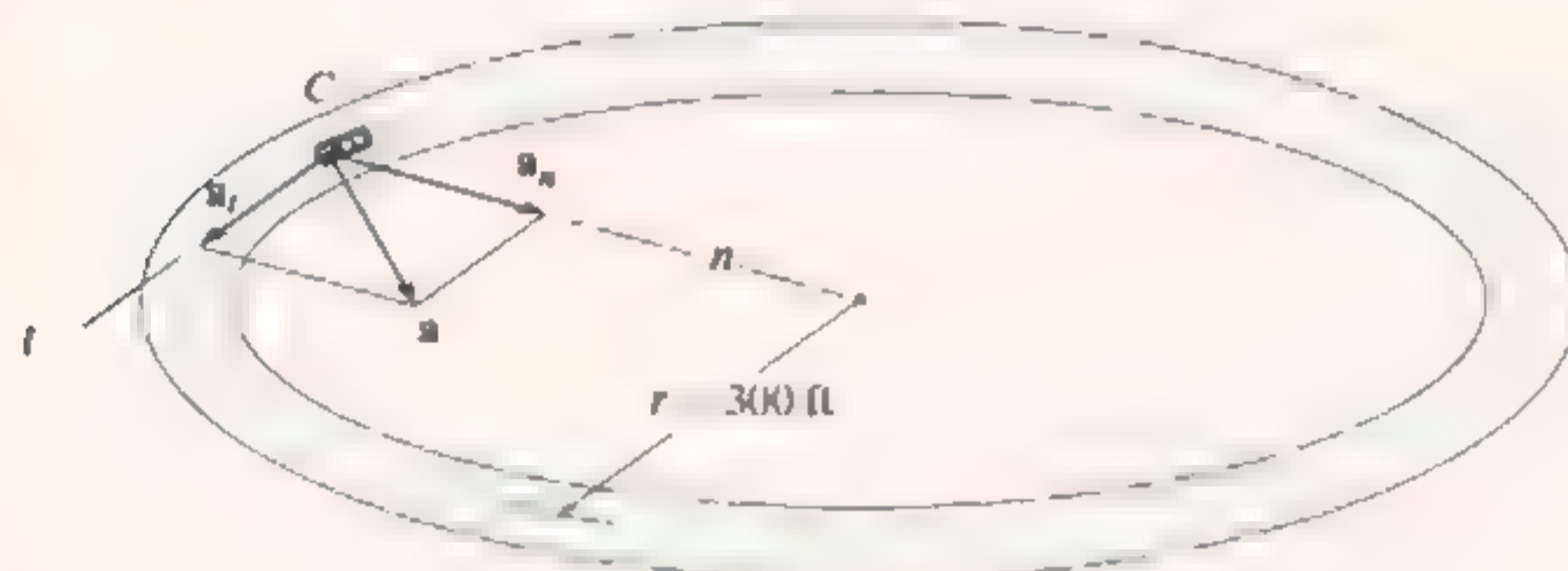


Fig. 12-28

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** El origen de los ejes  $n$  y  $t$  coincide con el automóvil en el instante considerado. El eje  $t$  está en la dirección del movimiento y el eje  $n$  positivo está dirigido hacia el centro del círculo. Se selecciona este sistema de coordenadas puesto que se conoce la trayectoria.

La magnitud de la aceleración puede relacionarse con sus componentes por medio de  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ . En este caso,  $a_t = 7 \text{ ft/s}^2$ . Como  $a_n = v^2/\rho$ , primero debe determinarse la velocidad como una función del tiempo.

$$v = v_0 + (a_t)t$$

$$v = 0 + 7t$$

Por lo tanto,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ ft/s}^2$$

El tiempo requerido para que la aceleración llegue a ser de  $8 \text{ ft/s}^2$  es, entonces,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$8 \text{ ft/s}^2 = \sqrt{(7 \text{ ft/s}^2)^2 + (0.163t^2)^2}$$

Al despejar el valor positivo de  $t$  se obtiene

$$0.163t^2 = \sqrt{(8 \text{ ft/s}^2)^2 - (7 \text{ ft/s}^2)^2}$$

$$t = 4.87 \text{ s}$$

*Resp.*

**Velocidad.** La rapidez en el instante  $t = 4.87 \text{ s}$  es

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ ft/s}$$

*Resp.*

**NOTA:** Recuerde que la velocidad siempre será tangente a la trayectoria, en tanto que la aceleración estará dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria.



(© R. C. Hibbeler)

Las cajas en la figura 12-29a se desplazan a lo largo de la transportadora industrial. Si una caja como la de la figura 12-29b comienza a moverse del reposo en  $A$ , e incrementa su rapidez de modo que  $a_t = (0.2t) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  está en segundos, determine la magnitud de su aceleración cuando llegue al punto  $B$ .

### SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** La posición de la caja en cualquier instante se define con respecto al punto fijo  $A$  mediante la coordenada de trayectoria o posición  $s$  (fig. 12-29b). Se tiene que determinar la aceleración en  $B$  con el origen de los ejes  $n, t$  en este punto.

**Aceleración.** Para determinar las componentes de la aceleración  $a_t = \dot{v}$  y  $a_n = v^2/\rho$ , primero es necesario formular  $v$  y  $\dot{v}$ , de modo que puedan evaluarse en  $B$ . Como  $v_A = 0$  cuando  $t = 0$ , entonces

$$a_t = \dot{v} = 0.2t \quad (1)$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t \, dt$$

$$v = 0.1t^2 \quad (2)$$

El tiempo requerido para que la caja llegue al punto  $B$  se determina teniendo en cuenta que la posición de  $B$  es  $s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6.142 \text{ m}$  (fig. 12-29b) y como  $s_A = 0$  cuando  $t = 0$  tenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142 \text{ m}} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2 \, dt$$

$$6.142 \text{ m} = 0.0333t_B^3$$

$$t_B = 5.690 \text{ s}$$

Al sustituir en las ecuaciones 1 y 2, se obtiene

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138 \text{ m/s}^2$$

$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238 \text{ m/s}$$

En  $B$ ,  $\rho_B = 2 \text{ m}$ , de modo que

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238 \text{ m/s})^2}{2 \text{ m}} = 5.242 \text{ m/s}^2$$

La magnitud de  $a_B$  (fig. 12-29c) es, por ende,

$$a_B = \sqrt{(1.138 \text{ m/s}^2)^2 + (5.242 \text{ m/s}^2)^2} = 5.36 \text{ m/s}^2$$

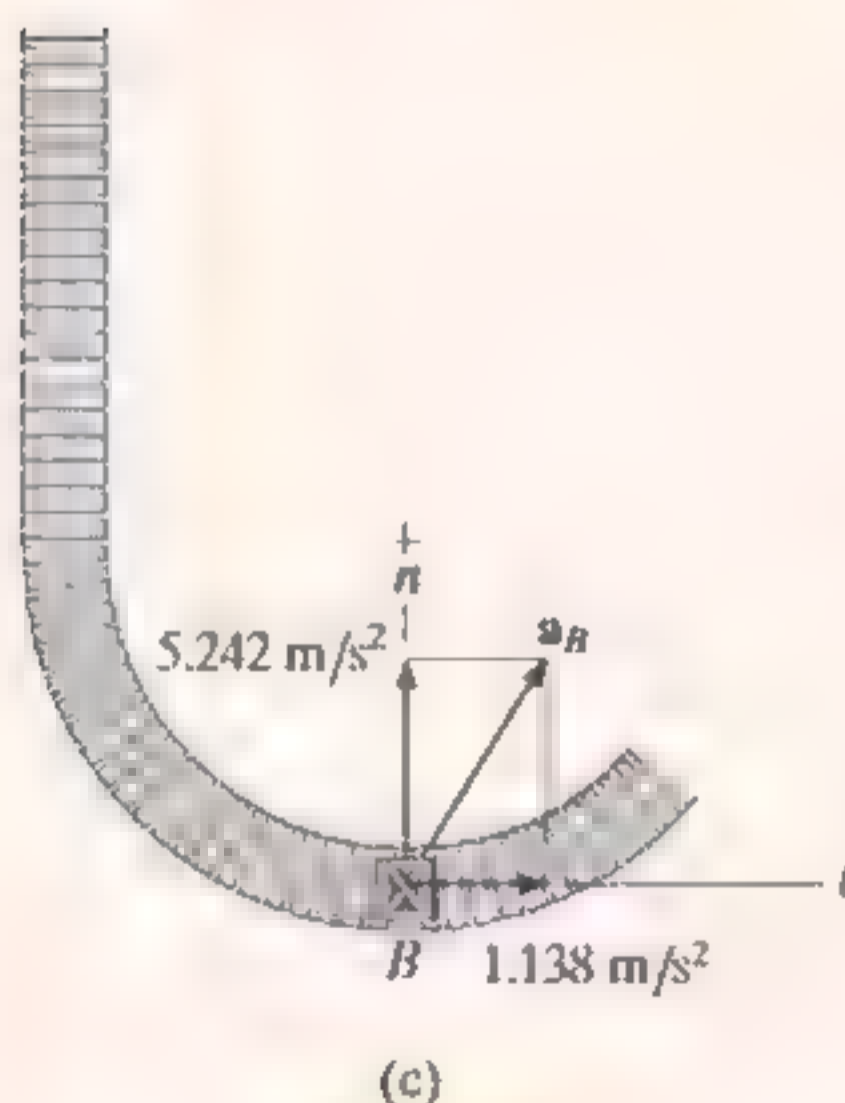
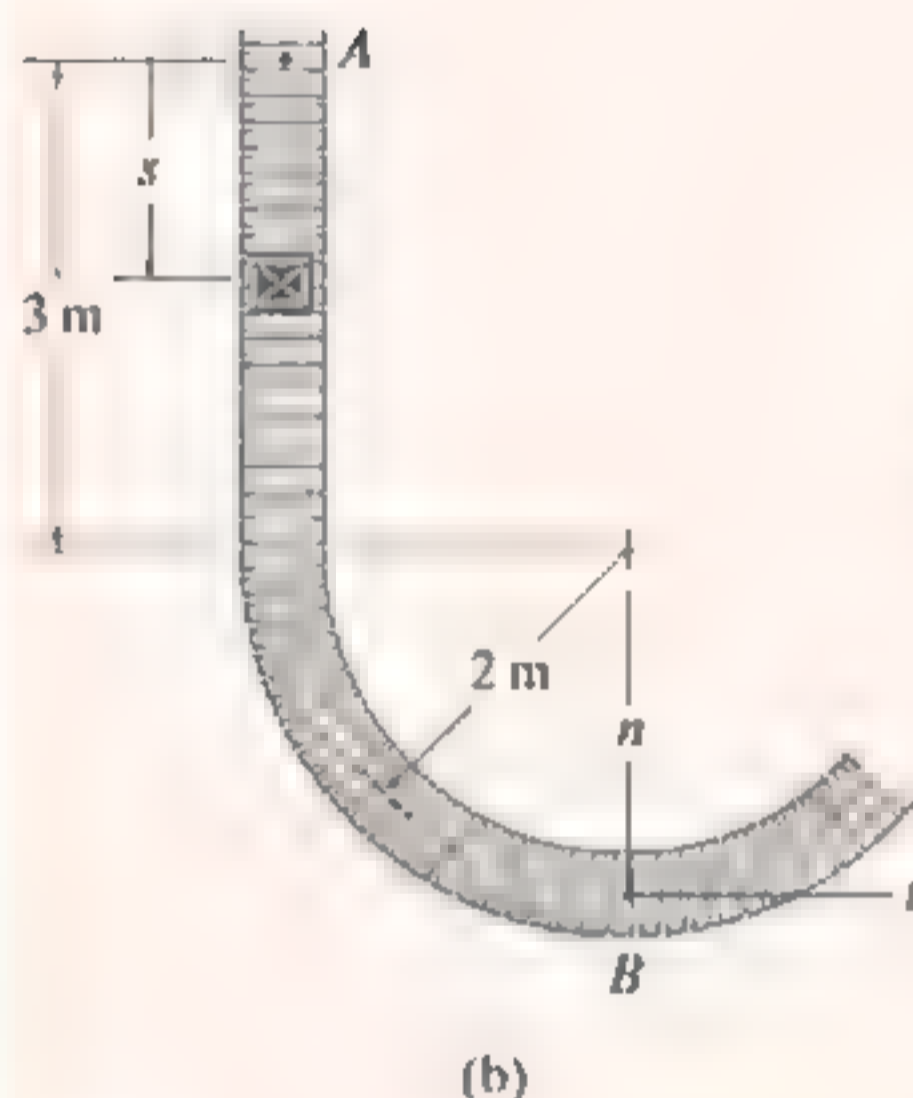
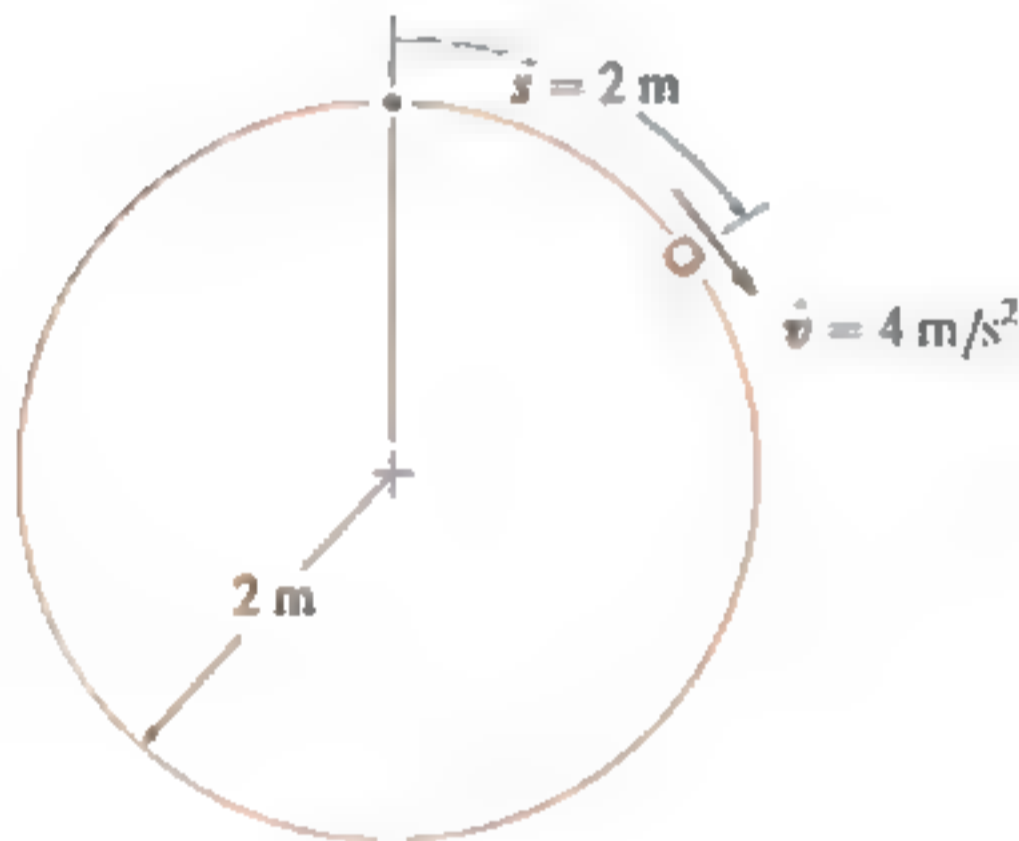
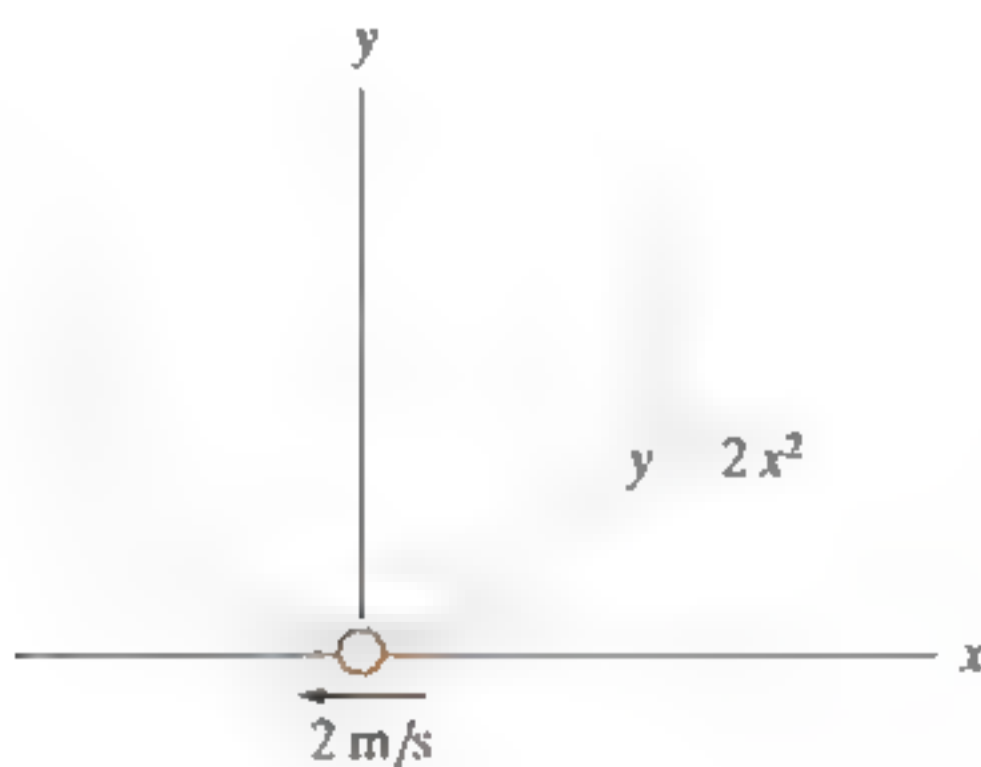
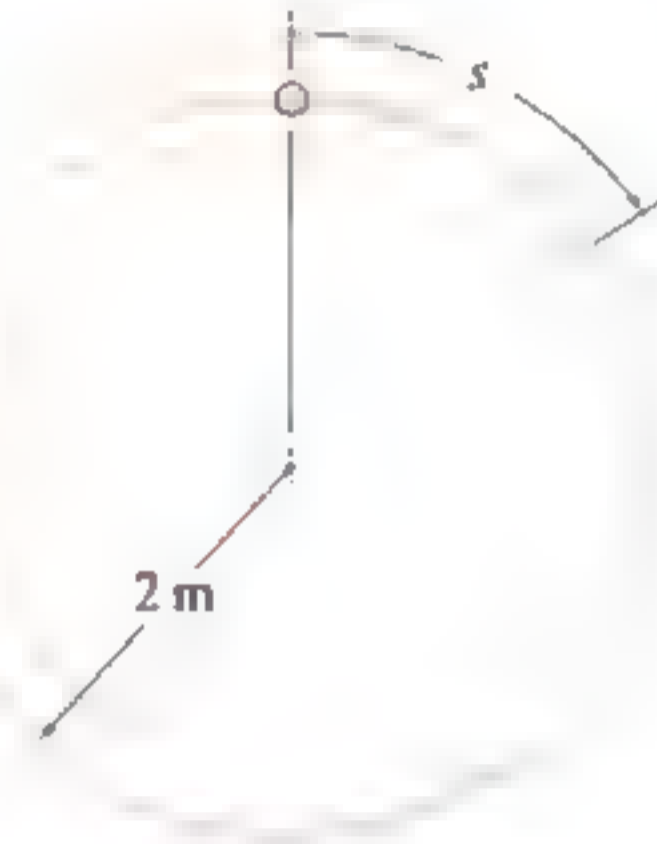
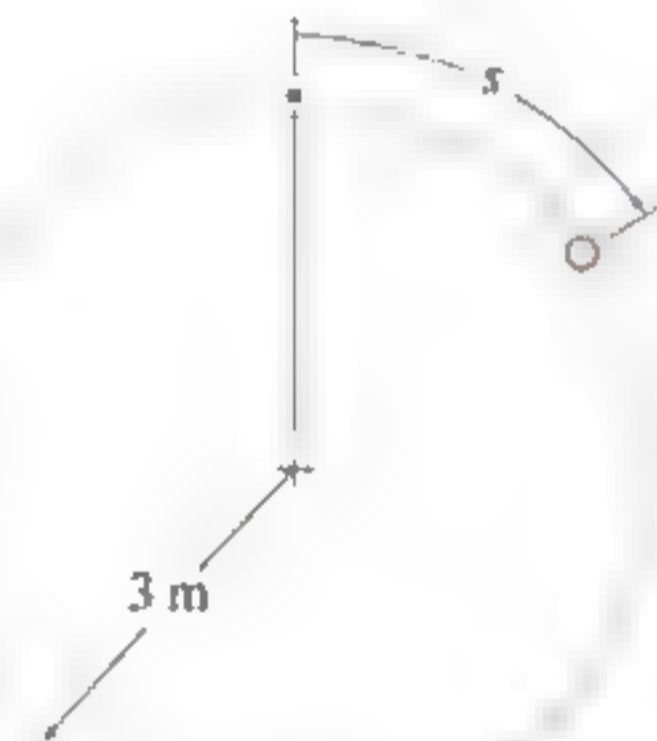
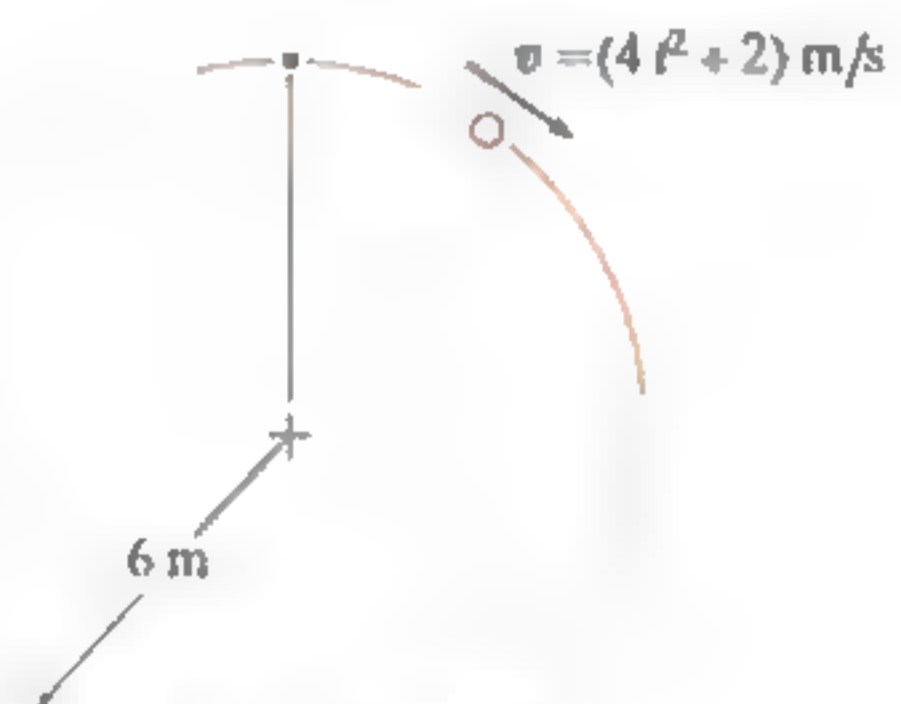


Fig. 12-29

## PROBLEMA PRELIMINAR

P12-7.

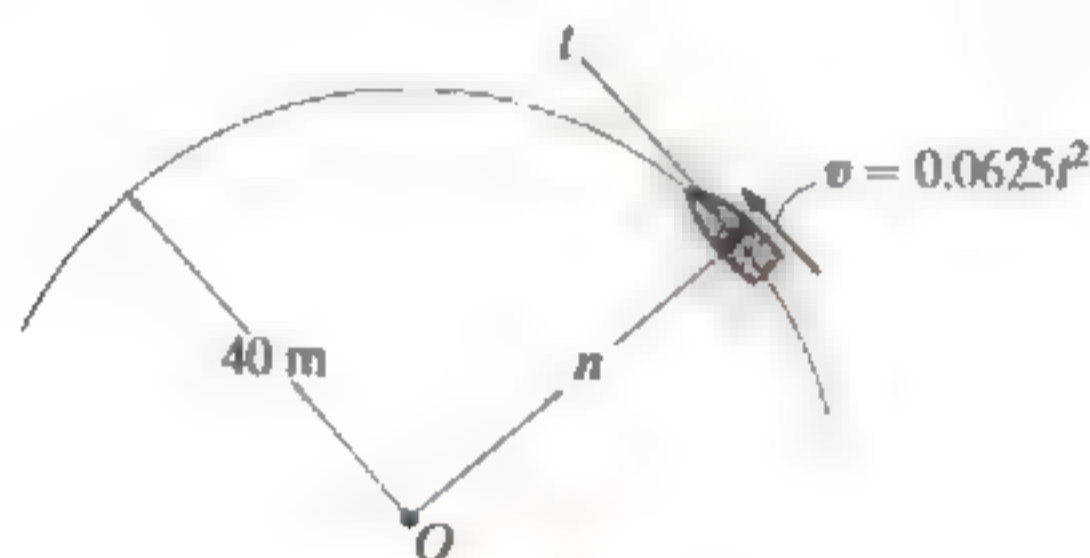
a) Determine la aceleración en el instante que se indica.

b) Determine el incremento en la rapidez y la componente normal de la aceleración en  $s = 2\text{ m}$ . En  $s = 0$ ,  $v = 0$ .c) Determine la aceleración en el instante mostrado. La partícula tiene una rapidez constante de  $2\text{ m/s}$ .d) Determine las componentes normal y tangencial de la aceleración en  $s = 0$ , si  $v = (4s + 1)\text{ m/s}$ , donde  $s$  está en metros.e) Determine la aceleración en  $s = 2\text{ m}$  si  $\dot{v} = (2s)\text{ m/s}^2$ , donde  $s$  está en metros. En  $s = 0$ ,  $v = 1\text{ m/s}$ .f) Determine la aceleración cuando  $t = 1\text{ s}$ , si  $v = (4t^2 + 2)\text{ m/s}$ , donde  $t$  se da en segundos.

Prob. P12-7

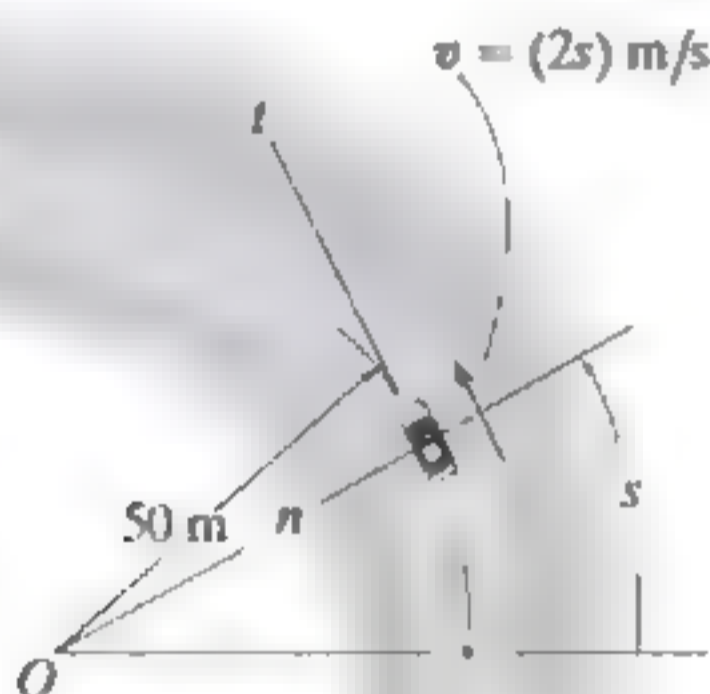
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F12-27.** El bote navega a lo largo de la trayectoria circular a una rapidez de  $v = (0.0625t^2)$  m/s, donde  $t$  está en segundos. Determine la magnitud de su aceleración cuando  $t = 10$  s.



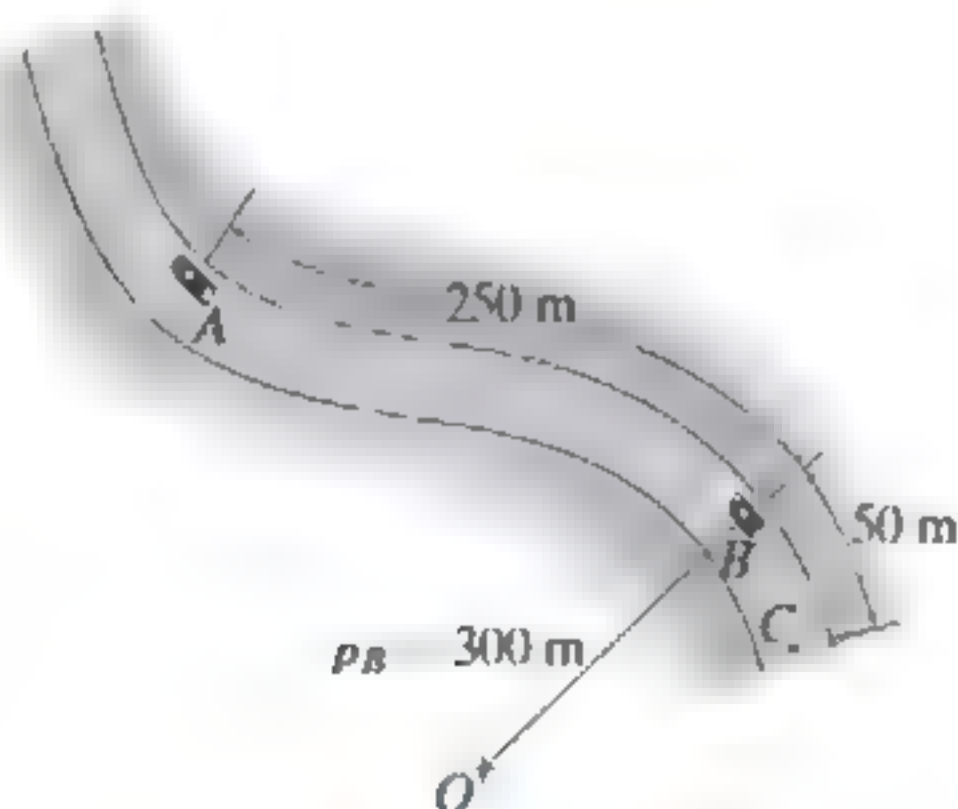
Prob. F12-27

**F12-28.** El automóvil viaja a lo largo de la carretera a una rapidez de  $v = (2s)$  m/s, donde  $s$  está en metros. Determine la magnitud de su aceleración cuando  $s = 10$  m.



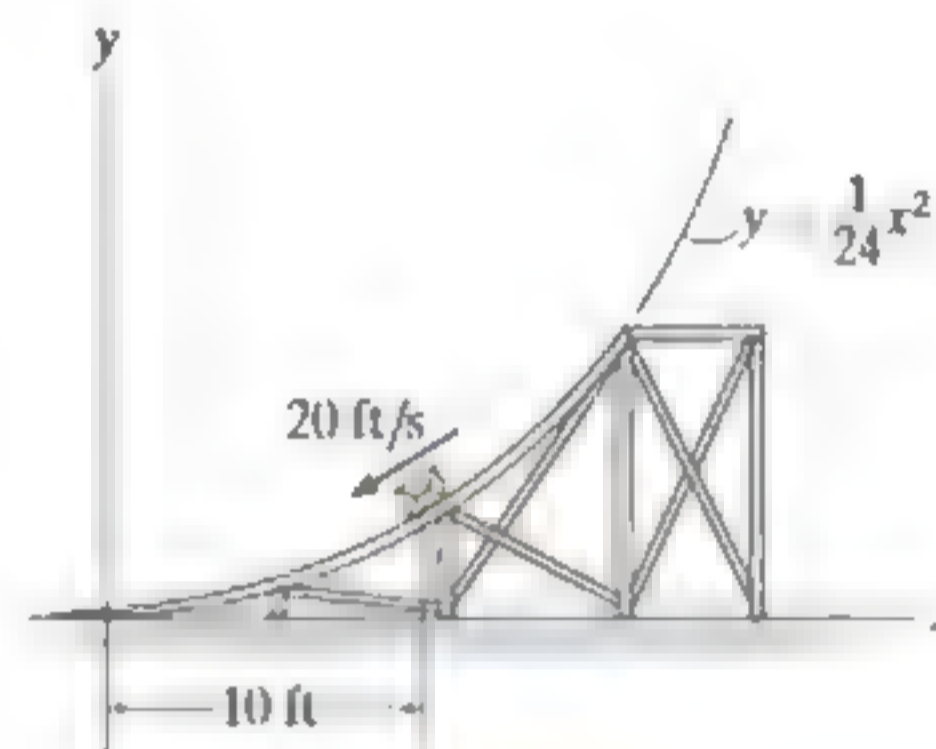
Prob. F12-28

**F12-29.** Si el automóvil desacelera de manera uniforme a lo largo de la carretera curva de 25 m/s en A a 15 m/s en C, determine la aceleración del automóvil en B.



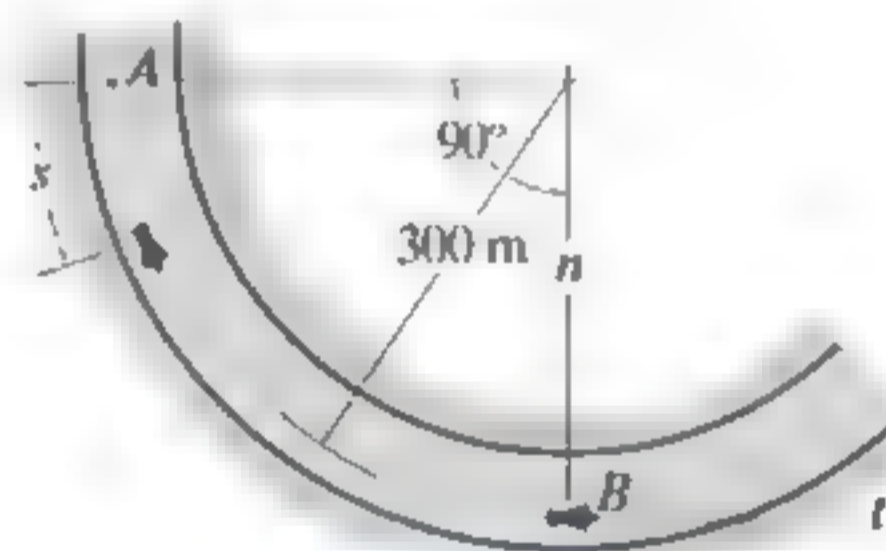
Prob. F12-29

**F12-30.** Cuando  $x = 10$  ft, la rapidez del embalaje es de 20 ft/s, la cual se incrementa a 6 ft/s<sup>2</sup>. Determine la dirección de su velocidad y la magnitud de su aceleración en este instante.



Prob. F12-30

**F12-31.** Si la desaceleración de la motocicleta es  $a_t = -(0.001s)$  m/s<sup>2</sup> y su rapidez en la posición A es de 25 m/s, determine la magnitud de su aceleración cuando pasa por el punto B.



Prob. F12-31

**F12-32.** El automóvil sube la colina con una rapidez de  $v = (0.2s)$  m/s, donde  $s$  está en metros, medida con respecto a A. Determine la magnitud de su aceleración cuando esté en el punto  $s = 50$  m, donde  $\rho = 500$  m.



Prob. F12-32

## PROBLEMAS

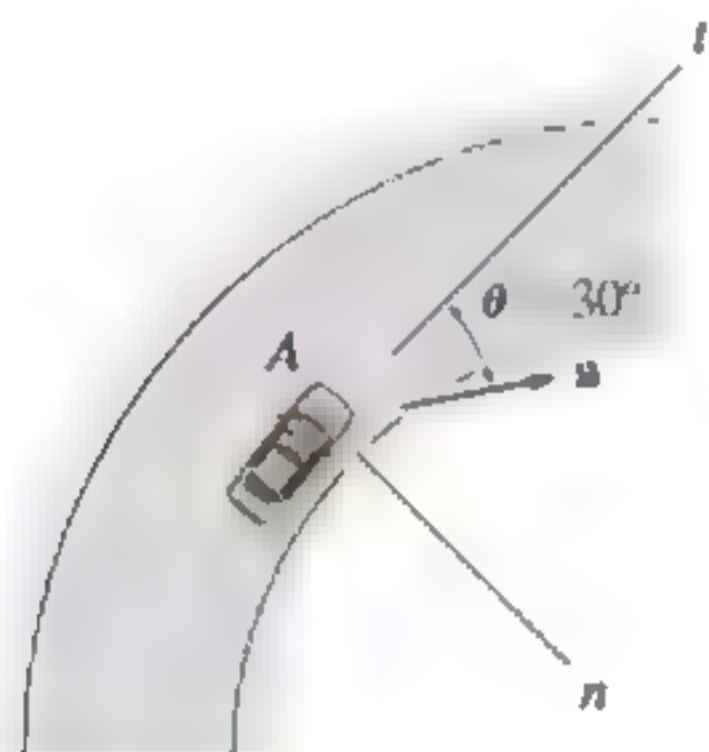
**12-110.** Un automóvil se desplaza sobre una curva que tiene un radio de 800 ft. Si la aceleración del automóvil es de  $5 \text{ ft/s}^2$ , determine la rapidez constante a la que el automóvil está viajando.

**12-111.** Determine la rapidez constante máxima que un automóvil de carreras puede tener, si su aceleración no puede exceder de  $75 \text{ m/s}^2$ , mientras recorre una pista con radio de curvatura de 200 m.

**\*12-112.** Una lancha tiene una velocidad inicial de  $16 \text{ ft/s}$ . Si luego aumenta su rapidez a lo largo de una trayectoria circular de radio  $\rho = 80 \text{ ft}$  a razón de  $\dot{v} = (1.5s) \text{ ft/s}$ , donde  $s$  se da en pies, determine el tiempo necesario para que la lancha recorra  $s = 50 \text{ ft}$ .

**12-113.** La posición de una partícula está definida por  $\mathbf{r} = [4(t - \sin t)\mathbf{i} + (2t^2 - 3)\mathbf{j}] \text{ m}$ , donde  $t$  está en segundos y el argumento del seno se da en radianes. Determine la rapidez de la partícula y sus componentes normal y tangencial de aceleración cuando  $t = 1 \text{ s}$ .

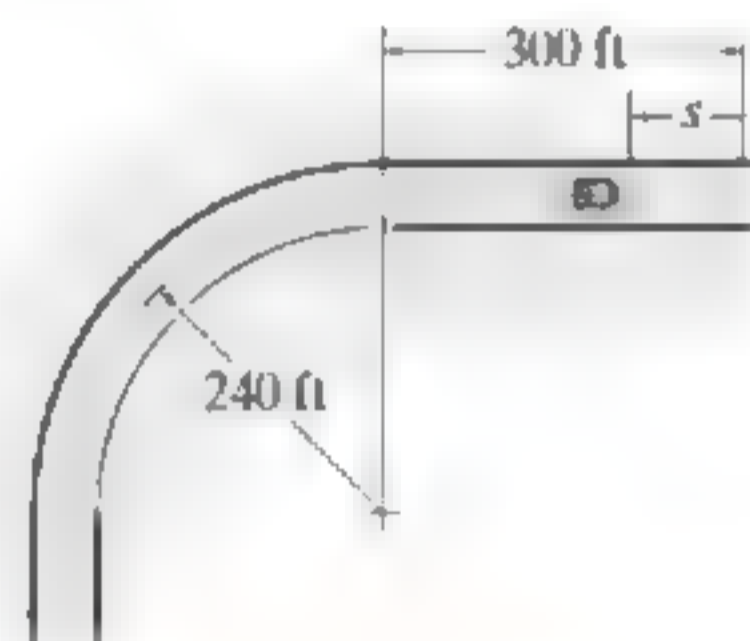
**12-114.** En el punto  $A$  la rapidez del automóvil es de  $80 \text{ ft/s}$  y la magnitud de su aceleración es de  $10 \text{ ft/s}^2$  y actúa en la dirección mostrada. Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto  $A$  y la componente tangencial de la aceleración.



Prob. 12-114

**12-115.** El automóvil está inicialmente en reposo en  $s = 0$ . Si su rapidez se incrementa a razón de  $\dot{v} = (0.05t^2) \text{ ft/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración, cuando  $t = 18 \text{ s}$ .

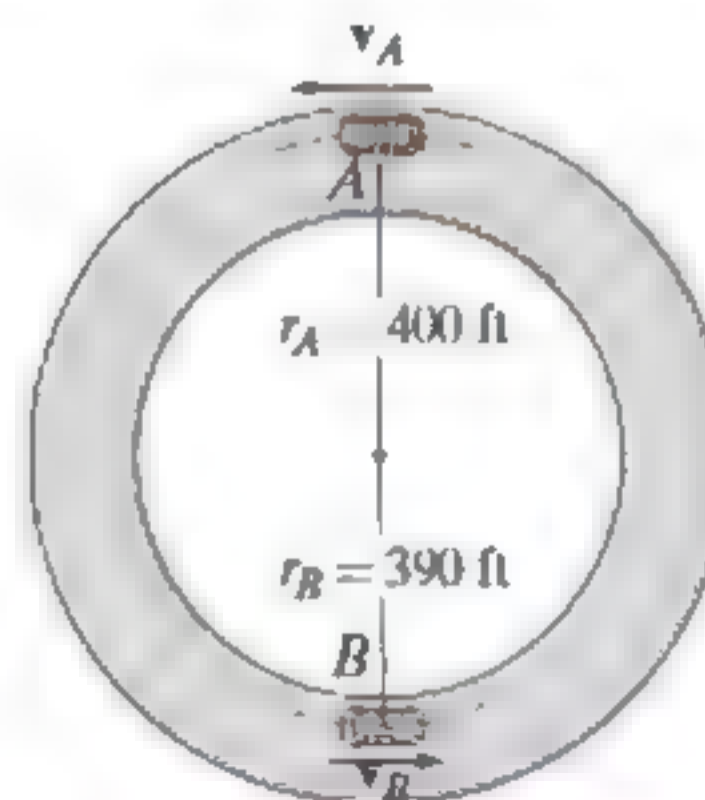
**\*12-116.** El automóvil está inicialmente en reposo en  $s = 0$ . Si entonces comienza a incrementar su rapidez a razón de  $\dot{v} = (0.05t^2) \text{ ft/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración en  $s = 550 \text{ ft}$ .



Probs. 12-115/116

**12-117.** Los dos automóviles  $A$  y  $B$  viajan a lo largo de la trayectoria circular a rapidez constante  $v_A = 80 \text{ ft/s}$  y  $v_B = 100 \text{ ft/s}$ , respectivamente. Si están en las posiciones mostradas cuando  $t = 0$ , determine el instante en el que los autos se encuentra uno junto al otro, y el instante en que está separados por  $90^\circ$ .

**12-118.** Los automóviles  $A$  y  $B$  están viajando alrededor de la pista de carreras circular. En el instante mostrado,  $A$  tiene una rapidez de  $60 \text{ ft/s}$  y está aumentando su rapidez a razón de  $15 \text{ ft/s}^2$  hasta recorrer una distancia de  $100\pi \text{ ft}$ , después de lo cual mantiene una rapidez constante. El auto  $B$  tiene una rapidez de  $120 \text{ ft/s}$  y está disminuyendo su rapidez a razón de  $15 \text{ ft/s}^2$  hasta que recorre una distancia de  $65\pi \text{ ft}$ , después de lo cual mantiene una rapidez constante. Determine el instante cuando un automóvil está al lado del otro.



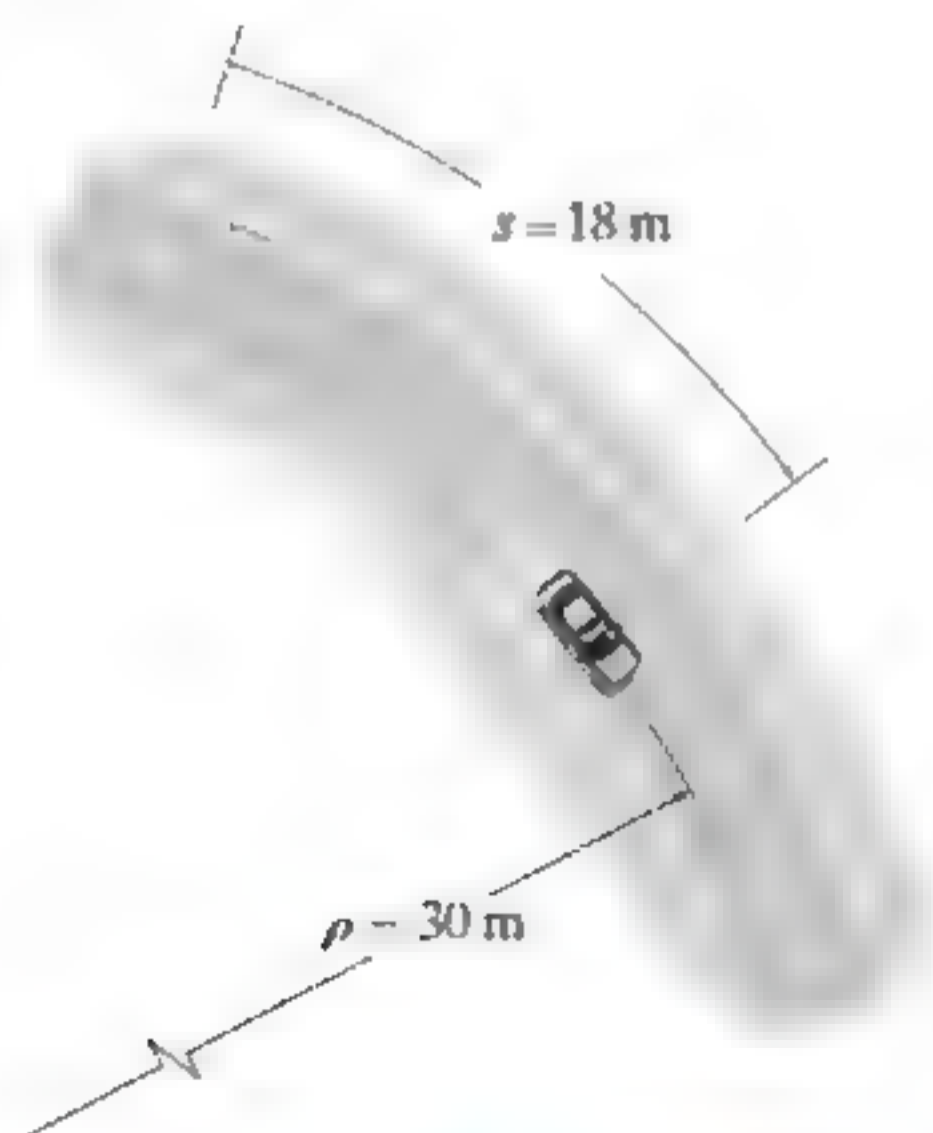
Probs. 12-117/118

**12-119.** El satélite  $S$  viaja alrededor de la Tierra en una trayectoria circular con una rapidez constante de  $20 \text{ Mm/h}$ . Si la aceleración es de  $2.5 \text{ m/s}^2$ , determine la altitud  $h$ . Suponga que el diámetro de la Tierra es de  $12\,713 \text{ km}$ .



Prob. 12-119

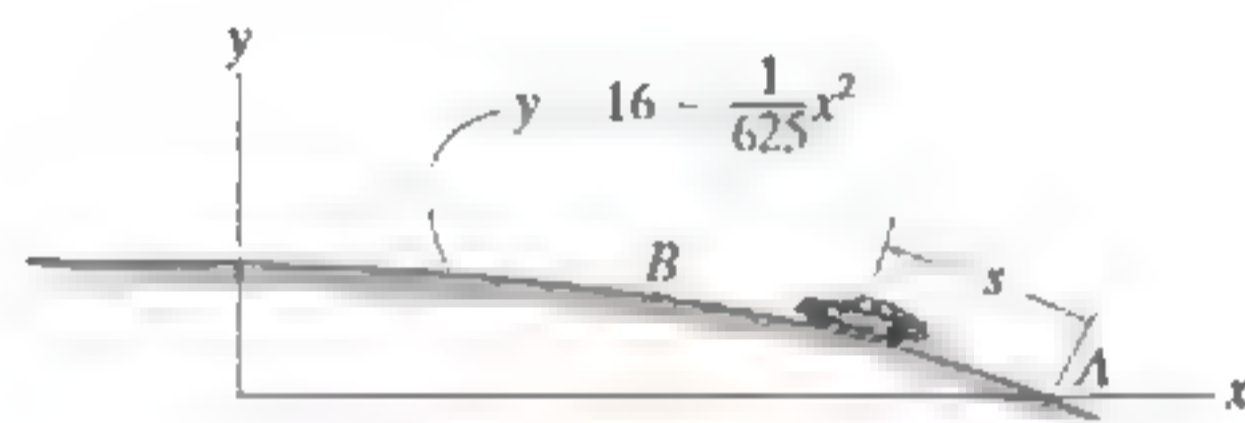
**\*12-120.** El automóvil se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de modo que su rapidez se incrementa en  $a_t = (0.5e^t) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración después de que ha recorrido  $s = 18 \text{ m}$  a partir del reposo. Desprecie el tamaño del automóvil.



Prob. 12-120

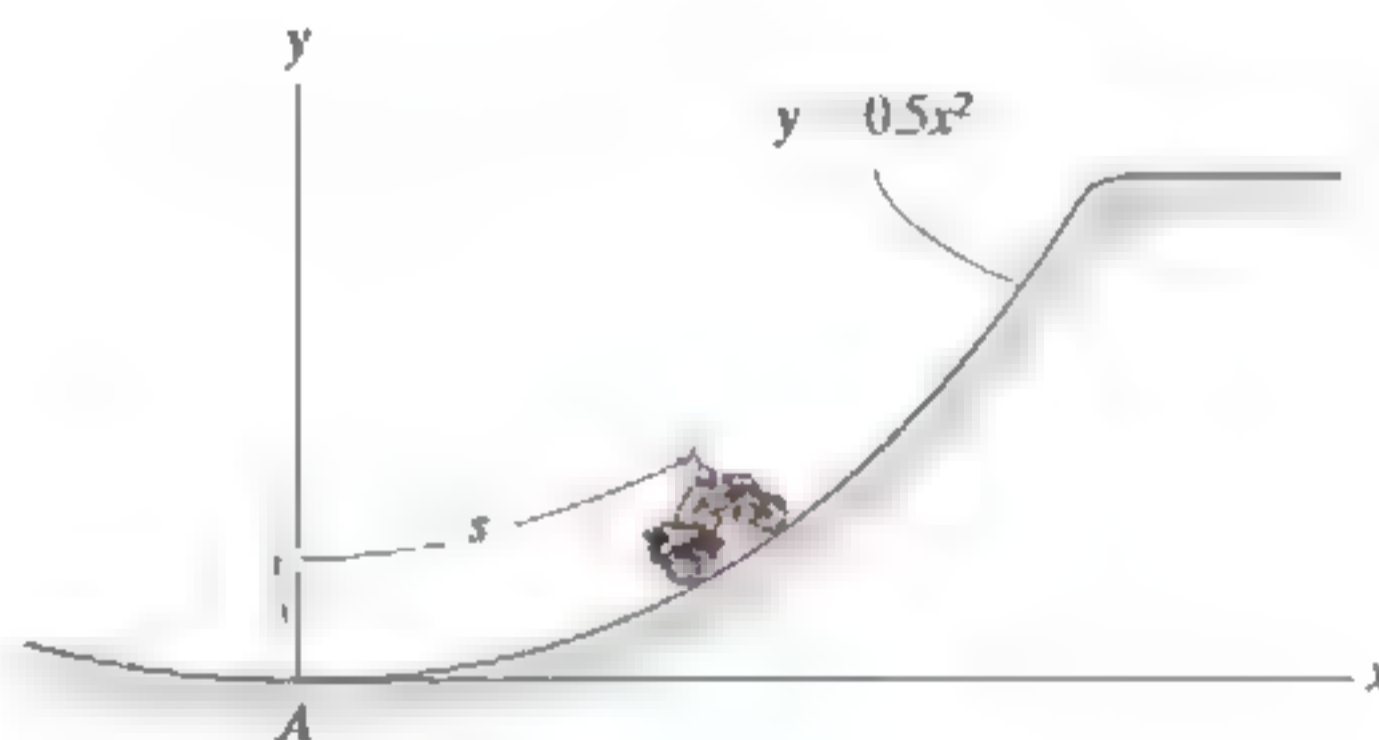
**12-121.** El automóvil pasa por el punto  $A$  con una rapidez de  $25 \text{ m/s}$ , después de lo cual su rapidez se define como  $v = (25 - 0.15s) \text{ m/s}$ . Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto  $B$ , donde  $s = 51.5 \text{ m}$  y  $r = 50 \text{ m}$ .

**12-122.** Si el automóvil pasa por el punto  $A$  con una rapidez de  $20 \text{ m/s}$  y comienza a incrementarse a una razón constante de  $a_t = 0.5 \text{ m/s}^2$ , determine la magnitud de la aceleración del auto cuando  $s = 101.68 \text{ m}$  y  $x = 0$ .



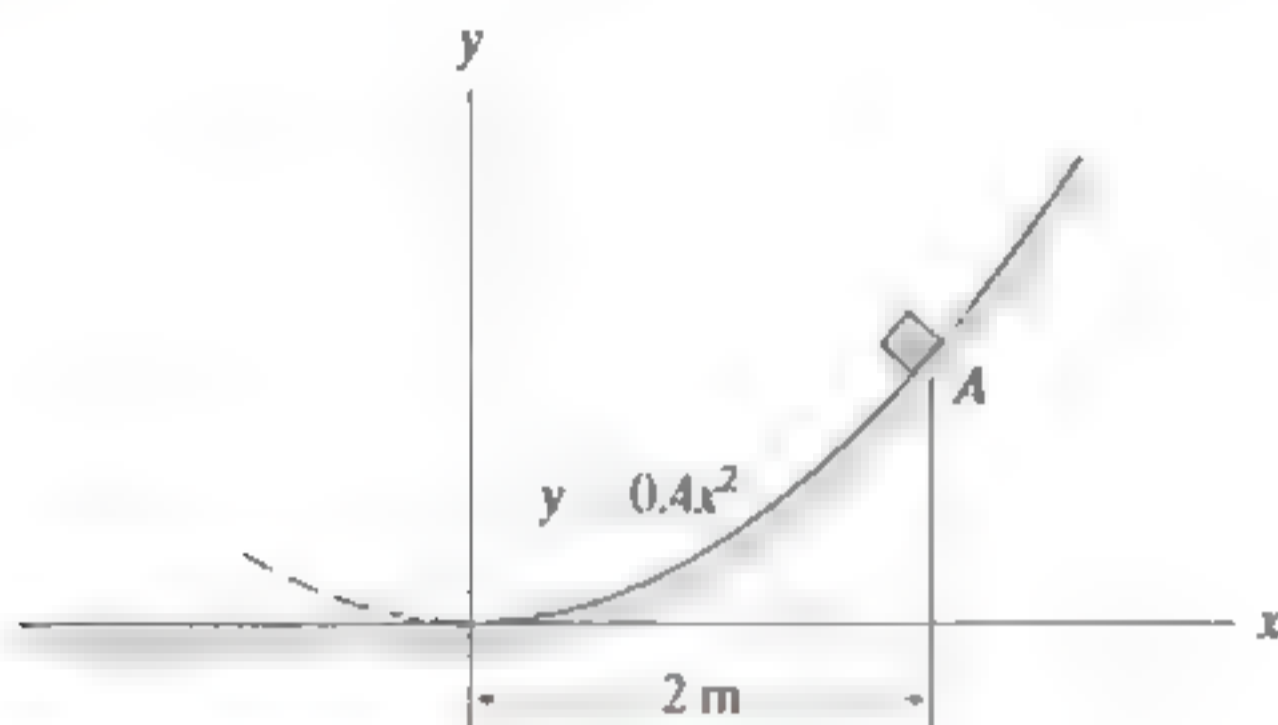
Probs. 12-121/122

**12-123.** La motocicleta se desplaza a  $1 \text{ m/s}$  cuando está en  $A$ . Si luego la rapidez se incrementa en  $\dot{v} = 0.1 \text{ m/s}^2$ , determine su velocidad y aceleración en el instante  $t = 5 \text{ s}$ .



Prob. 12-123

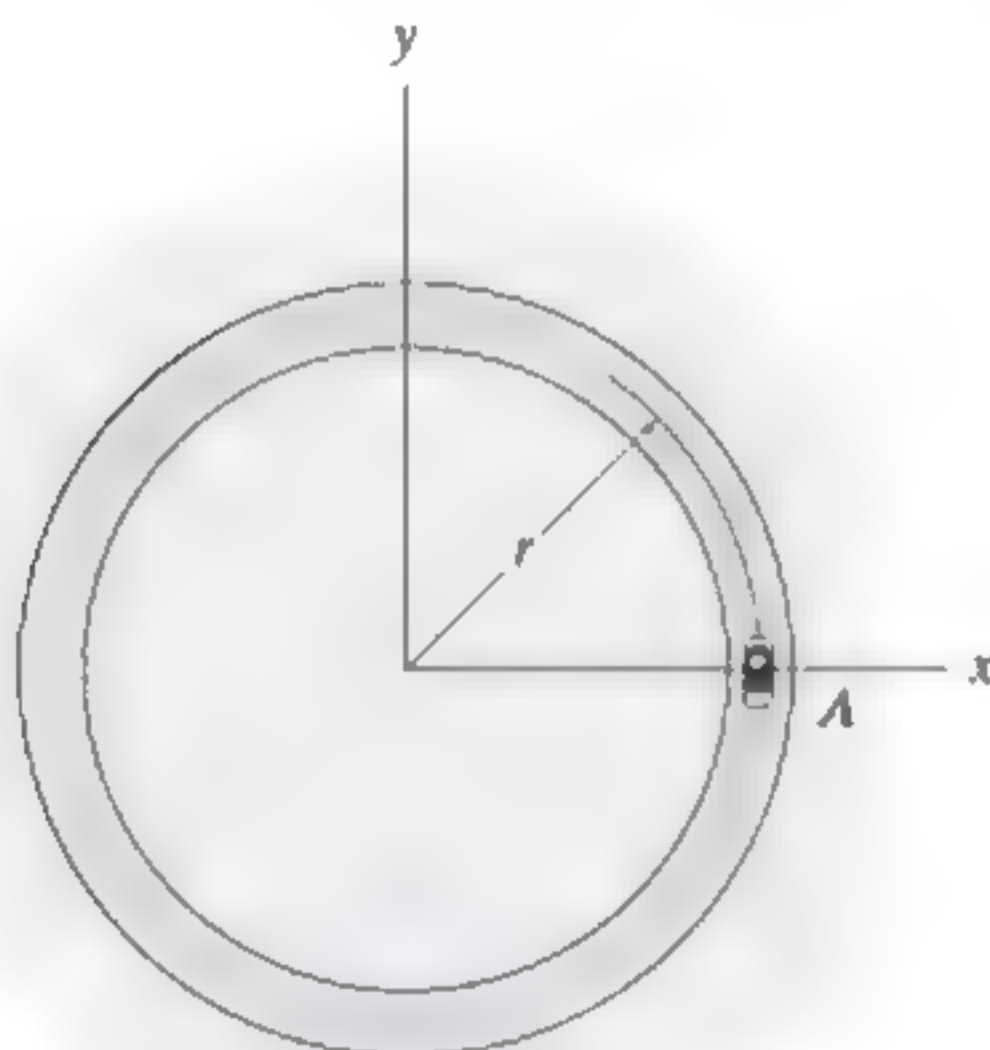
**\*12-124.** La caja, cuyo tamaño es despreciable, se desliza hacia abajo a lo largo de una trayectoria curva definida por la parábola  $y = 0.4x^2$ . Cuando está en  $A(x_A = 2 \text{ m}, y_A = 1.6 \text{ m})$ , la rapidez es  $v = 8 \text{ m/s}$  y el incremento de su rapidez es  $dv/dt = 4 \text{ m/s}^2$ . Determine la magnitud de la aceleración de la caja en este instante.



Prob. 12-124

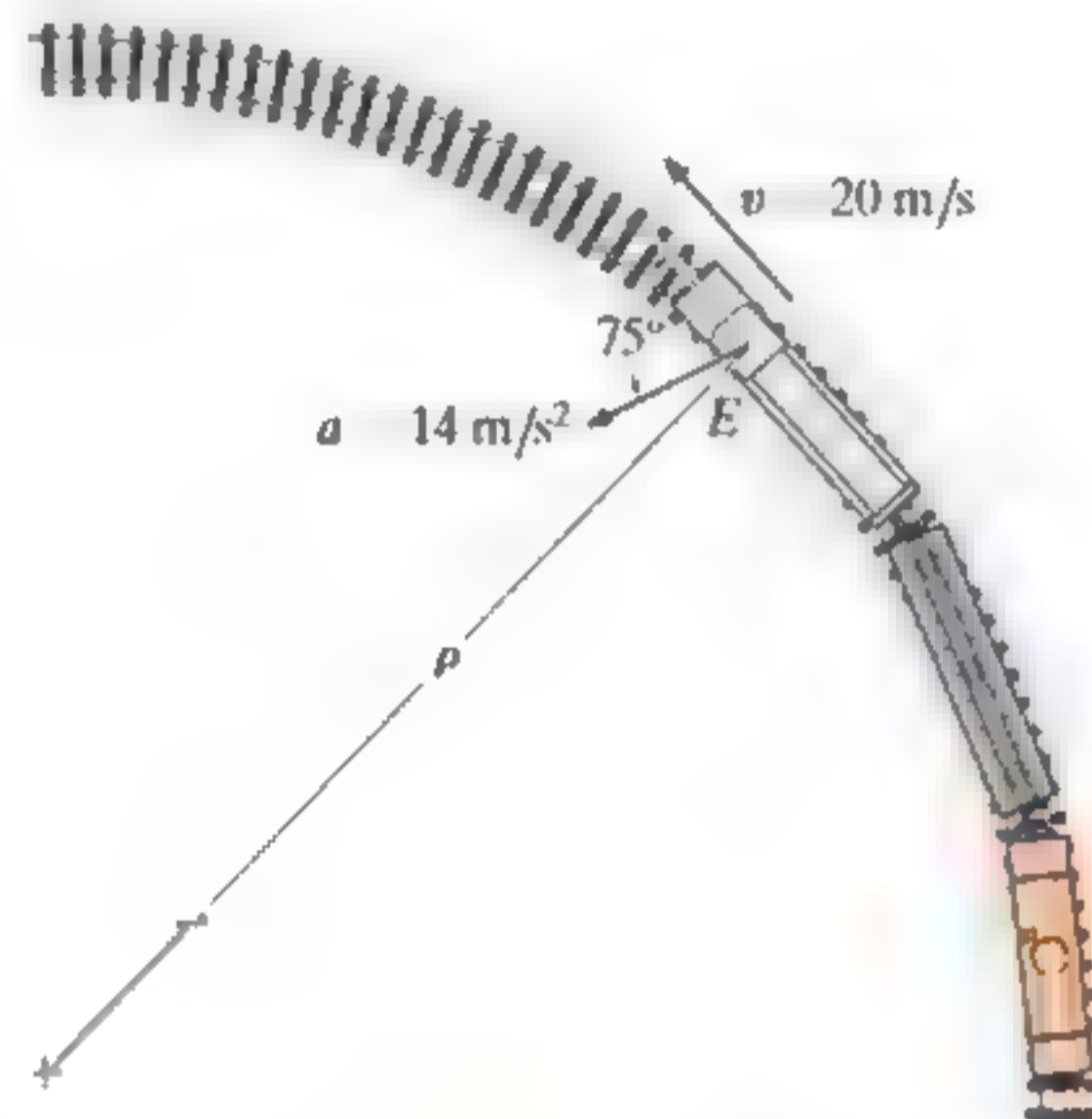
**12-125.** El automóvil viaja alrededor de la pista circular que tiene un radio de  $r = 300 \text{ m}$ , de modo que cuando está en el punto  $A$  tiene una velocidad de  $5 \text{ m/s}$ , la cual aumenta a razón de  $\dot{v} = (0.06t) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando ha recorrido un tercio del camino alrededor de la pista.

**12-126.** El automóvil viaja alrededor de la porción de una pista circular que tiene un radio de  $r = 500 \text{ ft}$ , de modo que cuando está en el punto  $A$  tiene una velocidad de  $2 \text{ ft/s}$ , la cual aumenta a razón de  $\dot{v} = (0.002t) \text{ ft/s}^2$ , donde  $t$  está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando ha recorrido tres cuartos del camino alrededor de la pista.



Probs. 12-125/126

**12-127.** En un instante dado la locomotora del tren en  $E$  tiene una rapidez de  $20 \text{ m/s}$  y una aceleración de  $14 \text{ m/s}^2$  que actúan en la dirección mostrada. Determine la razón de aumento de la rapidez del tren y el radio de curvatura  $\rho$  de la trayectoria.



Prob. 12-127

**\*12-128.** El automóvil tiene una rapidez inicial  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ . Si aumenta su rapidez a lo largo de la pista circular en  $s = 0$ ,  $a_t = (0.8s) \text{ m/s}^2$ , donde  $s$  está en metros, determine el tiempo necesario para que el auto recorra  $s = 25 \text{ m}$ .

**12-129.** El automóvil parte desde el reposo en  $s = 0$  y aumenta su rapidez en  $a_t = 4 \text{ m/s}^2$ . Determine el tiempo cuando la magnitud de la aceleración llega a  $20 \text{ m/s}^2$ . ¿En qué posición  $s$  ocurre esto?



Probs. 12-128/129

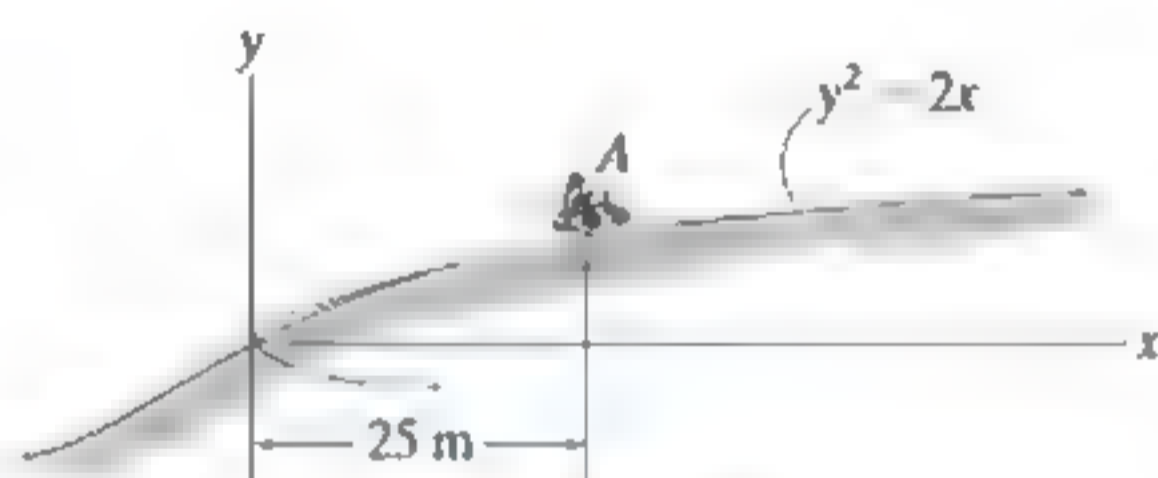
**12-130.** Una lancha se desplaza a lo largo de una curva circular que tiene un radio de 100 ft. Si su rapidez en  $t = 0$  es de 15 ft/s y está aumentando a razón de  $\dot{v} = (0.8t)$  ft/s<sup>2</sup>, determine la magnitud de su aceleración en el instante  $t = 5$  s.

**12-131.** Una lancha se desplaza a lo largo de una trayectoria circular con un radio de 20 m. Determine la magnitud de la aceleración de la lancha, cuando la rapidez es  $v = 5$  m/s y la razón de aumento de la rapidez es  $\dot{v} = 2$  m/s<sup>2</sup>.

**\*12-132.** A partir del reposo, un ciclista viaja alrededor de una trayectoria circular horizontal,  $\rho = 10$  m, con una rapidez de  $v = (0.09t^2 + 0.1t)$  m/s, donde  $t$  se da en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando haya recorrido  $s = 3$  m.

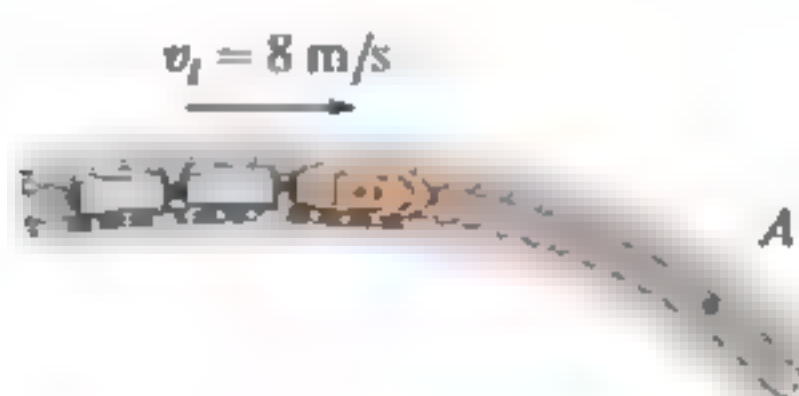
**12-133.** Una partícula viaja alrededor de una trayectoria circular con un radio de 50 m. Si se desplaza inicialmente con una rapidez de 10 m/s y luego ésta aumenta a razón de  $\dot{v} = (0.05 v)$  m/s<sup>2</sup>, determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuatro segundos después.

**12-134.** La motocicleta viaja a una rapidez constante de 60 km/h. Determine la magnitud de su aceleración cuando está en el punto A.



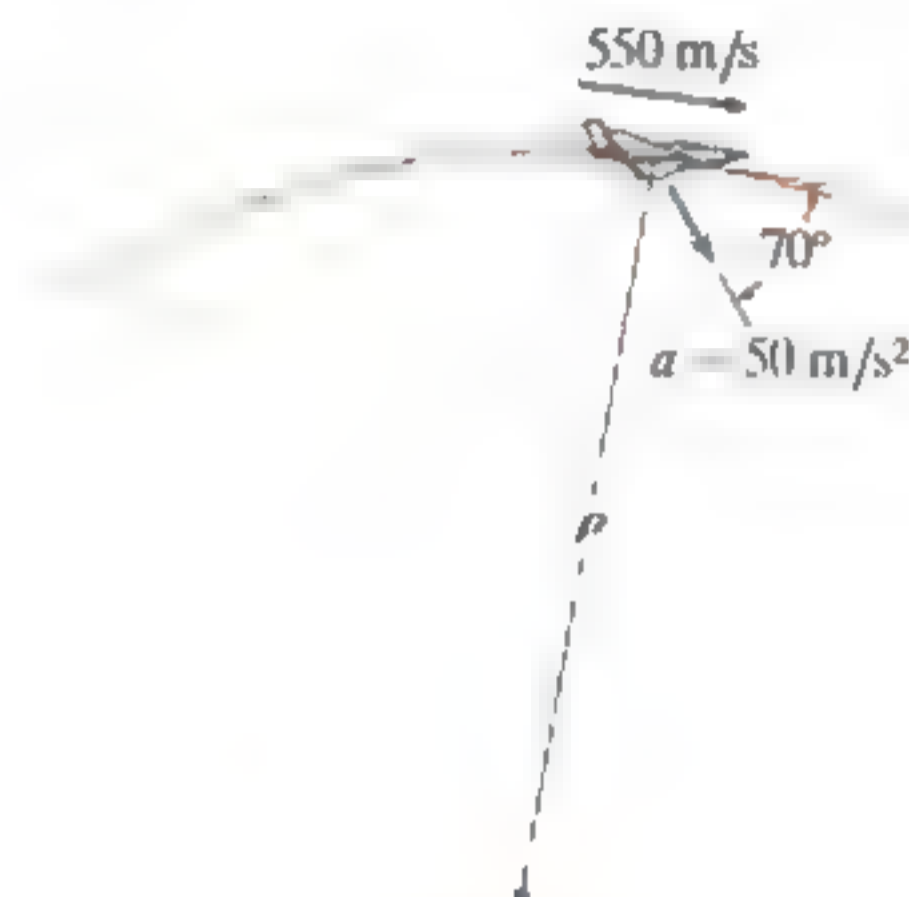
Prob. 12-134

**12-135.** Cuando  $t = 0$ , el tren tiene una rapidez de 8 m/s, que está aumentando a 0.5 m/s<sup>2</sup>. Determine la magnitud de la aceleración de la locomotora cuando alcanza el punto A, en  $t = 20$  s. Aquí, el radio de curvatura de la pista es  $\rho_A = 400$  m.



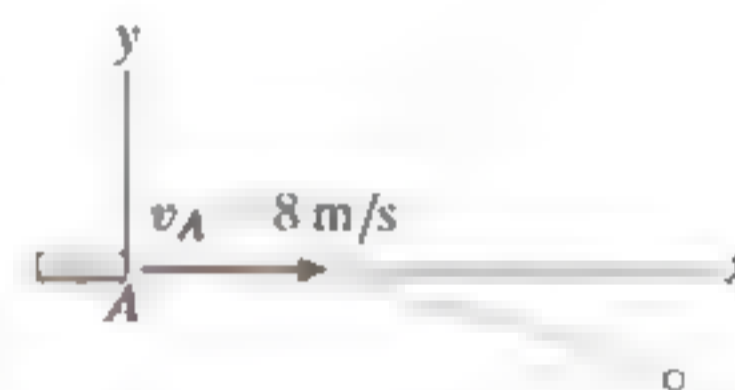
Prob. 12-135

**\*12-136.** En un instante dado, el avión a reacción tiene una rapidez de 550 m/s y una aceleración de 50 m/s<sup>2</sup> que actúan en la dirección mostrada. Determine la razón de aumento en la rapidez del avión, así como el radio de curvatura  $\rho$  de la trayectoria.



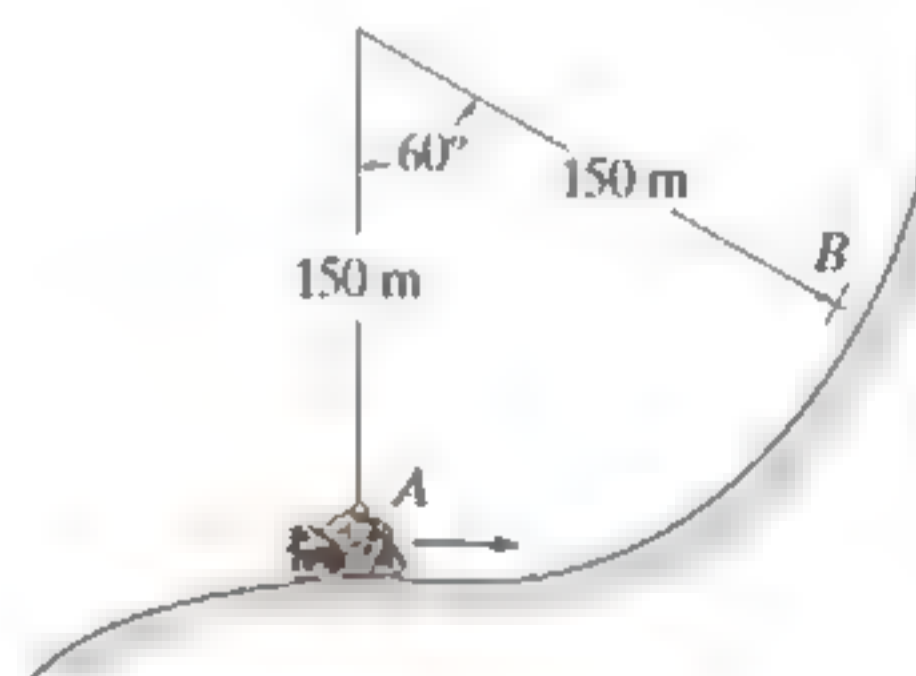
Prob. 12-136

**12-137.** La bola se lanza horizontalmente desde el tubo con una rapidez de 8 m/s. Encuentre la ecuación de la trayectoria,  $y = f(x)$ , y después encuentre la velocidad de la bola y las componentes normal y tangencial de la aceleración, cuando  $t = 0.25$  s.



Prob. 12-137

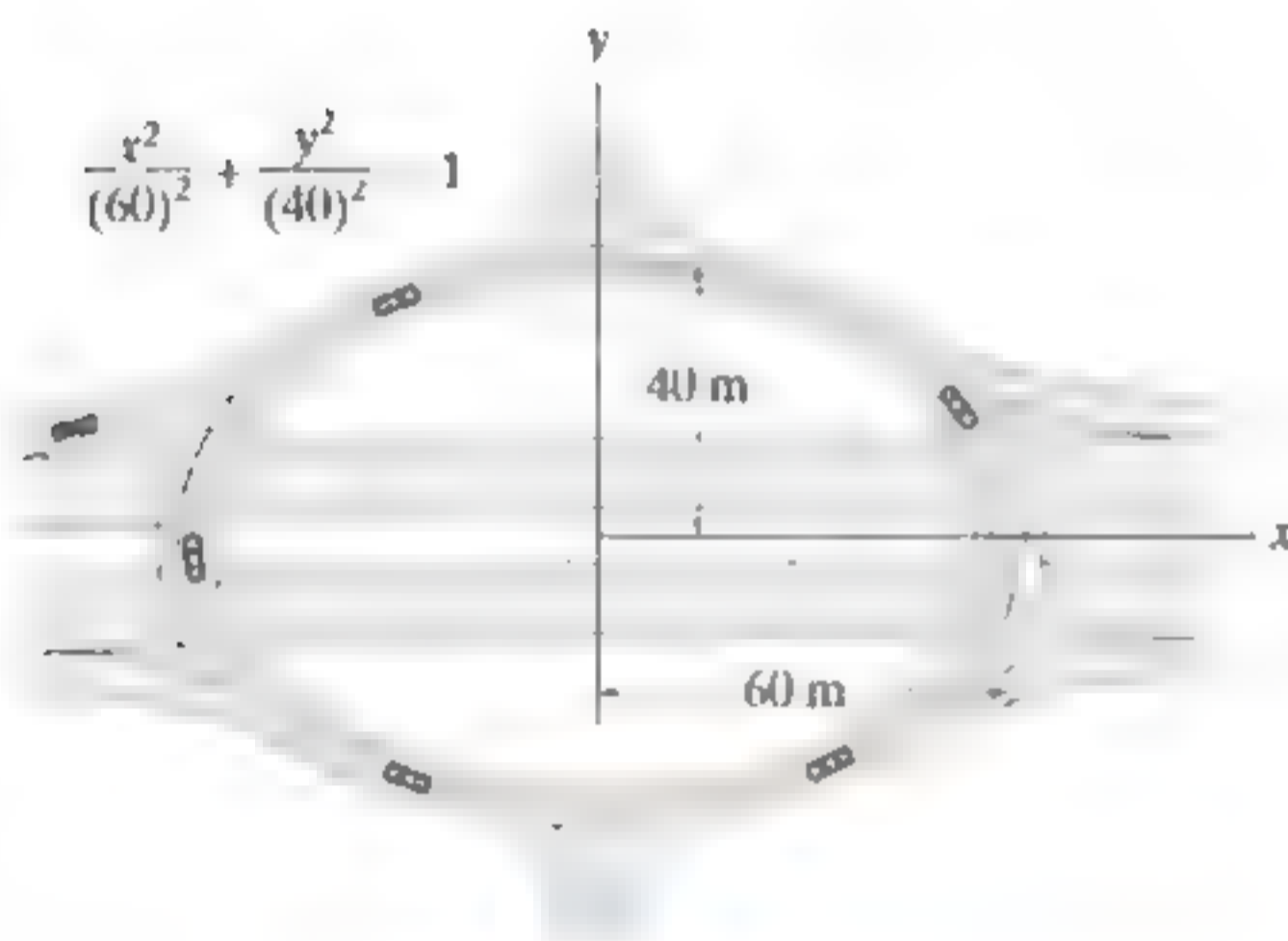
**12-138.** La motocicleta se desplaza a 40 m/s cuando está en A. Si la rapidez se reduce entonces a razón de  $\dot{v} = -(0.05 s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  está en metros medidos desde A, determine su rapidez y aceleración cuando llega a B.



Prob. 12-138

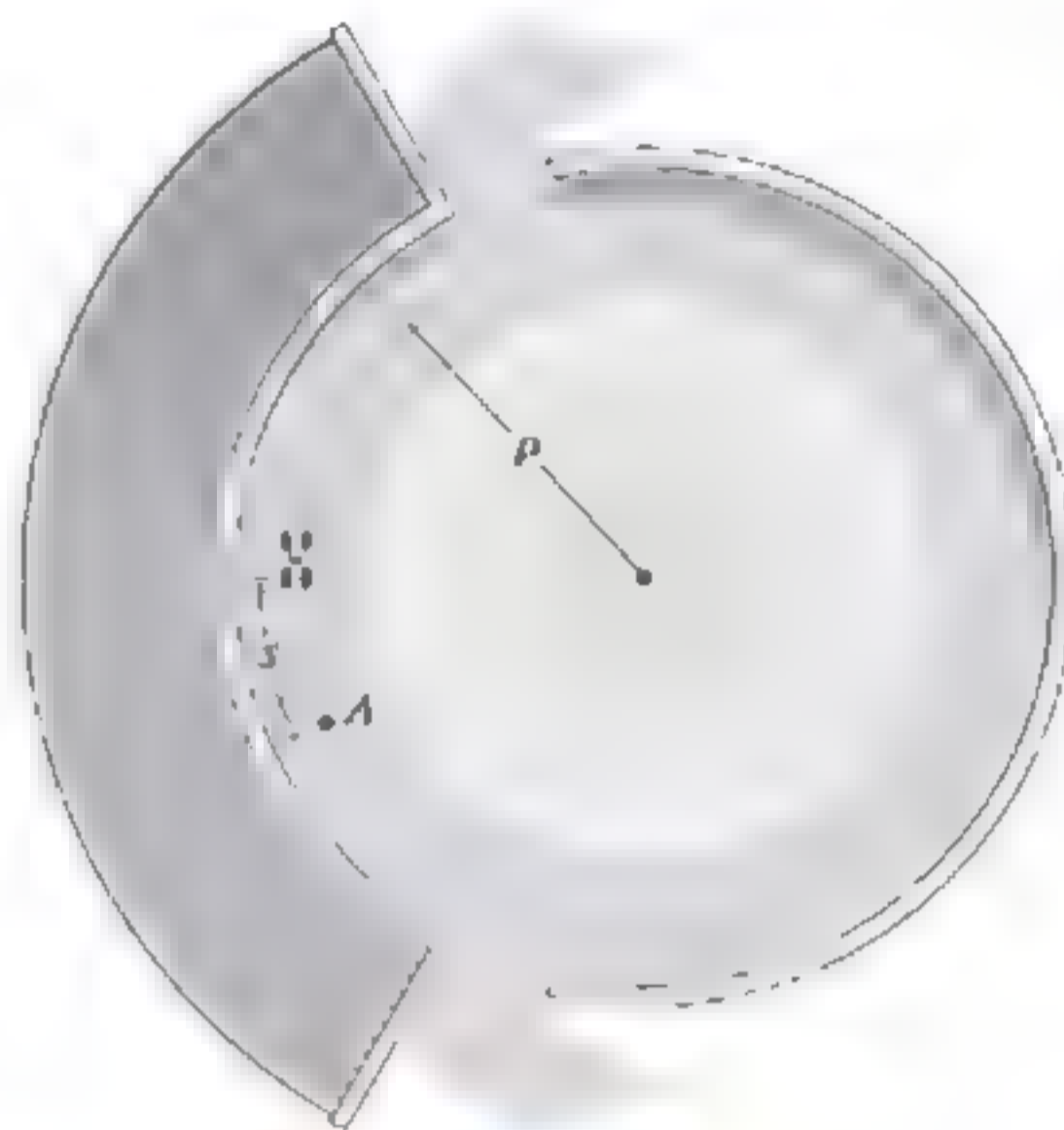
**12-139.** Los automóviles se mueven alrededor del “distribuidor vial” que tiene la forma de una elipse. Si el límite de rapidez establecido es de 60 km/h, determine la aceleración mínima que experimentan los pasajeros.

**\*12-140.** Los automóviles se mueven alrededor del “distribuidor vial” que tiene la forma de una elipse. Si el límite de rapidez establecido es de 60 km/h, determine la aceleración máxima que experimentan los pasajeros.



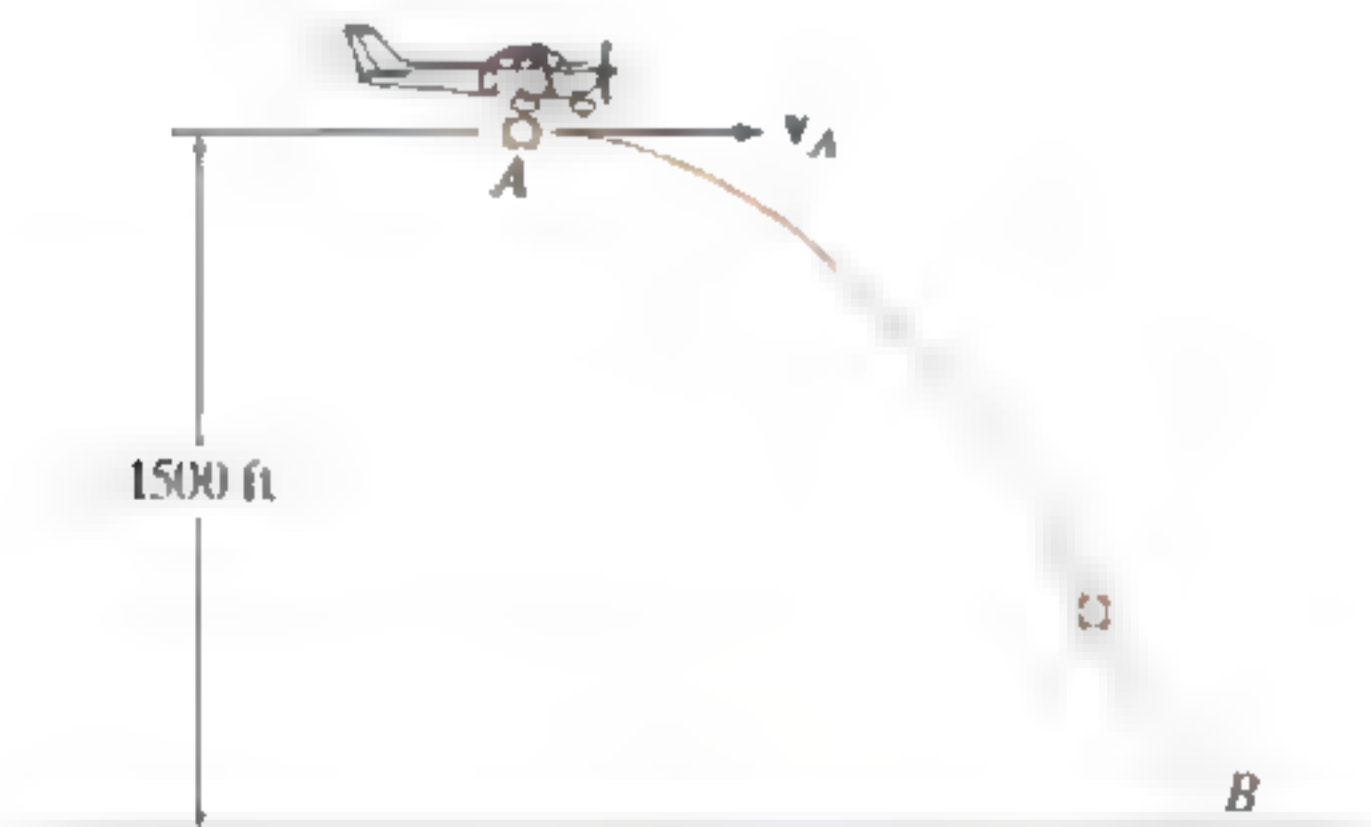
Probs. 12-139/140

**12-142.** El automóvil de carreras tiene una rapidez inicial  $v_A = 15$  m/s en  $A$ . Si se aumenta su rapidez a lo largo de la pista circular a razón de  $a_t = (0.4s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  está en metros, determine el tiempo necesario para que el automóvil viaje 20 m. Considere que  $\rho = 150$  m.



Prob. 12-142

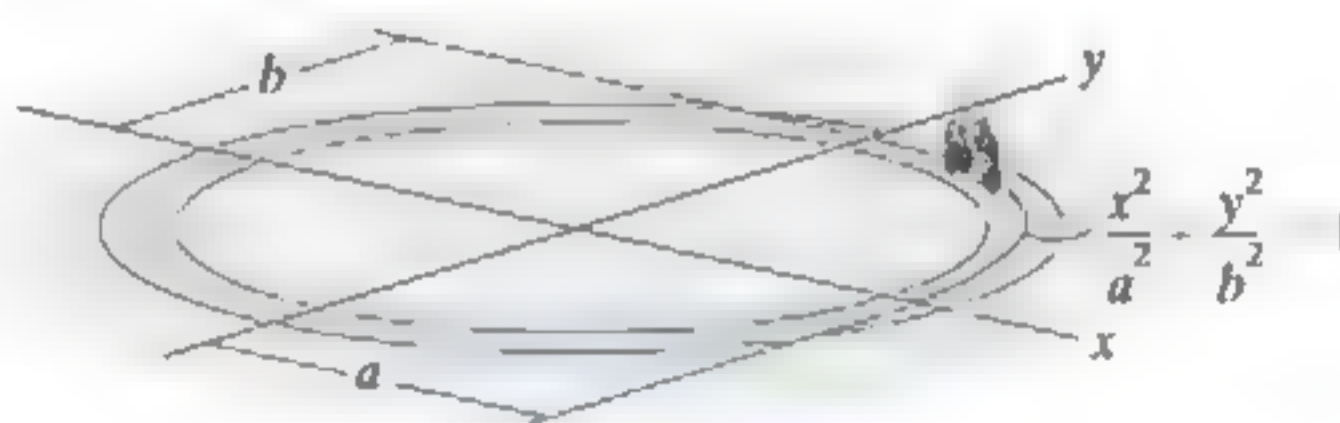
**12-141.** Un avión deja caer un paquete mientras vuela con una velocidad horizontal constante de  $v_A = 150$  ft/s. Determine las componentes normal y tangencial de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria de movimiento (a) en el momento que el paquete se suelta en  $A$ , donde tiene una velocidad horizontal de  $v_A = 150$  ft/s, y (b) justo antes de que golpee el suelo en  $B$ .



Prob. 12-141

**12-143.** La motocicleta viaja a lo largo de la pista elíptica a una rapidez constante  $v$ . Determine la magnitud máxima de la aceleración si  $a > b$ .

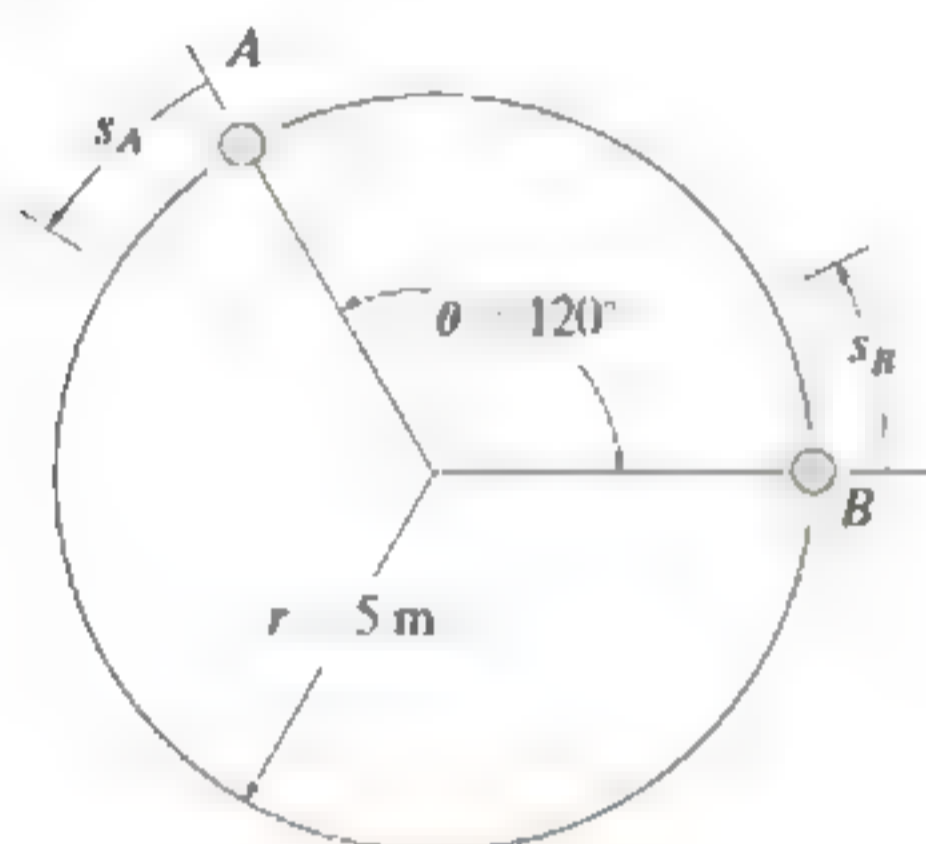
**\*12-144.** La motocicleta viaja a lo largo de la pista elíptica a una rapidez constante  $v$ . Determine la magnitud mínima de la aceleración si  $a > b$ .



Probs. 12-143/144

**12-145.** Las partículas  $A$  y  $B$  viajan en sentido antihorario alrededor de una pista circular a una rapidez constante de  $8 \text{ m/s}$ . Si en el instante mostrado la rapidez de  $A$  comienza a incrementarse en  $(a_t)_A = (0.4s_A) \text{ m/s}^2$ , donde  $s_A$  está en metros, determine la distancia medida en sentido antihorario a lo largo de la pista de  $B$  a  $A$ , cuando  $t = 1 \text{ s}$ . ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula en este instante?

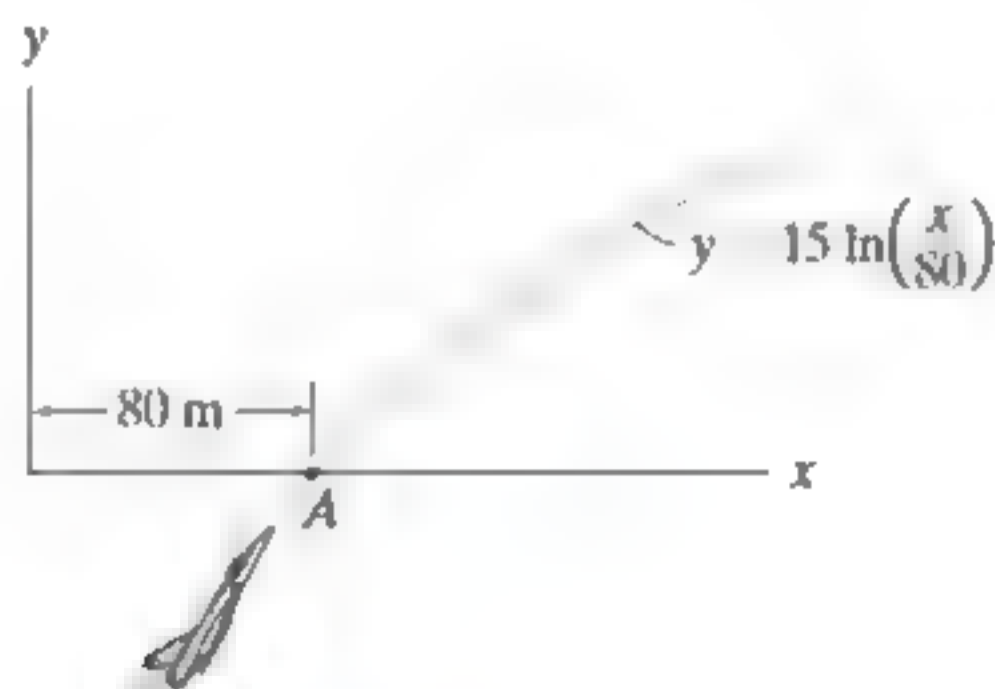
**12-146.** Las partículas  $A$  y  $B$  viajan alrededor de una pista circular a una rapidez de  $8 \text{ m/s}$  en el instante que se muestra. Si la rapidez de  $B$  se incrementa en  $(a_t)_B = 4 \text{ m/s}^2$  y en el mismo instante  $A$  experimenta un incremento de rapidez de  $(a_t)_A = 0.8t \text{ m/s}^2$ , determine cuánto tiempo se requiere para que ocurra una colisión. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula justo antes de que ocurra la colisión?



Probs. 12-145/146

**12-147.** El avión de reacción vuela a una rapidez de  $120 \text{ m/s}$ , la cual se reduce a  $40 \text{ m/s}^2$  cuando llega al punto  $A$ . Determine la magnitud de su aceleración cuando está en este punto. Asimismo, especifique la dirección del vuelo con respecto al eje  $x$ .

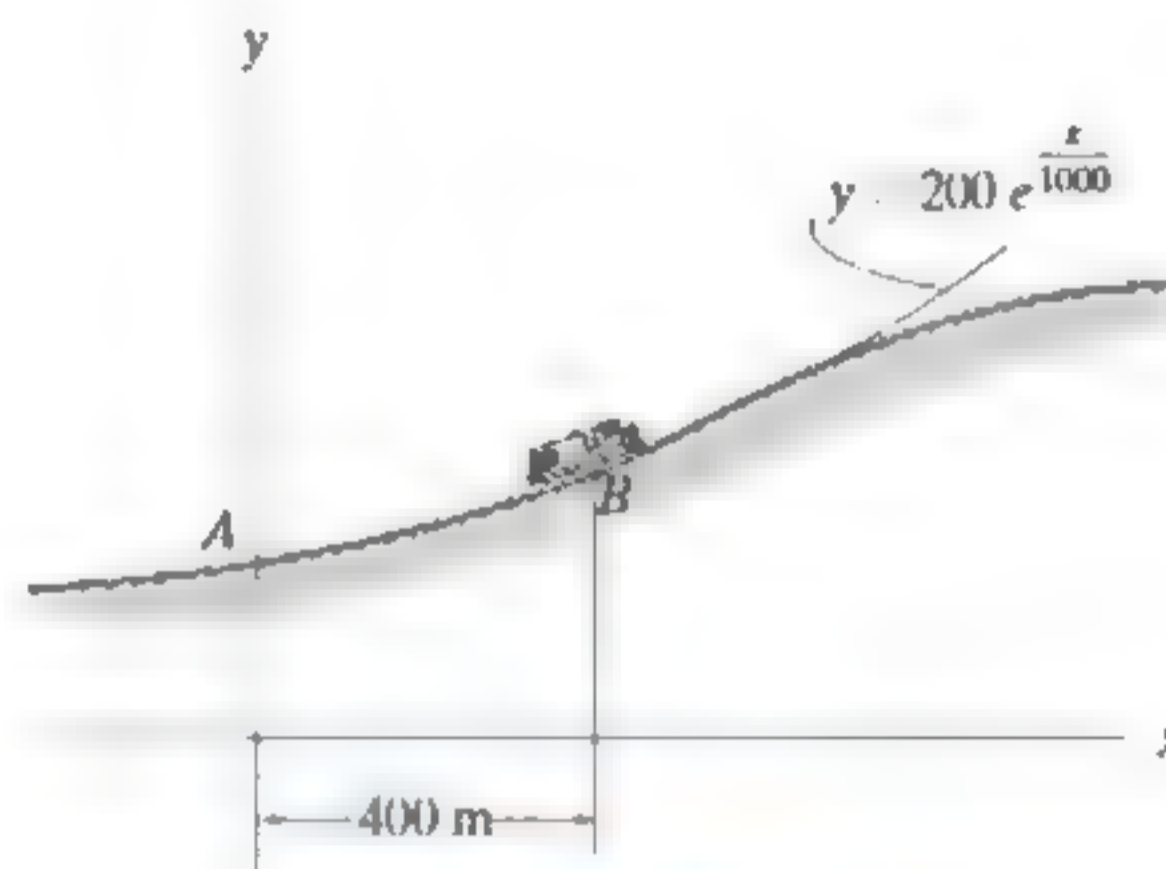
**\*12-148.** El avión de reacción vuela a una rapidez constante de  $110 \text{ m/s}$  a lo largo de una trayectoria curva. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto  $A$  ( $y = 0$ ).



Probs. 12-147/148

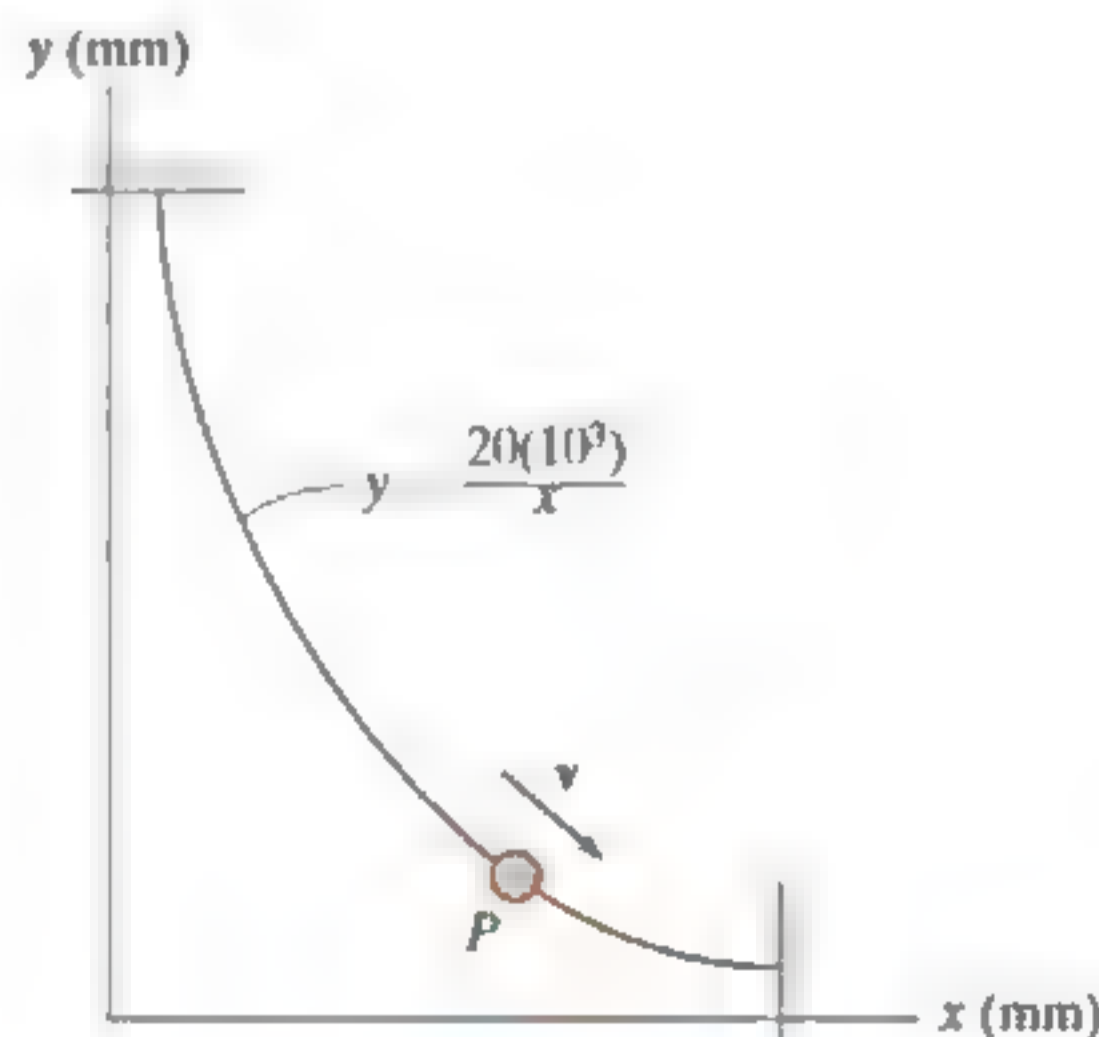
**12-149.** El tren pasa por el punto  $B$  con una rapidez de  $20 \text{ m/s}$  que está disminuyendo a razón de  $a_t = -0.5 \text{ m/s}^2$ . Determine la magnitud de la aceleración del tren en ese punto.

**12-150.** El tren pasa por el punto  $A$  con una rapidez de  $30 \text{ m/s}$  y comienza a disminuir su rapidez a razón constante de  $a_t = -0.25 \text{ m/s}^2$ . Determine la magnitud de la aceleración del tren cuando alcanza el punto  $B$ , donde  $s_{AB} = 412 \text{ m}$ .



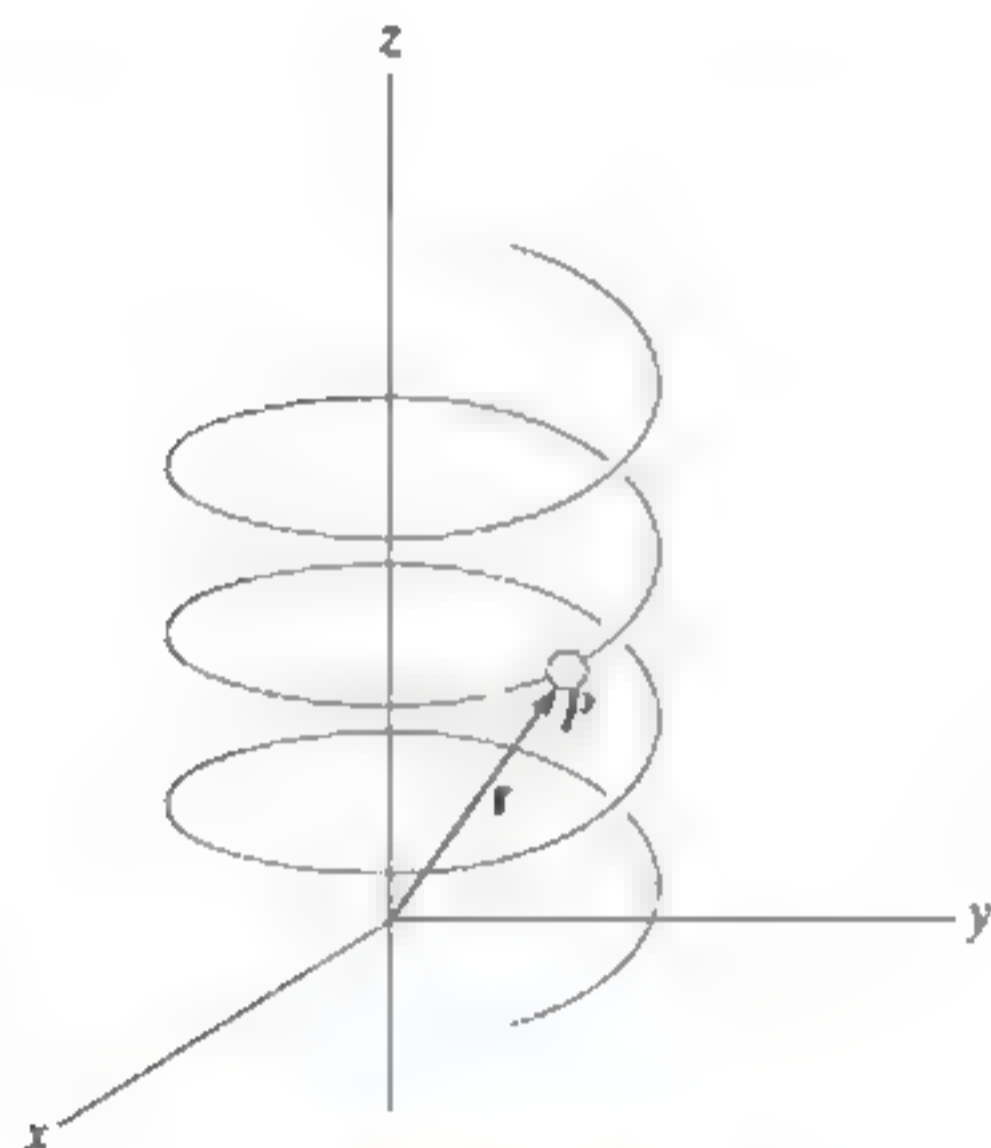
Probs. 12-149-150

**12-151.** La partícula se desplaza con una rapidez constante de  $300 \text{ mm/s}$  a lo largo de la curva. Determine la aceleración de la partícula cuando se encuentra en el punto  $(200 \text{ mm}, 100 \text{ mm})$  y grafique este vector sobre la curva.



Prob. 12-151

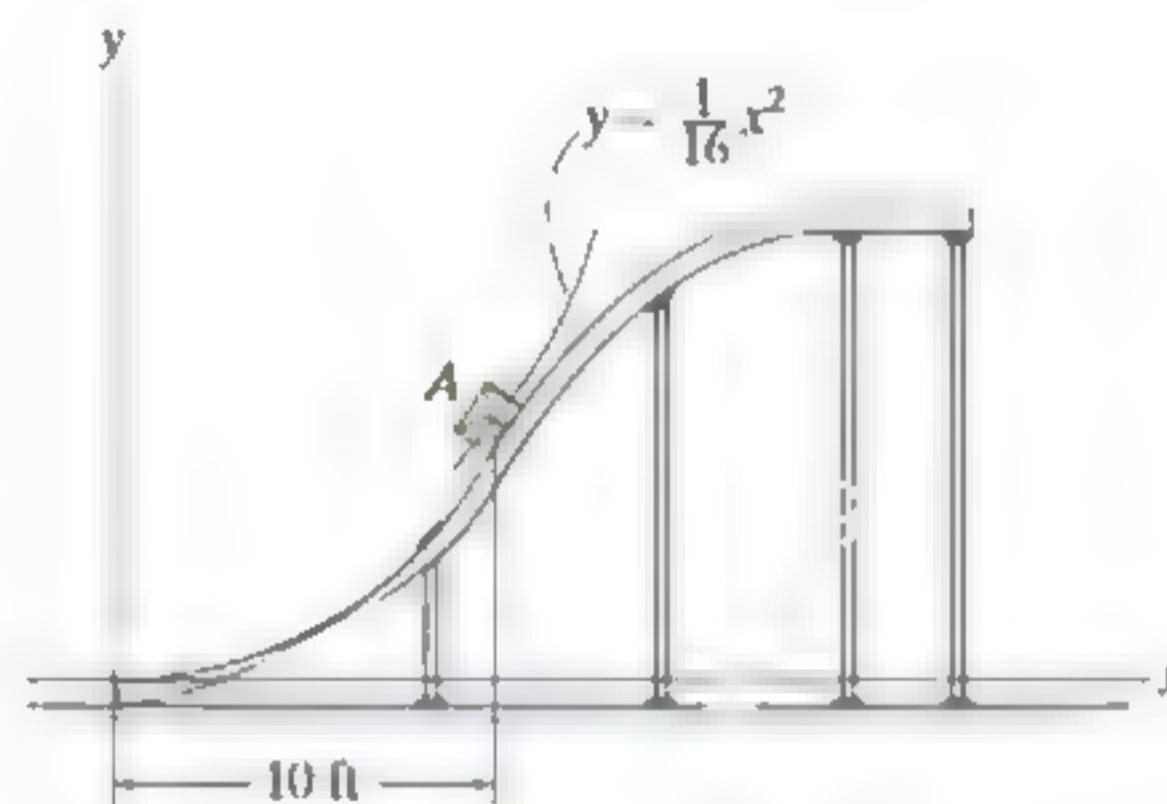
**12-152.** Una partícula  $P$  se desplaza a lo largo de una trayectoria elíptica en espiral, de modo que su vector de posición  $\mathbf{r}$  está definido por  $\mathbf{r} = \{2\cos(0.1t)\mathbf{i} - 1.5\sin(0.1t)\mathbf{j} - (2t)\mathbf{k}\}$  m, donde  $t$  se da en segundos y los argumentos para el seno y el coseno se dan en radianes. Cuando  $t = 8$  s, determine los ángulos directores coordenados  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , que forma el eje binormal al plano osculador con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . *Sugerencia:* Despeje la velocidad  $\mathbf{v}_P$  y la aceleración  $\mathbf{a}_P$  de la partícula en términos de sus componentes  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . El eje binormal es paralelo a  $\mathbf{v}_P \times \mathbf{a}_P$ . ¿Por qué?



Prob. 12-152

**12-153.** El movimiento de una partícula está definido por las ecuaciones  $x = (2t - t^2)$  m y  $y = (t^2)$  m, donde  $t$  se da en segundos. Determine las componentes normal y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando  $t = 2$  s.

**12-154.** Si la rapidez del embalaje en  $A$  es 15 ft/s, la cual aumenta a razón de  $\dot{v} = 3$  ft/s<sup>2</sup>, determine la magnitud de la aceleración del embalaje en ese instante.



Prob. 12-154

## 12.8 Movimiento curvilíneo: componentes cilíndricas

En ocasiones el movimiento de una partícula se limita a una trayectoria que se describe mejor usando coordenadas cilíndricas. Si el movimiento se limita al plano, entonces se utilizan coordenadas polares.

**Coordenadas polares.** Podemos especificar la ubicación de la partícula de la figura 12-30a mediante una *coordenada radial*  $r$ , la cual se extiende hacia fuera del origen fijo  $O$  hasta la partícula y una *coordenada transversal*  $\theta$ , la cual es el ángulo en sentido antihorario entre una línea de referencia fija y el eje  $r$ . El ángulo en general se mide en grados o radianes, donde  $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi$ . Los vectores unitarios  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$  definen las direcciones positivas de las coordenadas  $r$  y  $\theta$ , respectivamente. En este caso,  $\mathbf{u}_r$  está en la dirección de  $r$  creciente cuando  $\theta$  se mantiene fija y  $\mathbf{u}_\theta$  está en la dirección de  $\theta$  creciente cuando  $r$  se mantiene fija. Observe que estas direcciones son perpendiculares entre sí.

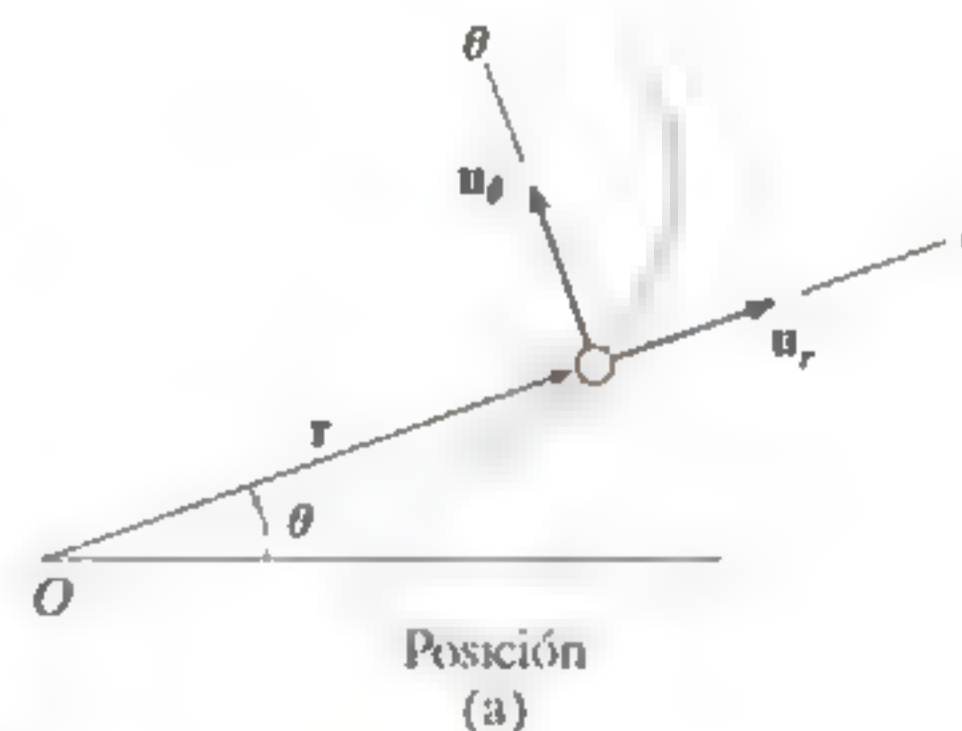
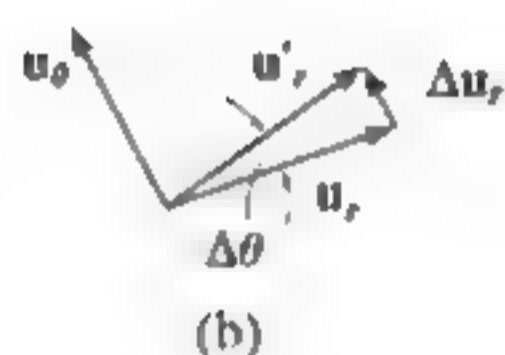
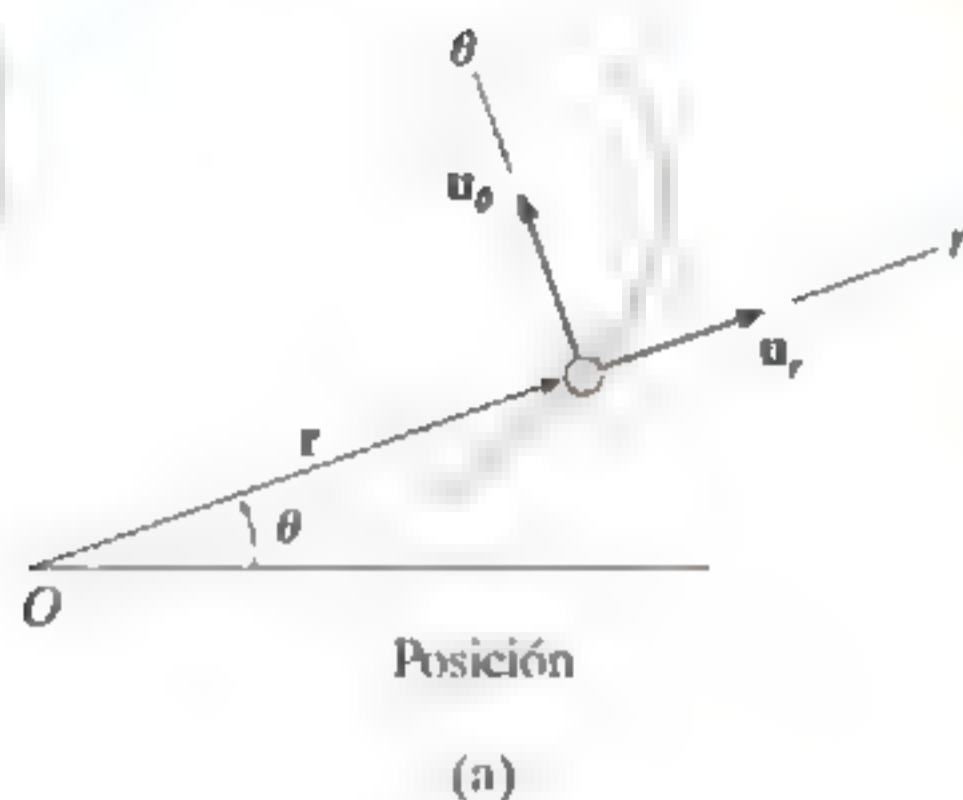


Fig. 12-30



**Posición.** En cualquier instante (fig. 12-30a), la posición de la partícula está definida por el vector de posición

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \quad (12-22)$$

**Velocidad.** La velocidad instantánea  $\mathbf{v}$  se obtiene al tomar la derivada con respecto al tiempo de  $\mathbf{r}$ . Usando un punto para representar la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

Para evaluar  $\dot{\mathbf{u}}_r$ , observe que  $\mathbf{u}_r$  sólo cambia su dirección con respecto al tiempo ya que, por definición, la magnitud de este vector siempre es una unidad. Por consiguiente, durante el tiempo  $\Delta t$ , un cambio de  $\Delta r$  no cambiará la dirección de  $\mathbf{u}_r$ ; no obstante, un cambio  $\Delta\theta$  hará que  $\mathbf{u}_r$  cambie a  $\mathbf{u}_r'$ , donde  $\mathbf{u}_r' = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$  (fig. 12-30b). El cambio con respecto al tiempo de  $\mathbf{u}_r$  es, por lo tanto,  $\Delta\mathbf{u}_r$ . Para ángulos pequeños  $\Delta\theta$  la magnitud de este vector es  $\Delta u_r \approx 1(\Delta\theta)$  y actúa en la dirección  $\mathbf{u}_\theta$ . Por consiguiente,  $\Delta\mathbf{u}_r = \Delta\theta\mathbf{u}_\theta$ , y entonces

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_r &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_r &= \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \end{aligned} \quad (12-23)$$

Al sustituir en la ecuación anterior, la velocidad se escribe en términos de sus componentes como

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta \quad (12-24)$$

donde

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned} \quad (12-25)$$

Estas componentes se muestran gráficamente en la figura 12-30c. La *componente radial*  $v_r$  mide la tasa de incremento o decremento de la longitud de la coordenada radial, es decir,  $\dot{r}$ ; en tanto que la *componente transversal*  $v_\theta$  se interpreta como la tasa de movimiento a lo largo de la circunferencia de un círculo de radio  $r$ . En particular, el término  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  se conoce como *velocidad angular*, ya que indica la razón de cambio del ángulo  $\theta$  con respecto al tiempo. La unidad más utilizada para esta cantidad es rad/s.

Como  $v_r$  y  $v_\theta$  son mutuamente perpendiculares, la *magnitud* de la velocidad o rapidez es simplemente el valor positivo de

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \quad (12-26)$$

y la *dirección* de  $\mathbf{v}$  es, desde luego, tangente a la trayectoria (fig. 12-30c).

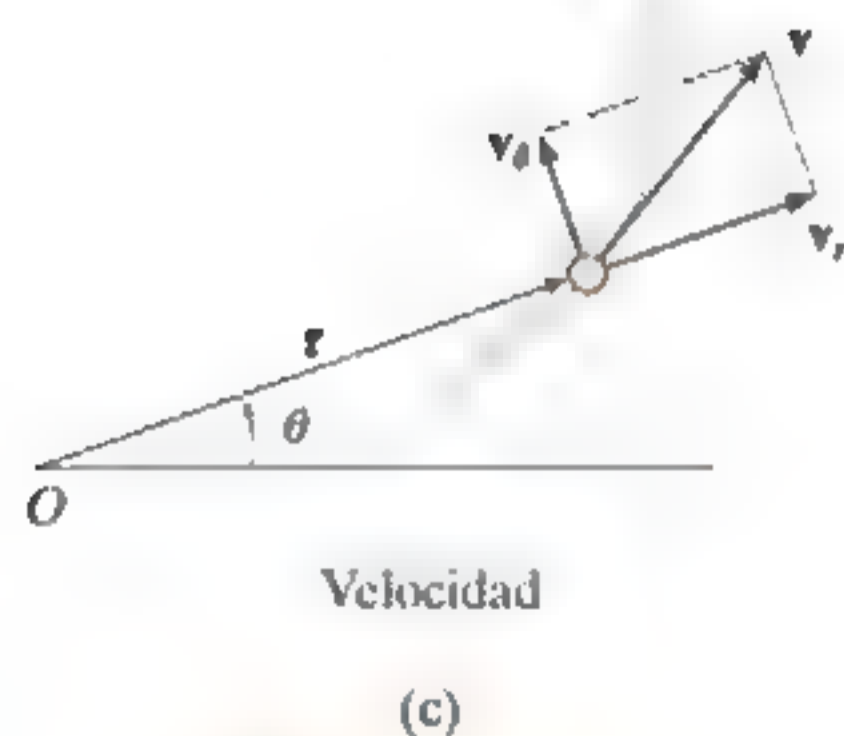


Fig. 12-30 (cont.)

**Advertencia.** Si tomamos las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 12-24 y utilizamos las ecuaciones 12-25, obtenemos la aceleración instantánea de la partícula.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

Para evaluar  $\dot{\mathbf{u}}_\theta$ , lo único que se requiere es determinar el cambio de la dirección de  $\mathbf{u}_\theta$  puesto que su magnitud siempre es la unidad. Durante el tiempo  $\Delta t$ , un cambio  $\Delta r$  no cambiará la dirección de  $\mathbf{u}_\theta$ ; no obstante, un cambio  $\Delta\theta$  hará que  $\mathbf{u}_\theta$  se convierta en  $\mathbf{u}'_\theta$ , donde  $\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta\mathbf{u}_\theta$ , (fig. 12-30d). El cambio de  $\mathbf{u}_\theta$  con el tiempo es entonces  $\Delta\mathbf{u}_\theta$ . Para ángulos pequeños, la magnitud de este vector es  $\Delta u_\theta \approx 1(\Delta\theta)$  y actúa en la dirección  $-\mathbf{u}_r$ , es decir  $\Delta\mathbf{u}_\theta = -\Delta\theta\mathbf{u}_r$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_\theta &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\theta}\mathbf{u}_r\end{aligned}\quad (12-27)$$

Si sustituimos este resultado y la ecuación 12-23 en la ecuación anterior para  $\mathbf{a}$ , escribimos la aceleración en términos de sus componentes como

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta \quad (12-28)$$

donde

$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\end{aligned}\quad (12-29)$$

El término  $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$  se conoce como *aceleración angular* puesto que mide el cambio de la velocidad angular durante un instante de tiempo. Las unidades de esta cantidad son  $\text{rad/s}^2$ .

Como  $a_r$  y  $a_\theta$  son siempre perpendiculares, la *magnitud* de la aceleración es simplemente el valor positivo de

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \quad (12-30)$$

La *dirección* se determina mediante la suma vectorial de sus dos componentes. En general,  $\mathbf{a}$  no será tangente a la trayectoria (fig. 12-30e).

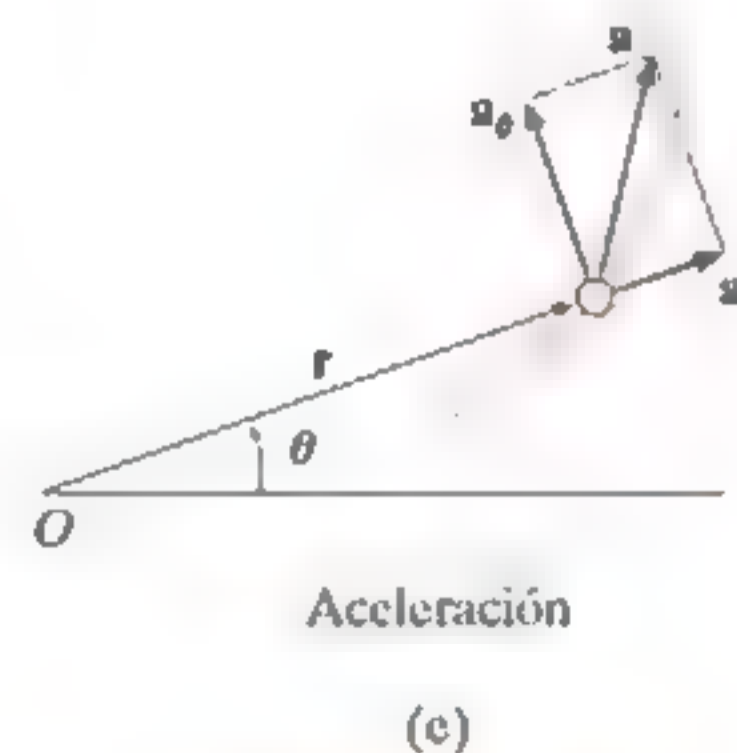
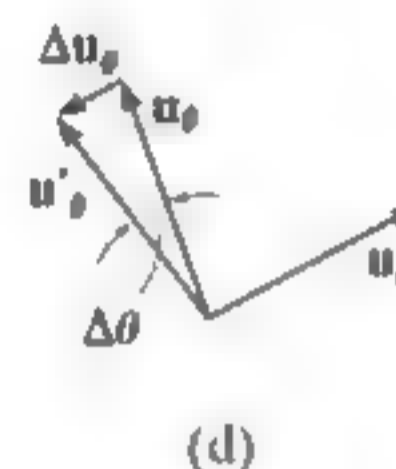


Fig. 12-30 (cont.)

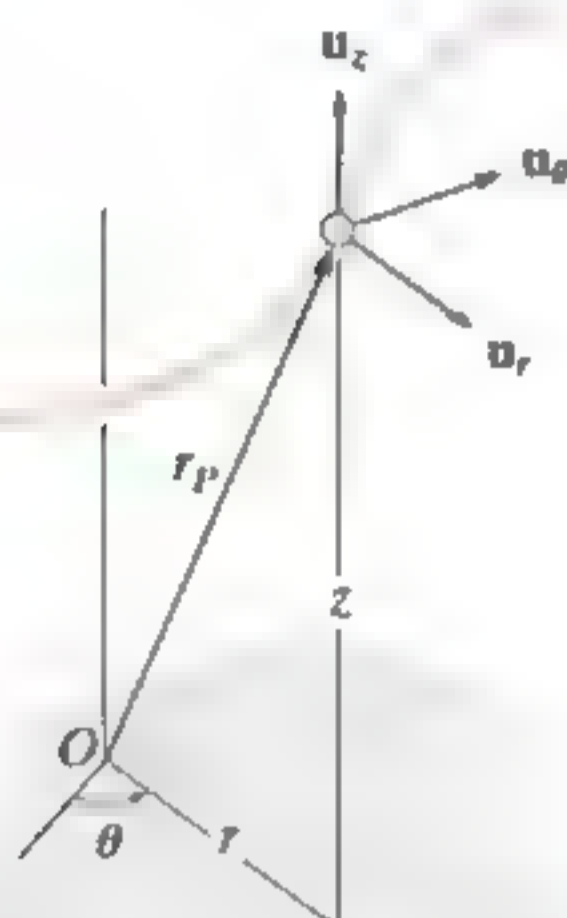


Fig. 12-31

**Coordenadas cilíndricas** Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial, como se muestra en la figura 12-31, entonces su ubicación se especifica por medio de las tres *coordenadas cilíndricas*,  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ . La coordenada  $z$  es idéntica a la que se utilizó para coordenadas rectangulares. Como el vector unitario que define su dirección,  $u_z$ , es constante, las derivadas con respecto al tiempo de este vector son cero y, por consiguiente, la posición, velocidad y aceleración de la partícula se escriben en función de sus coordenadas cilíndricas como sigue:

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z \quad (12-31)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z \quad (12-32)$$

**Derivadas con respecto al tiempo** Las ecuaciones anteriores requieren que obtengamos las derivadas con respecto al tiempo  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ , y  $\ddot{\theta}$  para evaluar las componentes  $r$  y  $\theta$  de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$ . En general, se presentan dos tipos de problemas:

1. Si las coordenadas polares se especifican como ecuaciones paramétricas en función del tiempo,  $r = r(t)$  y  $\theta = \theta(t)$ , entonces las derivadas con respecto al tiempo pueden calcularse directamente.
2. Si no se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo, entonces debe conocerse la trayectoria  $r = f(\theta)$ . Si utilizamos la regla de la cadena del cálculo, encontraremos entonces la relación entre  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ , y entre  $\ddot{r}$  y  $\ddot{\theta}$ . En el apéndice C se explica la aplicación de la regla de la cadena, junto con algunos ejemplos.

## Procedimiento para el análisis

### Sistema de coordenadas

- Las coordenadas polares son una opción adecuada para resolver problemas cuando los datos del movimiento angular de la coordenada radial  $r$  se proporcionan para describir el movimiento de la partícula. Asimismo, algunas trayectorias del movimiento pueden describirse de forma conveniente en función de estas coordenadas.
- Para utilizar coordenadas polares, el origen se establece en un punto fijo y la línea radial  $r$  se dirige hacia la partícula.
- La coordenada transversal  $\theta$  se mide desde una línea de referencia fija hasta la línea radial.

### Velocidad y aceleración

- Con  $r$  y las cuatro derivadas con respecto al tiempo  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ , y  $\ddot{\theta}$  evaluadas en el instante considerado, sus valores se sustituyen en las ecuaciones 12-25 y 12-29 para obtener las componentes radial y transversal de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$ .
- Si es necesario tomar las derivadas con respecto al tiempo de  $r = f(\theta)$ , entonces debe utilizarse la regla de la cadena. Vea el apéndice C.
- El movimiento en tres dimensiones requiere una extensión simple del procedimiento anterior para incluir  $\dot{z}$  y  $\ddot{z}$ .

El movimiento helicoidal de esta niña puede seguirse por medio de las componentes cilíndricas. En este caso, la coordenada radial  $r$  es constante, la coordenada transversal  $\theta$  se incrementa con el tiempo a medida que la niña gira alrededor de la vertical y su altitud  $z$  se reduce con el tiempo. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

El juego mecánico que se muestra en la figura 12-32a consiste en una silla que gira en una trayectoria circular horizontal de radio  $r$ , de modo que la velocidad angular y la aceleración angular del brazo  $OB$  son  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$ , respectivamente. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del pasajero; desprecie su tamaño en el cálculo.

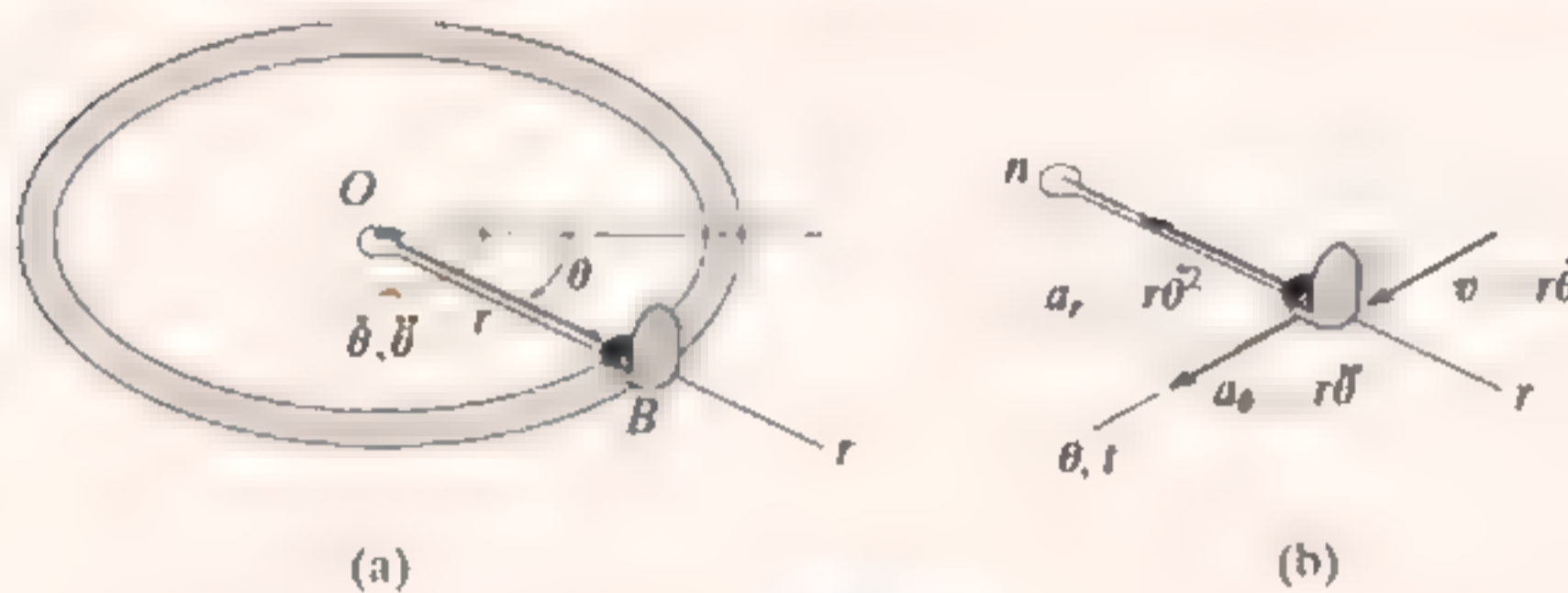


Fig. 12-32

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Como se conoce el movimiento angular del brazo, se eligen coordenadas polares para la solución (fig. 12-32a). En este caso,  $\theta$  no se relaciona con  $r$ , ya que el radio es constante para todos los ángulos  $\theta$ .

**Velocidad y aceleración.** Primero es necesario especificar la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de  $r$  y  $\theta$ . Como  $r$  es constante, entonces

$$r = r \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$$

Por lo tanto,

$$v_r = \dot{r} = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$$

*Resp.*

Estos resultados se muestran en la figura 12-32b.

**NOTA:** Los ejes  $n, t$  también se muestran en la figura 12-32b que, en este caso especial de movimiento circular, son *colineales* con los ejes  $r$  y  $\theta$ , respectivamente. Como  $v = v_\theta = v_t = r\dot{\theta}$ , entonces por comparación,

$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

## EJEMPLO 12.11

La varilla  $OA$  en la figura 12-33a gira en el plano horizontal de modo que  $\theta = (t^3)$  rad. Al mismo tiempo, el collar  $B$  se desliza hacia fuera a lo largo de  $OA$  de modo que  $r = (100t^2)$  mm. Si en ambos casos  $t$  está en segundos, determine la velocidad y aceleración del collar cuando  $t = 1$  s.

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Como se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo de la trayectoria, no es necesario relacionar  $r$  con  $\theta$ .

**Velocidad y aceleración.** Si determinamos las derivadas con respecto al tiempo y las evaluamos cuando  $t = 1$  s, tenemos

$$r = 100t^2 \Big|_{t=1\text{ s}} = 100\text{ mm} \quad \theta = t^3 \Big|_{t=1\text{ s}} = 1\text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t \Big|_{t=1\text{ s}} = 200\text{ mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2 \Big|_{t=1\text{ s}} = 3\text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200 \Big|_{t=1\text{ s}} = 200\text{ mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t \Big|_{t=1\text{ s}} = 6\text{ rad/s}^2$$

Como se muestra en la figura 12-33b,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \\ &= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta = \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s} \end{aligned}$$

La magnitud de  $\mathbf{v}$  es

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\text{ mm/s} \quad \text{Resp.}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \quad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ \quad \text{Resp.}$$

Como se muestra en la figura 12-33c,

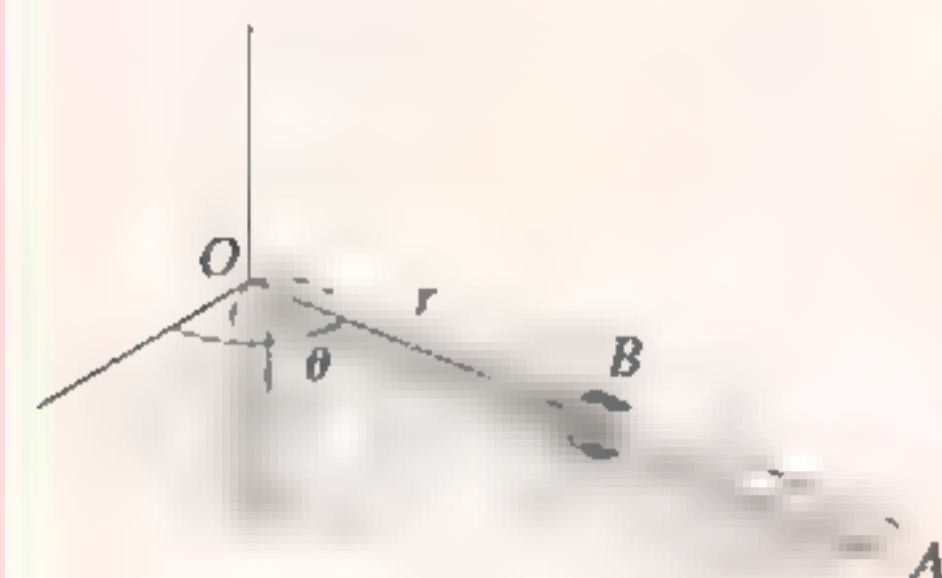
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \\ &= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta \\ &= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

La magnitud de  $\mathbf{a}$  es

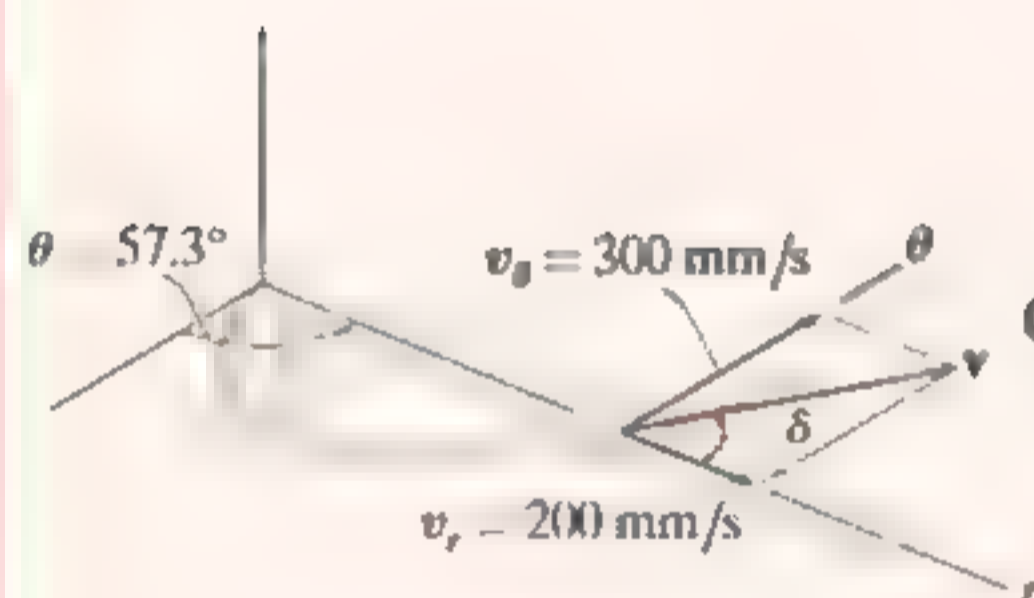
$$a = \sqrt{(-700)^2 + (1800)^2} = 1930\text{ mm/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \quad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ$$

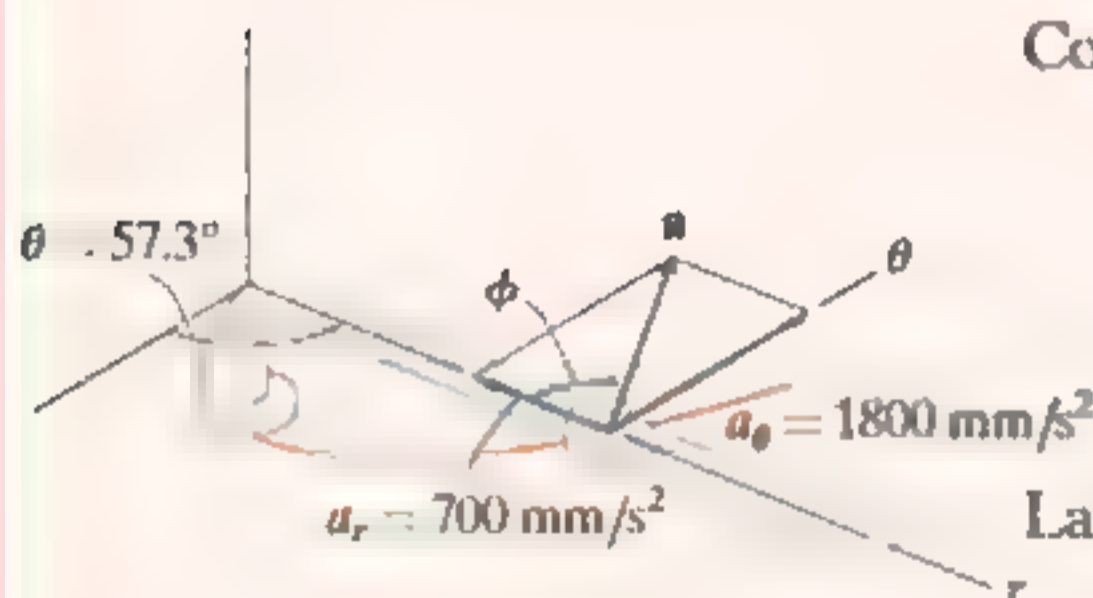
**NOTA:** La velocidad es tangente a la trayectoria; sin embargo, la aceleración está dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria, como se esperaba.



(a)



(b)



(c)

Fig. 12-33

## EJEMPLO

El faro reflector en la figura 12-34a emite un rayo de luz a lo largo de un muro situado a 100 m del faro. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración, a las cuales el rayo de luz parece viajar a través del muro en el instante  $\theta = 45^\circ$ . El faro reflector gira a una velocidad constante de  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ .

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Se utilizarán coordenadas polares para resolver este problema, ya que se proporciona la velocidad angular del faro. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo necesarias, primero se tiene que relacionar  $r$  con  $\theta$ . De acuerdo con la figura 12-34a,

$$r = 100 / \cos \theta = 100 \sec \theta$$

Al utilizar la regla de la cadena del cálculo y puesto que  $d(\sec \theta) = \sec \theta \tan \theta d\theta$  y  $d(\tan \theta) = \sec^2 \theta d\theta$ ,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 100(\sec \theta \tan \theta) \dot{\theta} \\ \ddot{r} &= 100(\sec \theta \tan \theta) \ddot{\theta} (\tan \theta) \dot{\theta} + 100 \sec \theta (\sec^2 \theta) \dot{\theta} (\dot{\theta}) \\ &\quad + 100 \sec \theta \tan \theta (\ddot{\theta}) \\ &= 100 \sec \theta \tan^2 \theta (\dot{\theta})^2 + 100 \sec^3 \theta (\dot{\theta})^2 + 100(\sec \theta \tan \theta) \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Como  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} = \text{constante}$ , entonces  $\ddot{\theta} = 0$ , y las ecuaciones anteriores, cuando  $\theta = 45^\circ$ , se convierten en

$$\begin{aligned}r &= 100 \sec 45^\circ = 141.4 \\ \dot{r} &= 400 \sec 45^\circ \tan 45^\circ = 565.7 \\ \ddot{r} &= 1600 (\sec 45^\circ \tan^2 45^\circ + \sec^3 45^\circ) = 6788.2\end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 12-34b,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ &= 565.7 \mathbf{u}_r + 141.4(4) \mathbf{u}_\theta \\ &= \{565.7 \mathbf{u}_r + 565.7 \mathbf{u}_\theta\} \text{ m/s} \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2} \\ &= 800 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 12-34c,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \\ &= [6788.2 - 141.4(4)^2] \mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4] \mathbf{u}_\theta \\ &= \{4525.5 \mathbf{u}_r + 4525.5 \mathbf{u}_\theta\} \text{ m/s}^2 \\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.5)^2 + (4525.5)^2} \\ &= 6400 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

**NOTA:** También es posible determinar  $a$  sin tener que calcular  $\ddot{r}$  (o  $a_r$ ). Como se muestra en la figura 12-34d, dado que  $a_\theta = 4525.5 \text{ m/s}^2$ , entonces, de acuerdo con la resolución del vector,  $a = 4525.5 / \cos 45^\circ = 6400 \text{ m/s}^2$ .

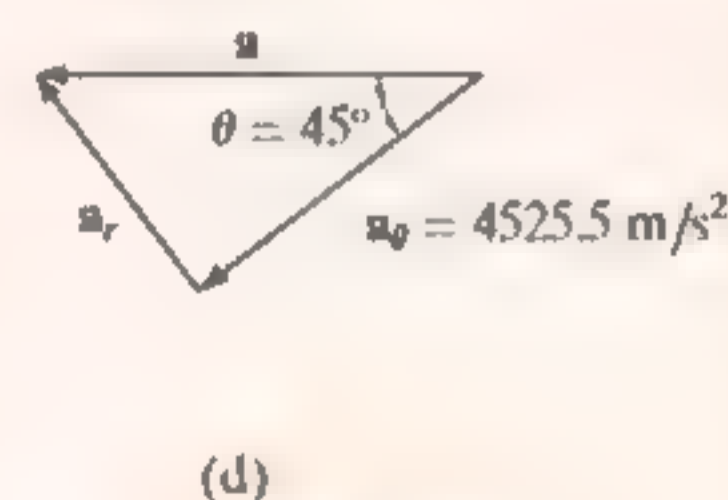
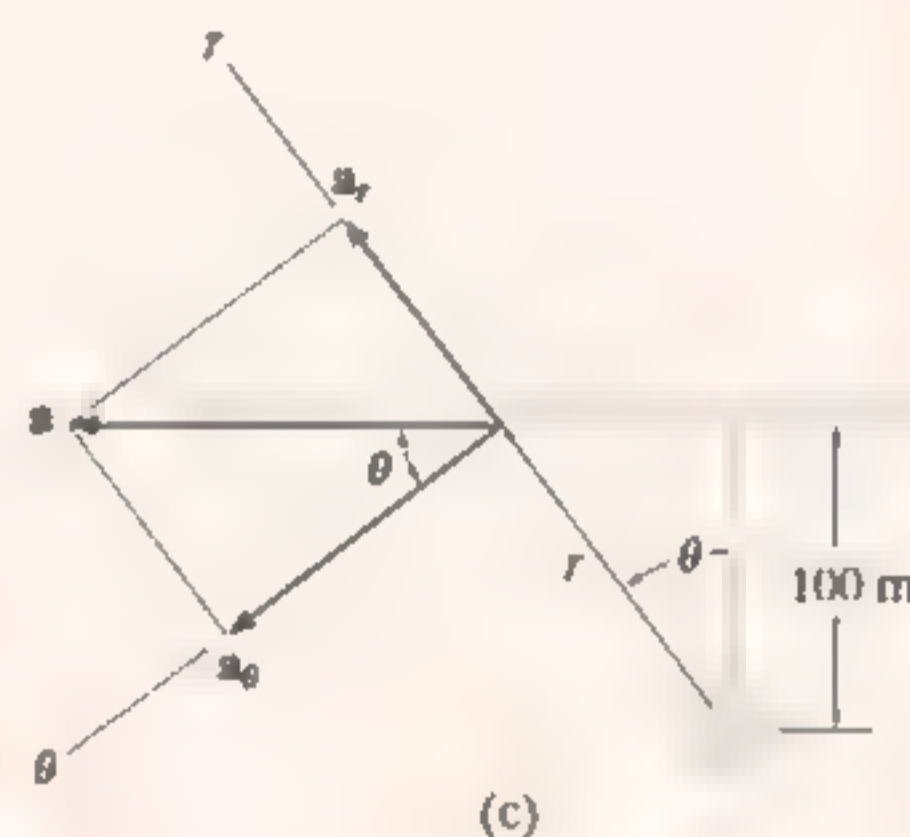
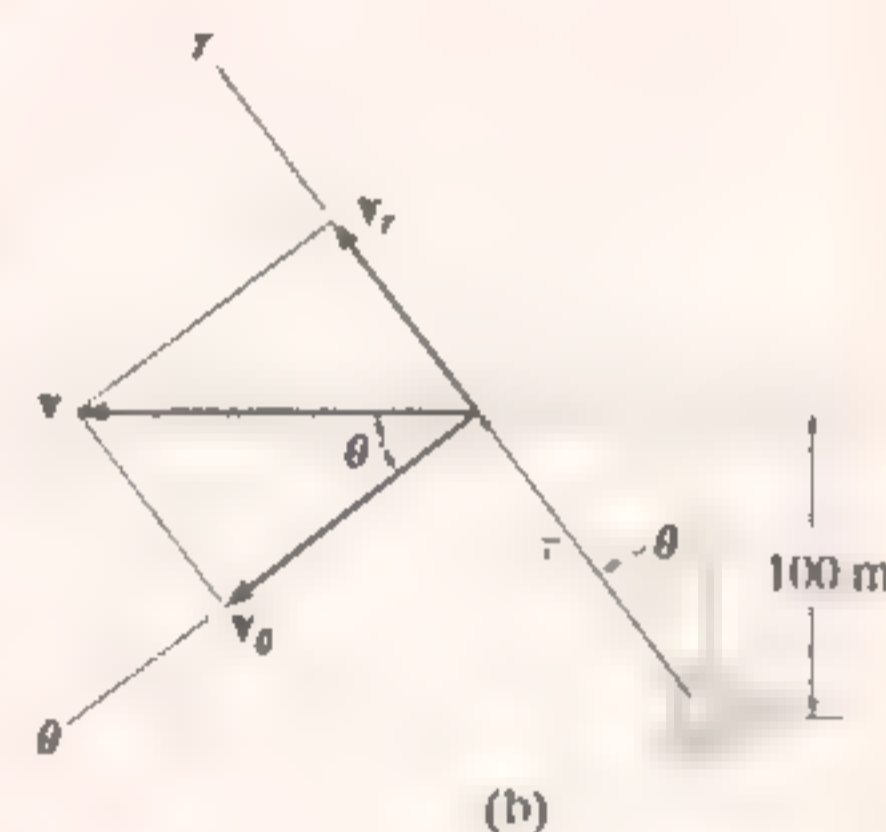
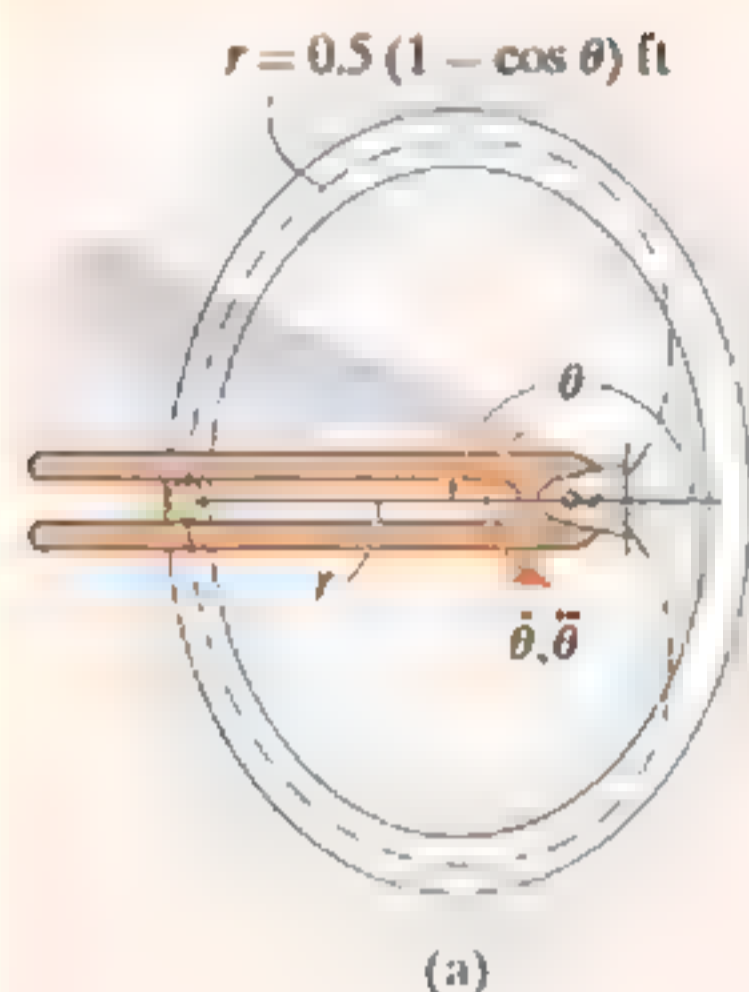


Fig. 12-34

## EJEMPLO 12-35



Debido a la rotación de la varilla con forma de horquilla, la bola en la figura 12-35a se mueve alrededor de una trayectoria ranurada, una parte de la cual tiene la forma de un cardioide,  $r = 0.5(1 - \cos \theta)$  ft, donde  $\theta$  está en radianes. Si la velocidad de la bola es  $v = 4$  ft/s y su aceleración es  $a = 30$  ft/s<sup>2</sup> en el instante  $\theta = 180^\circ$ , determine la velocidad angular  $\dot{\theta}$  y la aceleración angular  $\ddot{\theta}$  de la horquilla.

## SOLUCIÓN

**Sistema de coordenadas.** Esta trayectoria es muy rara, y matemáticamente se expresa mejor por medio de coordenadas polares, como se hace aquí, en vez de coordenadas rectangulares. Asimismo, como deben determinarse  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$ , entonces las coordenadas  $r, \theta$  son una opción evidente.

**Velocidad y aceleración.** Las derivadas con respecto al tiempo de  $r$  y  $\theta$  se determinan con la regla de la cadena,

$$r = 0.5(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{r} = 0.5(\sin \theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 0.5(\cos \theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 0.5(\sin \theta)\ddot{\theta}$$

Si evaluamos estos resultados cuando  $\theta = 180^\circ$ , tenemos

$$r = 1 \text{ ft} \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = -0.5\dot{\theta}^2$$

Como  $v = 4$  ft/s, al utilizar la ecuación 12-26 para determinar  $\theta$  se obtiene

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$4 = \sqrt{(0)^2 + (1\dot{\theta})^2}$$

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$$

Del mismo modo,  $\ddot{\theta}$  se determina con la ecuación 12-30,

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

$$30 = \sqrt{[-0.5(4)^2 - 1(4)^2]^2 + [1\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$

$$(30)^2 = (-24)^2 + \ddot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = 18 \text{ rad/s}^2$$

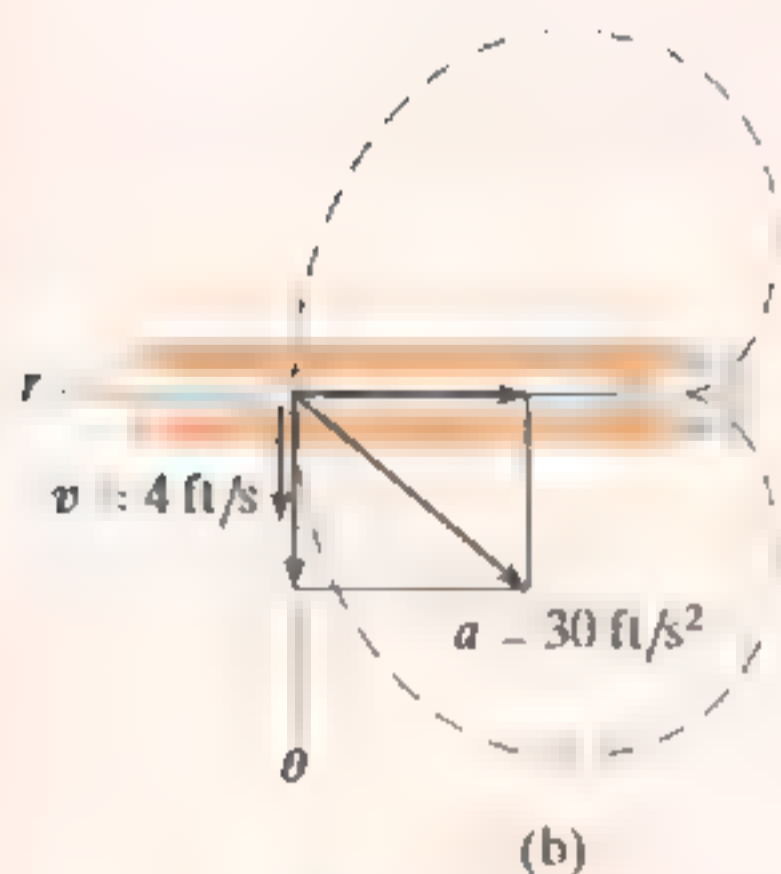
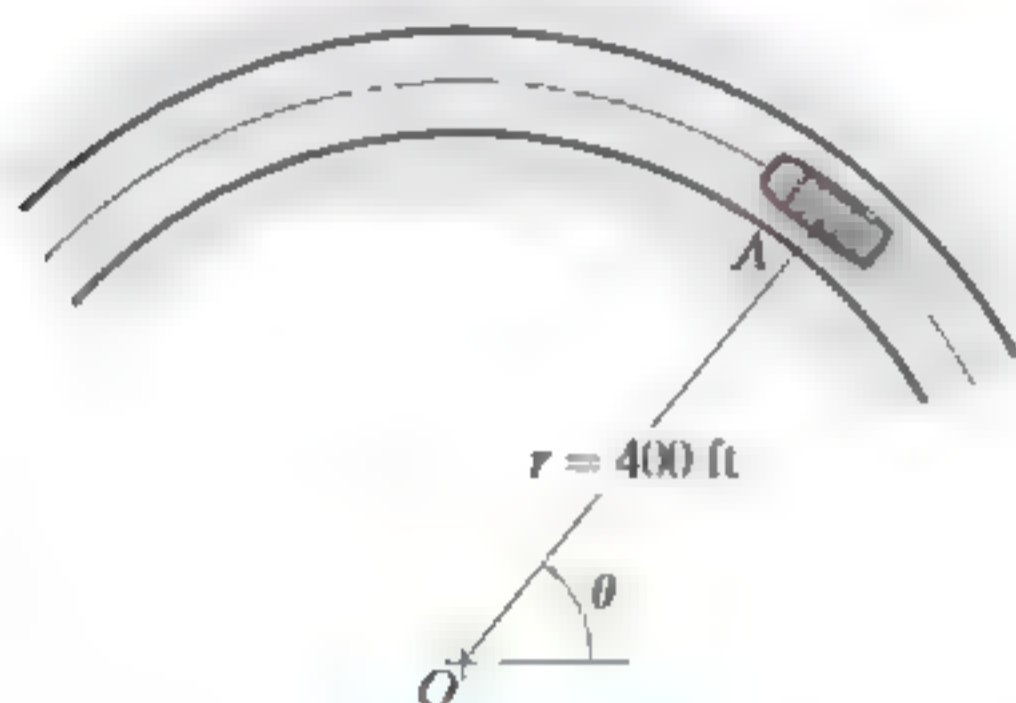


Fig. 12-35

En la figura 12-35b se muestran los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{v}$ .

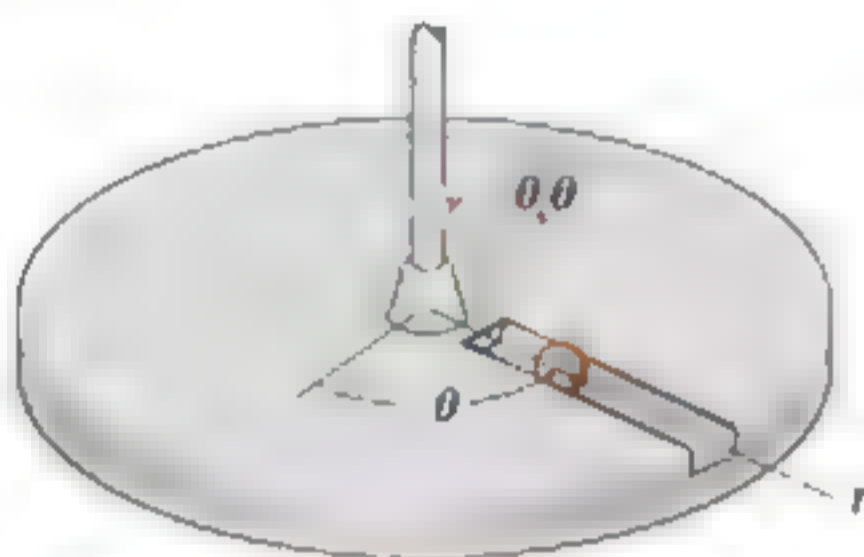
**NOTA:** En esta ubicación, coinciden los ejes  $\theta$  y  $t$  (tangenciales). El eje  $+n$  (normal) está dirigido hacia la derecha, es opuesto a  $+r$ .

**F12-33.** La rapidez del automóvil es de 55 ft/s. Determine la velocidad angular  $\dot{\theta}$  de la línea radial  $OA$  en este instante.



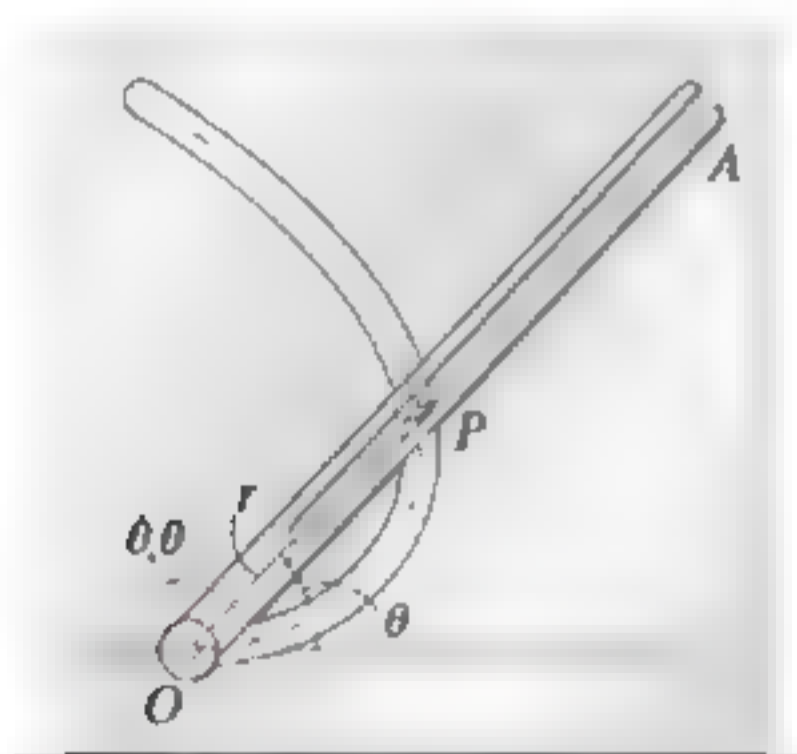
Prob. F12-33

**F12-34.** La plataforma gira en torno al eje vertical, de modo que en cualquier instante su posición angular es  $\theta = (4t^3/2)$  rad, donde  $t$  está en segundos. Una bola rueda hacia fuera a lo largo de la ranura radial, de modo que su posición es  $r = (0.1t^3)$  m, donde  $t$  está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la bola cuando  $t = 1.5$  s.



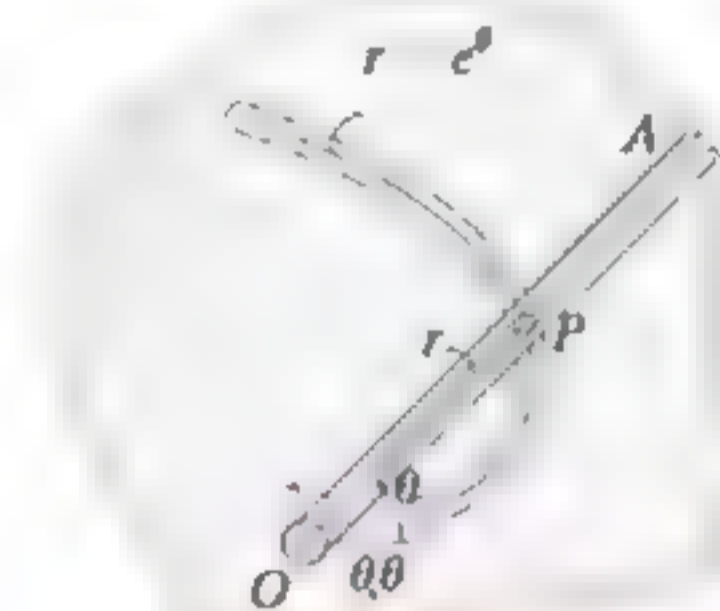
Prob. F12-34

**F12-35.** El perno guía  $P$  es propulsado por el eslabón con forma de horquilla  $OA$  a lo largo de la trayectoria curva descrita por  $r = (2\theta)$  ft. En el instante  $\theta = \pi/4$  rad, la velocidad y la aceleración angulares del eslabón son  $\dot{\theta} = 3$  rad/s y  $\ddot{\theta} = 1$  rad/s<sup>2</sup>. Determine la magnitud de la aceleración del perno guía en este instante.



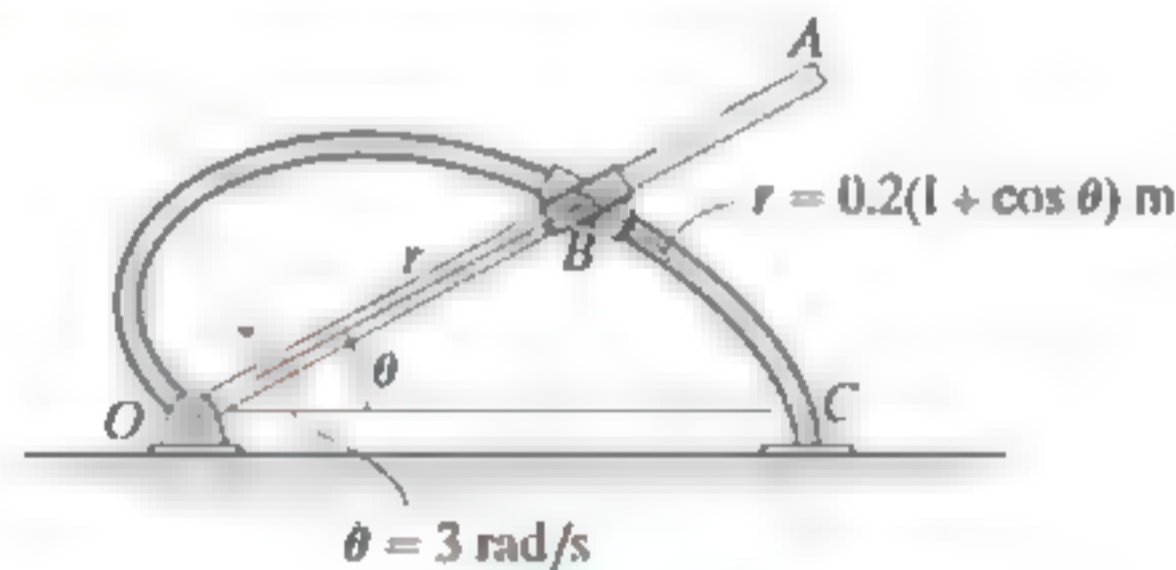
Prob. F12-35

**F12-36.** El perno guía  $P$  es propulsado por el eslabón con forma de horquilla  $OA$  a lo largo de la trayectoria descrita por  $r = e^\theta$ , donde  $r$  se da en metros. Cuando  $\theta = \pi/4$  rad, la velocidad y aceleración angulares del eslabón son  $\dot{\theta} = 2$  rad/s y  $\ddot{\theta} = 4$  rad/s<sup>2</sup>. Determine las componentes radial y transversal de la aceleración del perno guía en este instante.



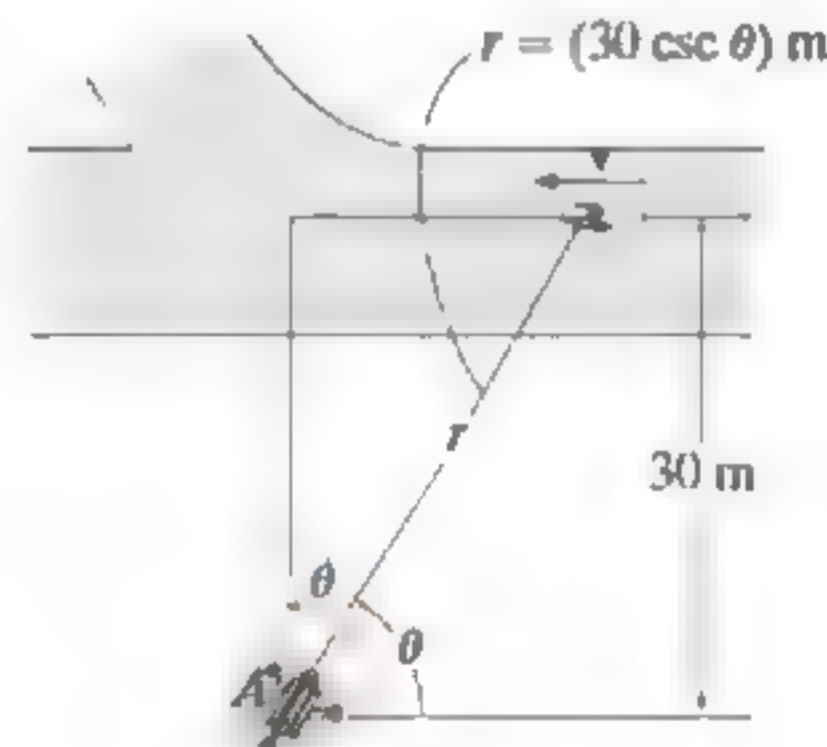
Prob. F12-36

**F12-37.** Los collares están conectados por pasadores en  $B$  y pueden moverse libremente a lo largo de la varilla  $OA$  y la guía curva  $OC$  tiene la forma de un cardioide,  $r = [0.2(1 + \cos \theta)]$  m. Cuando  $\theta = 30^\circ$ , la velocidad angular de  $OA$  es  $\dot{\theta} = 3$  rad/s. Determine las magnitudes de la velocidad de los collares en este punto.



Prob. F12-37

**F12-38.** En el instante  $\theta = 45^\circ$ , el atleta está corriendo a una rapidez constante de 2 m/s. Determine la velocidad angular a la cual la cámara debe girar para seguir el movimiento.



Prob. F12-38

## PROBLEMAS

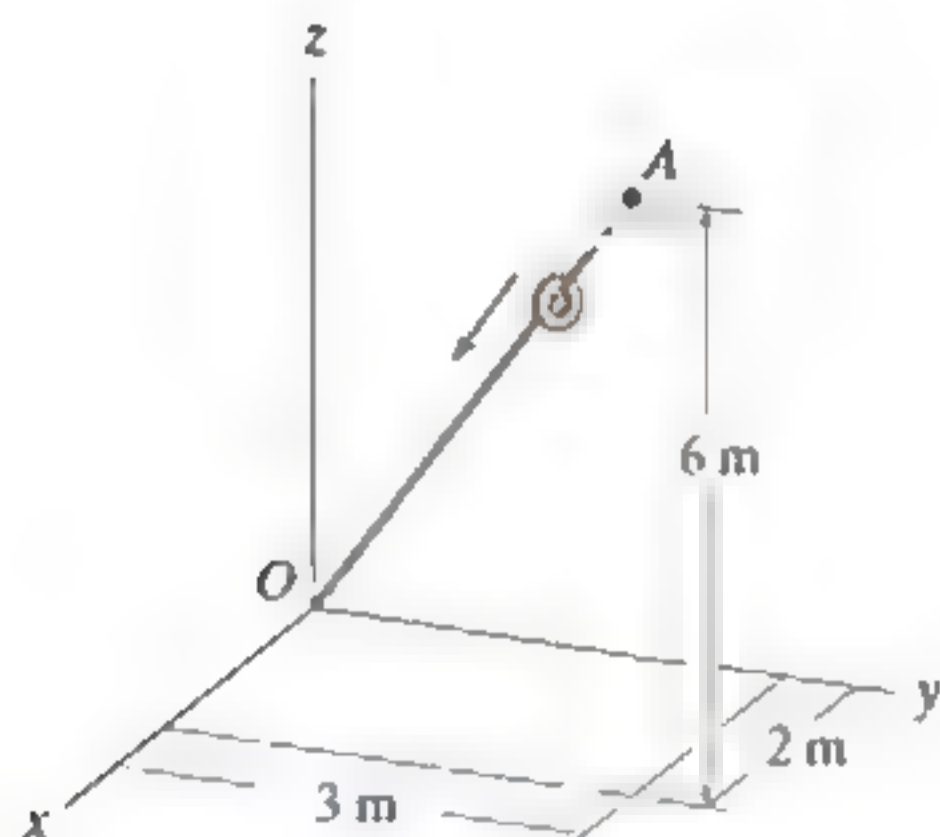
**12-155.** Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de 4 in de radio, de modo que su posición en función del tiempo está dada por  $\theta = \cos 2t$ , donde  $\theta$  está en radianes y  $t$  en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando  $\theta = 30^\circ$ .

**\*12-156.** Por un corto tiempo un cohete se desplaza hacia arriba y a la derecha con una rapidez constante de 800 m/s a lo largo de la trayectoria parabólica  $y = 600 - 35x^2$ . Determine las componentes radial y transversal de la velocidad del cohete en el instante  $\theta = 60^\circ$ , donde  $\theta$  se mide en sentido antihorario desde el eje  $x$ .

**12-157.** Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria definida por las coordenadas polares  $r = (2e^t)$  ft y  $\theta = (8t^2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos. Determine las componentes de su velocidad y aceleración cuando  $t = 1$  s.

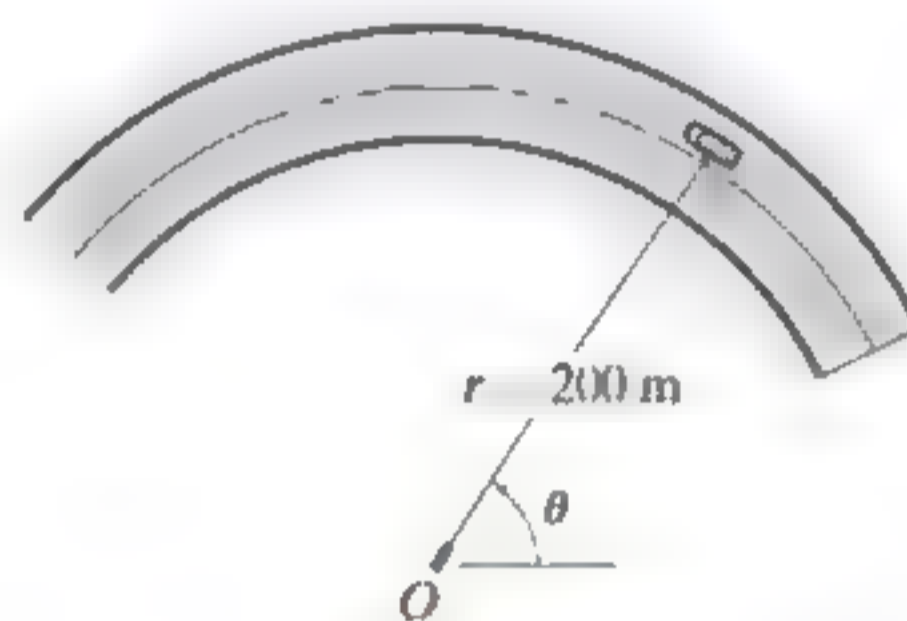
**12-158.** Un avión vuela en línea recta con una velocidad de 200 mi/h y una aceleración de 3 mi/h<sup>2</sup>. Si el diámetro de la hélice es de 6 ft y gira a una velocidad angular constante de 120 rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de una partícula situada en la punta de la hélice.

**12-159.** La pequeña arandela se desliza hacia abajo de la cuerda  $OA$ . Cuando está a la mitad, su rapidez es de 28 m/s y su aceleración es de 7 m/s<sup>2</sup>. Exprese la velocidad y la aceleración de la arandela en este punto en función de sus componentes cilíndricas.



Prob. 12-159

**\*12-160.** Una pistola de radar en  $O$  gira con la velocidad angular  $\dot{\theta} = 0.1$  rad/s y la aceleración angular  $\ddot{\theta} = 0.025$  rad/s<sup>2</sup>, en el instante  $\theta = 45^\circ$ , mientras sigue el movimiento del automóvil que viaja a lo largo del camino circular que tiene un radio de  $r = 200$  m. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del auto en ese instante.



Prob. 12-160

**12-161.** Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria tal que  $r = (2 \cos t)$  ft y  $\theta = (t/2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos, grafique la trayectoria  $r = f(\theta)$  y determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula.

**12-162.** Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria tal que  $r = (e^t)$  m y  $\theta = t$ , donde  $t$  se da en segundos, grafique la trayectoria  $r = f(\theta)$ , y determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula.

**12-163.** El automóvil viaja a lo largo de la trayectoria circular de radio  $r = 400$  ft. En el instante mostrado, su velocidad angular de rotación es  $\dot{\theta} = 0.025$  rad/s, la cual disminuye a razón de  $\ddot{\theta} = -0.008$  rad/s<sup>2</sup>. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del automóvil en ese instante; asimismo, grafique estas componentes sobre la curva.

**\*12-164.** El automóvil viaja a lo largo de la trayectoria circular de radio  $r = 400$  ft con una rapidez constante de  $v = 30$  ft/s. Determine la velocidad angular de rotación  $\dot{\theta}$  de la línea radial  $r$  y la magnitud de la aceleración del auto.

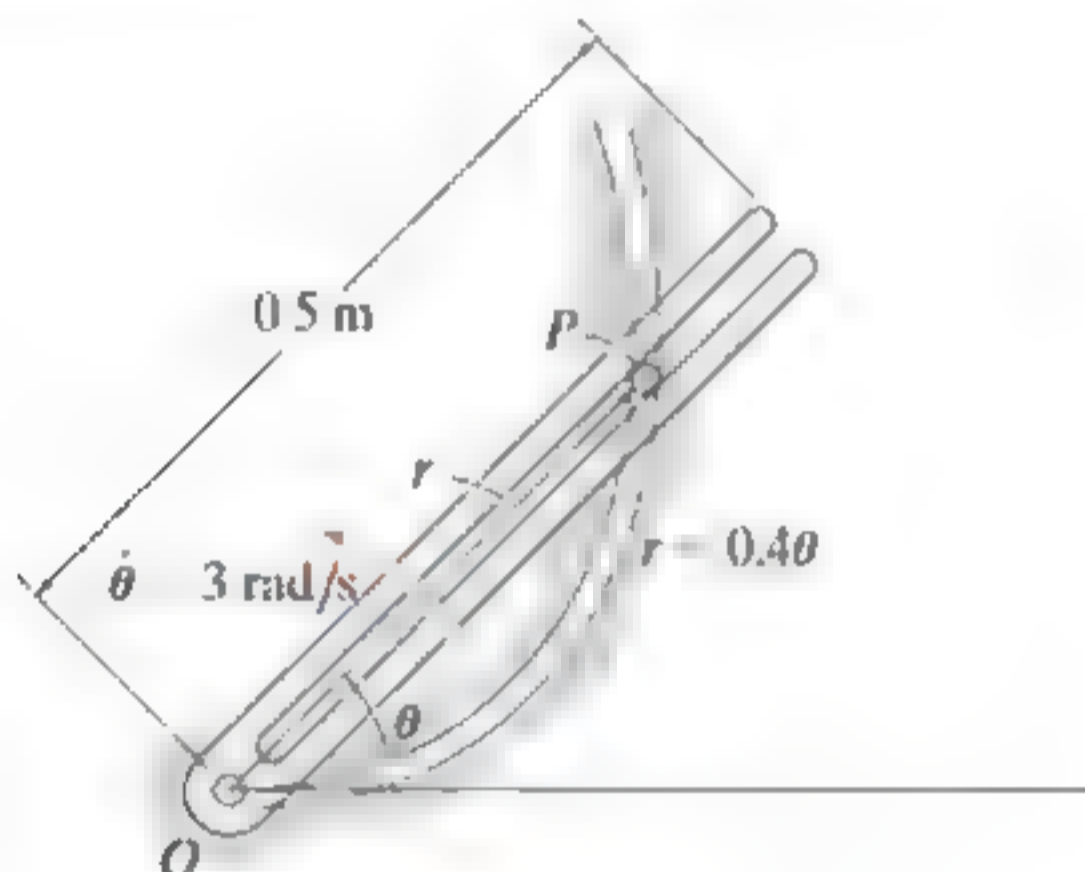


Probs. 12-163/164

**12-165.** La razón de cambio de la aceleración con respecto del tiempo se conoce como *tirón*, y se utiliza a menudo como un medio para medir la incomodidad de los pasajeros. Calcule este vector,  $\dot{a}$ , en términos de sus componentes cilíndricas, utilizando la ecuación 12-32.

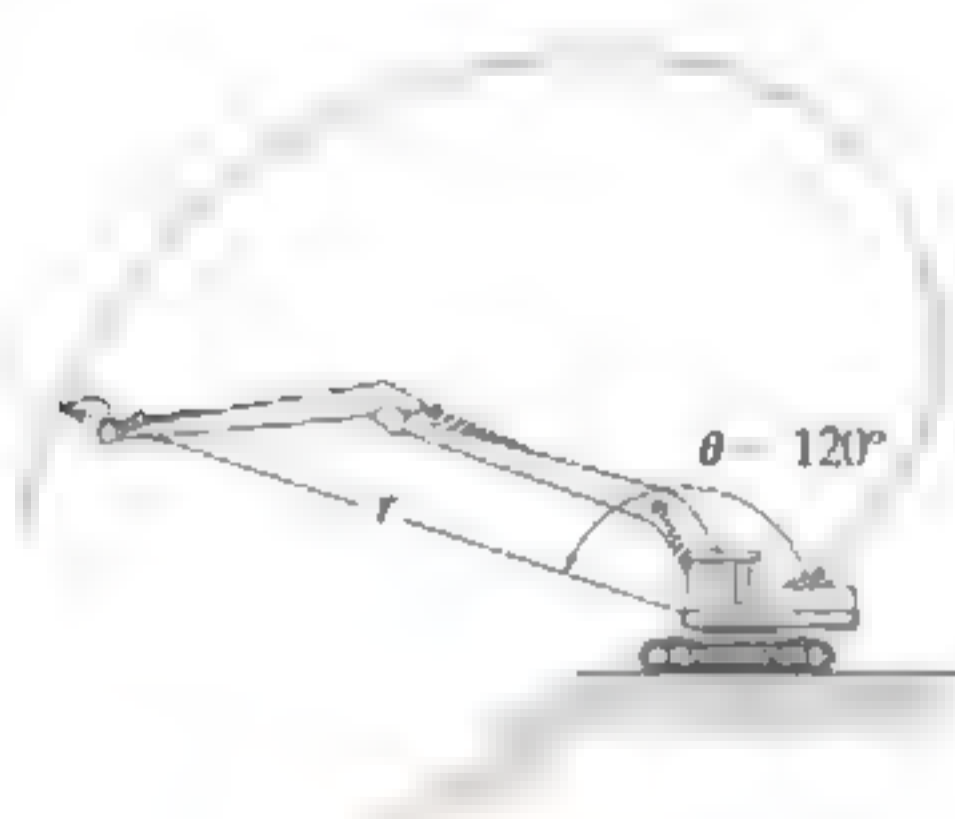
**12-166.** Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de 6 in, de modo que su posición en función del tiempo está dada por  $\theta = \sin 3t$ , donde  $\theta$  y el argumento para el seno están en radianes, y  $t$  en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en  $\theta = 30^\circ$ . La partícula parte del reposo en  $\theta = 0^\circ$ .

**12-167.** El eslabón ranurado está articulado en  $O$ , y como resultado de la velocidad angular constante  $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$  impulsa el perno guía  $P$  por una corta distancia a lo largo de la guía en espiral  $r = (0.4\theta) \text{ m}$ , donde  $\theta$  se da en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de  $P$  en el instante  $\theta = \pi/3 \text{ rad}$ .



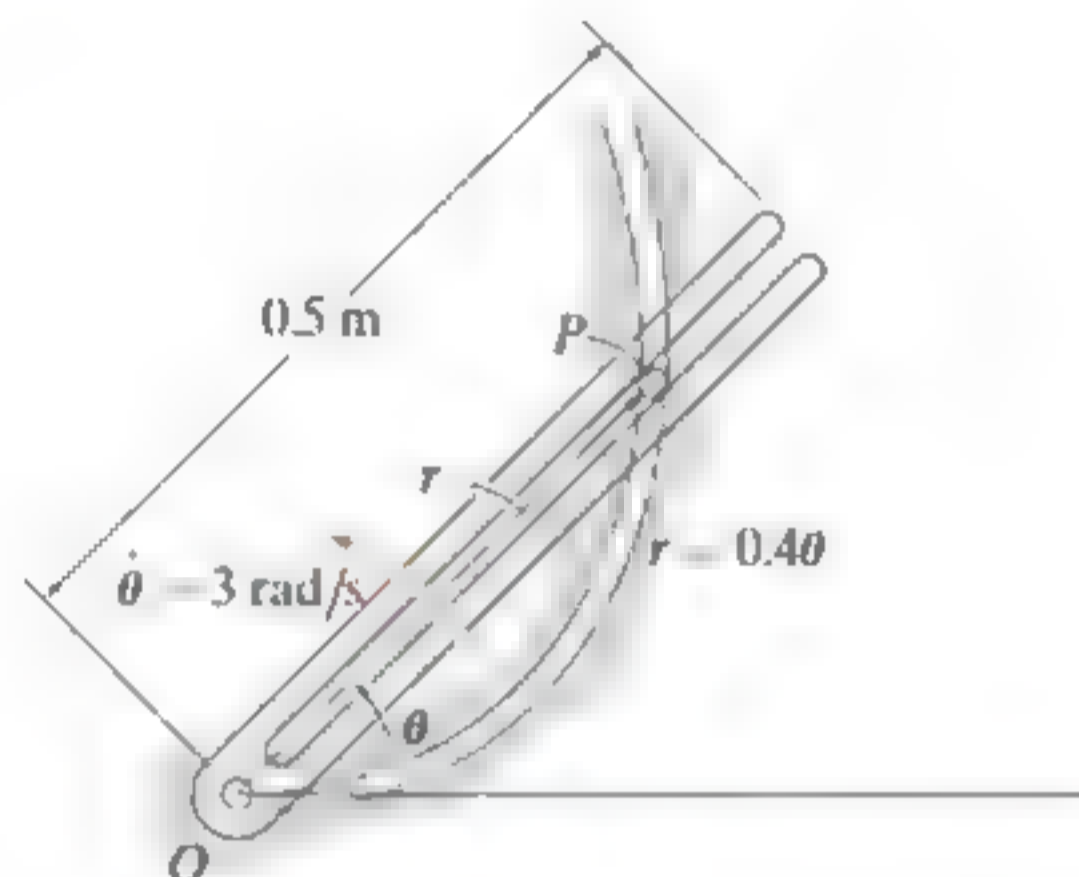
Prob. 12-167

**\*12-168.** Por un corto tiempo el cucharón de la retroexcavadora traza la trayectoria de la cardioide  $r = 25(1 - \cos \theta) \text{ ft}$ . Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del cucharón cuando  $\theta = 120^\circ$ , si el brazo extensible gira con una velocidad angular de  $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular  $\ddot{\theta} = 0.2 \text{ rad/s}^2$  en el instante mostrado.



Prob. 12-168

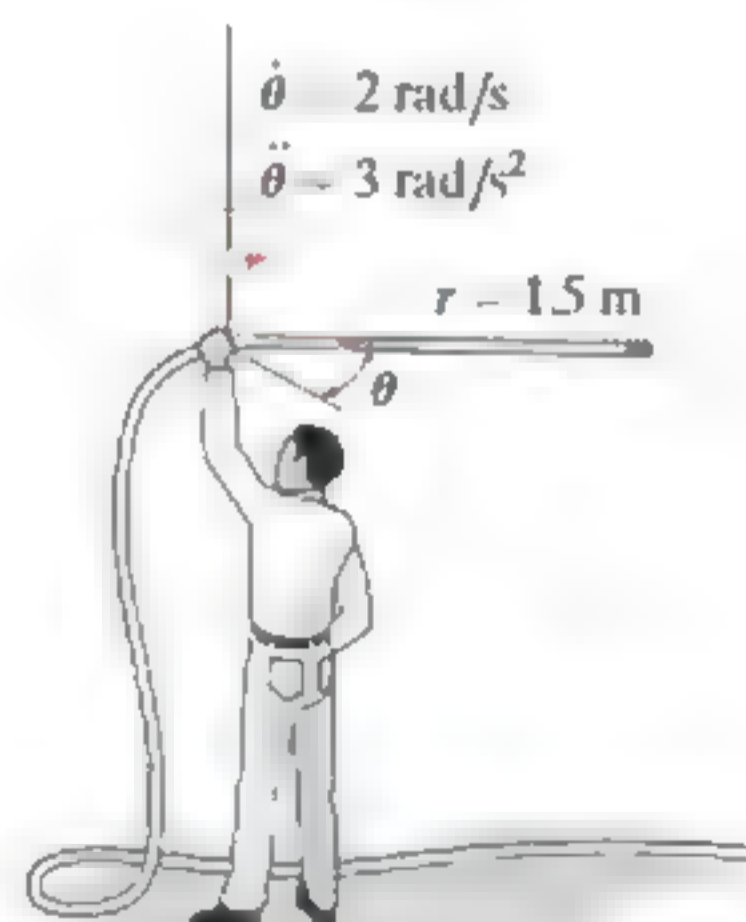
**12-169.** El eslabón ranurado está articulado en  $O$ , y como resultado de la velocidad angular constante  $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$  impulsa el perno guía  $P$  por una corta distancia a lo largo de la guía en espiral  $r = (0.4\theta) \text{ m}$ , donde  $\theta$  se da en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante en que sale de la ranura del eslabón, es decir, cuando  $r = 0.5 \text{ m}$ .



Prob. 12-169

**12-170.** Una partícula se mueve en el plano  $x-y$  de modo que su posición está definida por  $r = (2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}) \text{ ft}$ , donde  $t$  está en segundos. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando  $t = 2 \text{ s}$ .

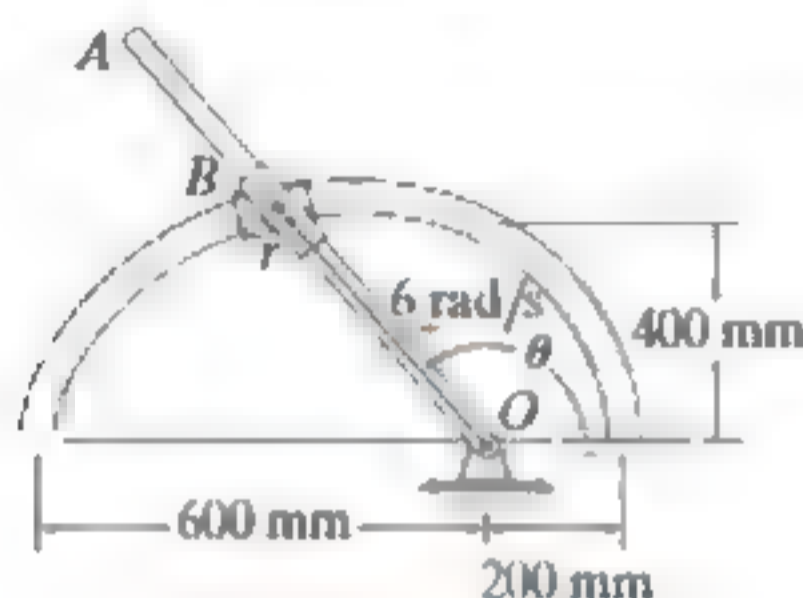
**12-171.** En el instante mostrado, el hombre gira una manguera por encima de su cabeza con una velocidad angular  $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular  $\ddot{\theta} = 3 \text{ rad/s}^2$ . Si se supone que la manguera se encuentra en un plano horizontal, y el agua fluye por ella a una velocidad constante de  $3 \text{ m/s}$ , determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de una partícula de agua cuando sale del extremo abierto,  $r = 1.5 \text{ m}$ .



Prob. 12-171

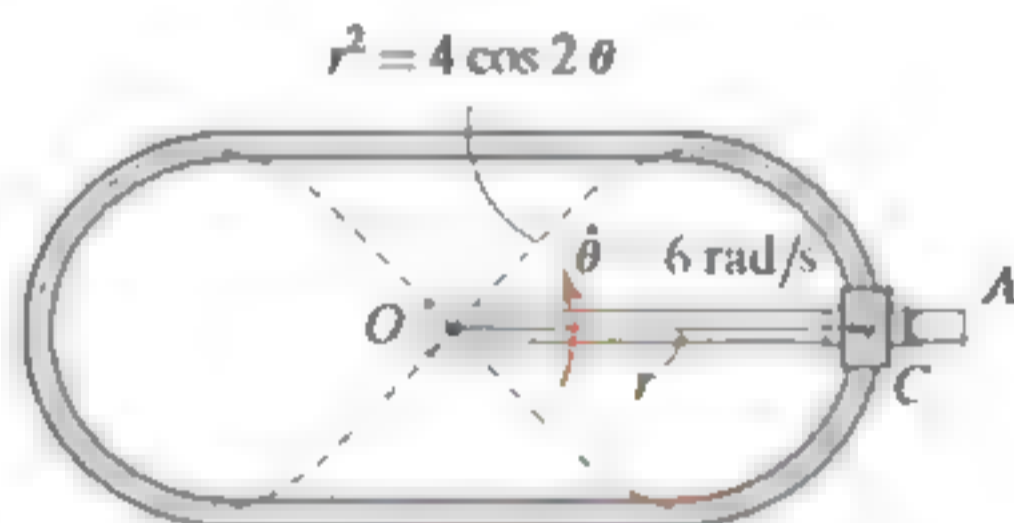
**\*12-172.** La varilla  $OA$  gira en sentido horario con una velocidad angular constante de  $6 \text{ rad/s}$ . Dos bloques deslizantes conectados mediante pasadores, ubicados en  $B$ , se mueven libremente sobre  $OA$  y la varilla curva cuya forma es un *limaçon* de Pascal descrito por la ecuación  $r = 200(2 - \cos \theta) \text{ mm}$ . Determine la rapidez de los bloques deslizantes en el instante  $\theta = 150^\circ$ .

**12-173.** Determine la magnitud de la aceleración de los bloques deslizantes del problema 12-172 cuando  $\theta = 150^\circ$ .



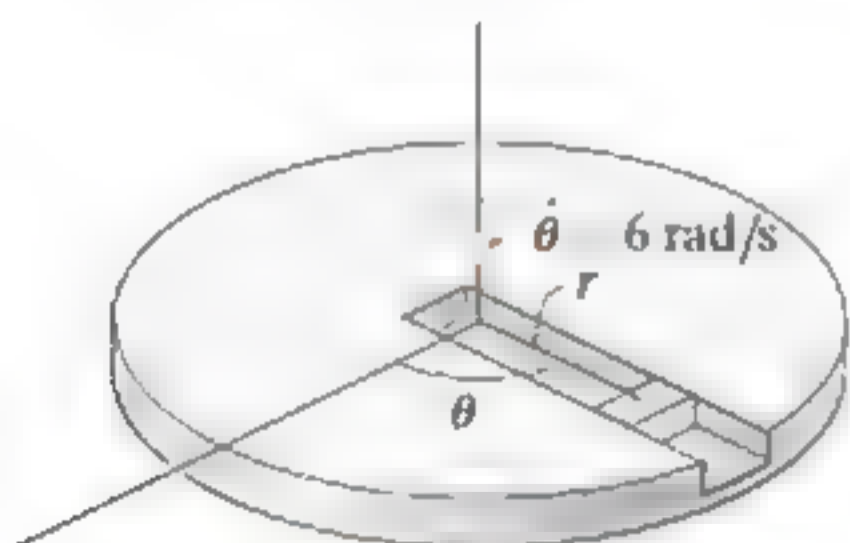
Probs. 12-172/173

**12-174.** Un collarín doble  $C$  está articulado de modo que un collarín se desliza sobre una varilla fija y el otro se desliza sobre una varilla giratoria. Si la geometría de la varilla fija por una corta distancia puede definirse mediante una lemniscata de Bernoulli,  $r^2 = (4 \cos 2\theta) \text{ ft}^2$ , determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del collarín en el instante  $\theta = 0^\circ$ , como se muestra en la figura. La varilla  $OA$  gira a una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 6 \text{ rad/s}$ .



Prob. 12-174

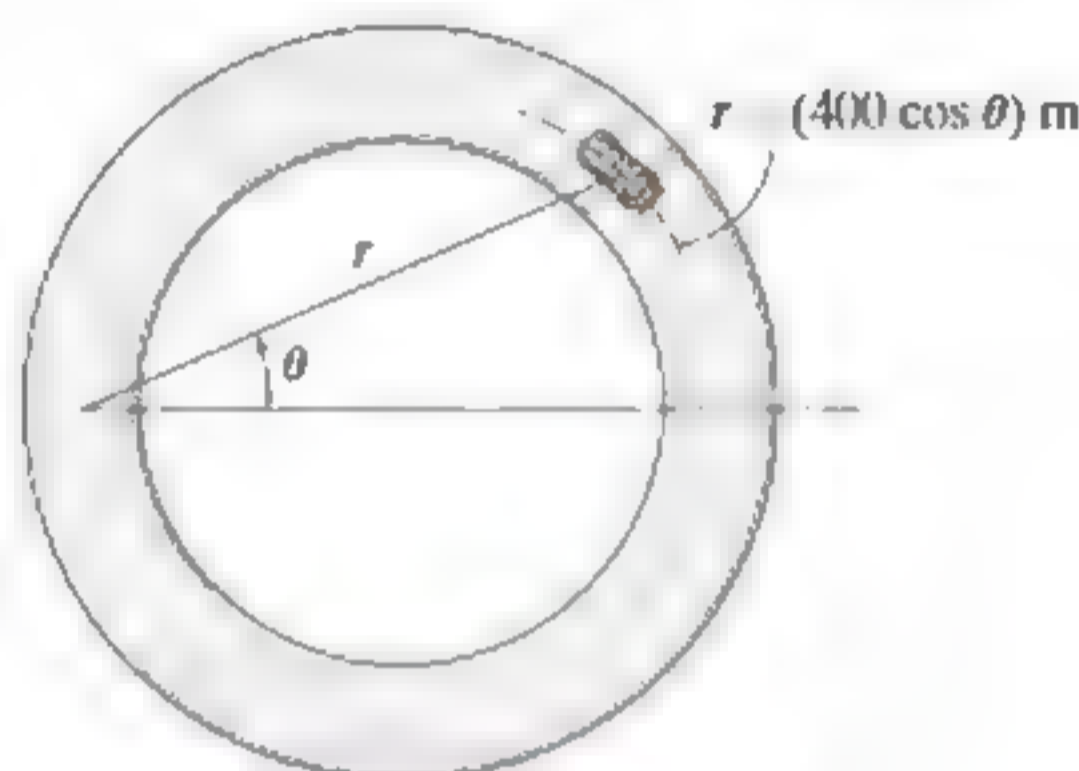
**12-175.** Un bloque se mueve hacia el exterior, a lo largo de la ranura de la plataforma, con una rapidez de  $\dot{r} = (4t) \text{ m/s}$ , donde  $t$  se da en segundos. La plataforma gira a una velocidad constante de  $6 \text{ rad/s}$ . Si el bloque parte del reposo en el centro, determine las magnitudes de su velocidad y la aceleración cuando  $t = 1 \text{ s}$ .



Prob. 12-175

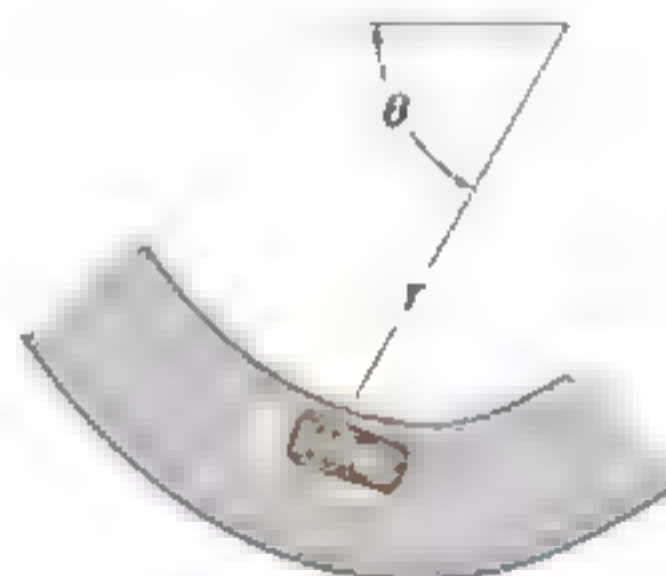
**\*12-176.** El automóvil viaja alrededor de la pista circular con una rapidez constante de  $20 \text{ m/s}$ . Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del auto en el instante  $\theta = \pi/4 \text{ rad}$ .

**12-177.** El automóvil viaja alrededor de la pista circular de tal manera que su componente transversal es  $\dot{\theta} = (0.006t^2) \text{ rad}$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del auto en el instante  $t = 4 \text{ s}$ .



Probs. 12-176/177

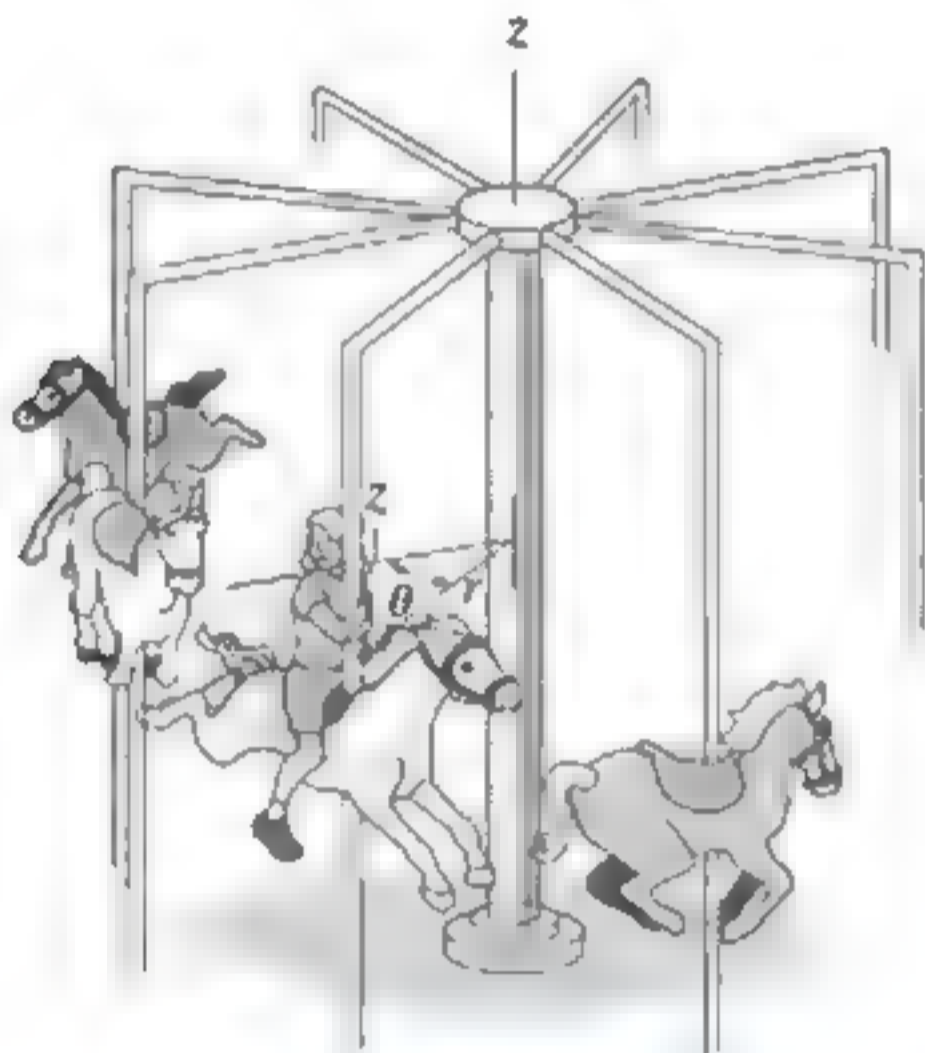
**12-178.** El automóvil se desplaza a lo largo de un camino que, para una distancia corta, está definido por  $r = (200/\theta) \text{ ft}$ , donde  $\theta$  está en radianes. Si mantiene una rapidez constante de  $v = 35 \text{ ft/s}$ , determine las componentes radial y transversal de su velocidad cuando  $\theta = \pi/3 \text{ rad}$ .



Prob. 12-178

**12-179.** Un caballito de carrusel se mueve de acuerdo con las ecuaciones  $r = 8 \text{ ft}$ ,  $\theta = (0.6t) \text{ rad}$  y  $z = (1.5 \sin \theta) \text{ ft}$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine las componentes cilíndricas de la velocidad y la aceleración del caballito cuando  $t = 4 \text{ s}$ .

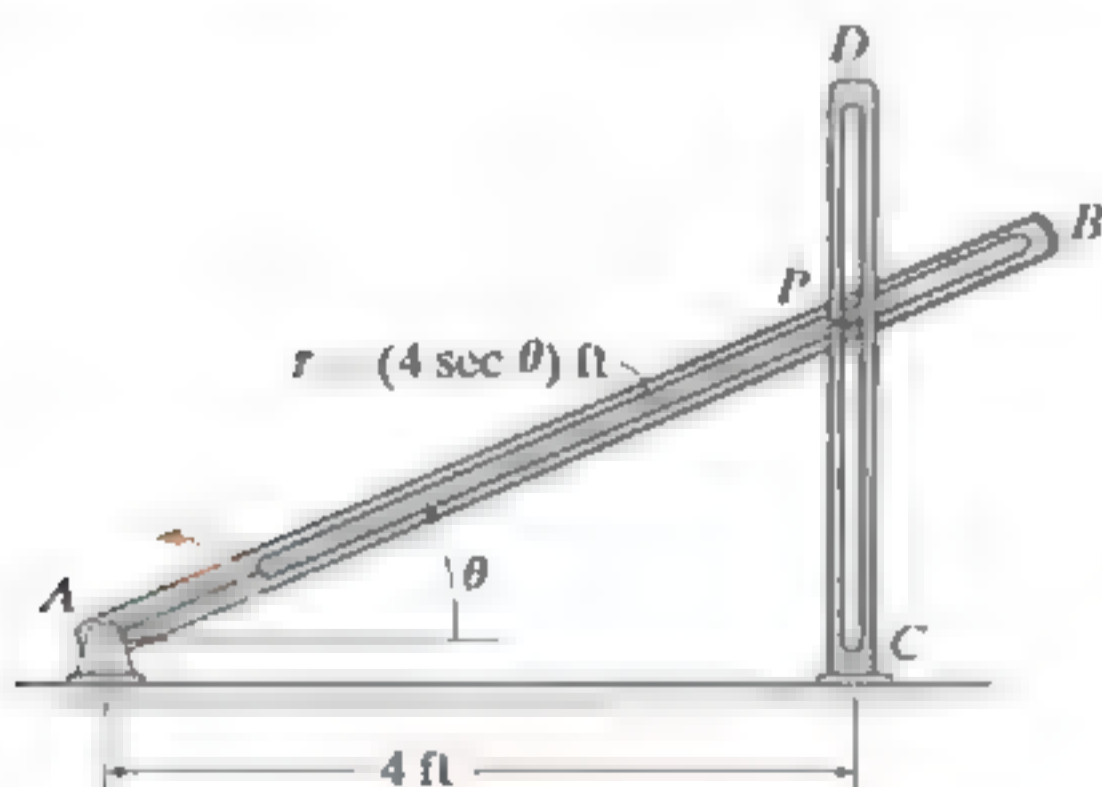
**\*12-180.** Un caballito de carrusel se mueve de acuerdo con las ecuaciones  $r = 8 \text{ ft}$ ,  $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ , y  $z = (1.5 \sin \theta) \text{ ft}$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine las magnitudes máxima y mínima de la velocidad y la aceleración del caballito durante el movimiento.



Probs. 12-179/180

**12-181.** Si el brazo ranurado  $AB$  gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ , determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del perno guía  $P$  en  $\theta = 30^\circ$ . El perno está restringido a moverse en las ranuras de la barra fija  $CD$  y la barra giratoria  $AB$ .

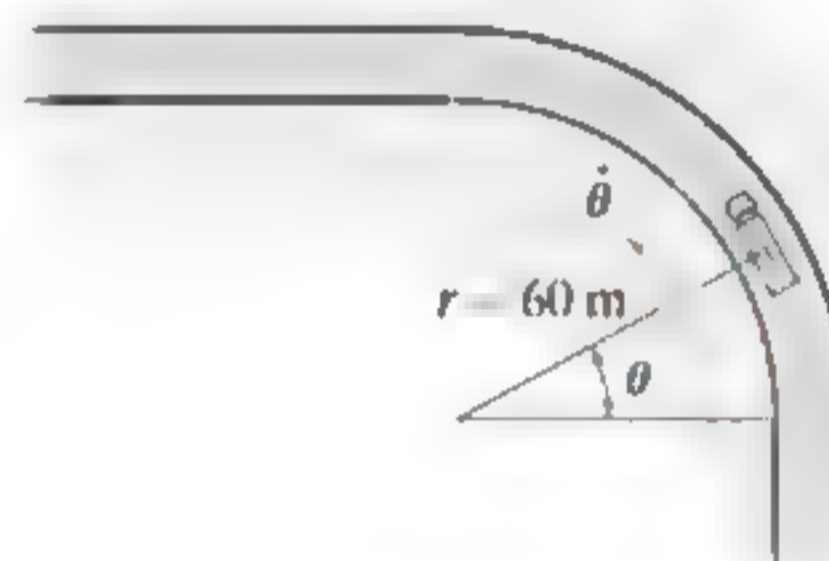
**12-182.** El perno guía está restringido a moverse en las ranuras de la barra fija  $CD$  y la barra giratoria  $AB$ . Cuando  $\theta = 30^\circ$ , la velocidad angular y la aceleración angular del brazo  $AB$  son  $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$  y  $\ddot{\theta} = 3 \text{ rad/s}^2$ , respectivamente. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del perno guía  $P$  en ese instante.



Probs. 12-181/182

**12-183.** Un camión se desplaza a lo largo de la curva circular horizontal de radio  $r = 60 \text{ m}$  con una rapidez constante  $v = 20 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad angular de rotación  $\dot{\theta}$  de la línea radial  $r$  y la magnitud de la aceleración del camión.

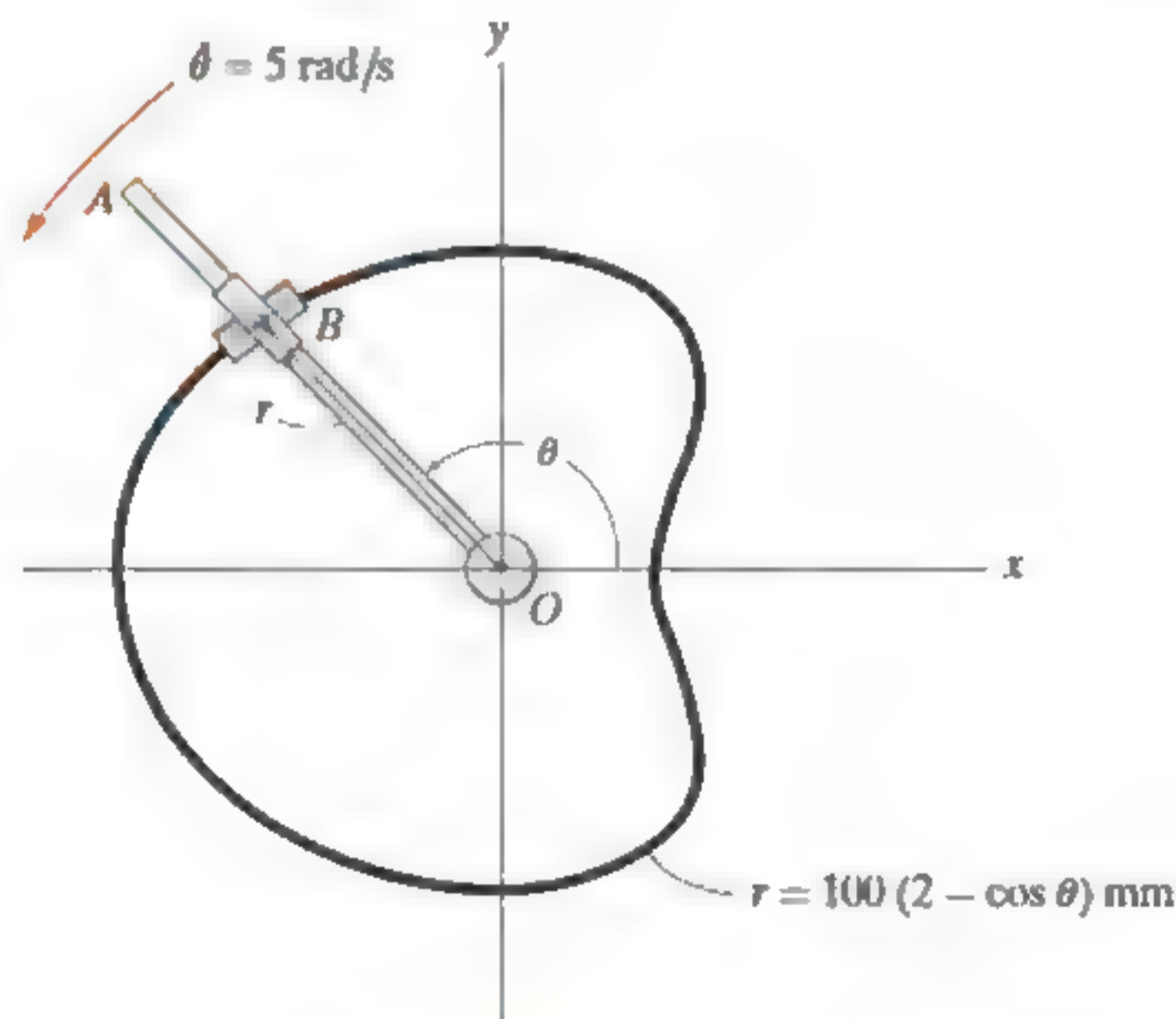
**\*12-184.** Un camión se desplaza a lo largo de la curva circular horizontal de radio  $r = 60 \text{ m}$  con una rapidez de  $20 \text{ m/s}$  que aumenta a razón de  $3 \text{ m/s}^2$ . Determine las componentes radial y transversal de la aceleración del camión.



Probs. 12-183/184

**12-185.** La varilla  $OA$  gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 5 \text{ rad/s}$ . Dos bloques deslizantes articulados, que se ubican en  $B$ , se mueven libremente sobre  $OA$  y la varilla curva cuya forma es un limaçon de Pascal está descrita por la ecuación  $r = 100(2 - \cos \theta) \text{ mm}$ . Determine la rapidez de los bloques deslizantes en el instante  $\theta = 120^\circ$ .

**12-186.** Determine la magnitud de la aceleración de los bloques deslizantes en el problema 12-185 cuando  $\theta = 120^\circ$ .



Probs. 12-185/186

**12-187.** La luz de búsqueda en el barco anclado a 2000 ft de la orilla ilumina un automóvil que viaja por la carretera recta con rapidez constante de 80 ft/s. Determine la velocidad angular de rotación de la luz cuando el automóvil está a  $r = 3000$  ft del barco.

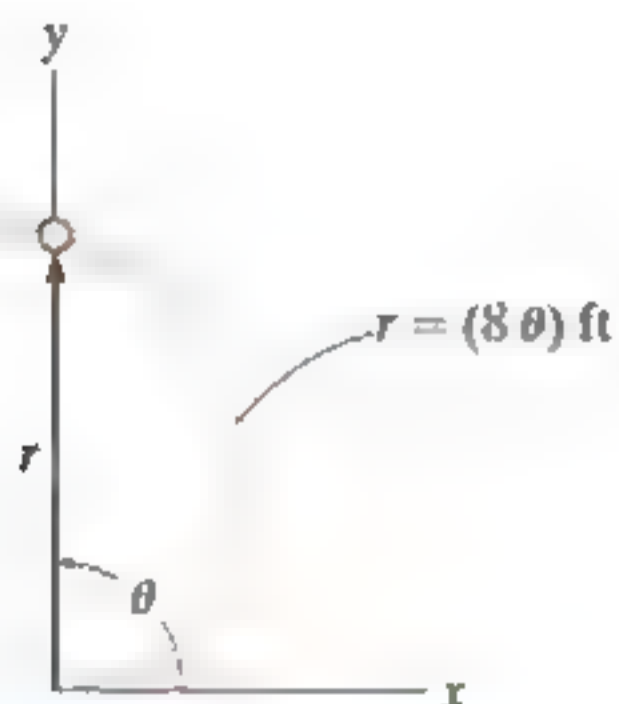
**\*12-188.** Si el automóvil del problema 12-187 está acelerando a  $15 \text{ ft/s}^2$  en el instante  $r = 3000$  ft, determine la aceleración angular requerida para la luz en ese instante.



Probs. 12-187/188

**12-189.** Una partícula se mueve a lo largo de una espiral de Arquímedes  $r = (8\theta)$  ft, donde  $\theta$  está en radianes. Si  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$  (constante), determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante  $\theta = \pi/2$  rad. Trace la curva y muestre las componentes en la curva.

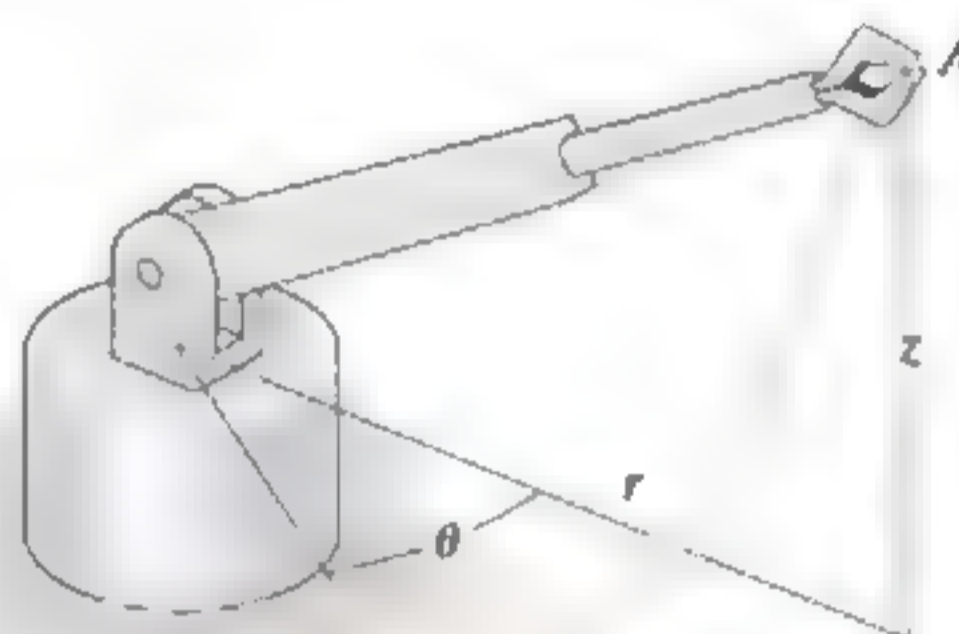
**12-190.** Resuelva el problema 12-189 si la aceleración angular de la partícula es  $\ddot{\theta} = 5 \text{ rad/s}^2$  cuando  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$  con  $\theta = \pi/2$  rad.



Probs. 12-189/190

**12-191.** El brazo del robot se mueve de modo que  $r = 3$  ft es constante y su tenaza en  $A$  se mueve a lo largo de la trayectoria  $z = (3 \sin 4\theta)$  ft, donde  $\theta$  está en radianes. Si  $\theta = (0.5 t)$  rad, donde  $t$  se da en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la tenaza cuando  $t = 3$  s.

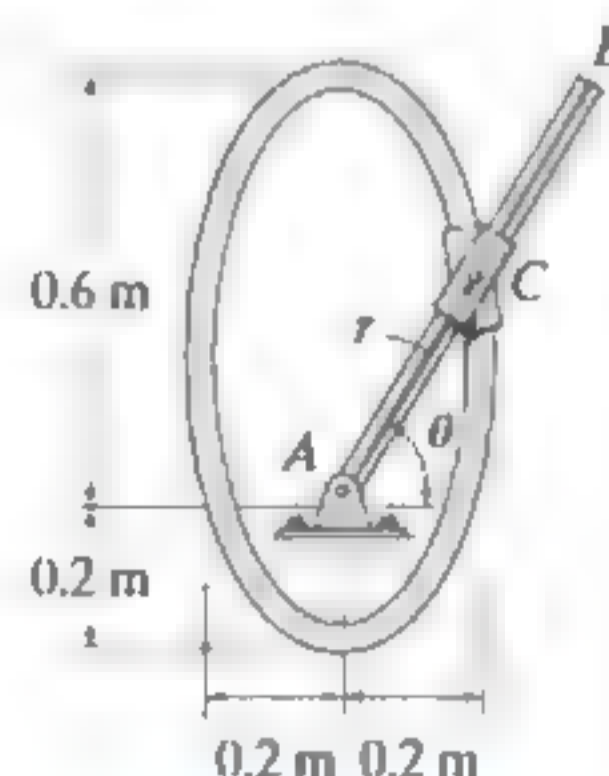
**\*12-192.** Durante un corto tiempo, el brazo del robot se extiende de modo que  $\dot{r} = 1.5 \text{ ft/s}$  cuando  $r = 3$  ft,  $z = (4t^2)$  ft y  $\theta = 0.5t$  rad, donde  $t$  se da en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la tenaza en  $A$  cuando  $t = 3$  s.



Probs. 12-191/192

**12-193.** El collarín doble en  $C$  está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla fija y el otro se desliza sobre la varilla giratoria  $AB$ . Si la velocidad angular de  $AB$  está dada como  $\dot{\theta} = (e^{0.5t^2}) \text{ rad/s}$ , donde  $t$  está en segundos, y la trayectoria definida por la varilla fija es  $r = |(0.4 \sin \theta + 0.2)| \text{ m}$ , determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del collarín cuando  $t = 1$  s. Cuando  $t = 0$ ,  $\theta = 0$ . Use la regla de Simpson con  $n = 50$  para determinar  $\theta$  en  $t = 1$  s.

**12-194.** El collarín doble en  $C$  está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla fija y el otro se desliza sobre la varilla giratoria  $AB$ . Si el mecanismo debe estar diseñado de modo que la máxima rapidez dada al collarín sea de  $6 \text{ m/s}$ , determine la velocidad angular constante  $\dot{\theta}$  requerida para la varilla  $AB$ . La trayectoria definida por la varilla fija es  $r = (0.4 \sin \theta + 0.2) \text{ m}$ .



Probs. 12-193/194

## 12.9 Análisis del movimiento dependiente absoluto de dos partículas

En algunos tipos de problemas el movimiento de una partícula *dependerá* del movimiento correspondiente de otra partícula. Esta dependencia ocurre por lo común si las partículas, en este caso representadas por bloques, están interconectadas por medio de cuerdas no extensibles, las cuales están enrolladas alrededor de poleas. Por ejemplo, el movimiento de un bloque *A* hacia abajo del plano inclinado en la figura 12-36 provocará un movimiento correspondiente del bloque *B* hacia arriba del otro plano inclinado. Podemos demostrar esto matemáticamente si, primero, especificamos la ubicación de los bloques mediante *coordenadas de posición*  $s_A$  y  $s_B$ . Observe que cada uno de los ejes de coordenadas (1) está medido a partir de un *punto fijo* (*O*) o de una línea de referencia fija, (2) está medido a lo largo de cada plano inclinado *en la dirección del movimiento* de cada bloque, y (3) tiene un sentido positivo desde los planos de referencia fijos hacia *A* y hacia *B*. Si la longitud total de la cuerda es  $l_T$ , las dos coordenadas de posición están relacionadas por la ecuación

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

En este caso,  $l_{CD}$  es la longitud de la cuerda que pasa sobre el arco *CD*. Si tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta expresión, y tenemos en cuenta que  $l_{CD}$  y  $l_T$  *permanecen constantes*, en tanto que  $s_A$  y  $s_B$  miden los segmentos de la cuerda que cambian de longitud, tenemos

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad v_B = -v_A$$

El signo negativo indica que cuando el bloque *A* tiene una velocidad dirigida hacia abajo, es decir, en la dirección de  $s_A$  positiva, provoca una velocidad hacia arriba correspondiente del bloque *B*, es decir, *B* se mueve en la dirección  $s_B$  negativa.

Del mismo modo, la diferenciación con respecto al tiempo de las velocidades tiene como resultado la relación entre las aceleraciones, es decir,

$$a_B = -a_A$$

En la figura 12-37*a* se muestra un ejemplo más complicado. En este caso,  $s_A$  especifica la posición del bloque *A*, y  $s_B$  define la posición del *extremo* de la cuerda del cual está suspendido el bloque *B*. Como se hizo previamente, elegimos coordenadas de posición: (1) con su origen en puntos fijos o líneas de referencia, (2) medidas en la dirección del movimiento de cada bloque, y (3) desde los planos de referencia fijos son positivas a la derecha para  $s_A$  y positivas hacia abajo para  $s_B$ . Durante el movimiento, la longitud de los segmentos de color naranja de la cuerda en la figura 12-37*a* *permanecen constantes*. Si  $l$  representa la longitud total de la cuerda menos estos segmentos, entonces las coordenadas de posición pueden relacionarse usando la ecuación

$$2s_B + h + s_A = l$$

Como  $l$  y  $h$  permanecen constantes durante el movimiento, las dos derivadas con respecto al tiempo resultan

$$2v_B = -v_A \quad 2a_B = -a_A$$

Por consiguiente, cuando *B* se mueve hacia abajo ( $+s_B$ ), *A* lo hace a la izquierda ( $-s_A$ ) con el doble del movimiento.

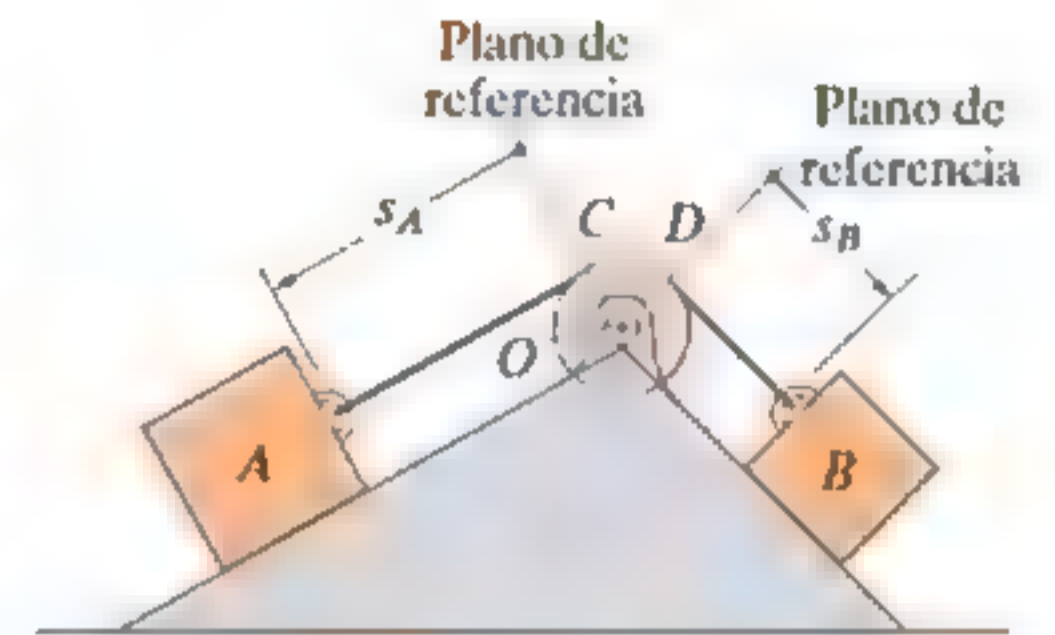
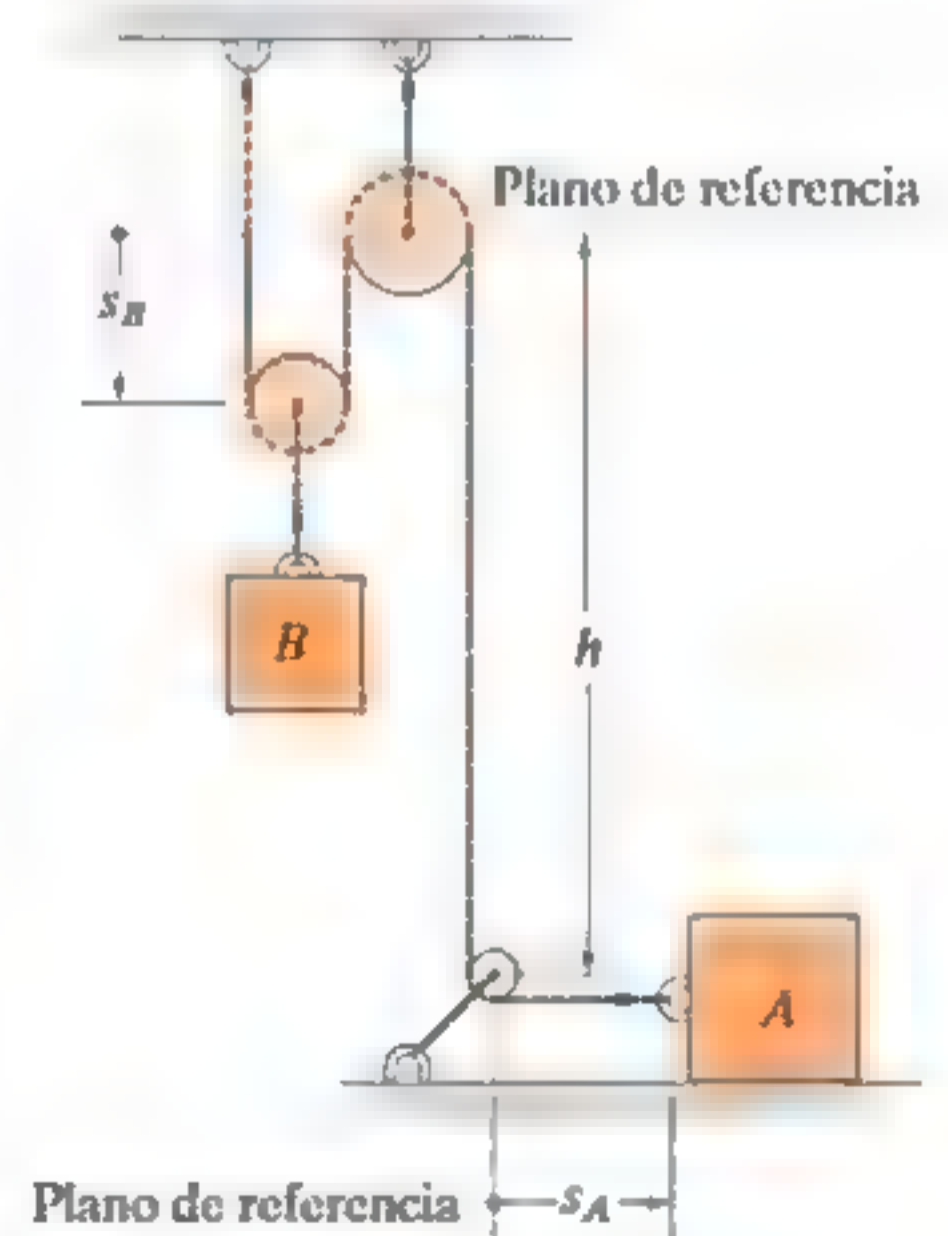


Fig. 12-36



(a)

Fig. 12-37

## 12.9 Análisis del movimiento dependiente absoluto de dos partículas

En algunos tipos de problemas el movimiento de una partícula *dependerá* del movimiento correspondiente de otra partícula. Esta dependencia ocurre por lo común si las partículas, en este caso representadas por bloques, están interconectadas por medio de cuerdas no extensibles, las cuales están enrolladas alrededor de poleas. Por ejemplo, el movimiento de un bloque *A* hacia abajo del plano inclinado en la figura 12-36 provocará un movimiento correspondiente del bloque *B* hacia arriba del otro plano inclinado. Podemos demostrar esto matemáticamente si, primero, especificamos la ubicación de los bloques mediante *coordenadas de posición*  $s_A$  y  $s_B$ . Observe que cada uno de los ejes de coordenadas (1) está medido a partir de un *punto fijo* (*O*) o de una línea de referencia fija, (2) está medido a lo largo de cada plano inclinado *en la dirección del movimiento* de cada bloque, y (3) tiene un sentido positivo desde los planos de referencia fijos hacia *A* y hacia *B*. Si la longitud total de la cuerda es  $l_T$ , las dos coordenadas de posición están relacionadas por la ecuación

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

En este caso,  $l_{CD}$  es la longitud de la cuerda que pasa sobre el arco *CD*. Si tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta expresión, y tenemos en cuenta que  $l_{CD}$  y  $l_T$  *permanecen constantes*, en tanto que  $s_A$  y  $s_B$  miden los segmentos de la cuerda que cambian de longitud, tenemos

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad v_B = -v_A$$

El signo negativo indica que cuando el bloque *A* tiene una velocidad dirigida hacia abajo, es decir, en la dirección de  $s_A$  positiva, provoca una velocidad hacia arriba correspondiente del bloque *B*, es decir, *B* se mueve en la dirección  $s_B$  negativa.

Del mismo modo, la diferenciación con respecto al tiempo de las velocidades tiene como resultado la relación entre las aceleraciones, es decir,

$$a_B = -a_A$$

En la figura 12-37*a* se muestra un ejemplo más complicado. En este caso,  $s_A$  especifica la posición del bloque *A*, y  $s_B$  define la posición del *extremo* de la cuerda del cual está suspendido el bloque *B*. Como se hizo previamente, elegimos coordenadas de posición: (1) con su origen en puntos fijos o líneas de referencia, (2) medidas en la dirección del movimiento de cada bloque, y (3) desde los planos de referencia fijos son positivas a la derecha para  $s_A$  y positivas hacia abajo para  $s_B$ . Durante el movimiento, la longitud de los segmentos de color naranja de la cuerda en la figura 12-37*a* *permanecen constantes*. Si  $l$  representa la longitud total de la cuerda menos estos segmentos, entonces las coordenadas de posición pueden relacionarse usando la ecuación

$$2s_B + h + s_A = l$$

Como  $l$  y  $h$  permanecen constantes durante el movimiento, las dos derivadas con respecto al tiempo resultan

$$2v_B = -v_A \quad 2a_B = -a_A$$

Por consiguiente, cuando *B* se mueve hacia abajo ( $+s_B$ ), *A* lo hace a la izquierda ( $-s_A$ ) con el doble del movimiento.

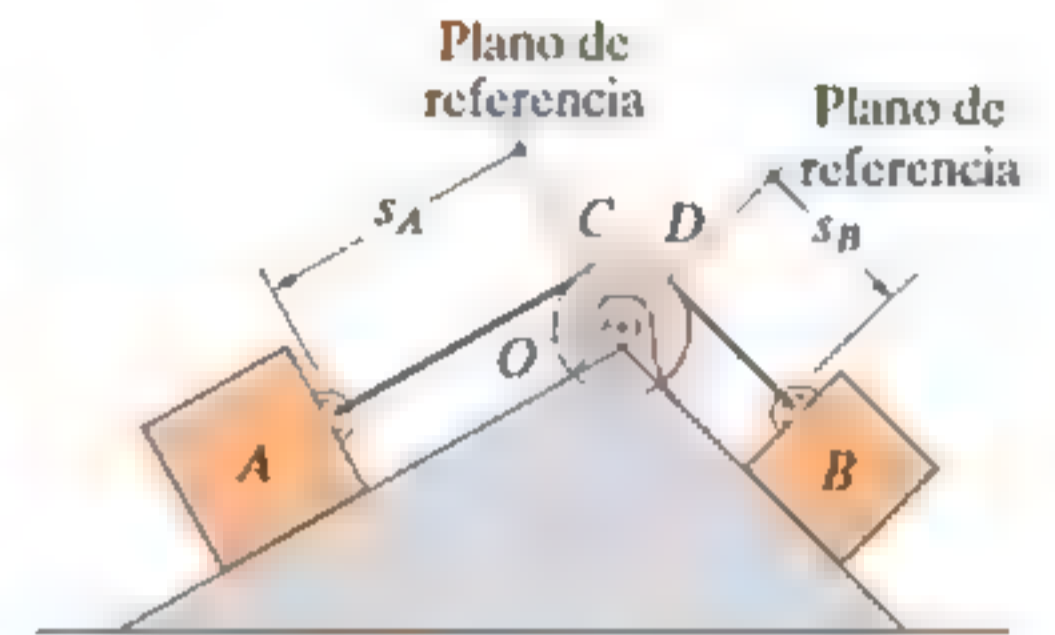
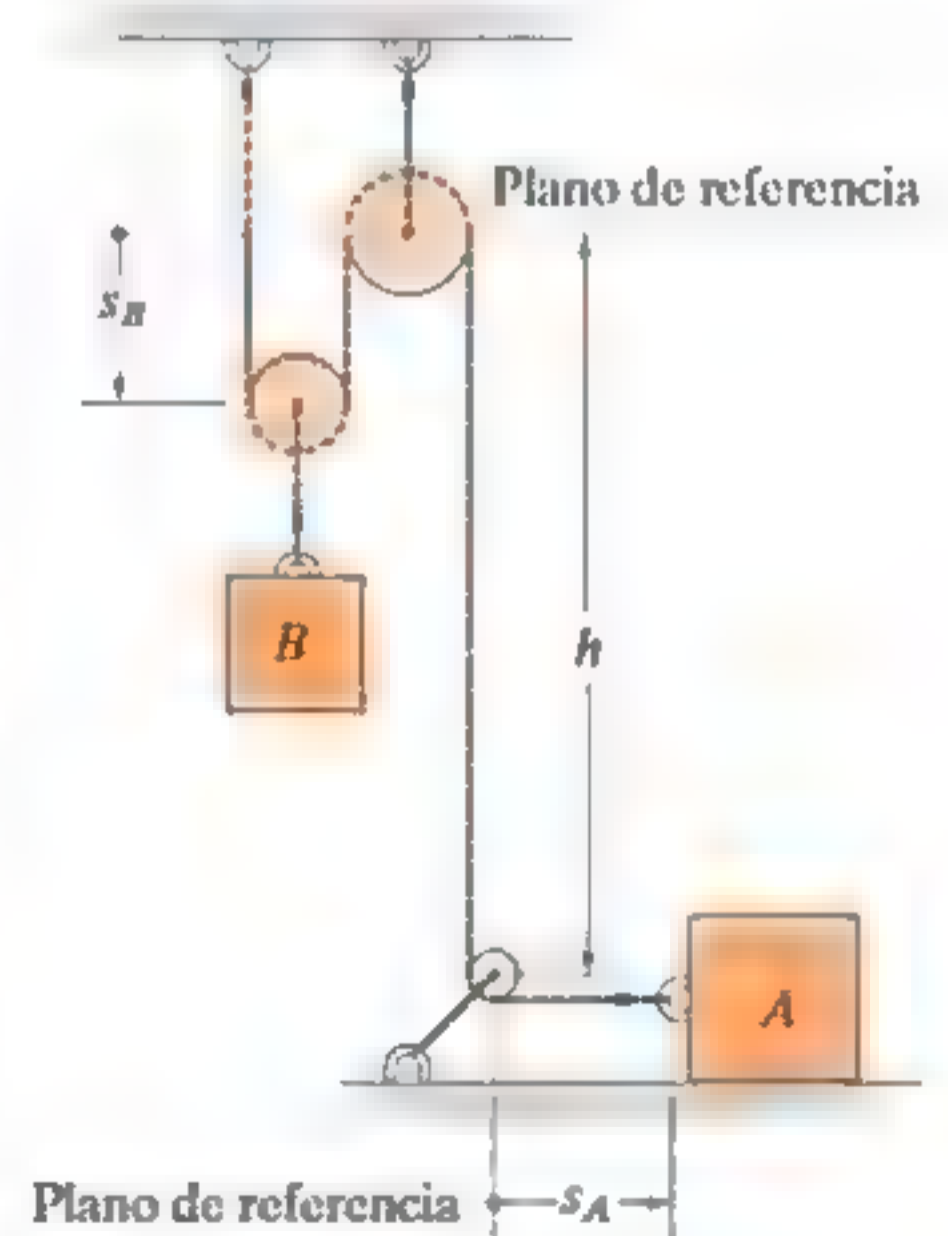


Fig. 12-36



(a)

Fig. 12-37

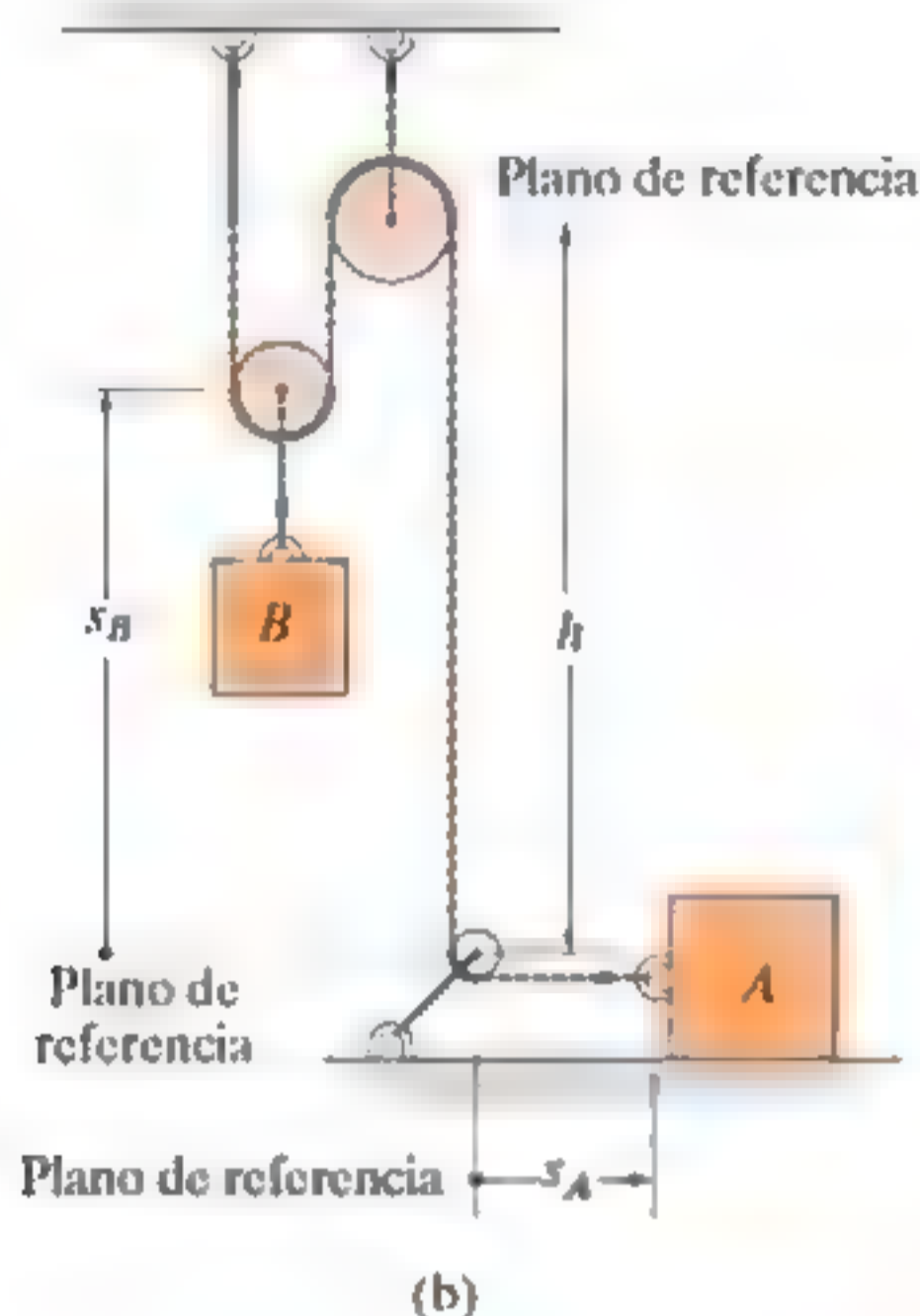


Fig. 12-37 (cont.)

Este ejemplo también se resuelve definiendo la posición del bloque  $B$  con respecto al centro de la polea inferior (un punto fijo) (fig. 12-37b). En este caso,

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

La diferenciación con respecto al tiempo resulta

$$2v_B = v_A \quad 2a_B = a_A$$

donde los signos son los mismos. ¿Por qué?

## Procedimiento para el análisis

El método anterior de relacionar el movimiento dependiente de una partícula con el de otra puede realizarse con escalares algebraicos o coordenadas de posición, siempre que cada partícula se mueva en línea recta. Cuando éste es el caso, sólo cambiarán las magnitudes de la velocidad y aceleración de las partículas, pero no su línea de dirección.

### Ecuación de coordenada de posición

- Establezca cada coordenada de posición con un origen ubicado en un punto *fijo* o plano de referencia.
- No es necesario que el origen sea el mismo para cada una de las coordenadas; sin embargo, es importante que cada eje de coordenadas seleccionado esté dirigido a lo largo de la *trayectoria del movimiento* de la partícula.
- Mediante geometría o trigonometría, relacione las coordenadas de posición con la longitud total de la cuerda,  $l_T$ , o con la porción de la cuerda,  $l$ , la cual *excluye* los segmentos que no cambian de longitud a medida que las partículas se mueven, como los segmentos de arco enrollados sobre las poleas.
- Si un problema implica un *sistema* de dos o más cuerdas enrolladas alrededor de las poleas, entonces la posición de un punto en una cuerda debe relacionarse con la posición de un punto en otra cuerda mediante el procedimiento anterior. Se escriben ecuaciones distintas para una longitud fija de cada cuerda del sistema y las posiciones de las dos partículas se relacionan entonces usando estas ecuaciones (vea los ejemplos 12.22 y 12.23).

### Derivadas con respecto al tiempo

- Dos derivadas con respecto al tiempo sucesivas de las ecuaciones de coordenadas de posición ofrecen como resultado las ecuaciones de velocidad y aceleración requeridas, las cuales relacionan los movimientos de las partículas.
- Los signos de los términos en estas ecuaciones serán consistentes con los que especifican el sentido positivo y negativo de las coordenadas de posición.



En esta grúa, el cable se enrolla alrededor de las poleas con la finalidad de reducir la fuerza necesaria para levantar una carga. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

Determine la rapidez del bloque  $A$  que se muestra en la figura 12-38, si el bloque  $B$  se mueve hacia arriba a una rapidez de 6 ft/s.

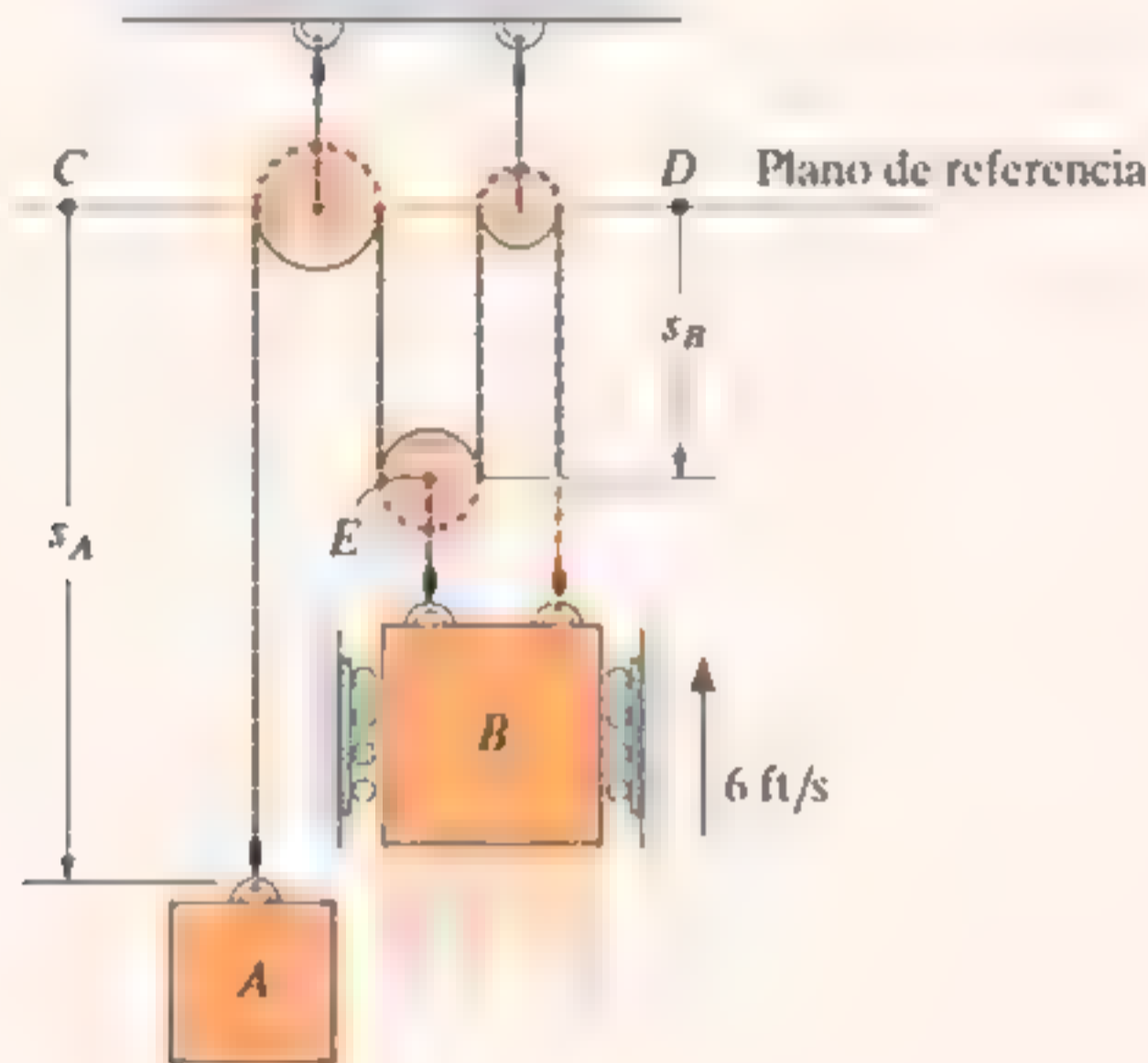


Fig. 12-38

## SOLUCIÓN

**Ecuación de coordenadas de posición.** Hay una cuerda en este sistema que incluye segmentos que cambian de longitud. Se utilizarán coordenadas de posición  $s_A$  y  $s_B$  puesto que cada una se mide con respecto a un punto fijo ( $C$  o  $D$ ) y se extiende a lo largo de la *trayectoria del movimiento* de cada bloque. En particular,  $s_B$  se dirige al punto  $E$  ya que el movimiento de  $B$  y  $E$  es el mismo.

Los segmentos de color naranja de la cuerda en la figura 12-38 permanecen a una longitud constante y no tienen que considerarse a medida que los bloques se mueven. La longitud de la cuerda restante,  $l$ , también es constante y está relacionada con las coordenadas de posición cambiantes  $s_A$  y  $s_B$  mediante la ecuación

$$s_A + 3s_B = l$$

**Derivadas con respecto al tiempo.** Al realizar la derivada con respecto al tiempo, se tiene

$$v_A + 3v_B = 0$$

de modo que cuando  $v_B = -6$  ft/s (hacia arriba),

$$v_A = 18 \text{ ft/s} \downarrow$$

## EJEMPLO 12-39

Determine la rapidez de  $A$  en la figura 12-39 si  $B$  tiene una rapidez hacia arriba de 6 ft/s.

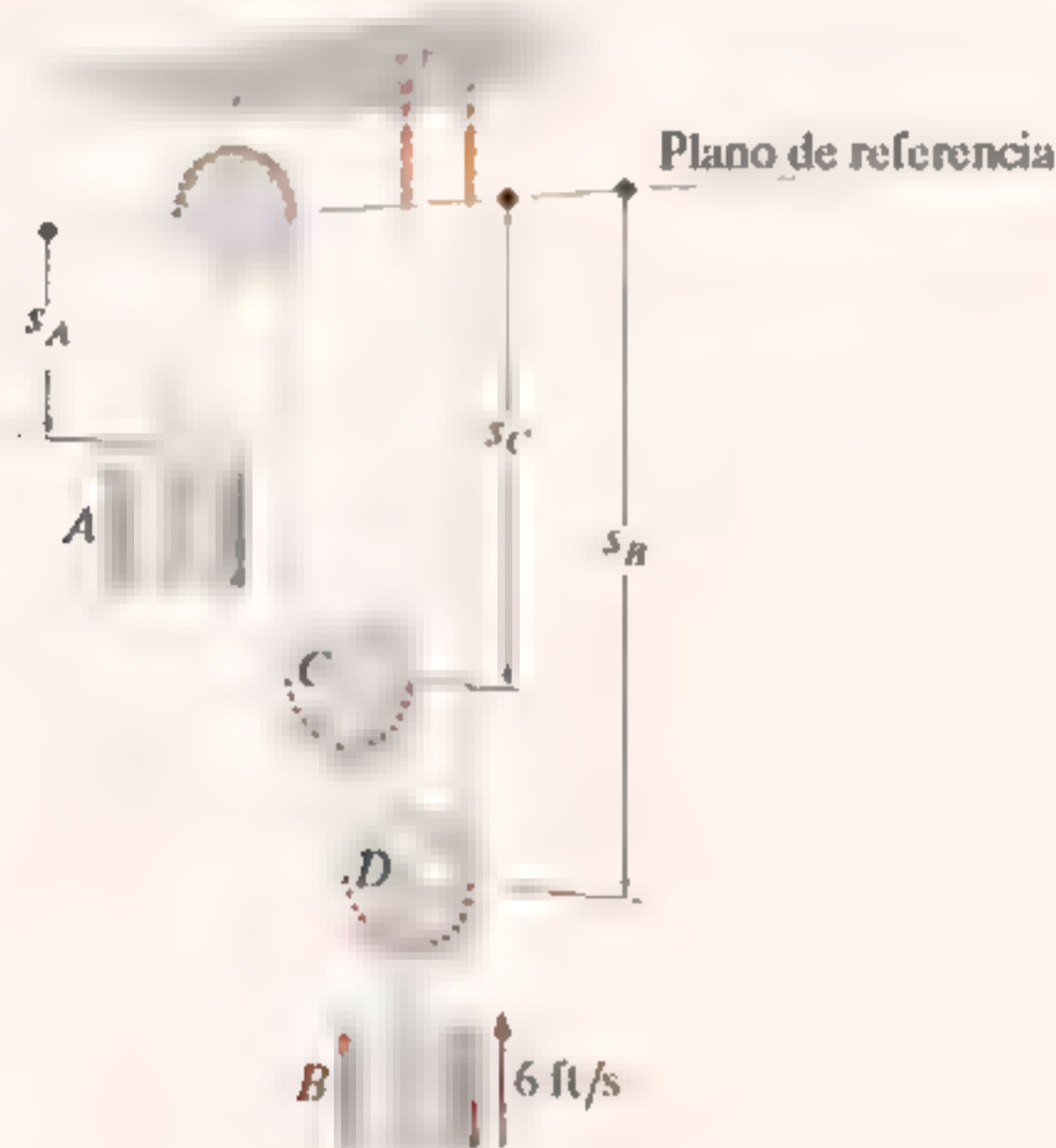


Fig. 12-39

## SOLUCIÓN

**Ecuación de coordenadas de posición.** Como se muestra,  $s_A$  y  $s_B$  definen las posiciones de los bloques  $A$  y  $B$ . Como el sistema incluye *dos cuerdas* con segmentos que cambian de longitud, será necesario utilizar una tercera coordenada,  $s_C$ , para relacionar  $s_A$  con  $s_B$ . En otros términos, la longitud de una de las cuerdas puede expresarse en función de  $s_A$  y  $s_C$  y la longitud de la otra puede expresarse en función de  $s_B$  y  $s_C$ .

Los segmentos de color naranja de las cuerdas en la figura 12-39 no tienen que considerarse en el análisis. ¿Por qué? Para las longitudes de cuerdas restantes, por ejemplo  $l_1$  y  $l_2$ , tenemos

$$s_A + 2s_C = l_1 \quad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

**Derivada con respecto al tiempo.** Al tomar la derivada con respecto al tiempo de estas ecuaciones se obtiene

$$v_A + 2v_C = 0 \quad 2v_B - v_C = 0$$

Si se elimina  $v_C$  se produce la relación entre el movimiento de cada cilindro.

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando  $v_B = -6$  ft/s (hacia arriba),

$$v_A = +24 \text{ ft/s} = 24 \text{ ft/s} \downarrow$$

## EJEMPLO

Determine la rapidez del bloque  $B$  en la figura 12-40, si el extremo de la cuerda en  $A$  se jala hacia abajo con una rapidez de 2 m/s.

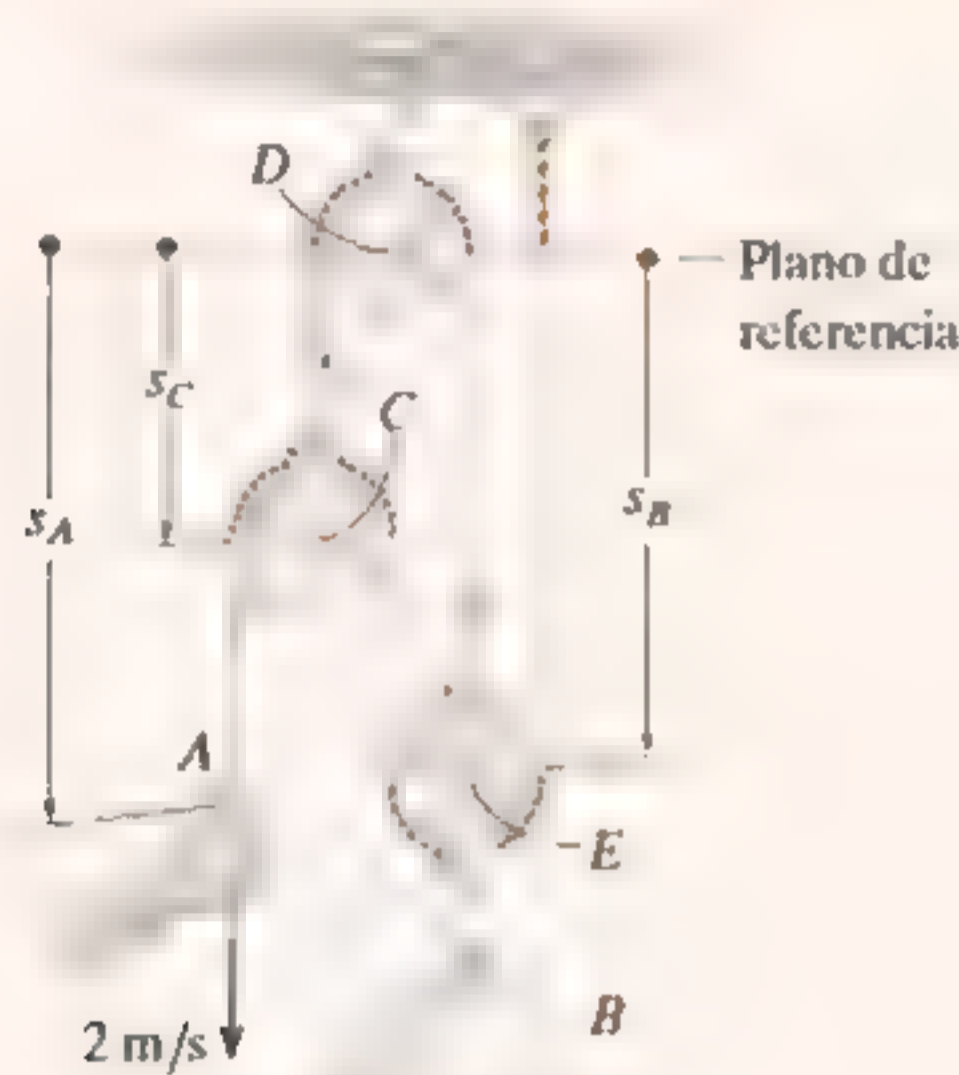


Fig. 12-40

## SOLUCIÓN

**Ecuación de coordenadas de posición.** La coordenada  $s_A$  define la posición del punto  $A$  y  $s_B$  especifica la posición del bloque  $B$ , pues el punto  $E$  en la polea tendrá el mismo movimiento que el bloque. Ambas coordenadas se miden con respecto a un plano de referencia horizontal que pasa por el pasador fijo en la polea  $D$ . Como el sistema se compone de *dos* cuerdas, las coordenadas  $s_A$  y  $s_B$  no se pueden relacionar de forma directa. En cambio, si se establece una tercera coordenada de posición,  $s_C$ , ahora podemos expresar la longitud de una de las cuerdas en función de  $s_B$  y  $s_C$  y la longitud de la otra en función de  $s_A$ ,  $s_B$  y  $s_C$ .

Si se excluyen los segmentos de color naranja de las cuerdas en la figura 12-40, las longitudes de cuerda constantes restantes  $l_1$  y  $l_2$  (junto con las dimensiones del gancho y el eslabón) se expresan como

$$\begin{aligned} s_C + s_B &= l_1 \\ (s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B &= l_2 \end{aligned}$$

**Derivada con respecto al tiempo.** La derivada con respecto al tiempo de cada ecuación resulta

$$\begin{aligned} v_C + v_B &= 0 \\ v_A - 2v_C + 2v_B &= 0 \end{aligned}$$

Al eliminar  $v_C$ , obtenemos

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando  $v_A = 2$  m/s (hacia abajo),

$$v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s } \uparrow$$

## EJEMPLO 12.11

Un hombre parado en  $A$  iza una caja fuerte  $S$  como se indica en la figura 12-41, al caminar hacia la derecha con una velocidad constante  $v_A = 0.5 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad y aceleración de la caja fuerte cuando alcanza la altura de 10 m. La cuerda de 30 m de largo pasa sobre una pequeña polea en  $D$ .

## SOLUCIÓN

Este problema difiere de los ejemplos anteriores, ya que el segmento de cuerda  $DA$  cambia *tanto de dirección como de magnitud*. Sin embargo, los extremos de la cuerda, que definen las posiciones de  $C$  y  $A$ , se especifican por medio de las coordenadas  $x$  y  $y$ , ya que se miden con respecto a un punto fijo y están *dirigidas a lo largo de las trayectorias del movimiento* de los extremos de la cuerda.

Las coordenadas  $x$  y  $y$  pueden relacionarse, pues la cuerda tiene una longitud fija  $l = 30 \text{ m}$ , la cual en todo momento es igual a la longitud del segmento  $DA$  más  $CD$ . Usando el teorema de Pitágoras para determinar  $l_{DA}$ , tenemos  $l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2}$ ; también,  $l_{CD} = 15 - y$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} l &= l_{DA} + l_{CD} \\ 30 &= \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y) \\ y &= \sqrt{225 + x^2} - 15 \end{aligned} \quad (1)$$

**Derivadas con respecto al tiempo.** Con la derivada con respecto al tiempo y la regla de la cadena (vea el apéndice C), donde  $v_S = dy/dt$  y  $v_A = dx/dt$ , se obtiene

$$\begin{aligned} v_S &= \frac{dy}{dt} = \left[ \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}} \right] \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}} v_A \end{aligned} \quad (2)$$

Cuando  $y = 10 \text{ m}$ ,  $x$  se determina con la ecuación 1, es decir,  $x = 20 \text{ m}$ . Por consiguiente, a partir de la ecuación 2 con  $v_A = 0.5 \text{ m/s}$ ,

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}} (0.5) = 0.4 \text{ m/s} = 400 \text{ mm/s} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

La aceleración se determina al tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2. Como  $v_A$  es constante, entonces  $a_A = dv_A/dt = 0$ , y tenemos

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[ \frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}} \right] x v_A + \left[ \frac{1}{\sqrt{225 + x^2}} \right] \left( \frac{dx}{dt} \right) v_A + \left[ \frac{1}{\sqrt{225 + x^2}} \right] x \frac{dv_A}{dt} = \frac{225 v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

Cuando  $x = 20$ , con  $v_A = 0.5 \text{ m/s}$ , la aceleración es

$$a_S = \frac{225(0.5 \text{ m/s})^2}{[225 + (20 \text{ m})^2]^{3/2}} = 0.00360 \text{ m/s}^2 = 3.60 \text{ mm/s}^2 \uparrow \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** La velocidad constante en  $A$  hace que el otro extremo  $C$  de la cuerda se acelere, ya que  $v_A$  cambia la dirección del segmento  $DA$  y también su longitud.

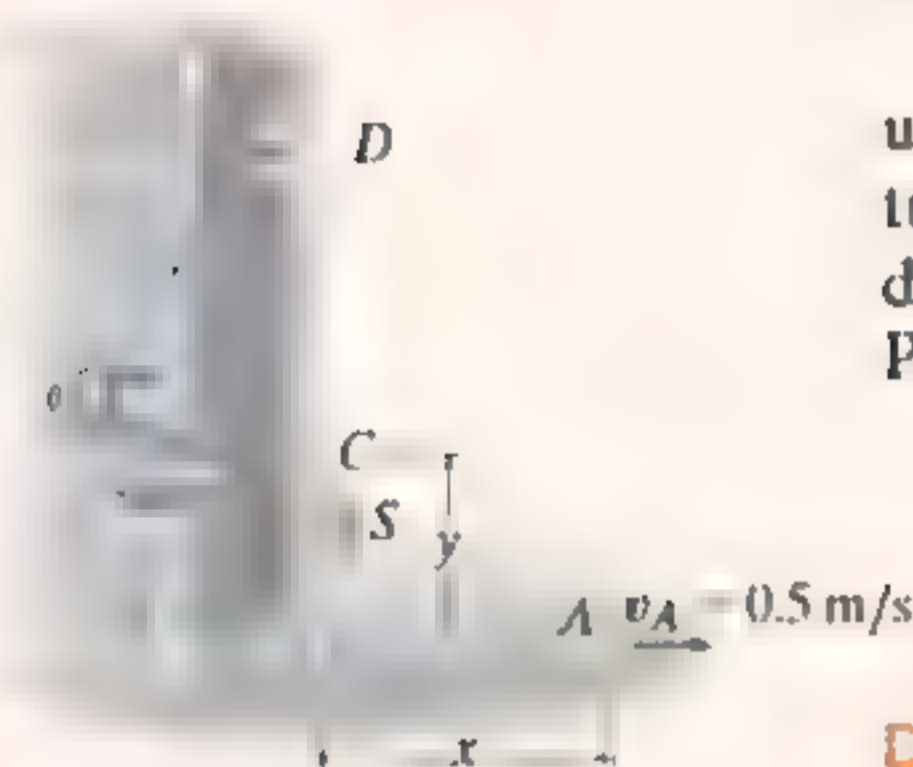


Fig. 12-41

## 12.10 Movimiento relativo de dos partículas utilizando ejes en traslación

A lo largo de todo este capítulo, el movimiento absoluto de una partícula se ha determinado por medio de un marco de referencia fijo. Existen muchos casos, sin embargo, donde la trayectoria del movimiento de una partícula se complica, de modo que quizá sea más fácil analizar el movimiento en partes utilizando dos o más marcos de referencia. Por ejemplo, el movimiento de una partícula localizada en la punta de la hélice de un avión, mientras éste está en vuelo, se describe mejor si primero se observa el movimiento del avión desde una referencia fija y, luego, se superpone (vectorialmente) el movimiento circular de la partícula medido con respecto a una referencia fija al avión.

En esta sección se considerarán *marcos de referencia en traslación* en el análisis.

**Ejemplo 12.10** Considere las partículas  $A$  y  $B$ , las cuales se desplazan a lo largo de las trayectorias arbitrarias de la figura 12-42. La *posición absoluta* de cada partícula,  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$ , está medida con respecto al origen común  $O$  del marco de referencia fijo  $x, y, z$ . El origen de un segundo marco de referencia  $x', y', z'$  se fija a la partícula  $A$  y se mueve con ésta. Se *permite* que los ejes de este marco *sólo se trasladen* relativamente con respecto al marco fijo. La posición de  $B$  medida relativa con respecto a  $A$  se denota por el *vector de posición relativo*  $\mathbf{r}_{B/A}$ . Por medio de la suma vectorial, los tres vectores mostrados en la figura 12-42 pueden relacionarse mediante la ecuación

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (12-33)$$

**Velocidad** Si se toman las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación anterior, se determina una ecuación que relaciona las velocidades de las partículas, es decir,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (12-34)$$

Donde  $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$  y  $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$  se refieren a *velocidades absolutas*, ya que se observan desde el marco fijo; en tanto que la *velocidad relativa*  $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$  se observa desde el marco en traslación. Es importante señalar que como los ejes  $x', y', z'$  se trasladan, las *componentes* de  $\mathbf{r}_{B/A}$  *no* cambiarán de dirección y, por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo de estas componentes sólo tendrán que responder al cambio de sus magnitudes. La ecuación 12-34 establece, por lo tanto, que la velocidad de  $B$  es igual a la velocidad de  $A$  más (vectorialmente) la velocidad de “ $B$  con respecto a  $A$ ” medida por el *observador en traslación* fijo en el marco de referencia  $x', y', z'$ .

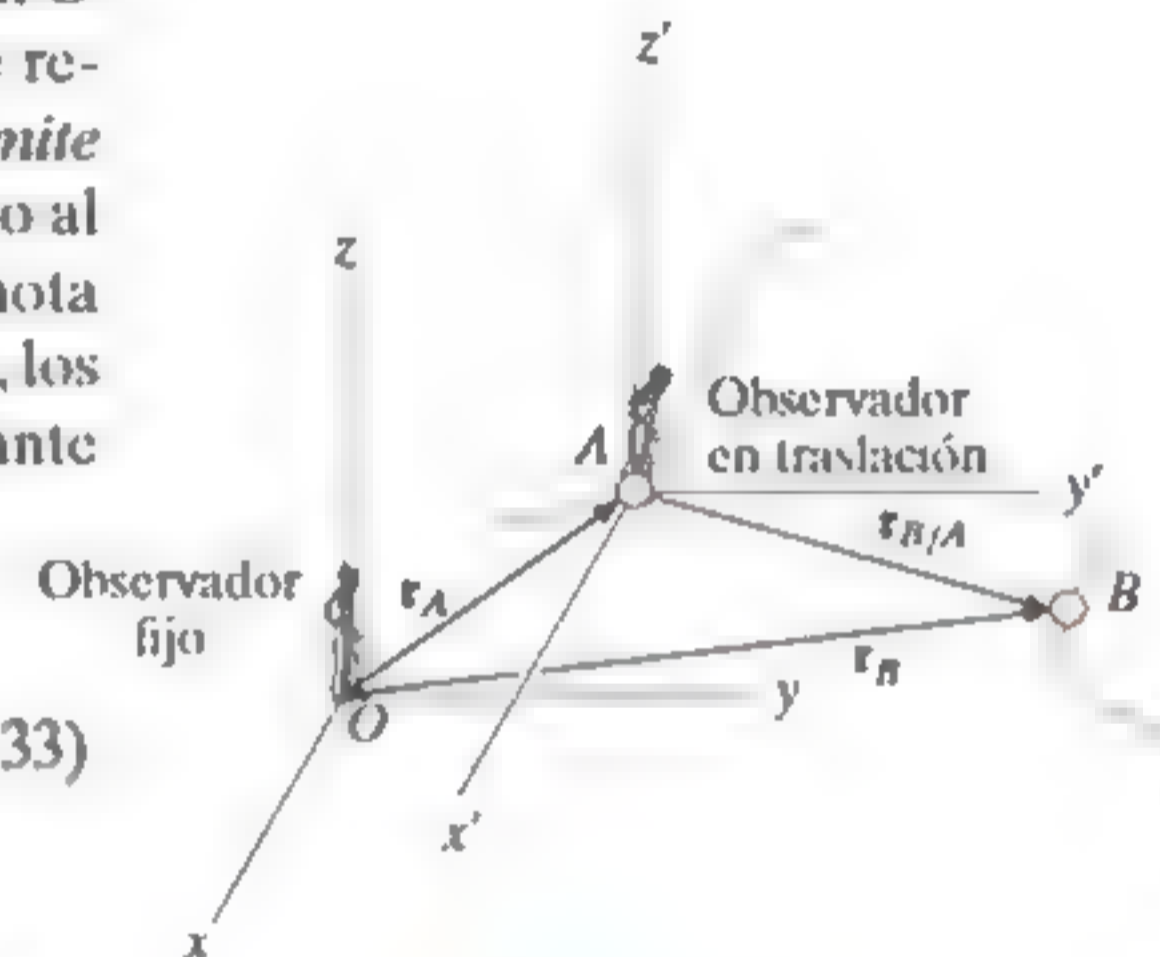


Fig. 12-42

**Advertencia.** La derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-34 proporciona una relación vectorial similar entre las *aceleraciones absoluta y relativa* de las partículas  $A$  y  $B$ .

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (12-35)$$

Aquí  $\mathbf{a}_{B/A}$  es la aceleración de  $B$  vista por el observador localizado en  $A$  y que se traslada con el marco de referencia  $x', y', z'$ .

### Procedimiento para el análisis

- Cuando se aplican las ecuaciones de velocidad y aceleración relativas, primero se tiene que especificar la partícula  $A$  que es el origen de los ejes en traslación  $x', y', z'$ . Por lo común, este punto tiene una velocidad o una aceleración *conocida*.
- Como la suma vectorial forma un triángulo, cuando mucho puede haber *dos incógnitas* representadas por las magnitudes y/o direcciones de las cantidades vectoriales.
- Estas incógnitas se pueden resolver ya sea gráficamente por medio de trigonometría (ley de los senos, ley de los cosenos), o bien, al descomponer cada uno de los tres vectores en sus componentes rectangulares o cartesianas, con lo cual se genera un sistema de ecuaciones escalares.



Los pilotos de estos aviones que vuelan muy cerca entre sí no deben perder de vista sus posiciones y velocidades relativas en todo momento, para evitar una colisión. (© R. C. Hibbeler)

\*Una forma fácil de recordar la configuración de estas ecuaciones es observar la "cancelación" del subíndice  $A$  entre los dos términos, por ejemplo,  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ .

## EJEMPLO

Un tren viaja a una rapidez constante de 60 mi/h y cruza una carretera, como se indica en la figura 12-43a. Si el automóvil  $A$  viaja a 45 mi/h por la carretera, determine la magnitud y dirección de la velocidad del tren con respecto al automóvil.

## SOLUCIÓN I

La velocidad relativa  $\mathbf{v}_{T/A}$  se mide con respecto a los ejes en traslación  $x', y'$  fijos en el automóvil (fig. 12-43a). Ésta se determina a partir de la ecuación  $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$ . Como se conocen tanto la magnitud como la dirección de  $\mathbf{v}_T$  y  $\mathbf{v}_A$ , las incógnitas son las componentes  $x$  y  $y$  de  $\mathbf{v}_{T/A}$ . Si utilizamos los ejes  $x, y$  en la figura 12-43a, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_T &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A} \\ 60\mathbf{i} &= (45 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 45 \sin 45^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A} \\ \mathbf{v}_{T/A} &= \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\} \text{ mi/h}\end{aligned}$$

La magnitud de  $\mathbf{v}_{T/A}$  es, por lo tanto,

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5 \text{ mi/h} \quad \text{Resp.}$$

A partir de la dirección de cada componente (fig. 12-43b), la dirección de  $\mathbf{v}_{T/A}$  es

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2} \\ \theta &= 48.5^\circ \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Observe que la suma vectorial mostrada en la figura 12-43b indica el sentido correcto de  $\mathbf{v}_{T/A}$ . Esta figura anticipa la respuesta y puede utilizarse para comprobarla.

## SOLUCIÓN II

**Análisis escalar.** Las componentes desconocidas de  $\mathbf{v}_{T/A}$  también pueden determinarse con un análisis escalar. Supondremos que estas componentes actúan en las direcciones  $x$  y  $y$  positivas. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_T &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A} \\ \left[ \begin{array}{c} 60 \text{ mi/h} \\ \rightarrow \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c} 45 \text{ mi/h} \\ \nearrow 45^\circ \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{array} \right]\end{aligned}$$

Si descomponemos cada vector en sus componentes  $x$  y  $y$ ,

$$\begin{aligned}(\rightarrow) \quad 60 &= 45 \cos 45^\circ + (v_{T/A})_x + 0 \\ (+\uparrow) \quad 0 &= 45 \sin 45^\circ + 0 + (v_{T/A})_y\end{aligned}$$

Al resolver, obtenemos los resultados previos,

$$\begin{aligned}(v_{T/A})_x &= 28.2 \text{ mi/h} = 28.2 \text{ mi/h} \rightarrow \\ (v_{T/A})_y &= -31.8 \text{ mi/h} = 31.8 \text{ mi/h} \downarrow\end{aligned}$$

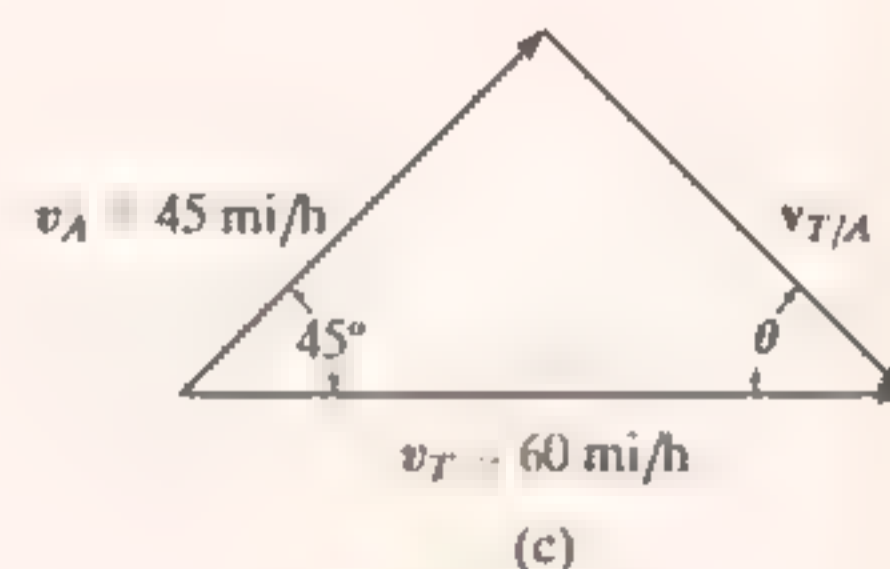
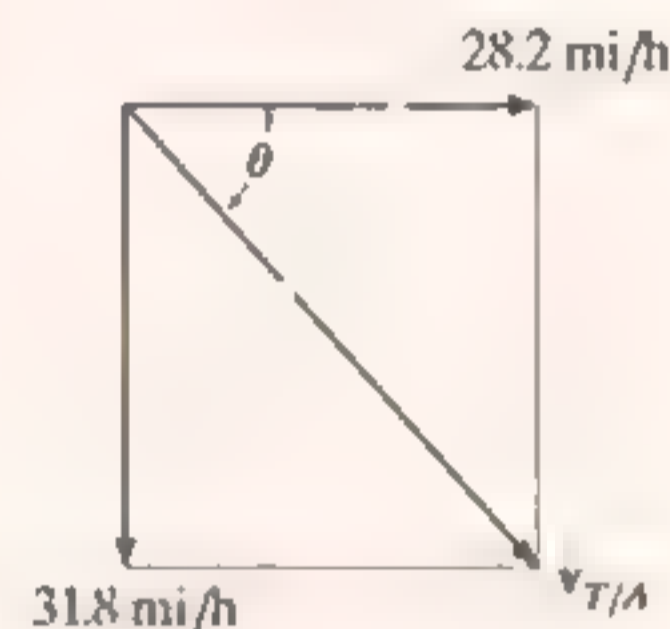
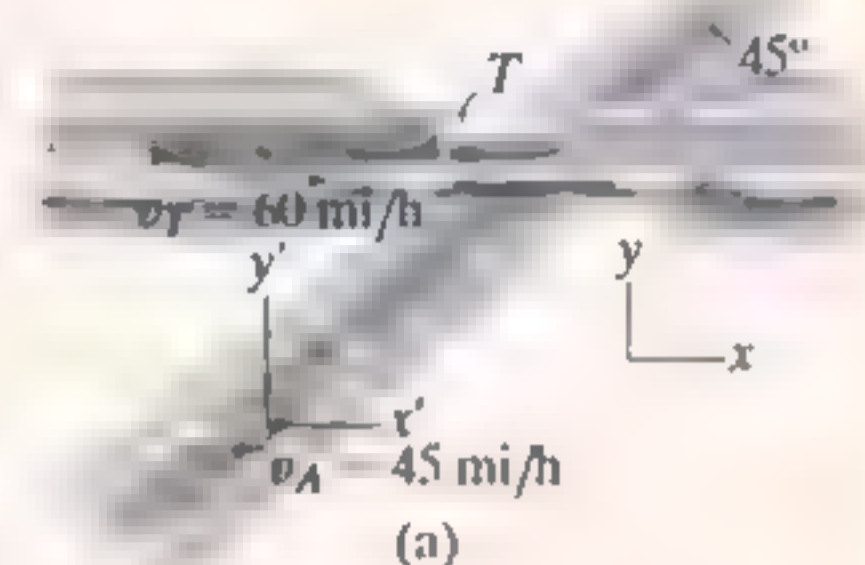
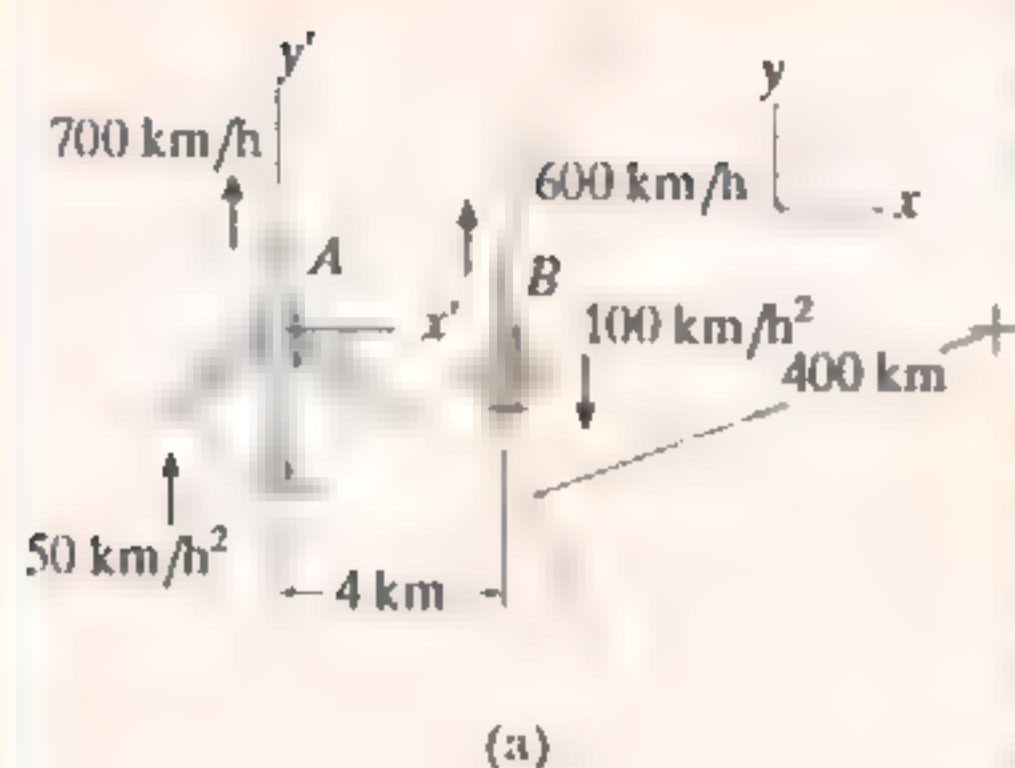


Fig. 12-43



(a)

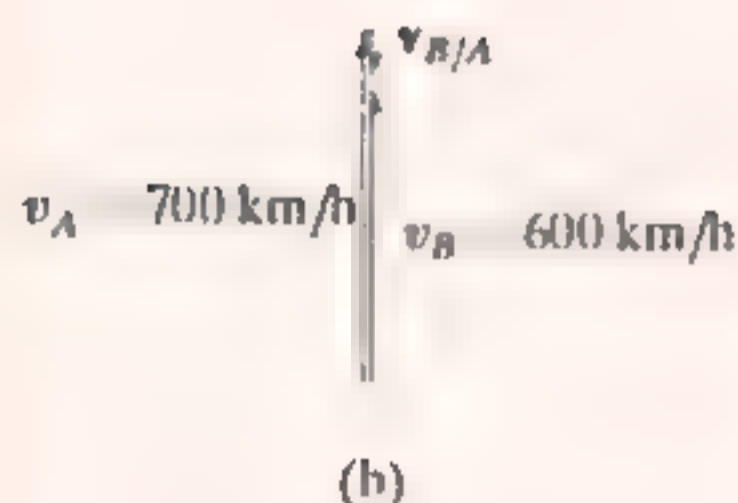
El avión  $A$  en la figura 12-44a vuela a lo largo de una trayectoria recta, mientras que el avión  $B$  lo hace a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de curvatura  $\rho_B = 400$  km. Determine la velocidad y aceleración de  $B$  medidas por el piloto de  $A$ .

### SOLUCIÓN

**Velocidad.** El origen de los ejes  $x$  y  $y$  está en un punto fijo arbitrario. Como se tiene que determinar el movimiento con respecto al plano  $A$ , el *marco de referencia en traslación*  $x', y'$  se fija en él (fig. 12-44a). Al aplicar la ecuación de velocidad relativa en forma escalar, ya que los vectores de la velocidad de ambos aviones son paralelos en el instante mostrado, tenemos

$$\begin{aligned}
 (+\uparrow) \quad v_B &= v_A + v_{B/A} \\
 600 \text{ km/h} &= 700 \text{ km/h} + v_{B/A} \\
 v_{B/A} &= -100 \text{ km/h} = 100 \text{ km/h} \downarrow \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

La suma vectorial se muestra en la figura 12-44b.



(b)

**Aceleración.** El avión  $B$  tiene componentes tanto tangenciales como normales de aceleración, ya que vuela a lo largo de una *trayectoria curva*. De acuerdo con la ecuación 12-20, la magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600 \text{ km/h})^2}{400 \text{ km}} = 900 \text{ km/h}^2$$

Al aplicar la ecuación de aceleración relativa se obtiene

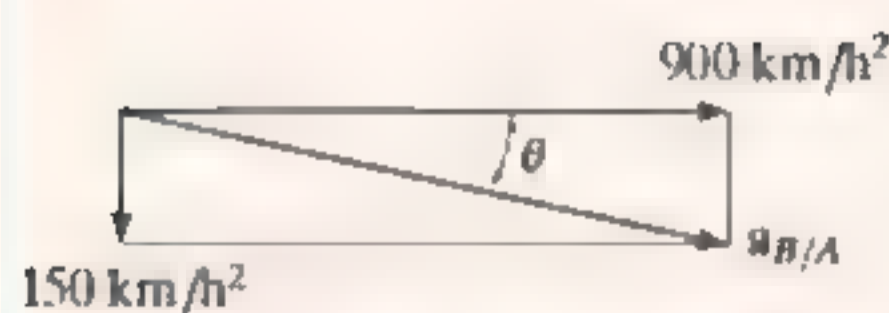
$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\
 900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} &= 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

De acuerdo con la figura 12-44c, la magnitud y la dirección de  $\mathbf{a}_{B/A}$  son por consiguiente

$$a_{B/A} = 912 \text{ km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1} \frac{150}{900} = 9.46^\circ \quad \text{Resp.}$$



(c)

Fig. 12-44

**NOTA:** La solución de este problema fue posible gracias al uso de un marco de referencia en traslación, pues el piloto del avión  $A$  “se está trasladando”. La observación del movimiento del avión  $A$  con respecto al piloto del avión  $B$ , sin embargo, se obtiene usando un sistema de ejes *de rotación* fijo en el avión  $B$ . (Esto supone, desde luego, que el piloto de  $B$  está fijo en el marco en rotación, así que no tiene que mover sus ojos para seguir el movimiento de  $A$ .) Este caso se analiza en el ejemplo 16.21.

## EJEMPLO

En el instante que se muestra en la figura 12-45a, los automóviles  $A$  y  $B$  viajan con una rapidez de  $18 \text{ m/s}$  y  $12 \text{ m/s}$ , respectivamente. Asimismo, en este instante,  $A$  experimenta un decremento en rapidez de  $2 \text{ m/s}^2$  y  $B$  tiene un incremento en rapidez de  $3 \text{ m/s}^2$ . Determine la velocidad y aceleración de  $B$  con respecto a  $A$ .

## SOLUCIÓN

**Velocidad.** Los ejes  $x, y$  fijos se establecen en un punto arbitrario en el suelo, y los ejes en traslación  $x', y'$  se fijan al automóvil  $A$  (fig. 12-45a). ¿Por qué? La velocidad relativa se determina con  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ . ¿Cuáles son las dos incógnitas? Si utilizamos un análisis vectorial cartesiano, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \\ -12\mathbf{j} &= (-18 \cos 60^\circ \mathbf{i} - 18 \sin 60^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A} \\ \mathbf{v}_{B/A} &= \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Observemos que  $\mathbf{v}_{B/A}$  tiene componentes  $+\mathbf{i}$  y  $+\mathbf{j}$  (fig. 12-45b), su dirección es

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9} \\ \theta &= 21.7^\circ \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

**Aceleración.** El automóvil  $B$  tiene componentes tanto tangencial como normal de aceleración. ¿Por qué? La magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 1.440 \text{ m/s}^2$$

Al aplicar la ecuación de la aceleración relativa se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ (-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) &= (2 \cos 60^\circ \mathbf{i} + 2 \sin 60^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A} \\ \mathbf{a}_{B/A} &= \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Aquí  $\mathbf{a}_{B/A}$  tiene componentes  $-\mathbf{i}$  y  $-\mathbf{j}$ . Entonces, con la figura 12-45c,

$$\begin{aligned}a_{B/A} &= \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32 \text{ m/s}^2 \\ \tan \phi &= \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440} \\ \phi &= 62.7^\circ \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

**NOTA:** ¿Es posible obtener la aceleración relativa  $\mathbf{a}_{A/B}$  con este método? Vea el comentario al final del ejemplo 12.26.

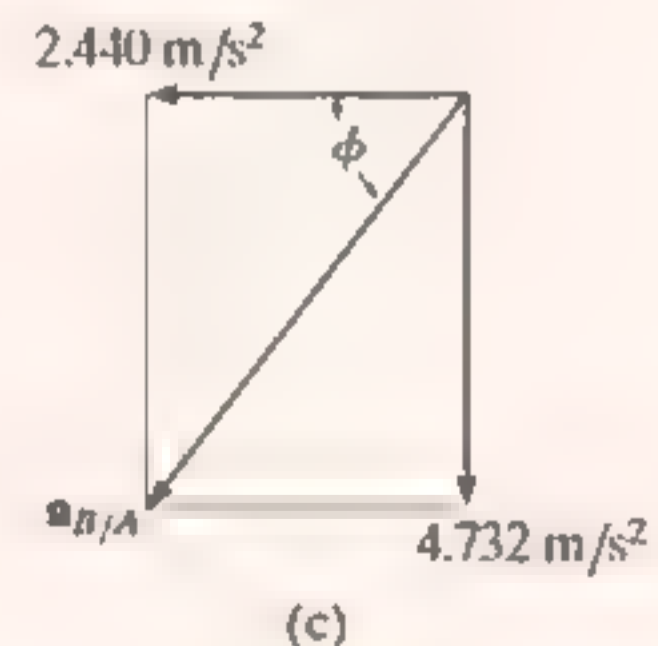
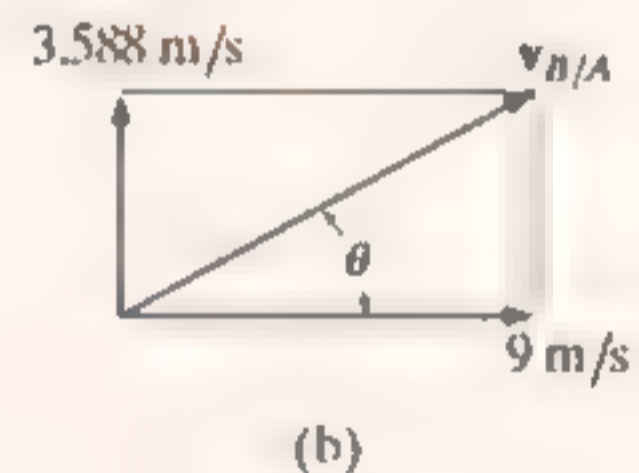
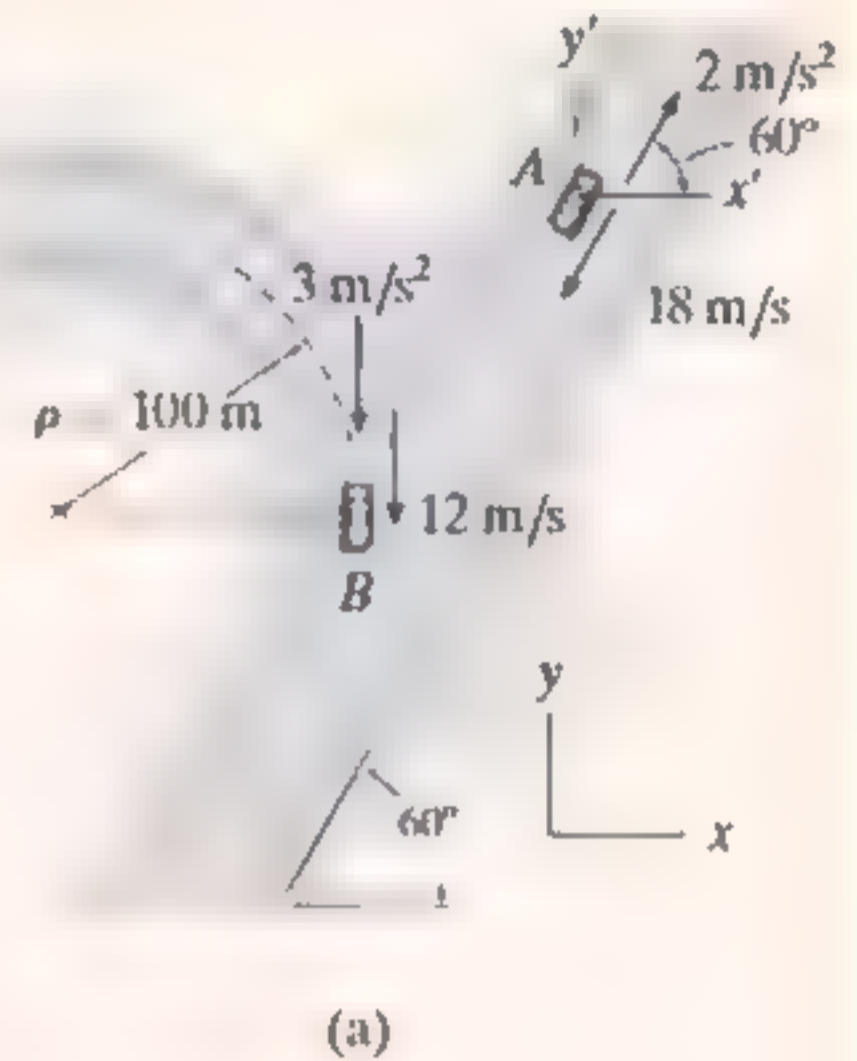
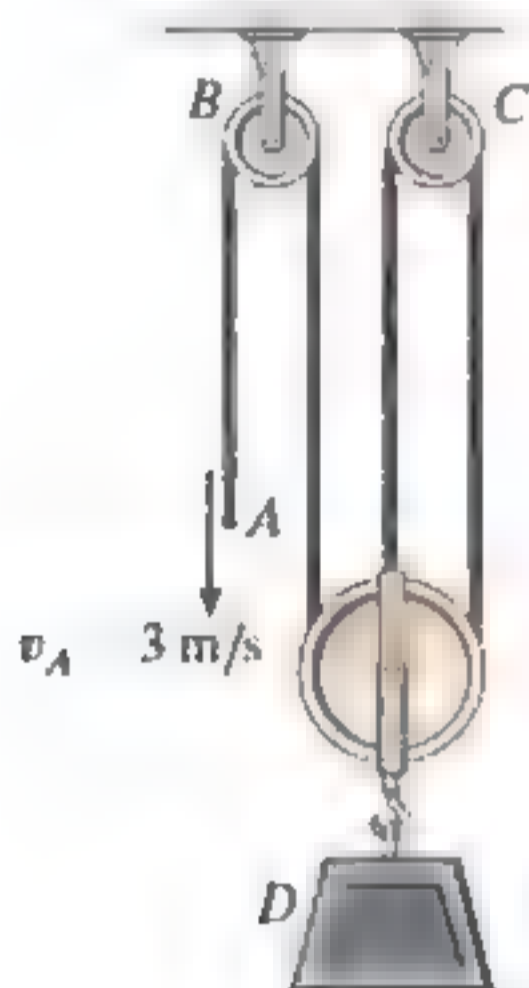


Fig. 12-45

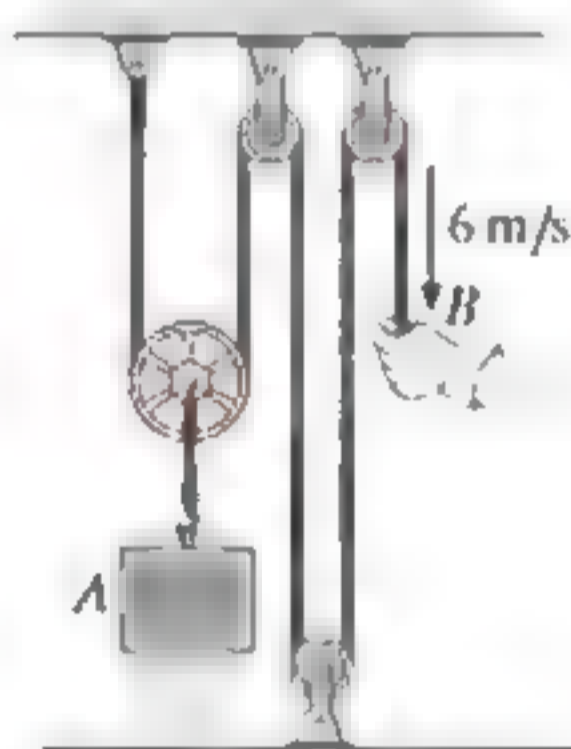
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**112-39.** Determine la velocidad del bloque  $D$ , si el extremo  $A$  de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de  $v_A = 3 \text{ m/s}$ .



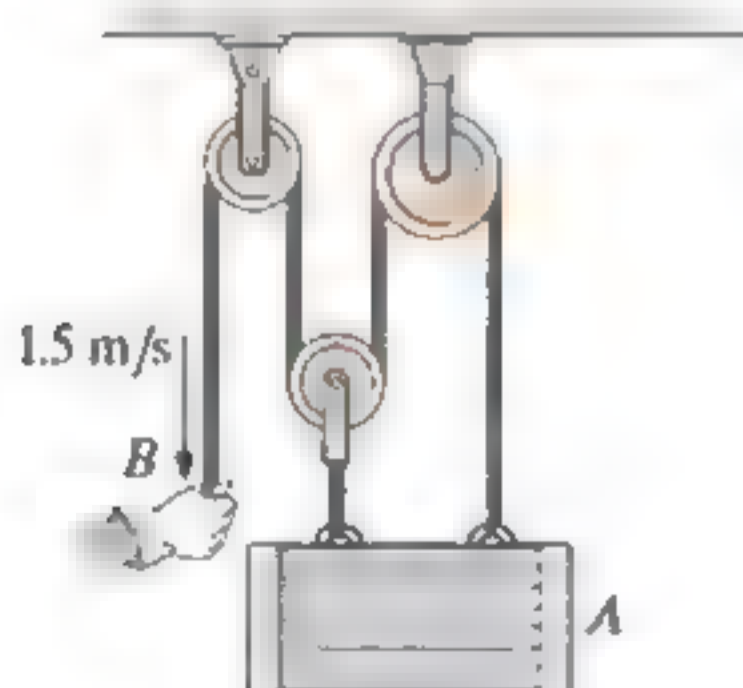
Prob. F12-39

**F12-40.** Determine la velocidad del bloque  $A$ , si el extremo  $B$  de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de  $6 \text{ m/s}$ .



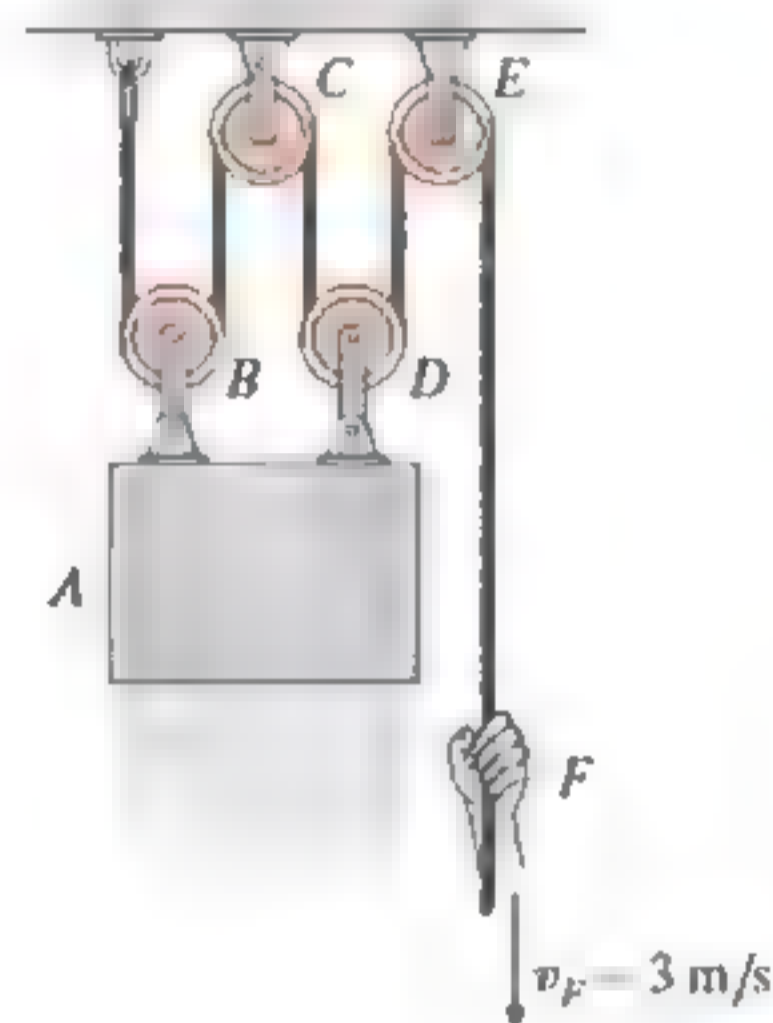
Prob. F12-40

**112-41.** Determine la velocidad del bloque  $A$ , si el extremo  $B$  de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de  $1.5 \text{ m/s}$ .



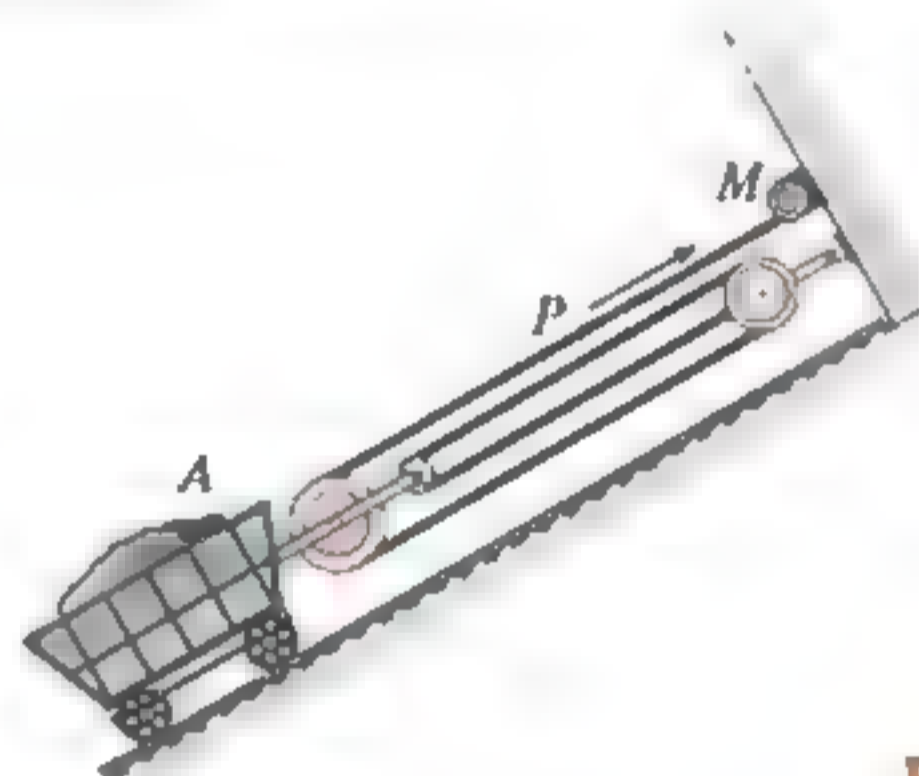
Prob. F12-41

**112-42.** Determine la velocidad del bloque  $A$ , si el extremo  $F$  de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de  $v_F = 3 \text{ m/s}$ .



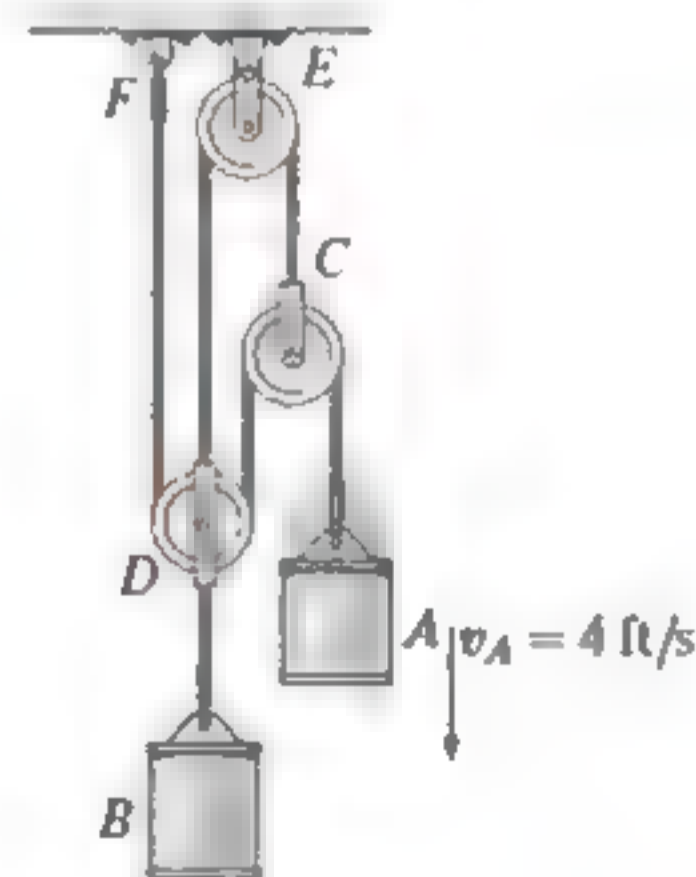
Prob. 112-42

**112-43.** Determine la velocidad del carro  $A$ , si el punto  $P$  en el cable tiene una rapidez de  $4 \text{ m/s}$  cuando el motor  $M$  enrolla el cable.



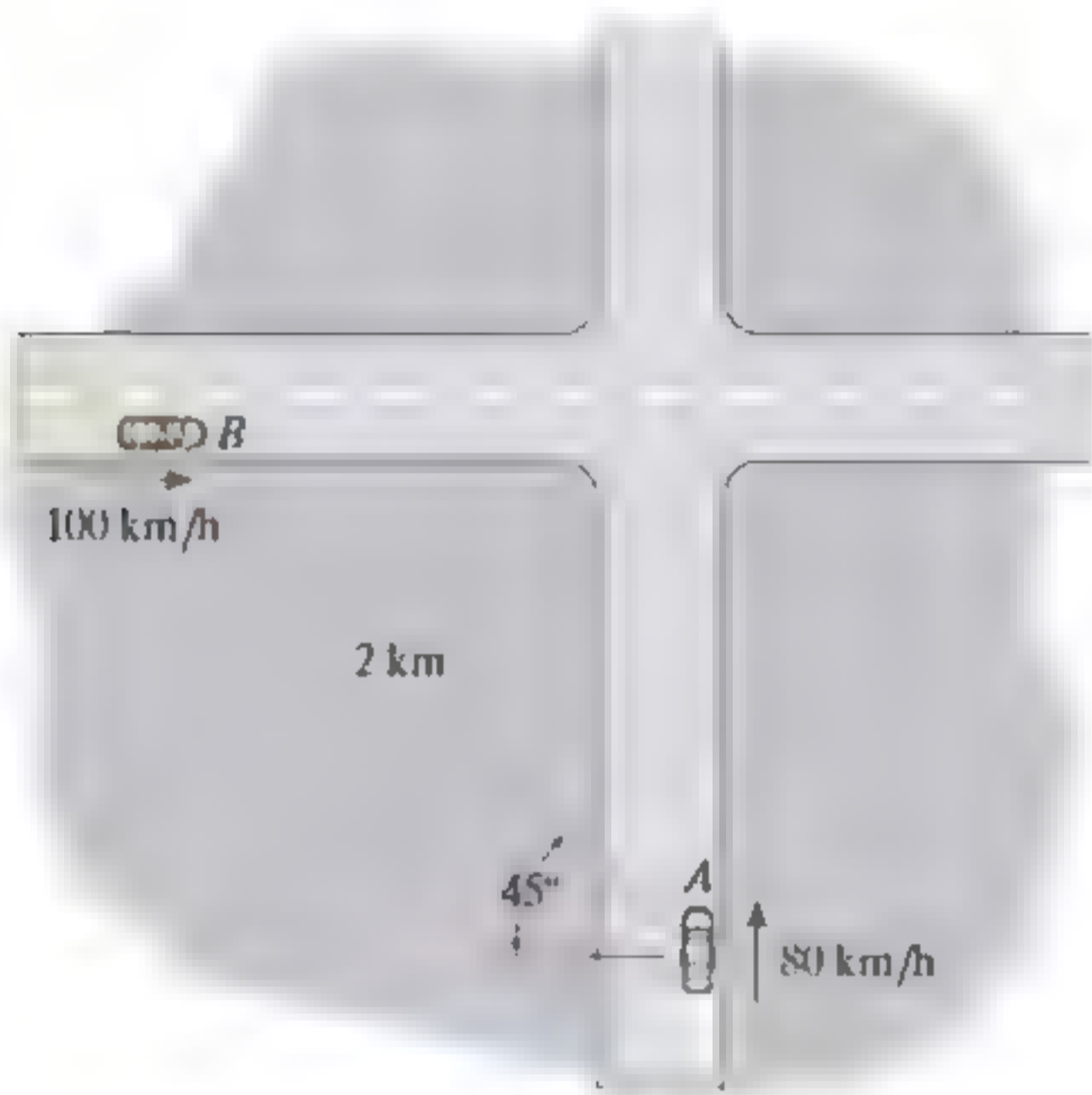
Prob. F12-43

**112-44.** Determine la velocidad del cilindro  $B$  si el cilindro  $A$  descende con una rapidez de  $v_A = 4 \text{ ft/s}$ .



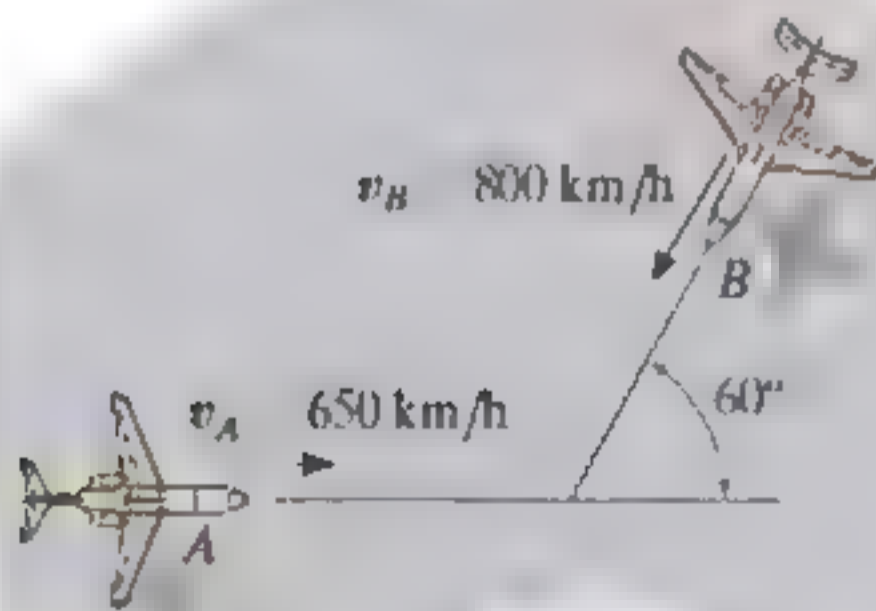
Prob. F12-44

**F12-45.** El automóvil  $A$  viaja a una rapidez constante de 80 km/h al norte, mientras que el automóvil  $B$  viaja a una rapidez constante de 100 km/h al este. Determine la velocidad relativa del automóvil  $B$  con respecto al automóvil  $A$ .



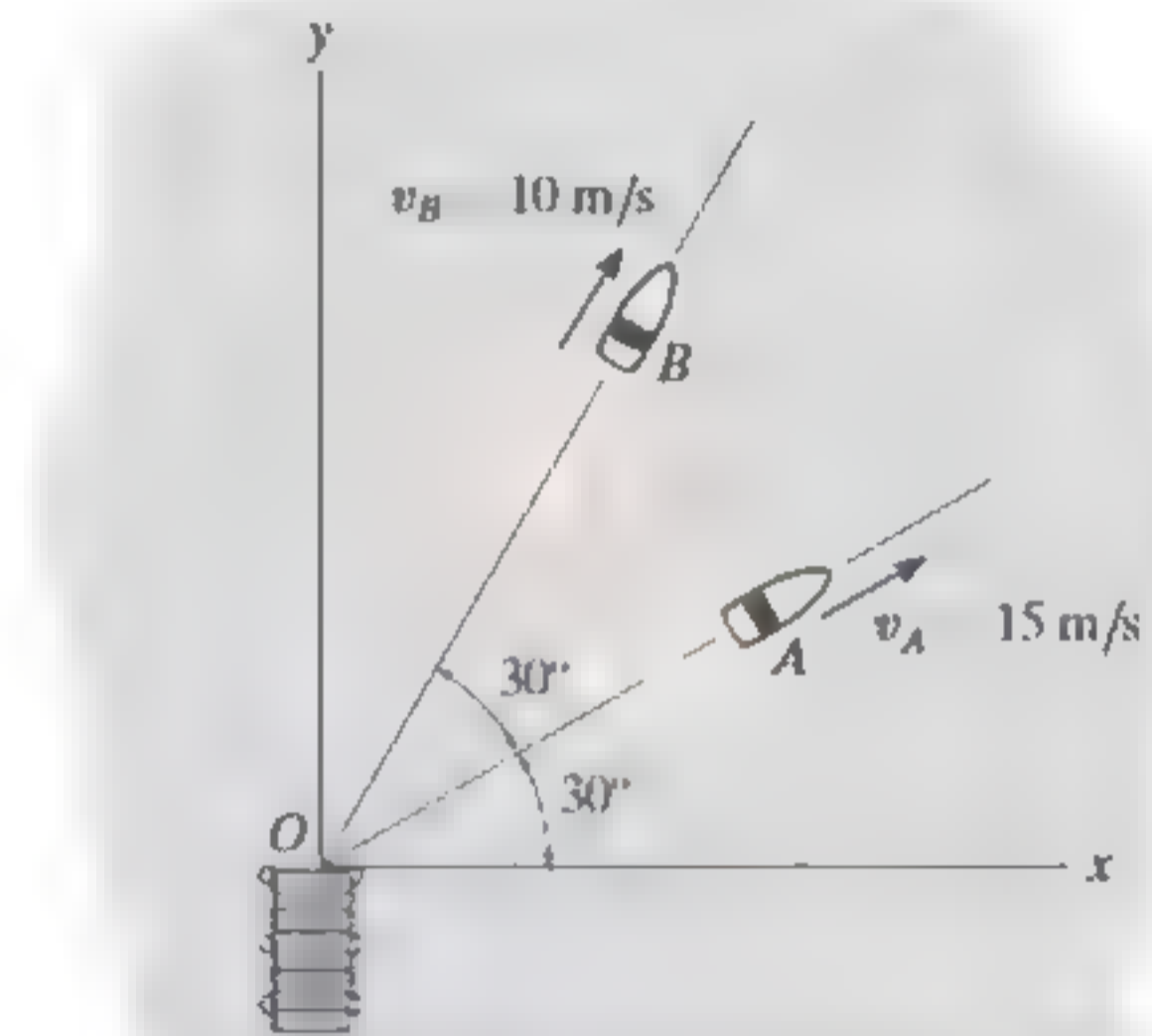
Prob. F12-45

**F12-46.** Dos aviones  $A$  y  $B$  vuelan a las velocidades constantes mostradas. Determine la magnitud y dirección de la velocidad relativa del avión  $B$  con respecto al avión  $A$ .



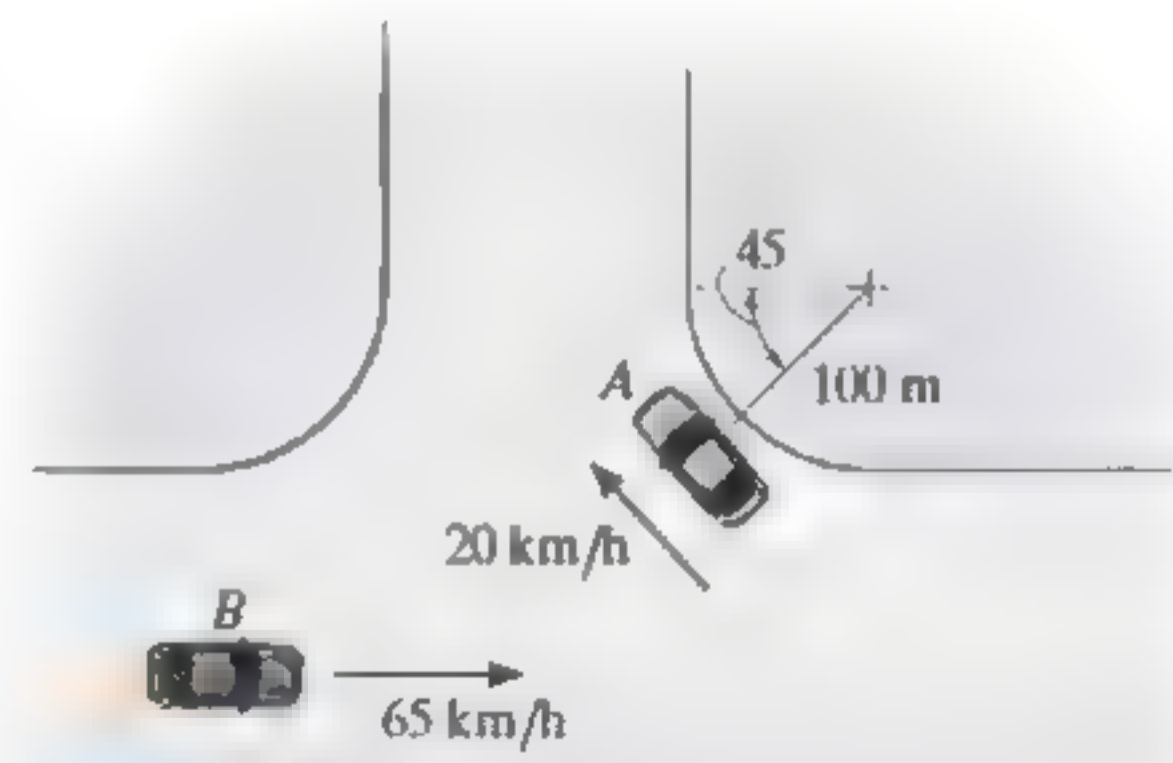
Prob. F12-46

**F12-47.** Los botes  $A$  y  $B$  navegan con una rapidez constante de  $v_A = 15$  m/s y  $v_B = 10$  m/s, respectivamente, cuando salen del muelle en  $O$  al mismo tiempo. Determine la distancia entre ambos cuando  $t = 4$  s.



Prob. F12-47

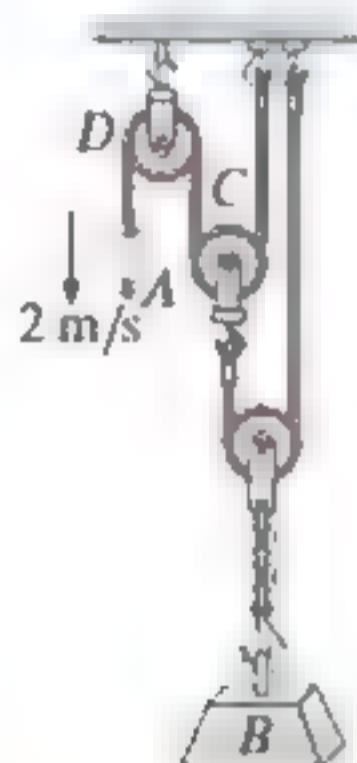
**F12-48.** En el instante que se muestra, los automóviles  $A$  y  $B$  viajan a la rapidez mostrada. Si  $B$  está acelerando a  $1200$  km/h<sup>2</sup> mientras que  $A$  mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y aceleración de  $A$  con respecto a  $B$ .



Prob. F12-48

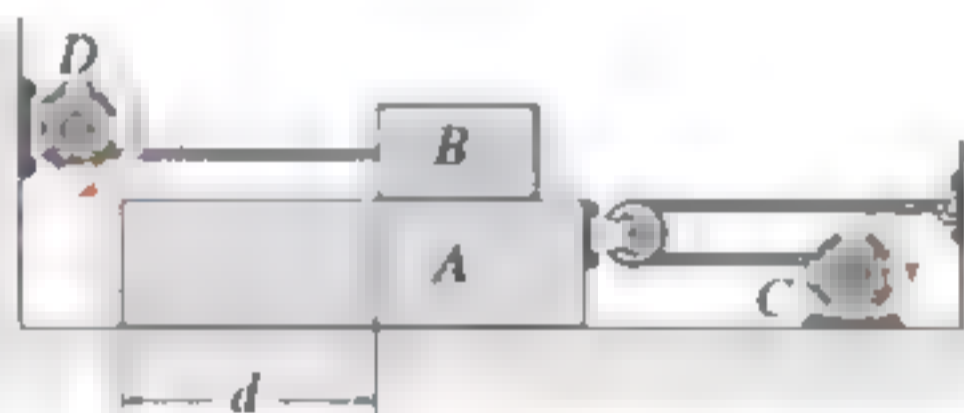
## PROBLEMAS

**12-195.** Si el extremo del cable en  $A$  se jala hacia abajo con una rapidez de  $2 \text{ m/s}$ , determine la rapidez a la cual se eleva el bloque  $B$ .



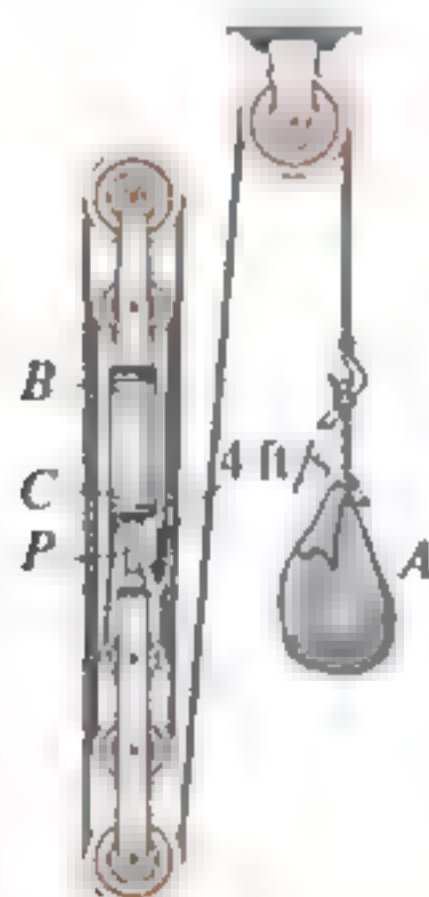
Prob. 12-195

**12-196.** El motor en  $C$  tira del cable con una aceleración  $a_C = (3t^2) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  está en segundos. El motor en  $D$  tira de su cable a  $a_D = 5 \text{ m/s}^2$ . Si ambos motores arrancan al mismo tiempo del reposo cuando  $d = 3 \text{ m}$ , determine (a) el tiempo requerido para que  $d = 0$ , y (b) las velocidades de los bloques  $A$  y  $B$  cuando esto ocurre.



Prob. 12-196

**12-197.** El arreglo de poleas que se ilustra en la figura está diseñado para elevar materiales. Si  $BC$  permanece fijo mientras que el émbolo  $P$  es empujado hacia abajo con una rapidez de  $4 \text{ ft/s}$ , determine la rapidez de la carga en  $A$ .



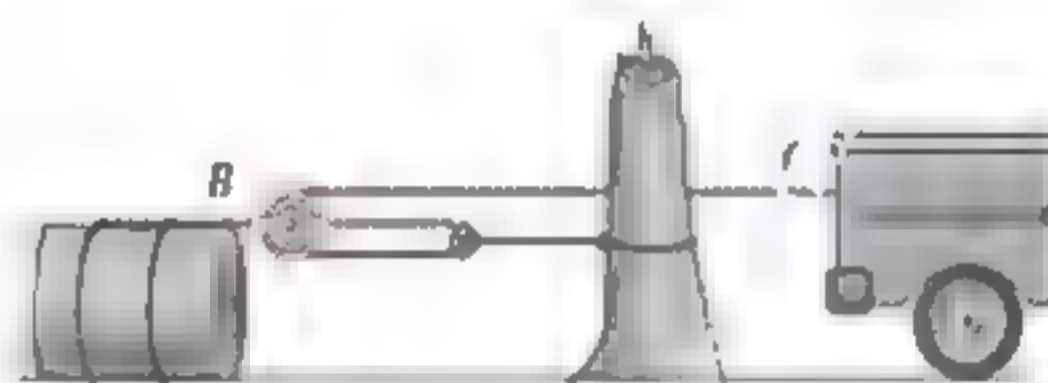
Prob. 12-197

**12-198.** Si el extremo del cable en  $A$  se jala hacia abajo con una rapidez de  $5 \text{ m/s}$ , determine la rapidez a la cual se eleva el bloque  $B$ .



Prob. 12-198

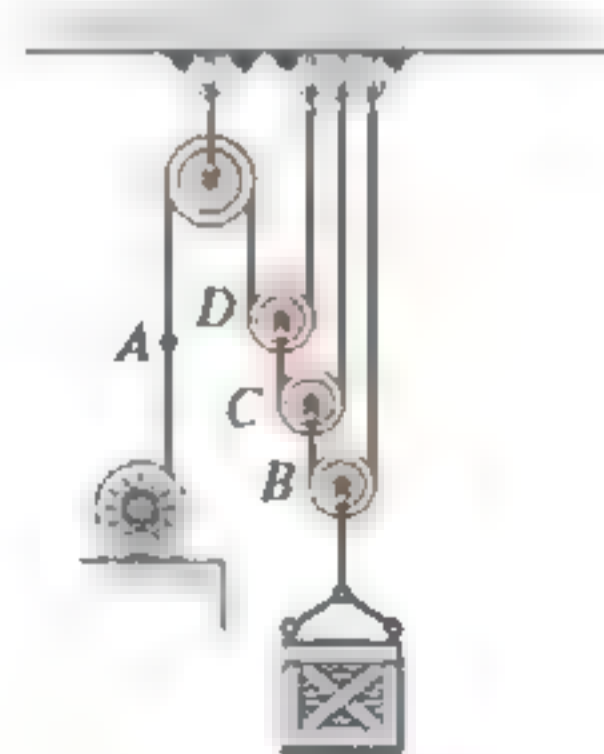
**12-199.** Determine el desplazamiento del tronco, si el camión en  $C$  tira del cable  $4 \text{ ft}$  a la derecha.



Prob. 12-199

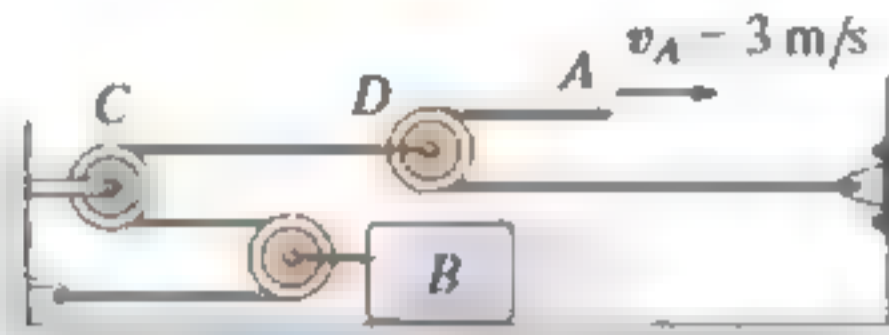
**\*12-200.** Determine la rapidez constante a la que se debe tirar del cable en  $A$  mediante el motor, con el fin de levantar  $6 \text{ m}$  la carga en  $1.5 \text{ s}$ .

**12-201.** A partir del reposo, el cable puede enrollarse en el tambor del motor a una rapidez de  $v_A = (3t^2) \text{ m/s}$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine el tiempo necesario para levantar  $7 \text{ m}$  la carga.



Probs. 12-200/201

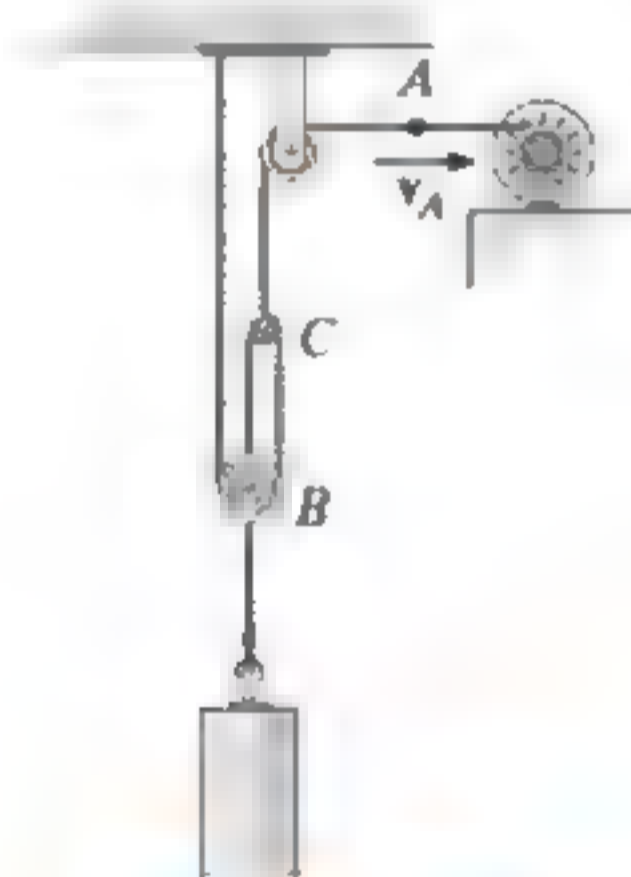
12-202. Si el extremo  $A$  del cable se está moviendo a  $v_A = 3 \text{ m/s}$ , determine la rapidez del bloque  $B$ .



Prob. 12-202

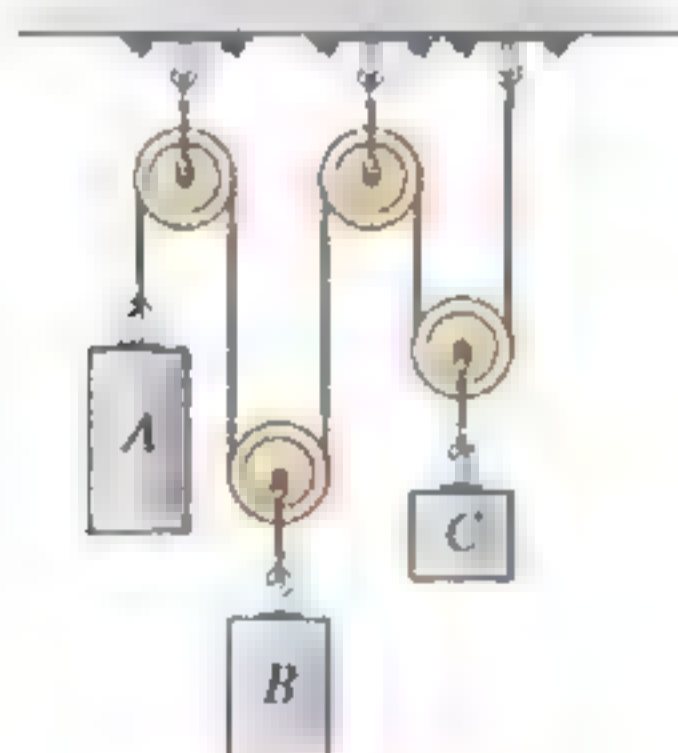
12-203. Determine el tiempo necesario para que la carga en  $B$  alcance una rapidez de  $10 \text{ m/s}$ , partiendo del reposo, si el cable se introduce en el motor con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$ .

\*12-204. El cable en  $A$  está se está jalando hacia el motor a  $v_A = 8 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad del bloque.



Prob. 12-204

12-205. Si el bloque  $A$  del sistema de poleas se mueve hacia abajo a  $6 \text{ ft/s}$  mientras que el bloque  $C$  se mueve hacia abajo a  $18 \text{ ft/s}$ , determine la velocidad relativa del bloque  $B$  con respecto a  $C$ .



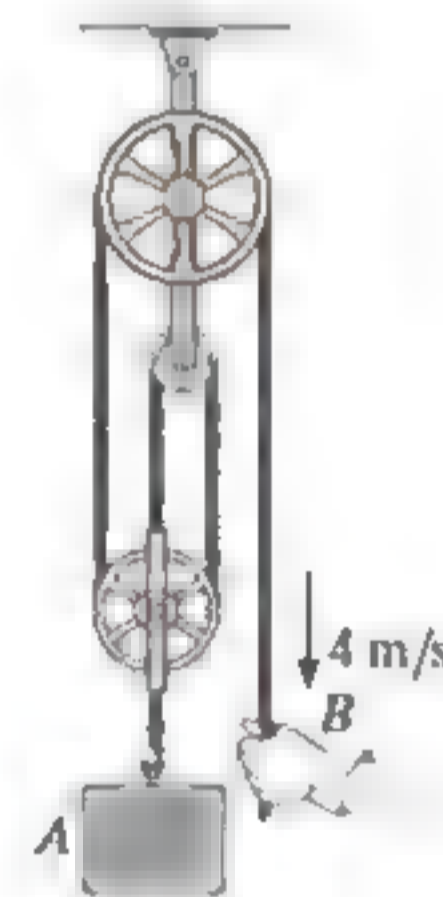
Prob. 12-205

12-206. Determine la rapidez del bloque en  $B$ .



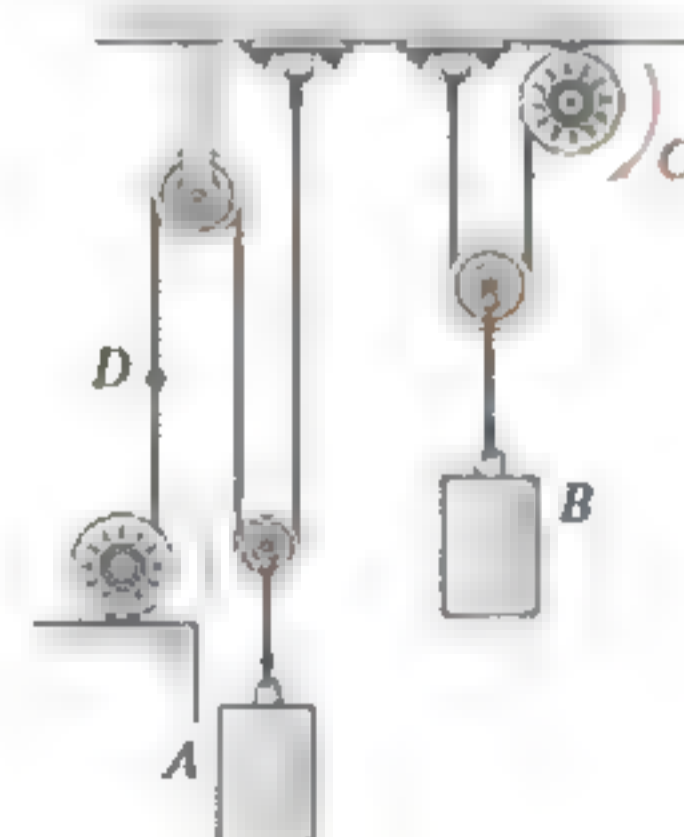
Prob. 12-206

12-207. Determine la rapidez del bloque  $A$  si el extremo de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de  $4 \text{ m/s}$ .



Prob. 12-207

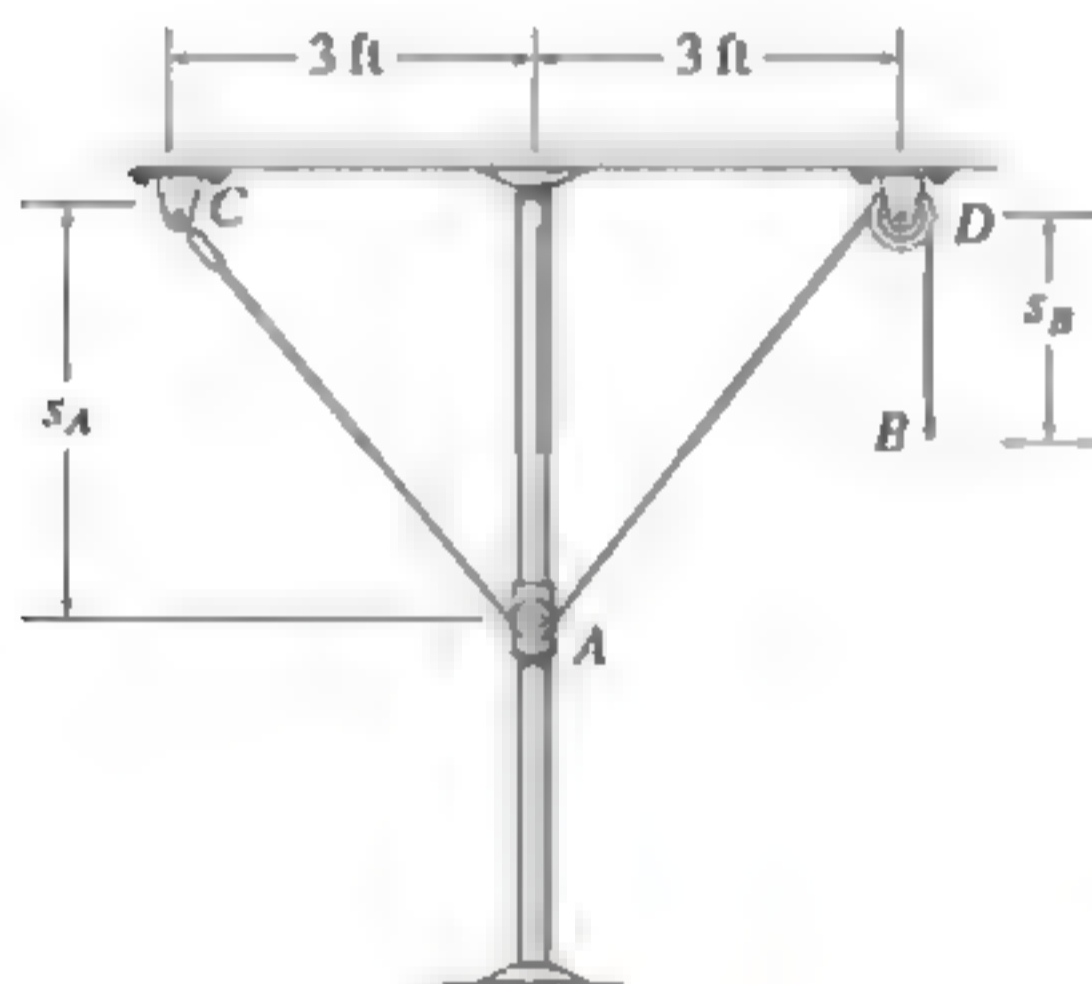
\*12-208. Un motor enrolla el cable en  $C$  con una velocidad constante de  $v_C = 4 \text{ m/s}$ . Otro motor enrolla el cable en  $D$  con una aceleración constante de  $a_D = 8 \text{ m/s}^2$ . Si  $v_D = 0$  cuando  $t = 0$ , determine (a) el tiempo necesario para que el bloque  $A$  se eleve  $3 \text{ m}$ , y (b) la velocidad relativa del bloque  $A$  con respecto al bloque  $B$  cuando esto sucede.



Prob. 12-208

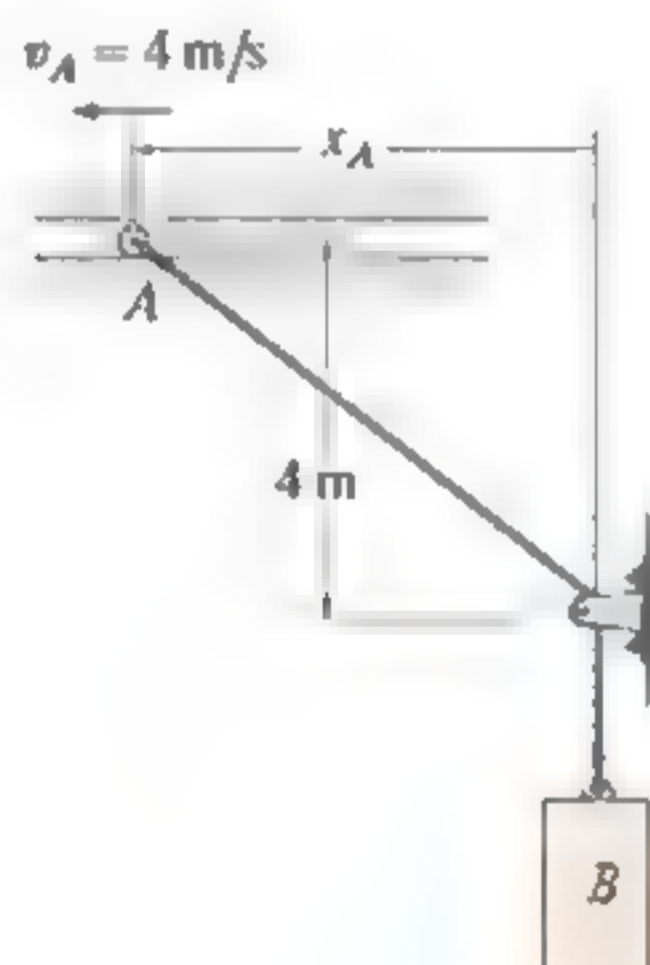
**12-209.** La cuerda está unida al pasador en  $C$  y pasa sobre las dos poleas en  $A$  y  $D$ . La polea en  $A$  está unida al collarín liso que viaja a lo largo de la varilla vertical. Determine la velocidad y la aceleración del extremo de la cuerda en  $B$ , si en el instante  $s_A = 4$  ft el collarín se mueve hacia arriba a 5 ft/s, y está disminuyendo a 2 ft/s<sup>2</sup>.

**12-210.** La cuerda de 16 ft de longitud está unida al pasador en  $C$  y pasa sobre las dos poleas en  $A$  y  $D$ . La polea en  $A$  está unida al collarín liso que viaja a lo largo de la varilla vertical. Cuando  $s_B = 6$  ft, el extremo de la cuerda en  $B$  se jala hacia abajo con una velocidad de 4 ft/s y se le da una aceleración de 3 ft/s<sup>2</sup>. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en ese instante.



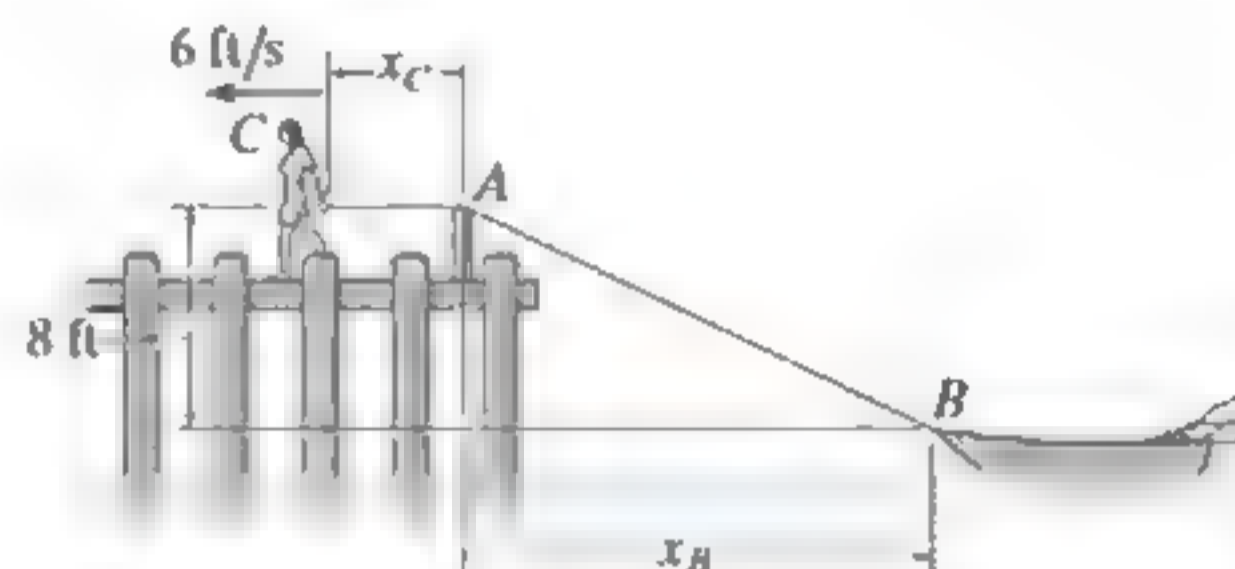
Probs. 12-209/210

**12-211.** El rodillo en  $A$  se mueve con una velocidad de  $v_A = 4$  m/s y tiene una aceleración de  $a_A = 2$  m/s<sup>2</sup> cuando  $x_A = 3$  m. Determine la velocidad y la aceleración del bloque  $B$  en ese instante.



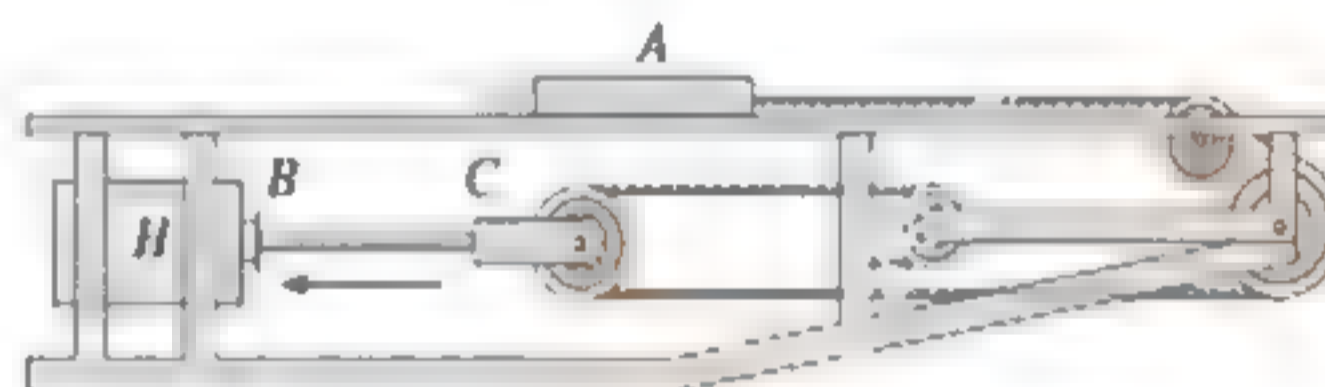
Prob. 12-211

**\*12-212.** La joven en  $C$  se coloca cerca del borde del muelle y tira de la cuerda *horizontalmente* a una rapidez constante de 6 ft/s. Determine qué tan rápido se acerca el barco al muelle en el instante en que la longitud de la cuerda  $AB$  es de 50 ft.



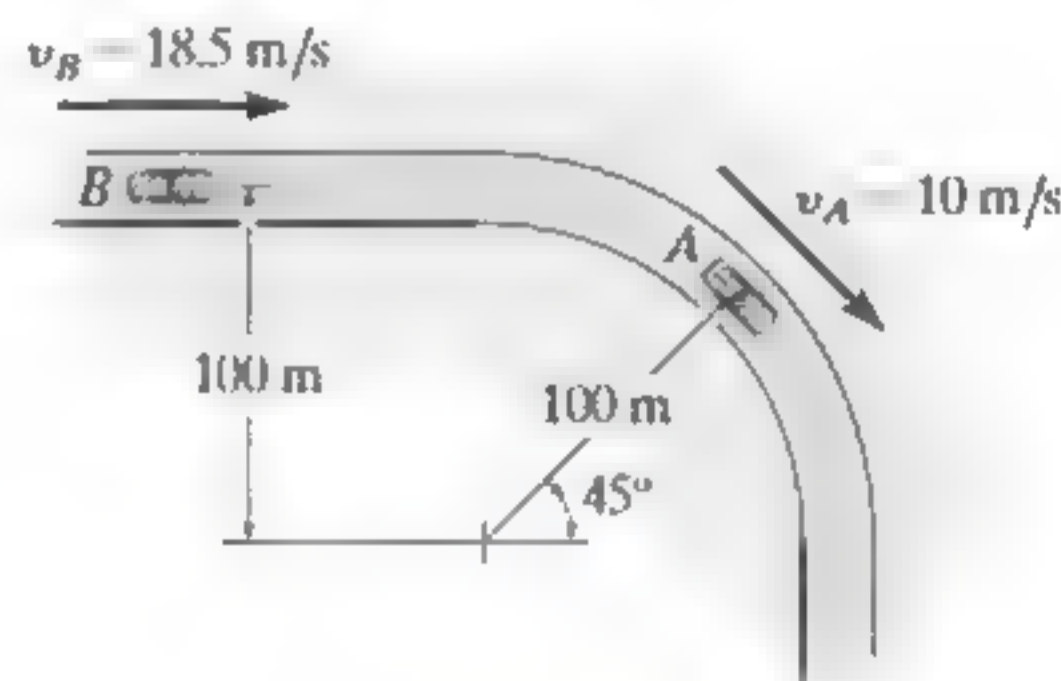
Prob. 12-212

**12-213.** Si el cilindro hidráulico  $H$  jala hacia dentro la varilla  $BC$  a 2 ft/s, determine la rapidez de la corredera  $A$ .



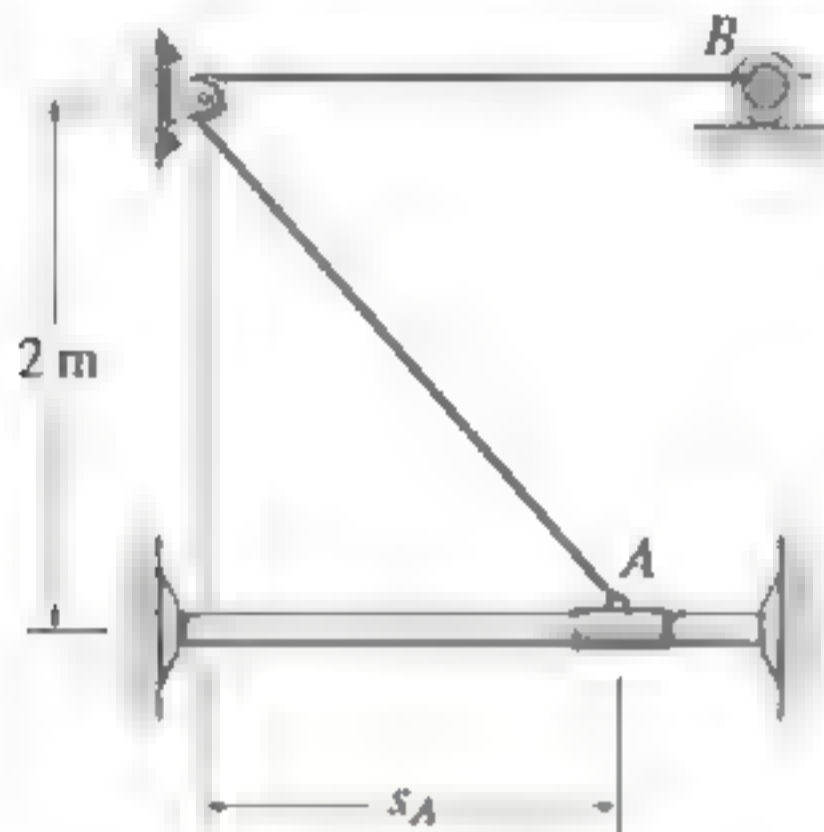
Prob. 12-213

**12-214.** En el instante mostrado, el automóvil en  $A$  se desplaza a 10 m/s alrededor de la curva, mientras aumenta su rapidez a 5 m/s<sup>2</sup>. El automóvil en  $B$  se desplaza a 18.5 m/s a lo largo de la recta y aumenta su rapidez a 2 m/s<sup>2</sup>. Determine la velocidad relativa y la aceleración relativa de  $A$  con respecto a  $B$  en ese instante.



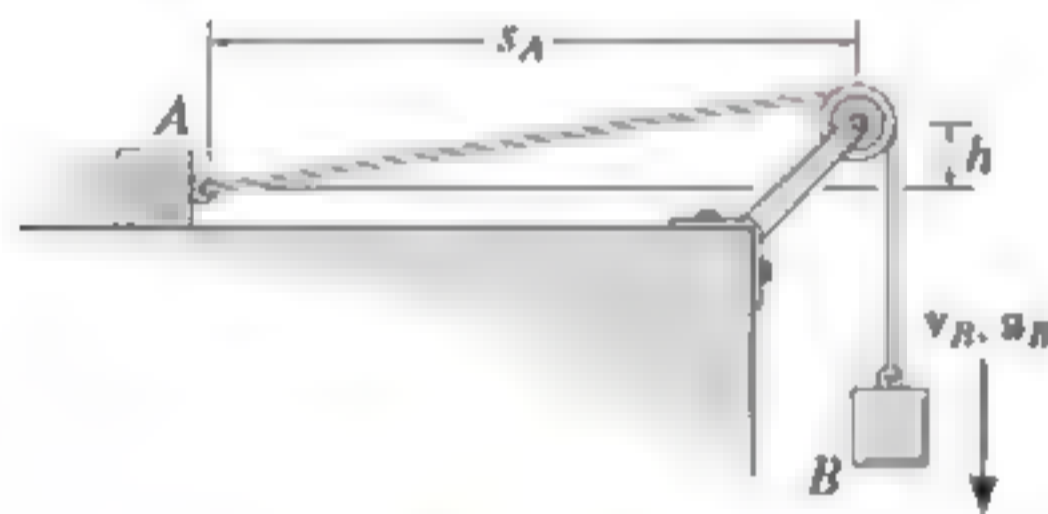
Prob. 12-214

**12-215.** El motor enrolla la cuerda en  $B$  con una aceleración de  $a_B = 2 \text{ m/s}^2$ . Cuando  $s_A = 1.5 \text{ m}$ ,  $v_B = 6 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



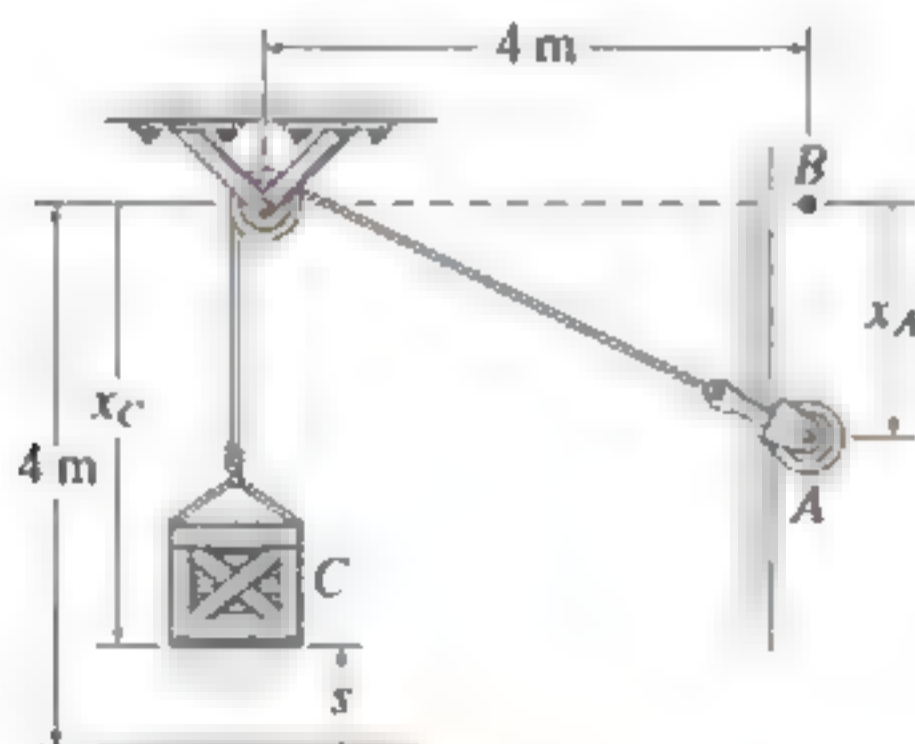
Prob. 12-215

**\*12-216.** Si el bloque  $B$  se mueve hacia abajo con una velocidad  $v_B$  y tiene una aceleración  $a_B$ , determine la velocidad y la aceleración del bloque  $A$  en función de los parámetros mostrados.



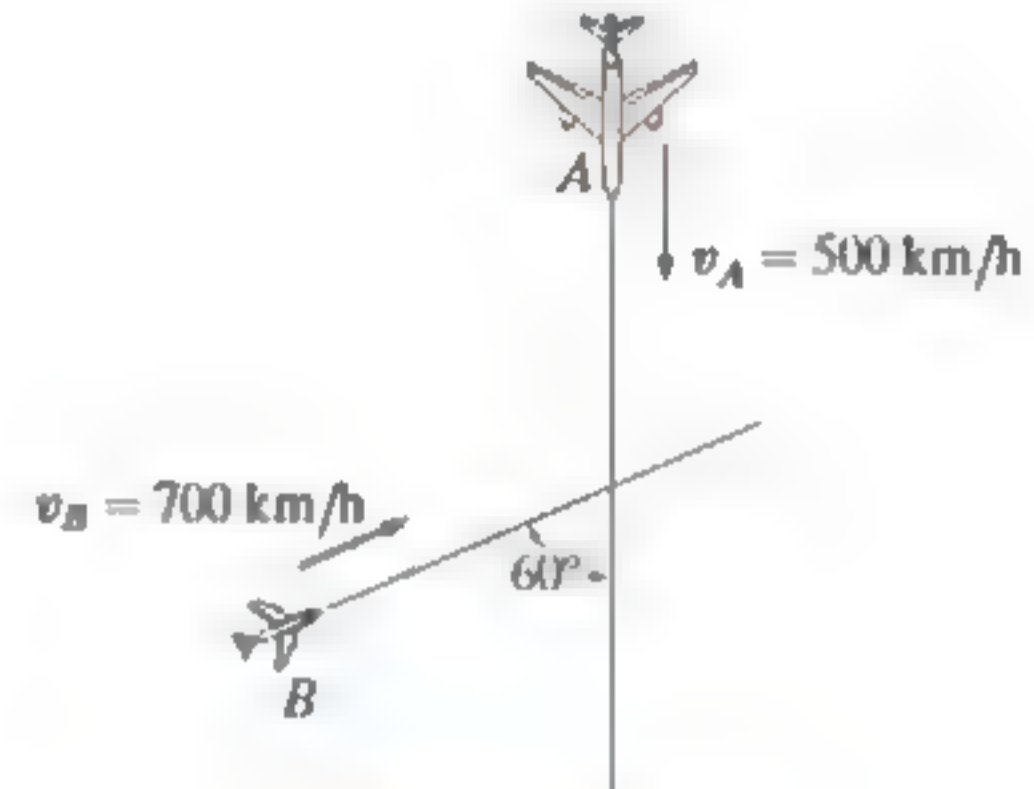
Prob. 12-216

**12-217.** El embalaje  $C$  se eleva al mover el rodillo en  $A$  hacia abajo con una rapidez constante de  $v_A = 2 \text{ m/s}$  a lo largo de la guía. Determine la velocidad y la aceleración del embalaje en el instante  $s = 1 \text{ m}$ . Cuando el rodillo está en  $B$ , el embalaje descansa en el suelo. Para realizar los cálculos, desprecie el tamaño de la polea. *Sugerencia:* Relacione las coordenadas  $x_C$  y  $x_A$  usando la geometría del problema; luego, obtenga la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo.



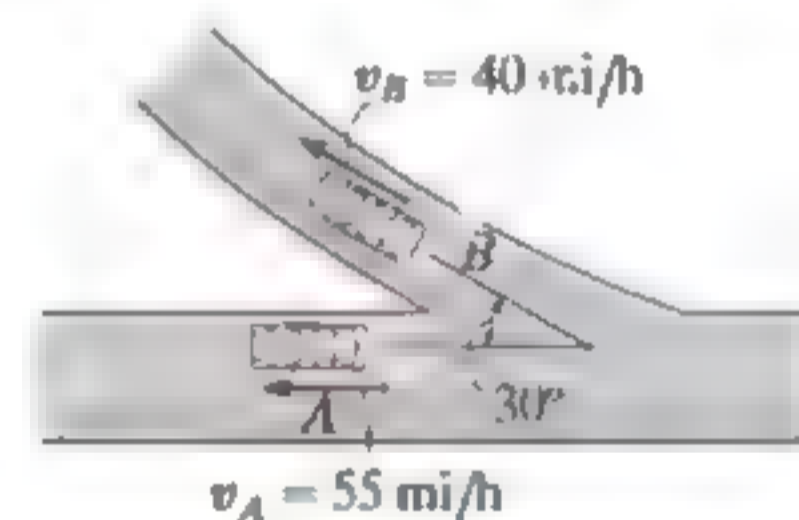
Prob. 12-217

**12-218.** Dos aviones,  $A$  y  $B$ , vuelan a la misma altitud. Si sus velocidades son  $v_A = 500 \text{ km/h}$  y  $v_B = 700 \text{ km/h}$ , de modo que el ángulo entre sus trayectorias en línea recta es  $\theta = 60^\circ$ , determine la velocidad del avión  $B$  con respecto al avión  $A$ .



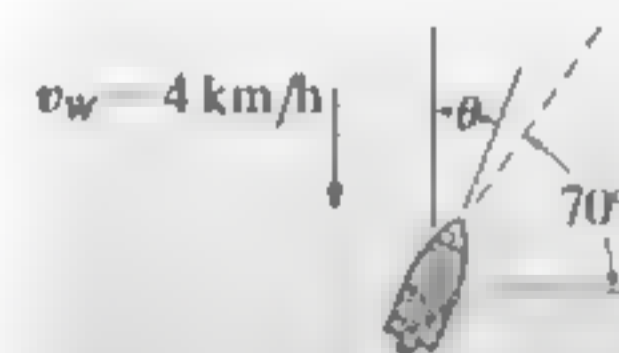
Prob. 12-218

**12-219.** En el instante mostrado, los automóviles  $A$  y  $B$  viajan a una rapidez de  $55 \text{ mi/h}$  y  $40 \text{ mi/h}$ , respectivamente. Si  $B$  incrementa su rapidez a  $1200 \text{ mi/h}^2$ , mientras que  $A$  mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y la aceleración de  $B$  con respecto a  $A$ . El auto  $B$  se mueve a lo largo de una curva que tiene un radio de curvatura de  $0.5 \text{ mi}$ .



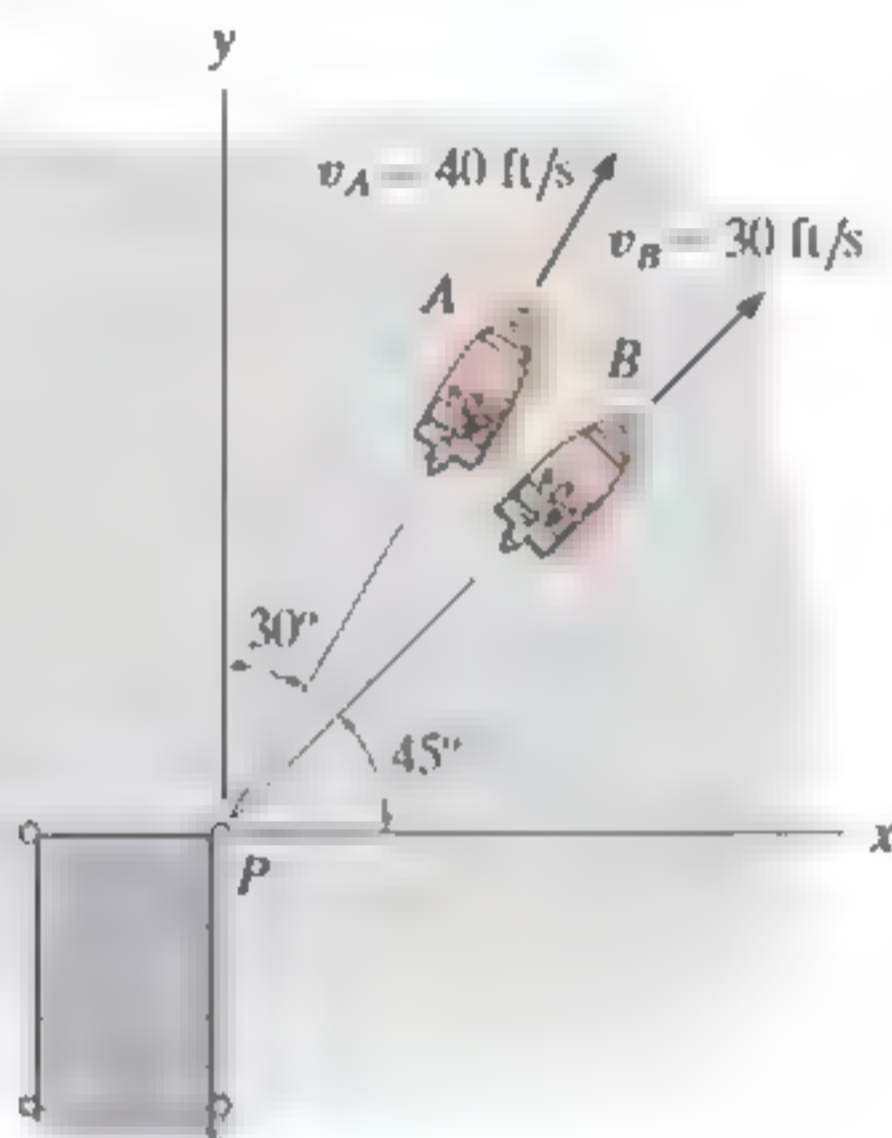
Prob. 12-219

**\*12-220.** La lancha puede viajar con una rapidez de  $16 \text{ km/h}$  en aguas tranquilas. El punto de destino se encuentra a lo largo de la línea punteada. Si el agua se mueve a  $4 \text{ km/h}$ , determine el ángulo de navegación  $\theta$  al que la lancha debe viajar para mantener su trayectoria.



Prob. 12-220

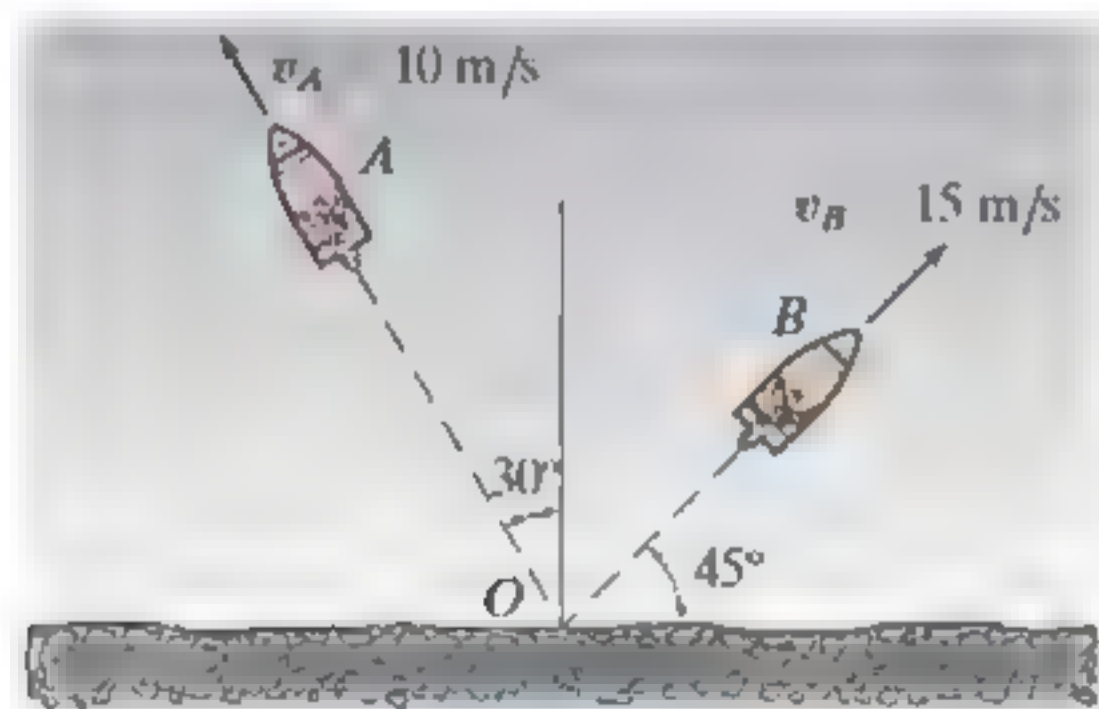
**12-221.** Dos botes salen del muelle  $P$  al mismo tiempo y viajan en las direcciones mostradas. Si  $v_A = 40$  ft/s y  $v_B = 30$  ft/s, determine la velocidad del bote  $A$  relativa al bote  $B$ . ¿Cuánto tiempo después de dejar el muelle los botes estarán separados una distancia de 1500 ft?



Prob. 12-221

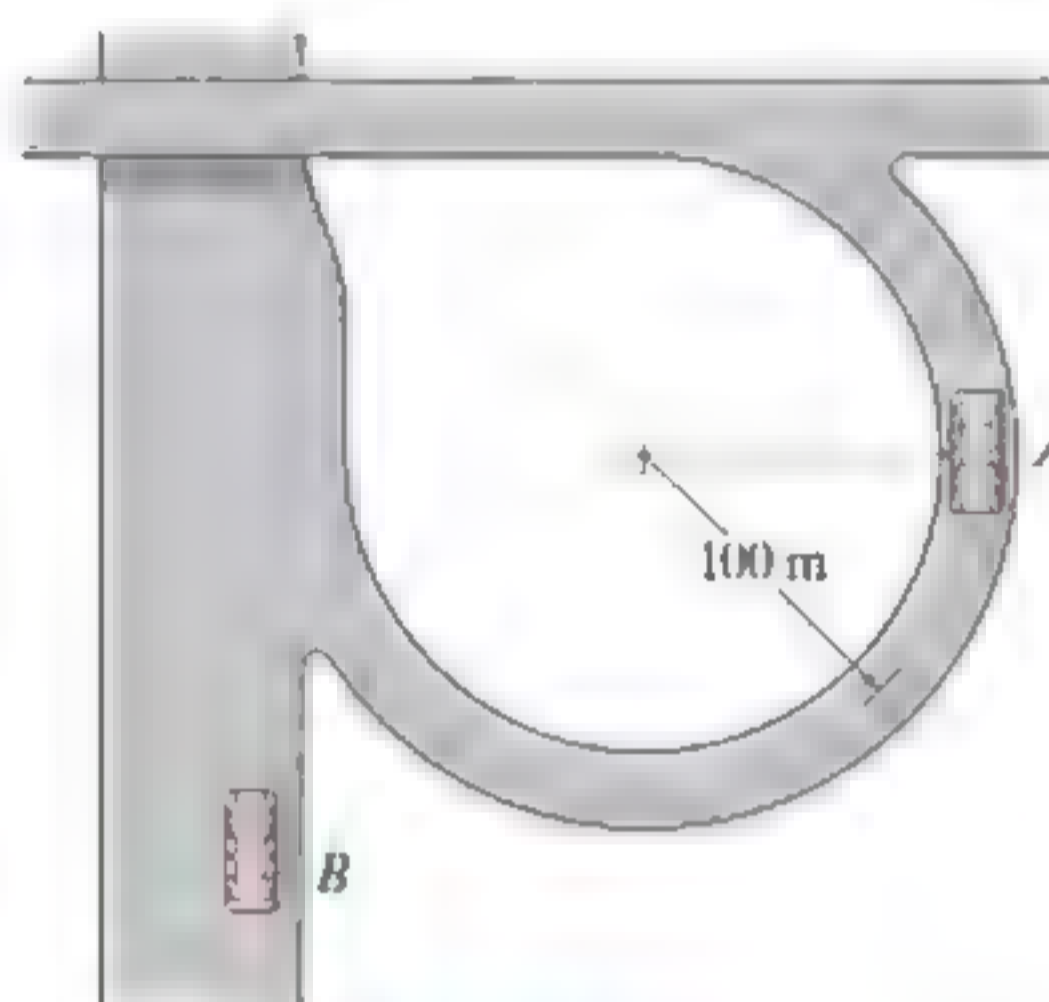
**12-222.** Un automóvil viaja al norte por una carretera recta a 50 km/h. Un instrumento en el automóvil indica que el viento viene del este. Si la rapidez del auto es de 80 km/h, el instrumento indica que el viento viene del noreste. Determine la rapidez y la dirección del viento.

**12-223.** Dos botes salen de la orilla de la playa al mismo tiempo y viajan en las direcciones mostradas. Si  $v_A = 10$  m/s y  $v_B = 15$  m/s, determine la velocidad del bote  $A$  con respecto al bote  $B$ . ¿Cuánto tiempo después de dejar la orilla los botes estarán separados una distancia de 600 m?



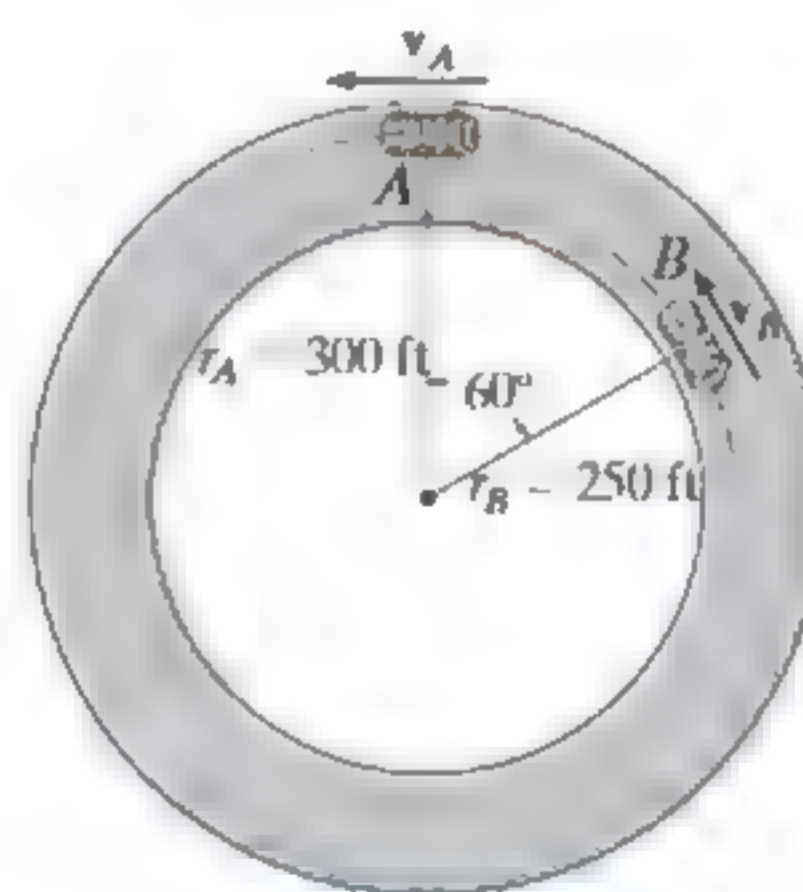
Prob. 12-223

**\*12-224.** En el instante mostrado, el automóvil  $A$  tiene una rapidez de 20 km/h, que se está incrementando a razón de  $300 \text{ km/h}^2$  cuando el vehículo entra en la autopista. En el mismo instante, el automóvil  $B$  está desacelerando a  $250 \text{ km/h}^2$  mientras viaja hacia adelante a 100 km/h. Determine la velocidad y la aceleración de  $A$  con respecto a  $B$ .



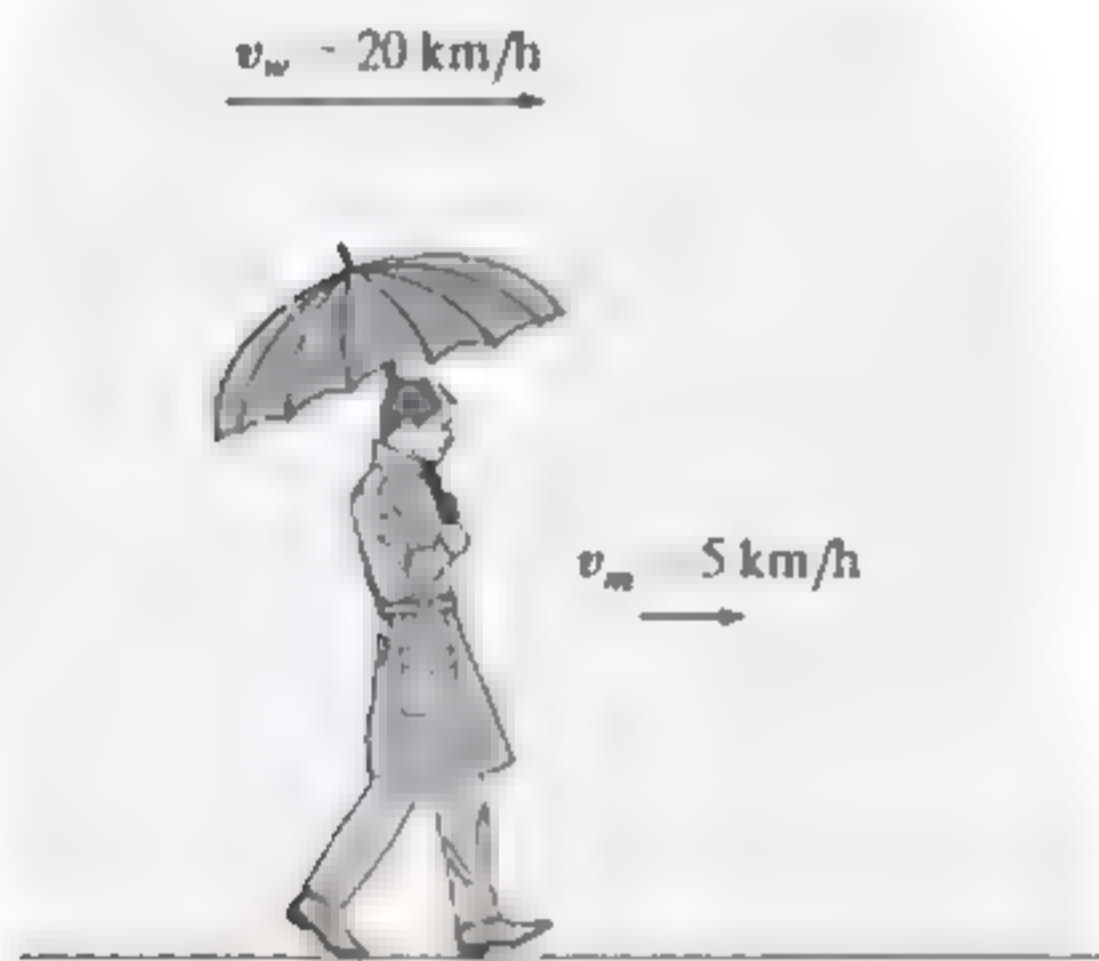
Prob. 12-224

**12-225.** Los automóviles  $A$  y  $B$  viajan alrededor de la pista de carreras circular. En el instante indicado,  $A$  tiene una rapidez de 90 ft/s y está aumentando su rapidez a razón de  $15 \text{ ft/s}^2$ , mientras que  $B$  tiene una rapidez de 105 ft/s y está disminuyendo su rapidez a  $25 \text{ ft/s}^2$ . Determine la velocidad relativa y la aceleración relativa del automóvil  $A$  con respecto al automóvil  $B$  en este instante.



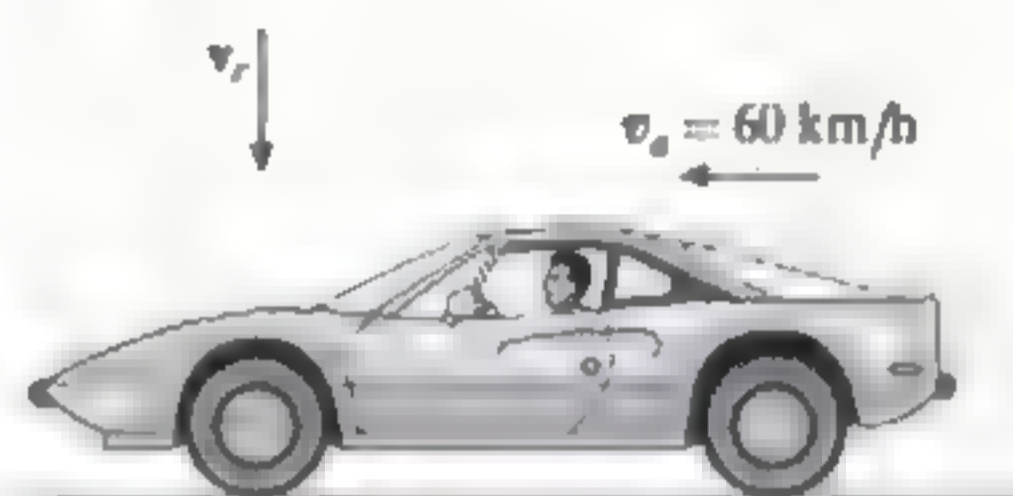
Prob. 12-225

**12-226.** Un hombre camina a 5 km/h en la dirección del viento de 20 km/h. Si las gotas de lluvia caen verticalmente a 7 km/h en *aire tranquilo*, determine la dirección en la cual las gotas parecen caer con respecto al hombre.



Prob. 12-226

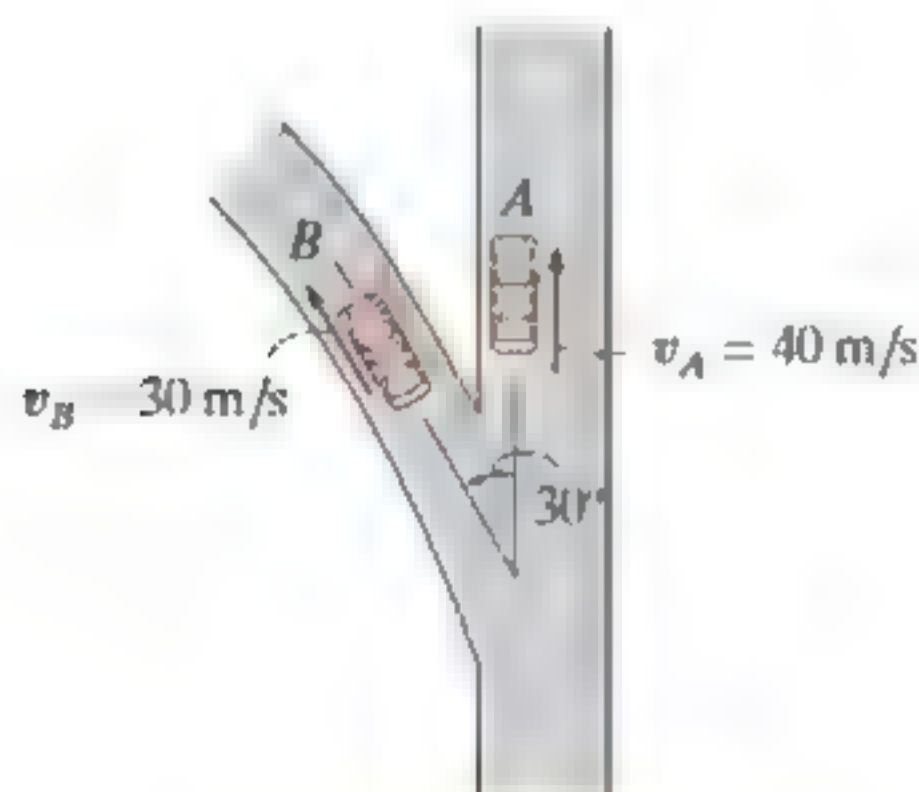
**12-229.** Un pasajero en un automóvil observa que las gotas de agua forman un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal conforme el automóvil se desplaza hacia adelante con una rapidez de 60 km/h. Calcule la velocidad terminal (constante)  $v_r$  de la lluvia, si se supone que ésta cae verticalmente.



Prob. 12-229

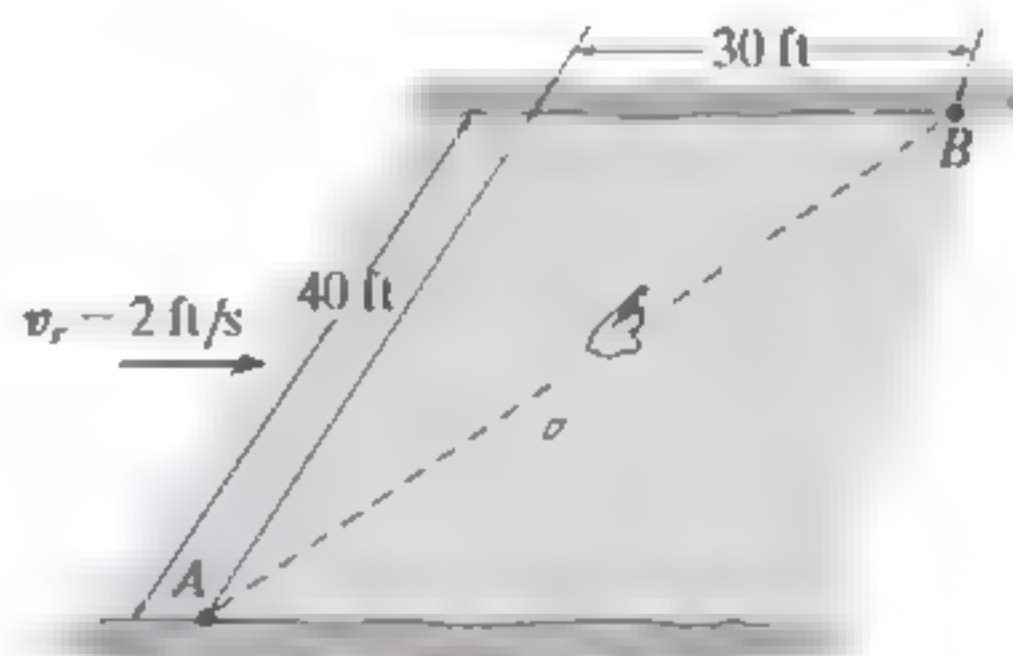
**12-227.** En el instante mostrado, los automóviles *A* y *B* están viajando a velocidades de 40 m/s y 30 m/s, respectivamente. Si *B* aumenta su velocidad a  $2 \text{ m/s}^2$ , en tanto que *A* mantiene una velocidad constante, determine la velocidad y la aceleración de *B* con respecto a *A*. El radio de curvatura en *B* es  $\rho_B = 200 \text{ m}$ .

**\*12-228.** En el instante mostrado, los automóviles *A* y *B* están viajando a velocidades de 40 m/s y 30 m/s, respectivamente. Si *A* aumenta su rapidez a  $4 \text{ m/s}^2$ , mientras que la rapidez de *B* disminuye a  $3 \text{ m/s}^2$ , determine la velocidad y la aceleración de *B* con respecto a *A*. El radio de curvatura en *B* es  $\rho_B = 200 \text{ m}$ .



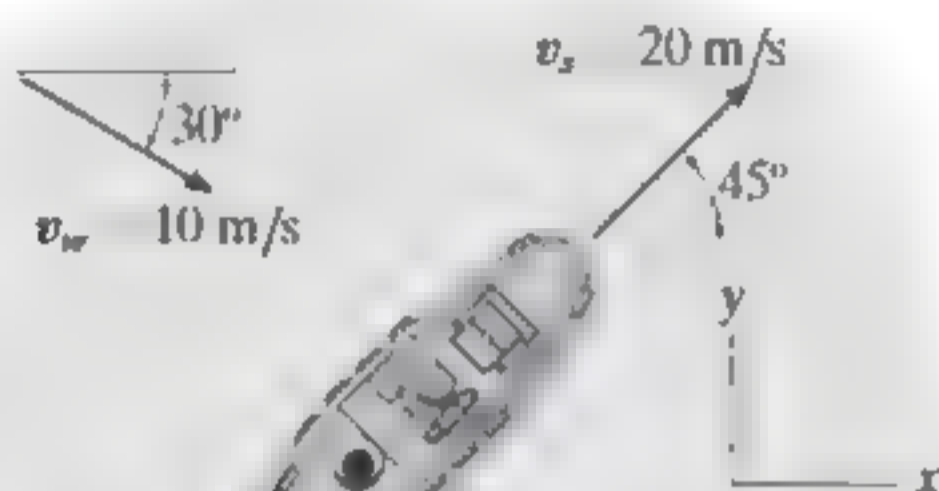
Probs. 12-227/228

**12-230.** Un hombre puede nadar a 4 ft/s en aguas tranquilas. Desea cruzar el río de 40 ft de ancho hasta el punto *B*, que está 30 ft aguas abajo. Si el río fluye a una velocidad de 2 ft/s, determine la rapidez del hombre y el tiempo necesario para hacer la travesía. *Nota:* Mientras está en el agua, el hombre no debe dirigirse directamente hacia el punto *B* para llegar ahí. ¿Por qué?



Prob. 12-230

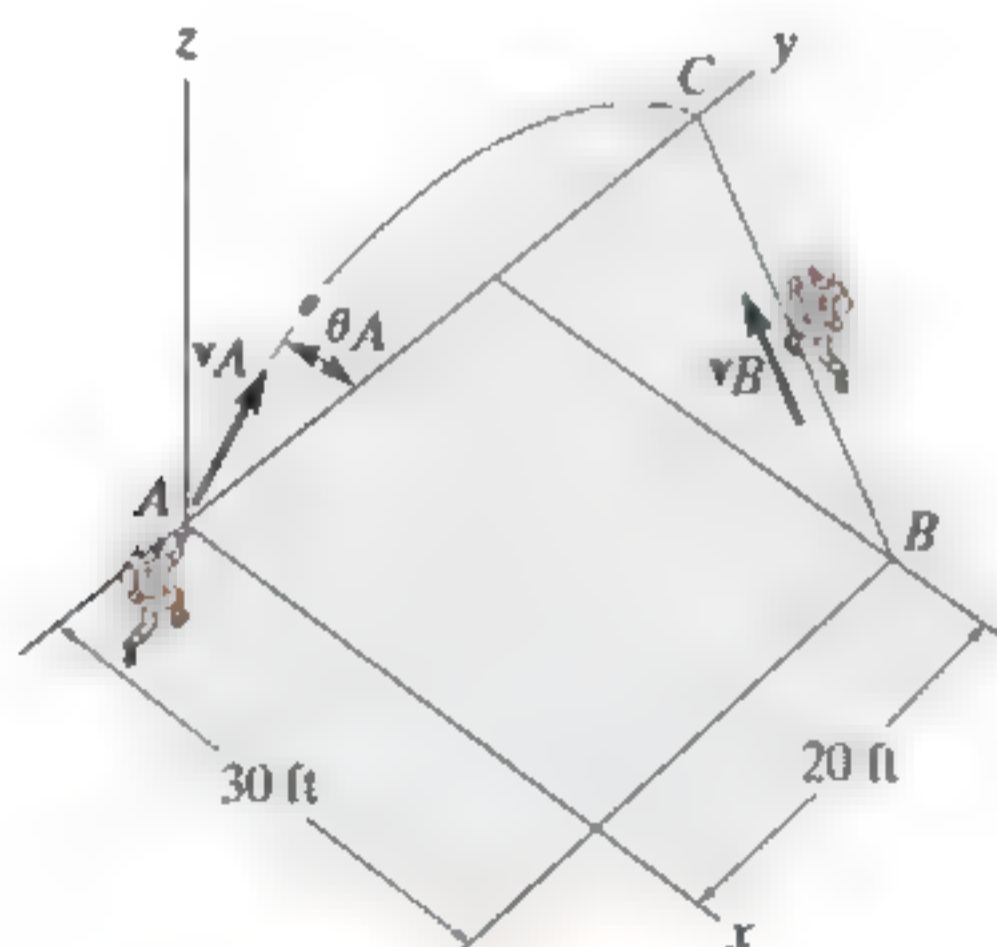
**12-231.** El barco navega a una rapidez constante de  $v_s = 20$  m/s y el viento sopla a una rapidez de  $v_w = 10$  m/s, como se ilustra. Determine la magnitud y la dirección de la componente horizontal de la velocidad del humo que sale de la chimenea, observado por un pasajero en el barco.



Prob. 12-231

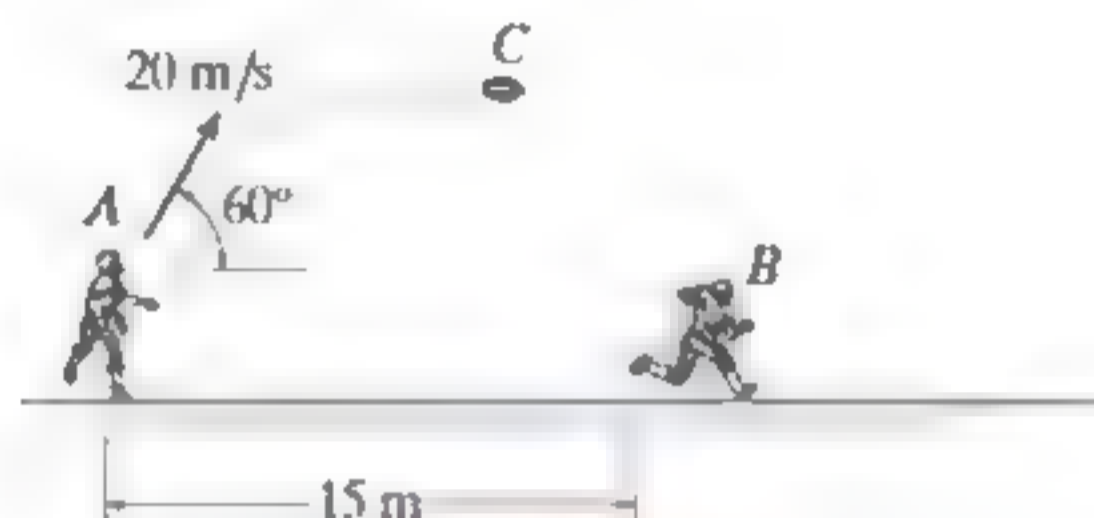
**\*12-232.** El jugador de fútbol americano en  $A$  lanza el balón en el plano  $y-z$  con una rapidez  $v_A = 50$  ft/s y a un ángulo  $\theta_A = 60^\circ$  con respecto a la horizontal. En el instante en que se lanza el balón, el jugador en  $B$  está corriendo con rapidez constante a lo largo de la línea  $BC$  para atraparlo. Determine esta rapidez,  $v_B$ , si el balón es atrapado a la misma altura desde la que se lanzó.

**12-233.** El jugador de fútbol americano en  $A$  lanza el balón en el plano  $y-z$  con una rapidez  $v_A = 50$  ft/s y a un ángulo  $\theta_A = 60^\circ$  con respecto a la horizontal. En el instante en que se lanza el balón, el jugador en  $B$  está corriendo con rapidez constante de  $v_B = 23$  ft/s a lo largo de la línea  $BC$ . Determine si puede alcanzar el punto  $C$ , que tiene la misma altura que  $A$ , antes de que el balón llegue ahí.



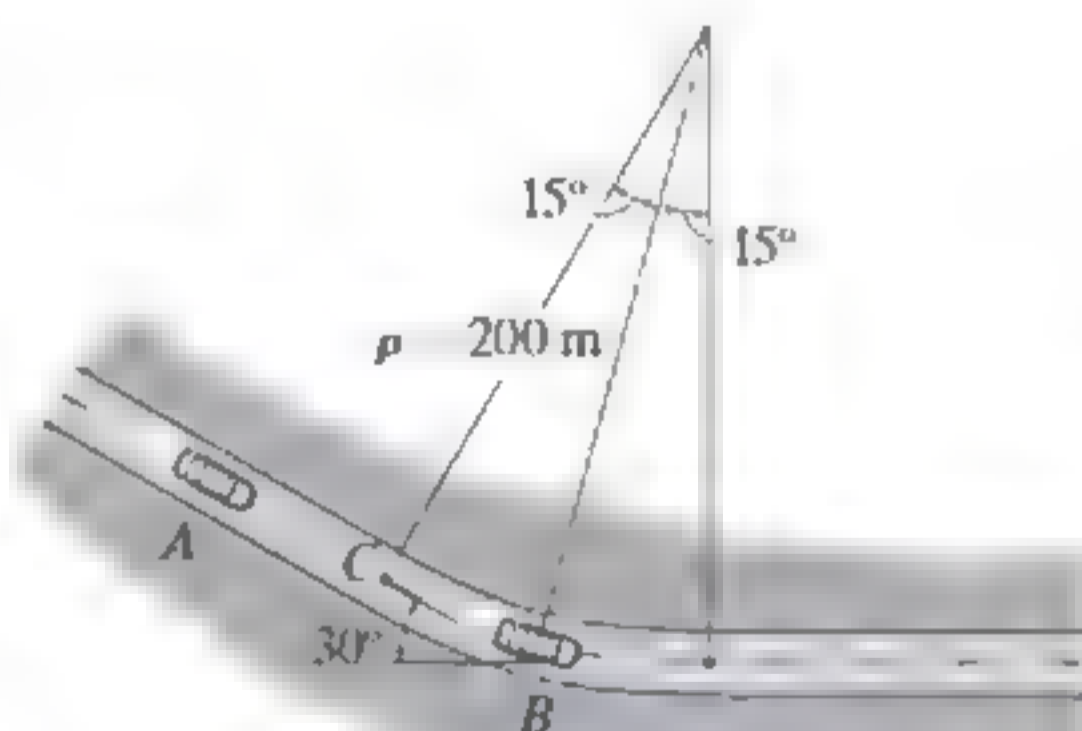
Probs. 12-232/233

**12-234.** En un instante dado el jugador de fútbol americano en  $A$  lanza un balón  $C$  con una velocidad de 20 m/s en la dirección indicada. Determine la rapidez constante a la que el jugador en  $B$  debe correr, para atrapar el balón a la misma altura a la que fue lanzado. Además, calcule la velocidad relativa y la aceleración relativa del balón con respecto a  $B$ , en el instante en que se hace la atrapada. El jugador  $B$  está a 15 m de  $A$  cuando  $A$  comienza a lanzar el balón.



Prob. 12-234

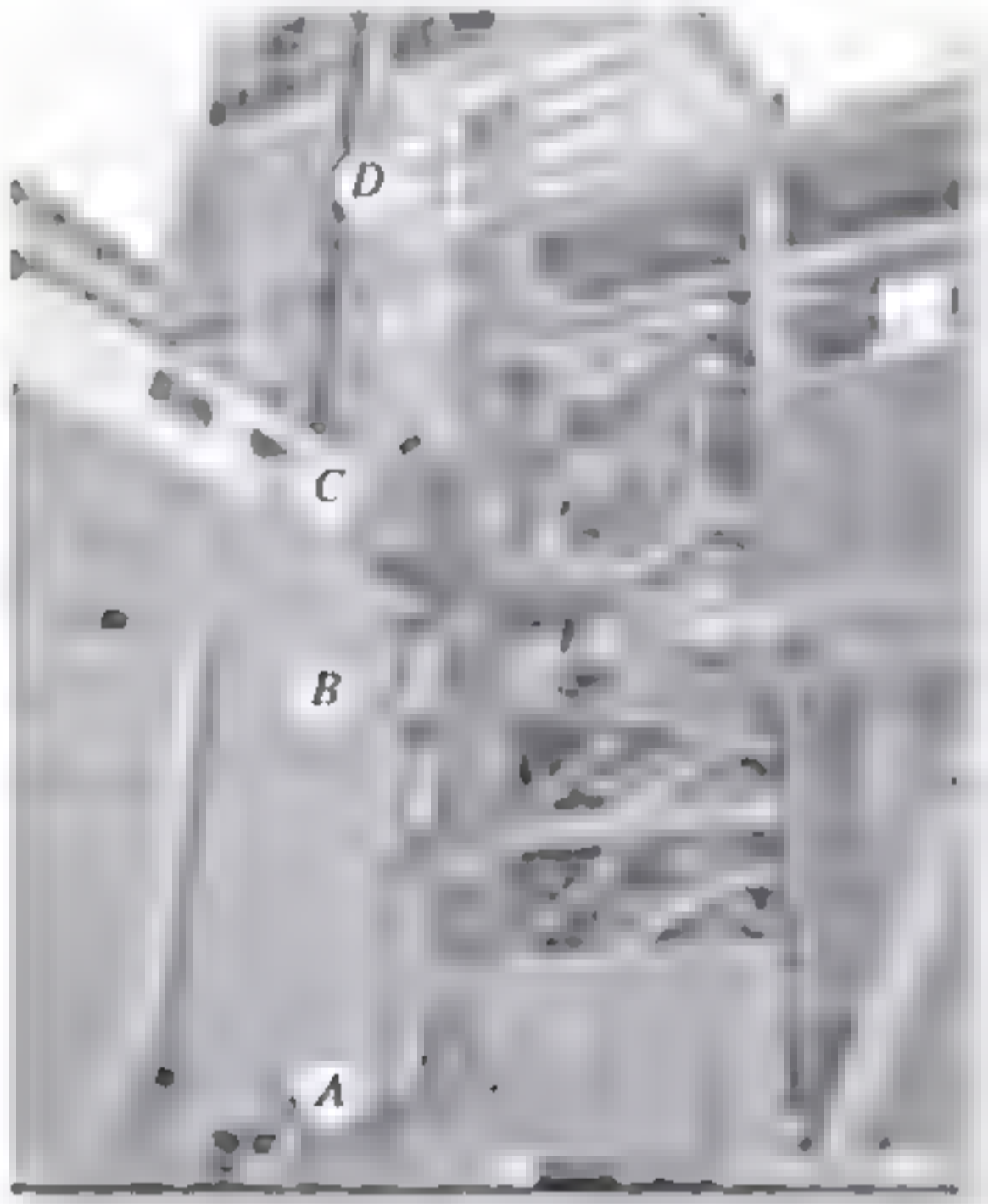
**12-235.** En el instante mostrado, el automóvil  $A$  viaja a lo largo del tramo recto de la carretera con una rapidez de 25 m/s. En ese mismo instante, el automóvil  $B$  viaja a lo largo del tramo circular de la carretera con una rapidez de 15 m/s. Determine la velocidad del automóvil  $B$  con respecto al automóvil  $A$ .



Prob. 12-235

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**C12-1.** Si usted mide el tiempo que le lleva al elevador de construcción ir de  $A$  a  $B$ , luego de  $B$  a  $C$  y después de  $C$  a  $D$ , y también conoce la distancia entre cada uno de los puntos, ¿cómo determinaría la velocidad promedio y la aceleración promedio del elevador al ascender de  $A$  a  $D$ ? Use valores numéricos para explicar cómo se puede hacer esto.



**Prob. C12-1** (© R. C. Hibbeler)

**C12-2.** Si el aspersor en  $A$  está a 1 m del suelo, ponga a escala las medidas necesarias tomadas de la fotografía para determinar la velocidad aproximada del chorro de agua conforme sale de la boquilla del aspersor.



**Prob. C12-2** (© R. C. Hibbeler)

**C12-3.** Se lanzó el balón de basquetbol a un ángulo medido entre la horizontal y el brazo extendido del hombre. Si la canasta está a 3 m del suelo, haga las mediciones adecuadas en la fotografía y determine si el balón ubicado como se indica entrará a la canasta.



**Prob. C12-3** (© R. C. Hibbeler)

**C12-4.** La piloto le dice la envergadura de su avión y su velocidad aerodinámica. ¿Cómo determinaría la aceleración del avión en el momento ilustrado? Utilice valores numéricos y tome las mediciones necesarias a partir de la fotografía.



**Prob. C12-4** (© R. C. Hibbeler)

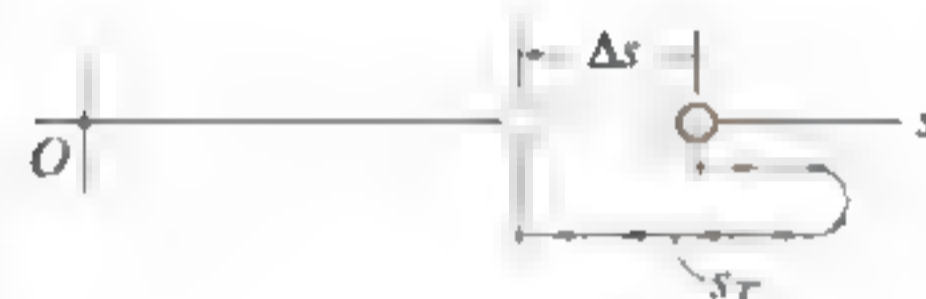
**Cinemática rectilínea**

La cinemática rectilínea se refiere al movimiento a lo largo de una línea recta. Una coordenada de posición  $s$  especifica la ubicación de la partícula en la línea y el desplazamiento  $\Delta s$  es el cambio de su posición.



La velocidad promedio es una cantidad vectorial, definida como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo.

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



La rapidez promedio es un escalar y es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo del recorrido.

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

El tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración están relacionados por tres ecuaciones diferenciales.

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad a \, ds = v \, dv$$

Si se sabe que la aceleración es constante, entonces se pueden integrar las ecuaciones diferenciales que relacionan el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración.

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_c t \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \end{aligned}$$

**Soluciones gráficas**

Si el movimiento es errático, entonces puede describirse mediante una gráfica. Si se proporciona una de estas gráficas, en ese caso las otras pueden establecerse mediante las relaciones diferenciales entre  $a$ ,  $v$ ,  $s$  y  $t$ .

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt}, \\ v &= \frac{ds}{dt}, \\ a \, ds &= v \, dv \end{aligned}$$

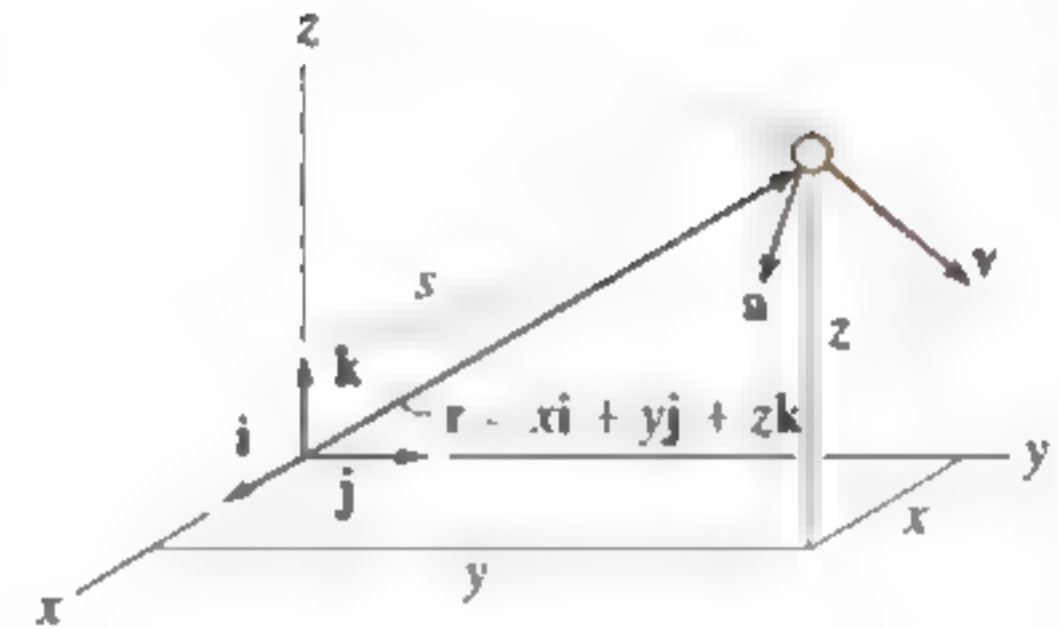
### Movimiento curvilíneo, $x, y, z$

El movimiento curvilíneo a lo largo de una trayectoria puede descomponerse en un movimiento rectilíneo a lo largo de los ejes  $x, y$  y  $z$ . Se utiliza la ecuación de la trayectoria para relacionar el movimiento a lo largo de cada eje.

$$v_x = \dot{x} \quad a_x = \dot{v}_x$$

$$v_y = \dot{y} \quad a_y = \dot{v}_y$$

$$v_z = \dot{z} \quad a_z = \dot{v}_z$$



### Movimiento de un proyectil

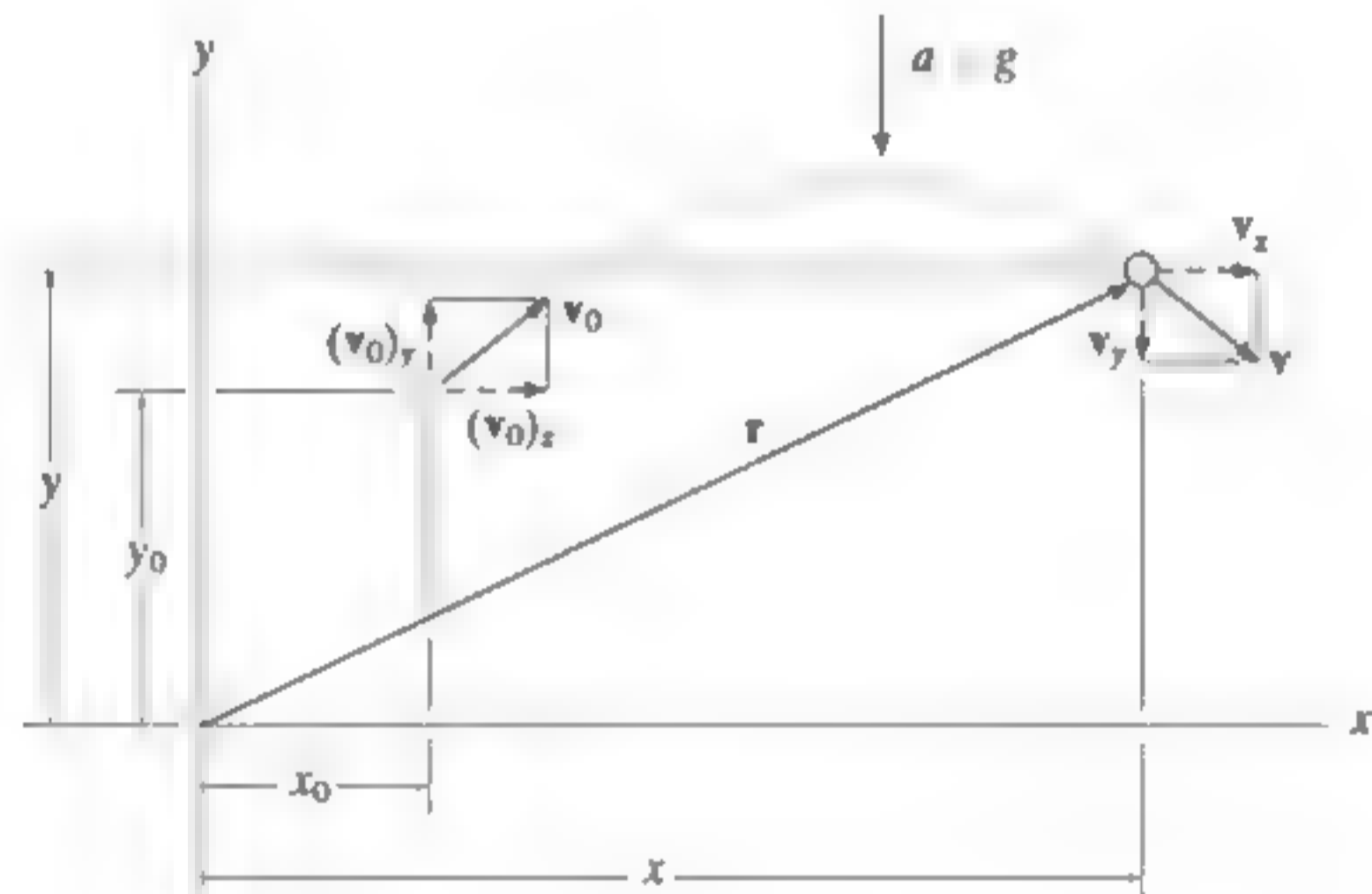
El movimiento de vuelo libre de un proyectil sigue una trayectoria parabólica. Tiene una velocidad constante en la dirección horizontal y una aceleración hacia abajo constante de  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  o  $32.2 \text{ ft/s}^2$  en la dirección vertical. Dos de cualesquiera de las tres ecuaciones de aceleración constante se aplican en la dirección vertical, pero en la dirección horizontal tan sólo se aplica una ecuación.

$$(+\uparrow) \quad v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$(+\uparrow) \quad y = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$(+\uparrow) \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

$$(\rightarrow) \quad x = x_0 + (v_0)_x t$$



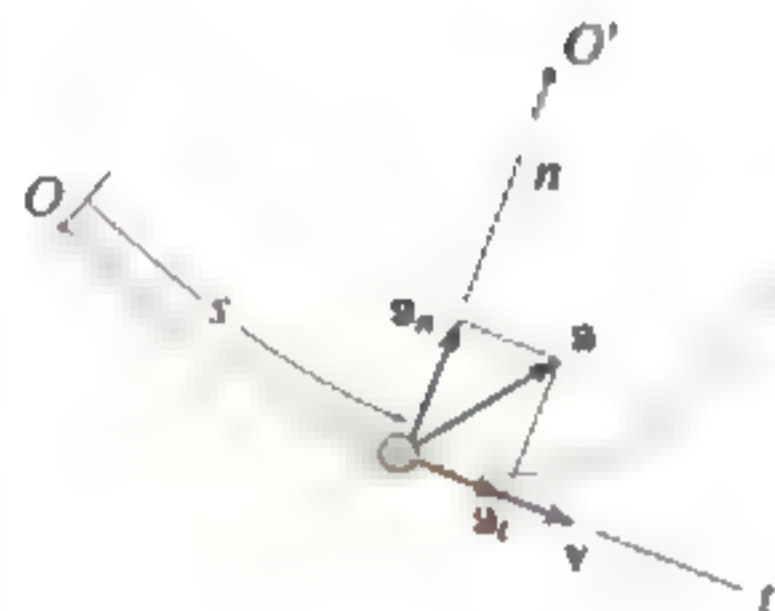
**Movimiento curvilíneo  $n, t$** 

Si se utilizan los ejes normal y tangencial para el análisis, entonces  $v$  siempre está en la dirección  $t$  positiva.

La aceleración tiene dos componentes. La componente tangencial,  $a_t$ , es responsable del cambio de magnitud de la velocidad; una reducción de la velocidad ocurre en la dirección  $t$  negativa, y un incremento de velocidad se da en la dirección  $t$  positiva. La componente normal  $a_n$  responde al cambio en la dirección de la velocidad. Esta componente siempre actúa en la dirección  $n$  positiva.

$$a_t = \dot{v} \quad \text{o} \quad a_t ds = v dv$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

**Movimiento curvilíneo  $r, \theta$** 

Si la trayectoria del movimiento se expresa en coordenadas polares, entonces las componentes de velocidad y aceleración pueden relacionarse con las derivadas con respecto al tiempo de  $r$  y  $\theta$ .

Para aplicar las derivadas con respecto al tiempo, es necesario determinar  $r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  en el instante considerado. Si se da la trayectoria  $r = f(\theta)$ , entonces se debe utilizar la regla de la cadena del cálculo para obtener las derivadas con respecto al tiempo. (Vea el apéndice C.)

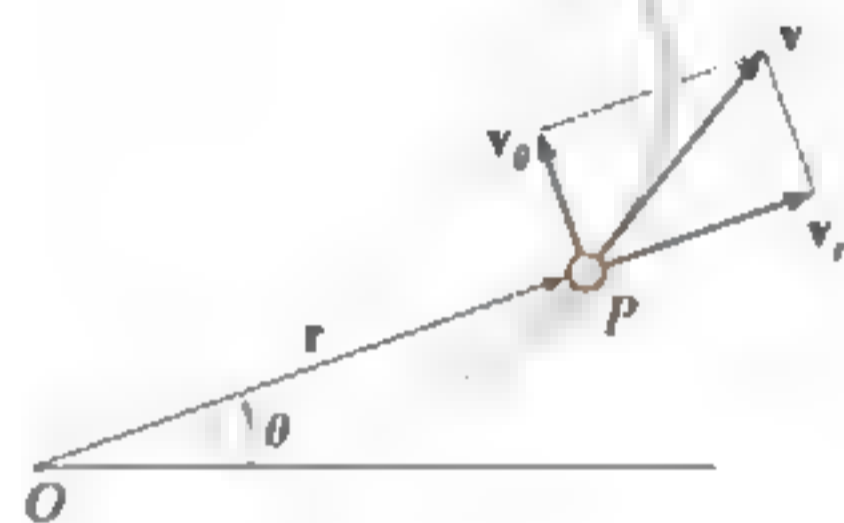
Una vez que se sustituyen los datos en las ecuaciones, el signo algebraico de los resultados indicará la dirección de las componentes de  $v$  o de  $a$  a lo largo de cada eje.

$$v_r = \dot{r}$$

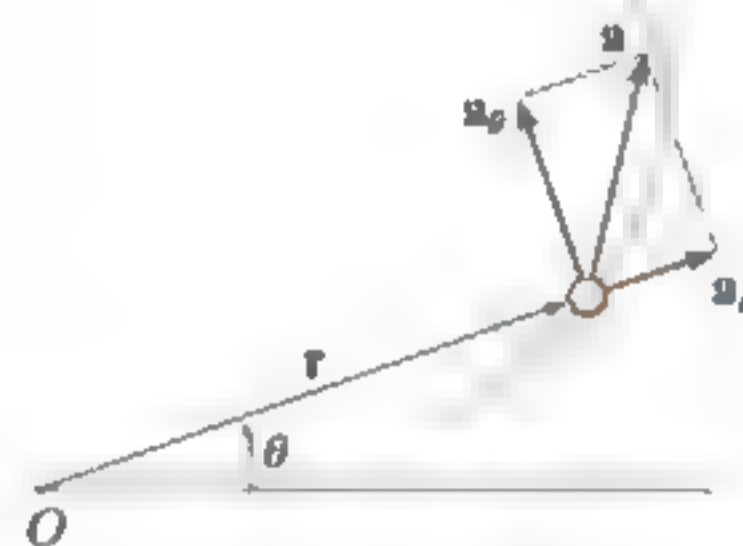
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$



Velocidad



Aceleración

### Movimiento dependiente absoluto de dos partículas

El movimiento dependiente de bloques que están suspendidos de poleas y cables puede relacionarse por la geometría del sistema. Para esto se establecen primero las coordenadas de posición medidas desde un origen fijo para cada bloque. La dirección de cada coordenada debe ser a lo largo de la línea del movimiento de un bloque.

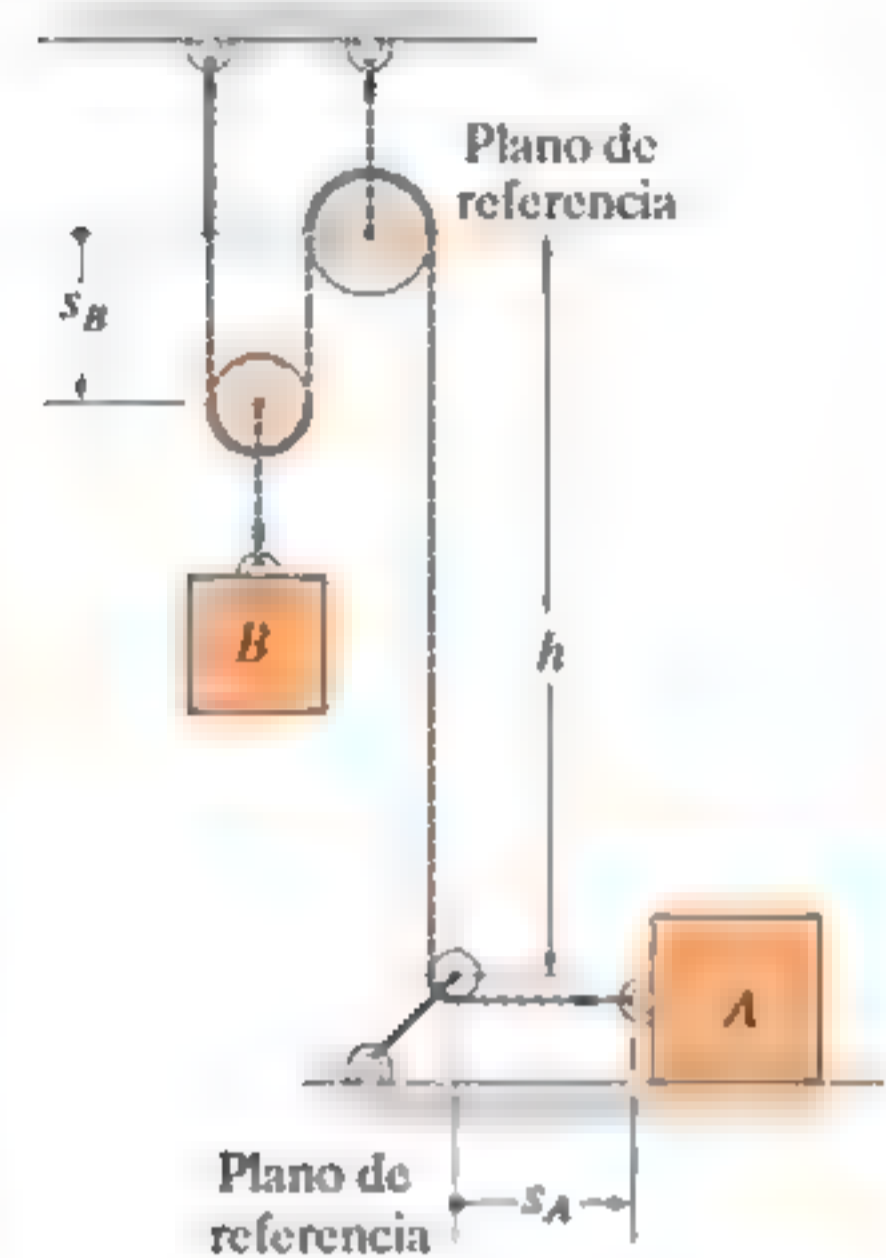
Entonces, mediante geometría y/o trigonometría, las coordenadas se relacionan con la longitud del cable para formular una ecuación de coordenadas de posición.

La primera derivada con respecto al tiempo de esta ecuación proporciona una relación entre las velocidades de los bloques y una segunda derivada con respecto al tiempo da la relación entre sus aceleraciones.

$$2s_B + h + s_A = l$$

$$2v_B = -v_A$$

$$2a_B = -a_A$$



### Análisis del movimiento relativo por medio de ejes en traslación

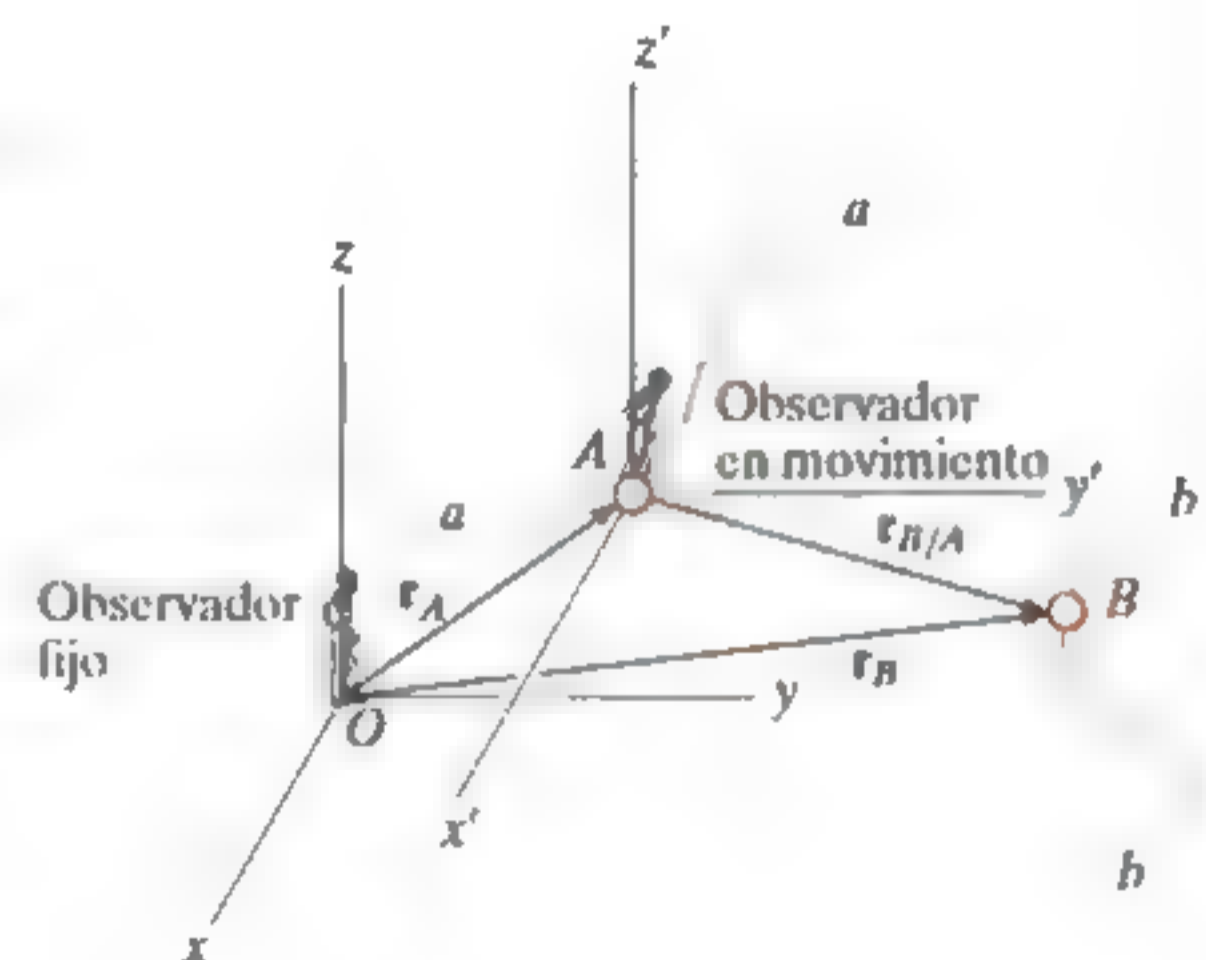
Si dos partículas  $A$  y  $B$  experimentan movimientos independientes, entonces estos movimientos pueden relacionarse con su movimiento relativo por medio de un *sistema de ejes en traslación* fijo a una de las partículas ( $A$ ).

En el caso de movimiento plano, cada ecuación vectorial produce dos ecuaciones escalares, una en la dirección  $x$  y la otra en la dirección  $y$ . Para la solución, los vectores pueden expresarse en forma cartesiana, o bien, las componentes escalares  $x$  y  $y$  pueden escribirse directamente.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

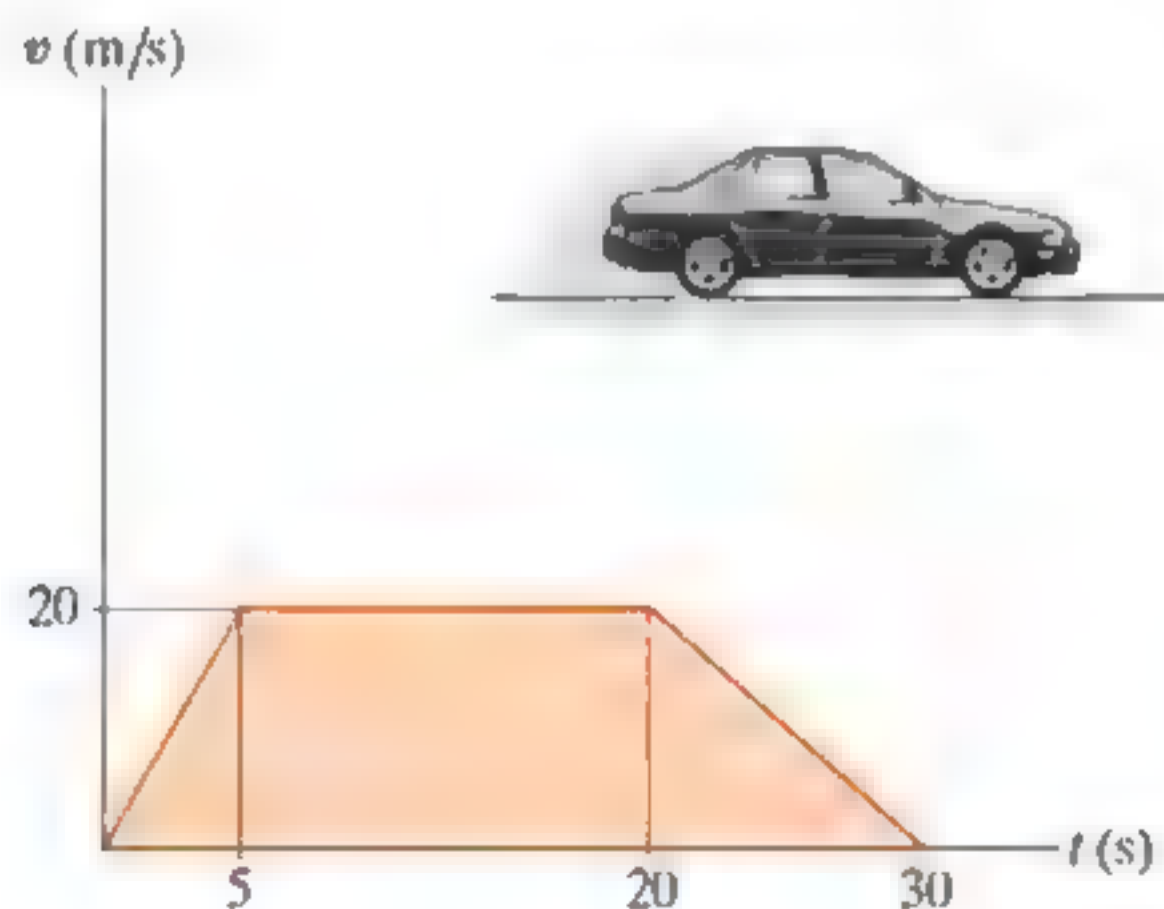


**R12-1.** La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por  $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$  ft, donde  $t$  se da en segundos. Determine su aceleración y velocidad máximas durante el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 10$  s.

**R12-2.** Si una partícula tiene una velocidad inicial  $v_0 = 12$  ft/s hacia la derecha, y una aceleración constante de  $2$  ft/s<sup>2</sup> hacia la izquierda, determine el desplazamiento de la partícula en  $10$  s. Originalmente  $s_0 = 0$ .

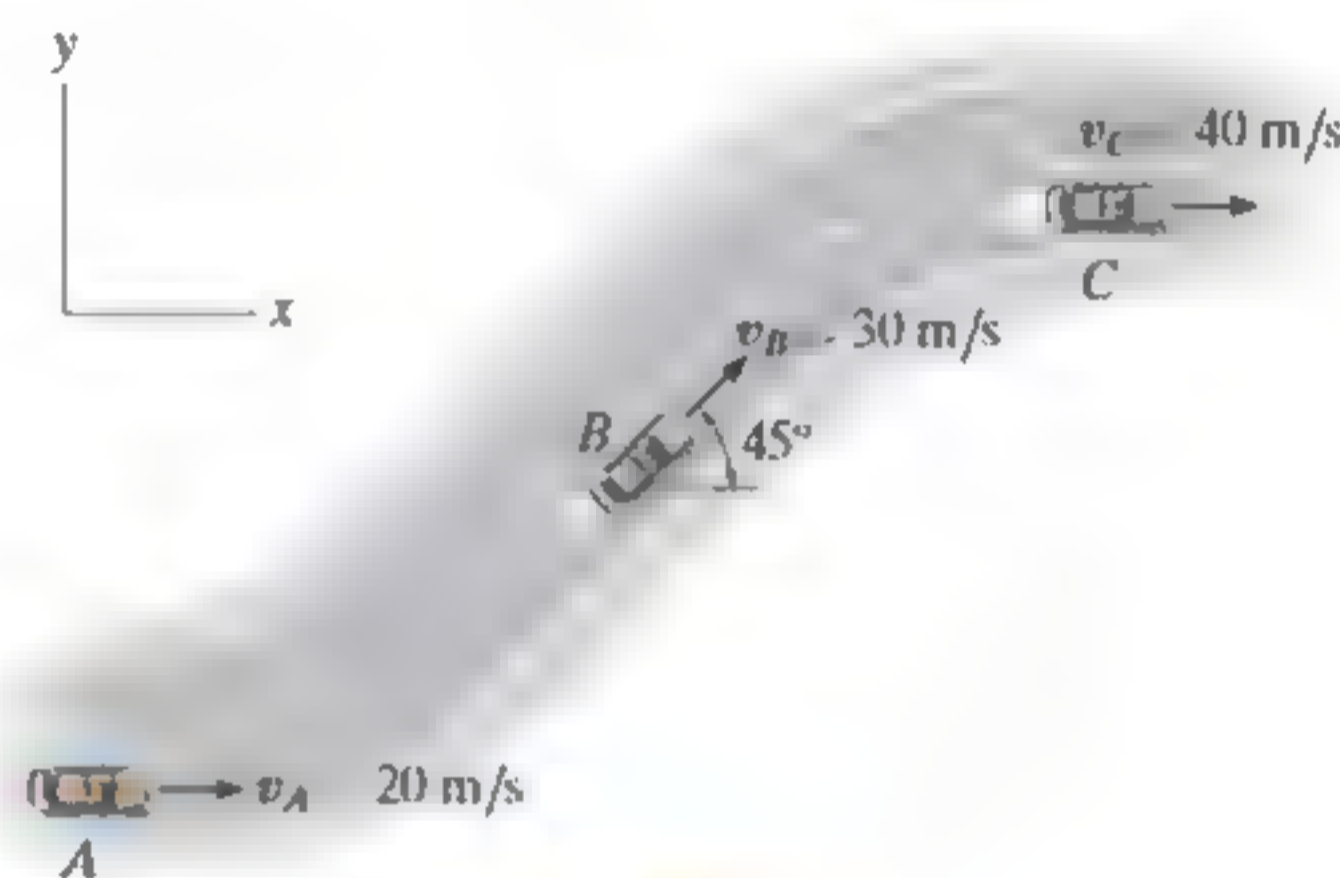
**R12-3.** Un proyectil, que está inicialmente en el origen, se mueve a lo largo de una trayectoria en línea recta a través de un fluido, de modo que su velocidad es  $v = 1800(1 - e^{-0.3t})$  mm/s, donde  $t$  se da en segundos. Determine el desplazamiento del proyectil durante los primeros  $3$  s.

**R12-4.** Se muestra la gráfica  $v-t$  de un automóvil mientras viaja por una carretera. Determine la aceleración cuando  $t = 2.5$  s,  $10$  s y  $25$  s. También si  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , encuentre la posición cuando  $t = 5$  s,  $20$  s y  $30$  s.



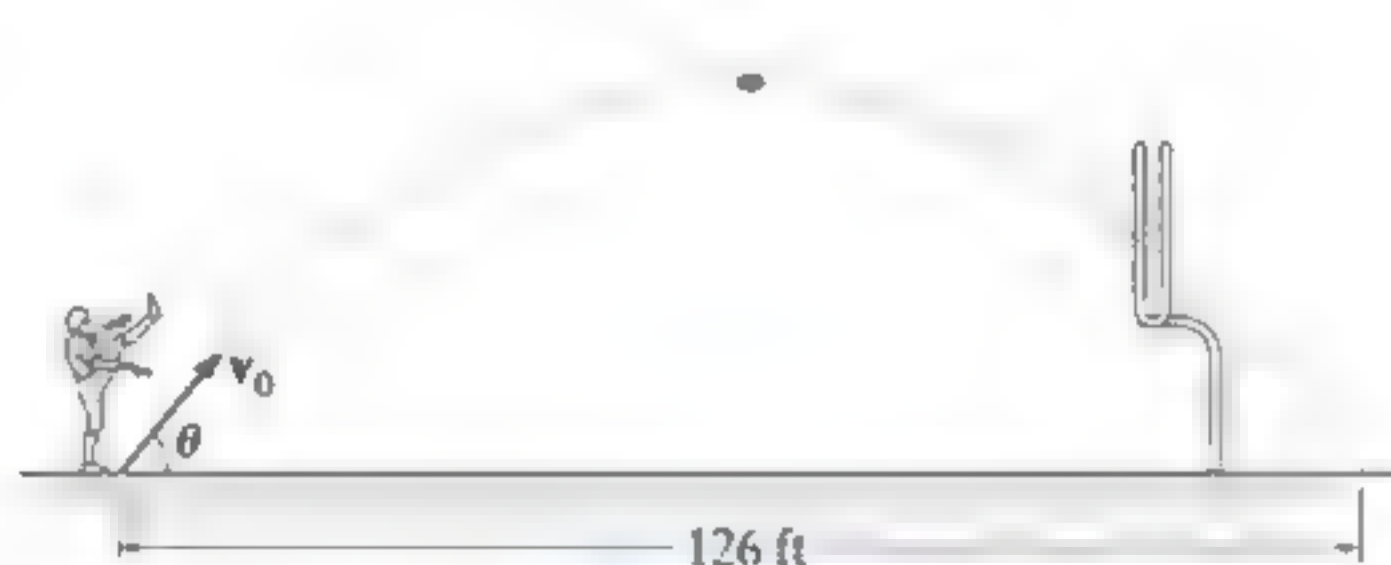
Prob. R12-4

**R12-5.** Un automóvil que viaja a lo largo de los tramos rectos de la carretera tiene las velocidades indicadas en la figura, cuando llega a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Si tarda  $3$  s para ir de  $A$  a  $B$  y, luego,  $5$  s para ir de  $B$  a  $C$ , determine la aceleración promedio entre los puntos  $A$  y  $B$  y entre los puntos  $A$  y  $C$ .



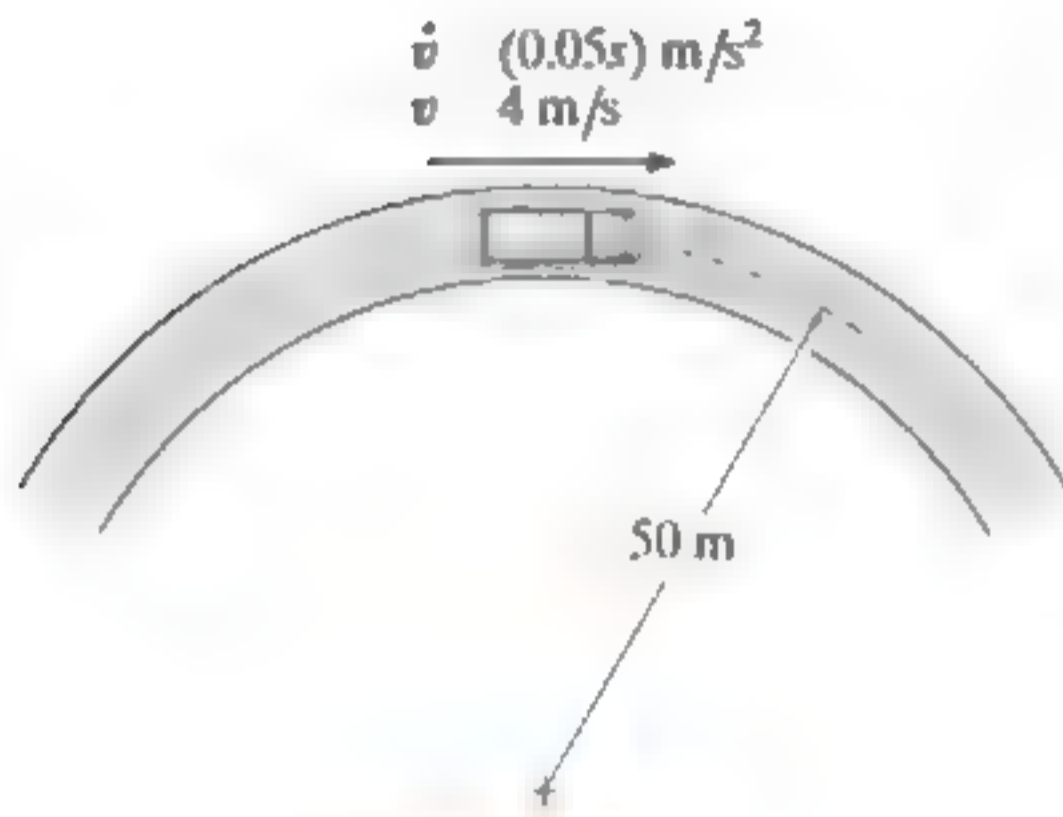
Prob. R12-5

**R12-6.** A partir de un video, se observó que un jugador de fútbol americano pateó un balón a  $126$  ft durante un tiempo medido de  $3.6$  segundos. Determine la velocidad inicial del balón y el ángulo  $\theta$  al que realizó la patada.



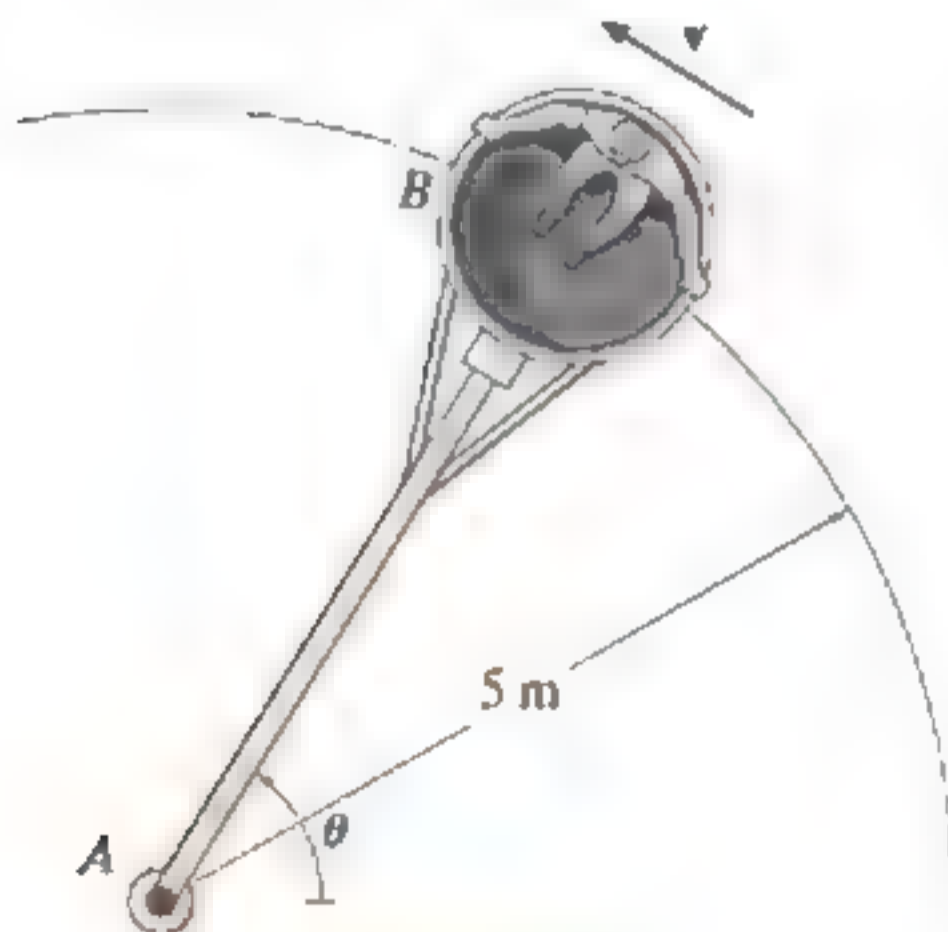
Prob. R12-6

**R12-7.** El camión se desplaza en una trayectoria circular que tiene un radio de 50 m a una rapidez  $v = 4$  m/s. Durante una distancia corta desde  $s = 0$ , su rapidez se incrementa en  $\dot{v} = (0.05s)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $s$  está en metros. Determine las magnitudes de su rapidez y su aceleración cuando ha recorrido  $s = 10$  m.



Prob. R12-7

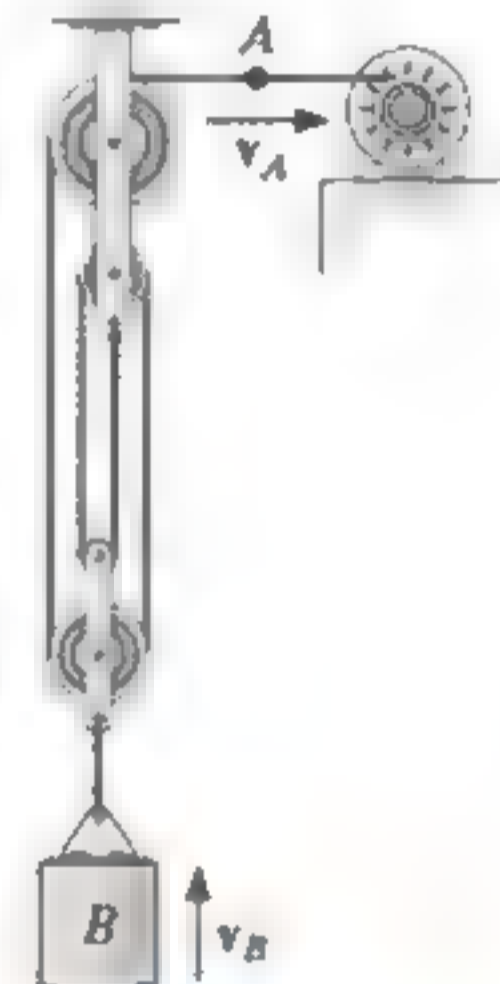
**R12-8.** El carro  $B$  gira de modo que su rapidez se incrementa en  $(a_t)_B = (0.5e^t)$  m/s<sup>2</sup>, donde  $t$  está en segundos. Si el carro parte del reposo cuando  $\theta = 0^\circ$ , determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando  $t = 2$  s. Desprecie el tamaño del carro.



Prob. R12-8

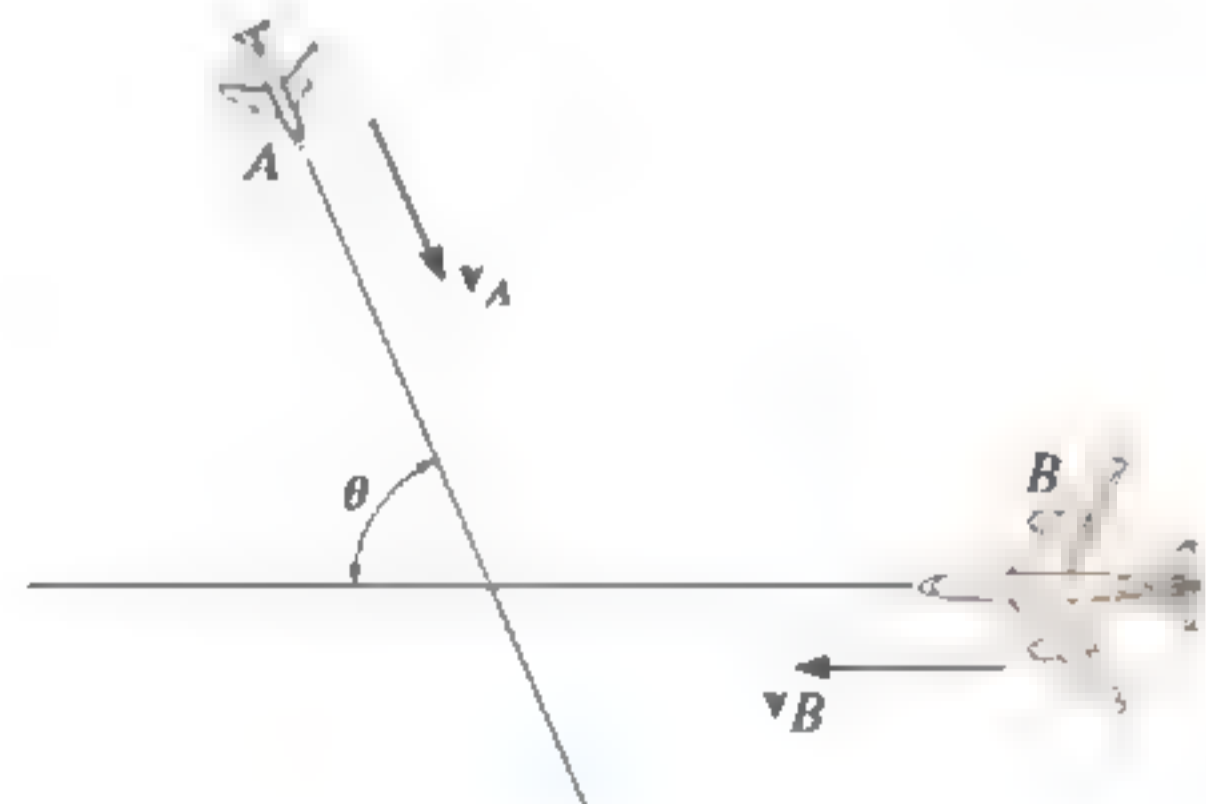
**R12-9.** Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular con 2 m de radio, de modo que su posición en función del tiempo está dada por  $\theta = (5t^2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando  $\theta = 30^\circ$ . La partícula parte del reposo cuando  $\theta = 0^\circ$ .

**R12-10.** Determine el tiempo necesario para que la carga en  $B$  alcance una rapidez de 8 m/s, partiendo del reposo, si el cable se enrolla en el motor con una aceleración de  $0.2$  m/s<sup>2</sup>.



Prob. R12-10

**R12-11.** Dos aviones,  $A$  y  $B$ , vuelan a la misma altitud. Si sus velocidades son  $v_A = 600$  km/h y  $v_B = 500$  km/h, de modo que el ángulo entre sus trayectos en línea recta es  $\theta = 75^\circ$ , determine la velocidad del avión  $B$  con respecto al avión  $A$ .



Prob. R12-11

# Capítulo 13



(© Migel/Shutterstock)

Un automóvil que se desplaza a lo largo de esta carretera estará sometido a fuerzas que crean aceleraciones normales y tangenciales. En este capítulo estudiaremos cómo se relacionan tales fuerzas con las aceleraciones que crean.

# Cinética de una partícula: fuerza y aceleración

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Formular la segunda ley de Newton del movimiento y definir masa y peso.
- Analizar el movimiento acelerado de una partícula usando la ecuación de movimiento en diferentes sistemas de coordenadas.
- Investigar el movimiento de fuerza central y aplicarlo a problemas de mecánica espacial.

## 13.1 Segunda ley de Newton del movimiento

La *cinética* es una rama de la *dinámica* que se ocupa de la relación entre el cambio de movimiento de un cuerpo y las fuerzas que lo provocan. La base de la cinética es la segunda ley de Newton, la cual establece que cuando una *fuerza desbalanceada* actúa en una partícula, ésta se *acelerará* en la dirección de la fuerza con una magnitud que es proporcional a la fuerza.

Esta ley puede verificarse experimentalmente aplicando una fuerza  $F$  desbalanceada a una partícula y, luego, midiendo la aceleración  $a$ . Como la fuerza y la aceleración son directamente proporcionales, la constante de proporcionalidad,  $m$ , se determina a partir de la relación  $m = F/a$ . Este escalar positivo  $m$  se conoce como *masa* de la partícula. Al permanecer constante durante cualquier aceleración,  $m$  mide cuantitativamente la resistencia de la partícula a cualquier cambio en su velocidad, es decir, de su inercia.



El jeep se inclina hacia atrás debido a su inercia, la cual se resiste a su aceleración hacia adelante. (© R. C. Hibbeler)

Si la masa de la partícula es  $m$ , la segunda ley de Newton del movimiento se escribe en forma matemática como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La ecuación anterior, conocida como la *ecuación de movimiento*, es una de las fórmulas más importante en la mecánica.\* Como previamente se enunció, su validez se basa sólo en *evidencia experimental*. En 1905, sin embargo, Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad e impuso limitaciones al uso de la segunda ley de Newton para describir el movimiento general de una partícula. Mediante experimentos se comprobó que el *tiempo* no es una cantidad absoluta, como supuso Newton; y por consiguiente, la ecuación de movimiento no predice el comportamiento exacto de una partícula, sobre todo cuando su velocidad se aproxima a la velocidad de la luz ( $0.3 \text{ Gm/s}$ ). Los desarrollos de la teoría de la mecánica cuántica por parte de Erwin Schrödinger y otros indican, además, que las conclusiones derivadas del uso de esta ecuación también carecen de validez cuando las partículas son del tamaño de un átomo y se mueven muy cerca entre sí. En su mayoría, sin embargo, estos requerimientos en relación con la rapidez y el tamaño de una partícula no se presentan en problemas de ingeniería, por lo que sus efectos no se considerarán en este libro.

**Ley de atracción gravitacional universal.** Poco tiempo después de formular sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que rige la atracción mutua entre dos partículas cualesquiera. En forma matemática esta ley se expresa como

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (13-1)$$

donde

- $F$  = fuerza de atracción entre las dos partículas
- $G$  = constante de gravitación universal; de acuerdo con pruebas experimentales,  $G = 66.73(10^{-12}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
- $m_1, m_2$  = masa de cada una de las dos partículas
- $r$  = distancia entre los centros de las dos partículas

\*Como  $m$  es constante, también podemos escribir  $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$  donde  $m\mathbf{v}$  es el momento lineal de la partícula. En este caso la fuerza desbalanceada que actúa en la partícula es proporcional a la razón de cambio del momento lineal de la partícula con respecto del tiempo.

En el caso de una partícula localizada en o cerca de la superficie terrestre, la única fuerza gravitacional de magnitud considerable es la que existe entre la Tierra y la partícula. Esta fuerza se denomina “peso” y, para nuestro propósito, será la única fuerza gravitacional considerada.

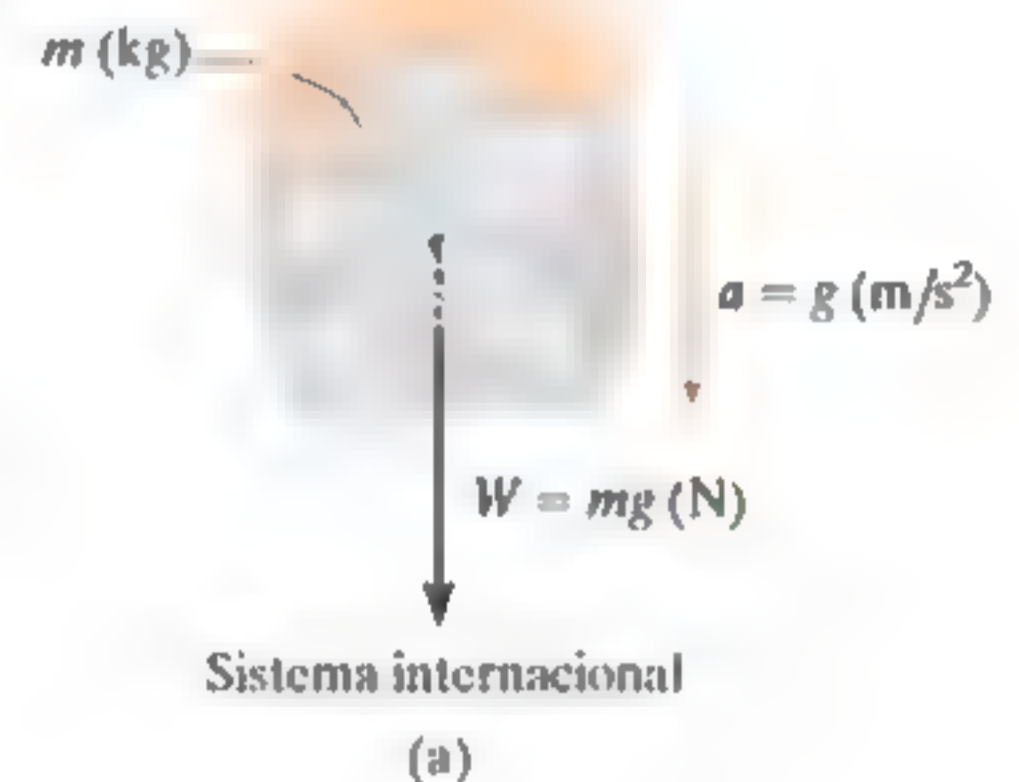
A partir de la ecuación 13-1, podemos desarrollar una expresión general para determinar el peso  $W$  de una partícula de masa  $m_1 = m$ . Sea  $m_2 = M_e$  la masa de la Tierra y  $r$  la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula. Entonces, si  $g = GM_e/r^2$ , tenemos

$$W = mg$$

Por comparación con  $F = ma$ , denominamos  $g$  a la aceleración de la gravedad. En la mayoría de los cálculos de ingeniería  $g$  se mide en un punto sobre la superficie terrestre al nivel del mar y a una latitud de  $45^\circ$ , el cual se considera como el “lugar estándar”. Aquí se utilizarán los valores  $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$  en los cálculos.

En el sistema internacional (SI) la masa de un cuerpo se especifica en kilogramos y el peso se calcula con la ecuación anterior, figura 13-1a. Por lo tanto,

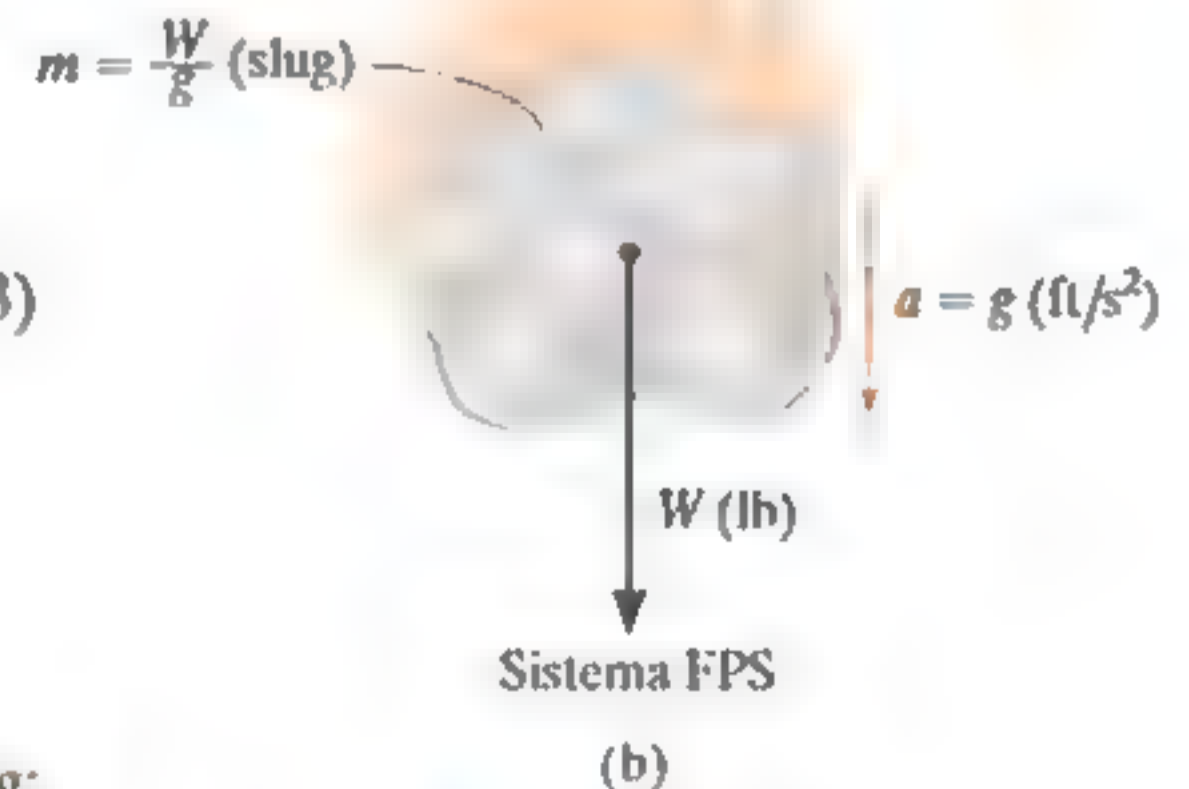
$$W = mg(\text{N}) \quad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \quad (13-2)$$



Entonces, un cuerpo de 1 kg de masa pesa 9.81 N; un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N, y así sucesivamente.

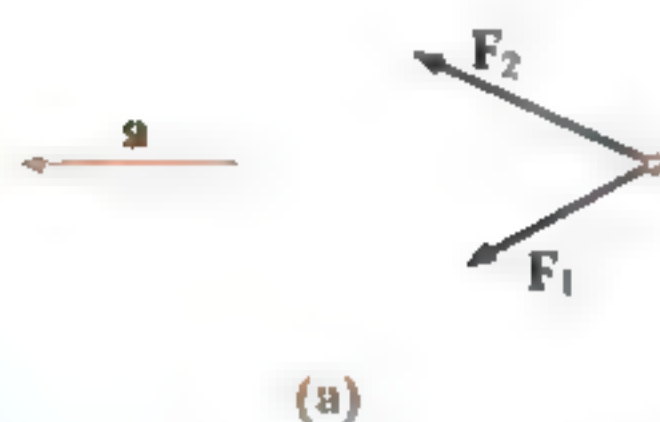
En el sistema FPS (pies-libras-segundos) el peso de un cuerpo se especifica en libras. La masa se mide en slugs, un término derivado de “sluggish” (lento, tardo) que se refiere a la inercia del cuerpo. Se calcula (fig. 13-1b), con

$$m = \frac{W}{g} \text{ (slug)} \quad (g = 32.2 \text{ ft/s}^2) \quad (13-3)$$



Por consiguiente, un cuerpo que pesa 32.2 lb tiene una masa de 1 slug; un cuerpo que pesa 64.4 lb tiene una masa de 2 slugs, y así sucesivamente.

Fig. 13-1



## 13.2 Ecuación de movimiento

Cuando más de una fuerza actúa en una partícula, la fuerza resultante se determina por medio de una suma vectorial de todas las fuerzas, es decir,  $F_R = \Sigma F$ . En este caso, la ecuación de movimiento se escribe como

$$\Sigma F = ma \quad (13-4)$$

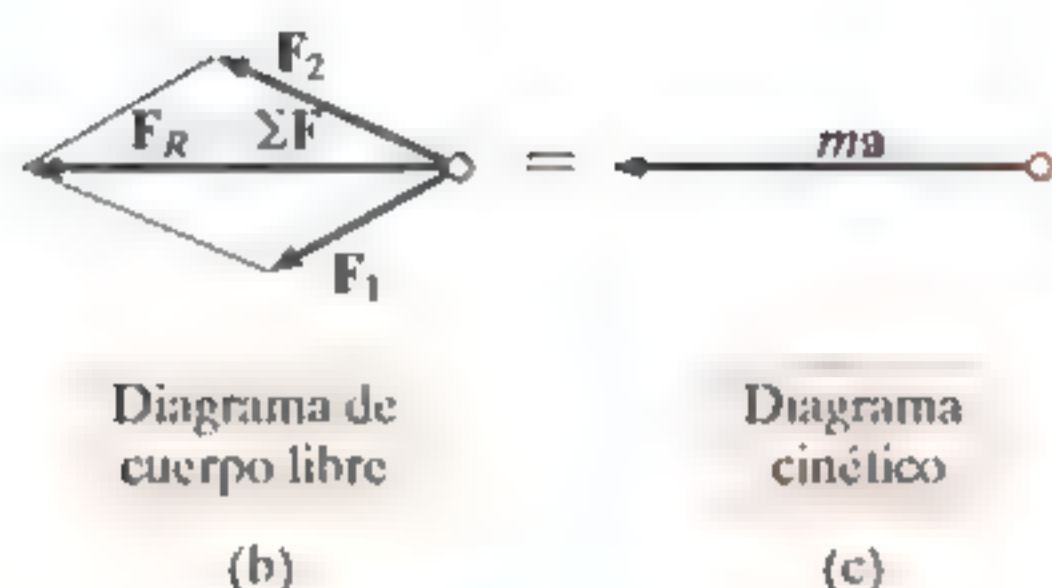


Fig. 13-2

Para ilustrar la aplicación de esta ecuación, considere la partícula mostrada en la figura 13-2a, con masa  $m$  y sometida a la acción de dos fuerzas:  $F_1$  y  $F_2$ . Gráficamente podemos tener en cuenta la magnitud y dirección de cada una de las fuerzas que actúan en la partícula, si trazamos el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula (fig. 13-2b). Como la *resultante* de estas fuerzas produce el vector  $ma$ , su magnitud y dirección se representan gráficamente en el *diagrama cinético*, que se muestra en la figura 13-2c.\* El signo igual escrito entre los diagramas simboliza la equivalencia gráfica entre el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético, es decir,  $\Sigma F = ma$ .† En particular, observe que si  $F_R = \Sigma F = 0$ , entonces la aceleración también es cero, de modo que la partícula puede permanecer en *reposo* o moverse a lo largo de una trayectoria rectilínea con *velocidad constante*. Éstas son las condiciones de *equilibrio estático*, la primera ley de Newton del movimiento.

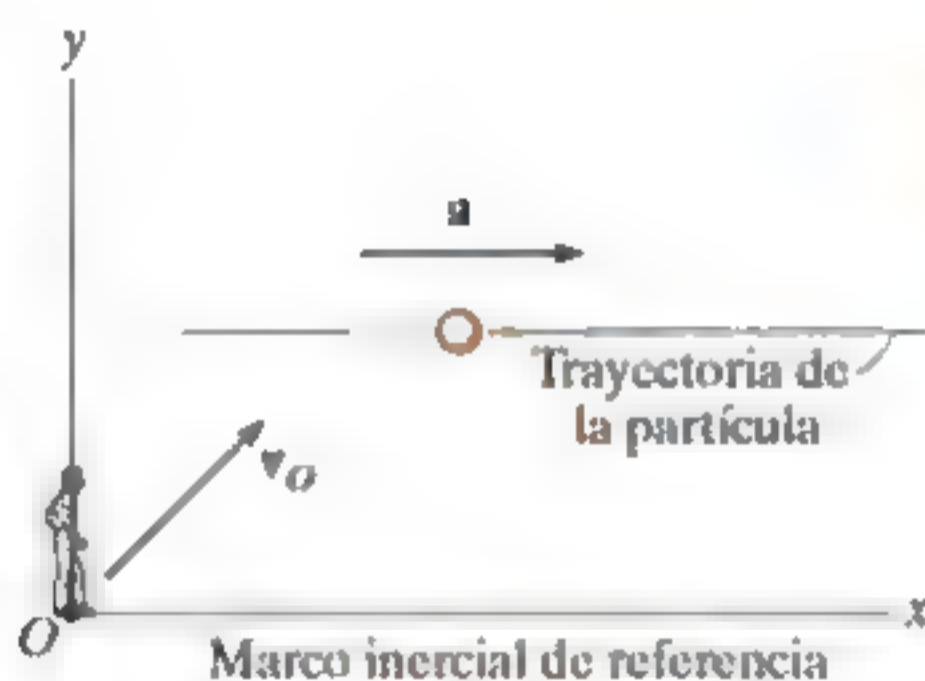


Fig. 13-3

Cuando se aplica la ecuación de movimiento, es importante que la aceleración de la partícula se mida con respecto a un marco de referencia que *esté fijo o en traslación con una velocidad constante*. De este modo, el observador no experimentará aceleración y las mediciones de la aceleración de la partícula serán las *mismas* con *cualquier marco de referencia* de este tipo. Tal marco de referencia comúnmente se conoce como *marco de referencia inercial* o *newtoniano* (fig. 13-3).

Cuando se estudian los movimientos de cohetes y satélites, se justifica considerar el marco de referencia inercial como fijo en las estrellas, mientras que en los problemas de dinámica que implican movimientos en la superficie terrestre, o cerca de ésta, pueden resolverse con un marco inercial que se supone fijo en la Tierra. Aun cuando la Tierra rota sobre su propio eje y gira alrededor del Sol, las aceleraciones creadas por tales rotaciones son relativamente pequeñas y, por lo tanto, se pueden omitir en la mayoría de las aplicaciones.

\*Recuerde que el diagrama de cuerpo libre considera que la partícula está aislada o libre de sus apoyos circundantes, y muestra todas las fuerzas que actúan en ella. El diagrama cinético se refiere al movimiento de la partícula provocado por las fuerzas.

†La ecuación de movimiento también puede reescribirse en la forma  $\Sigma F - ma = 0$ . El vector  $-ma$  se refiere al *vector de la fuerza de inercia*. Si se le trata de la misma forma que a un "vector de fuerza", entonces el estado de "equilibrio" creado se conoce como *equilibrio dinámico*. Este método de aplicación, que no se utilizará en el presente texto, se conoce a menudo como *principio de D'Alembert* nombrado en honor del matemático francés Jean le Rond d'Alembert.

Todos estamos familiarizados con la sensación que se tiene cuando nos sentamos en un automóvil sometido a una aceleración hacia adelante. A menudo pensamos que esto es provocado por una “fuerza” que actúa en nosotros y que tiende a empujarnos hacia atrás en el asiento; sin embargo, no es así. Esta sensación ocurre debido a nuestra inercia o a la resistencia de nuestra masa al cambio de velocidad.

Consideremos al pasajero sujeto al asiento de un trineo propulsado por un cohete. Si el trineo está en reposo o en movimiento a una velocidad constante, no se ejerce ninguna fuerza sobre su espalda.



Keystone/Hulton Archive/  
Getty Images

Cuando el empuje del motor del cohete acelera el trineo, el asiento en el cual está sentado el pasajero ejerce una fuerza  $F$  sobre él y lo empuja hacia adelante junto con el trineo. Observe en la fotografía, que la inercia de su cabeza resiste este cambio en el movimiento (aceleración) y, por lo tanto, ésta se mueve hacia atrás contra el asiento, y su cara, la cual no es rígida, tiende a distorsionarse hacia atrás.



Keystone/Hulton Archive/  
Getty Images

Al desacelerarse la fuerza del cinturón del asiento  $F'$  tiende a jalar su cuerpo para detenerlo, pero su cabeza pierde el contacto con el respaldo del asiento y su cara se distorsiona hacia adelante, de nuevo debido a su inercia o tendencia a continuar en movimiento hacia adelante. Ninguna fuerza lo jala hacia adelante, aunque ésta sea la sensación que percibe.



Keystone/Hulton Archive/  
Getty Images

### 13.3 Ecuación de movimiento de un sistema de partículas

La ecuación del movimiento se ampliará ahora para incluir un sistema de partículas aislado dentro de una región cerrada del espacio, como se indica en la figura 13-4a. En particular, no existe ninguna restricción en cuanto a la forma en que las partículas están conectadas, por lo que el siguiente análisis se aplica igualmente bien al movimiento de un sistema líquido, sólido o gaseoso.

En el instante considerado, la partícula  $i$ -ésima, de masa  $m_i$ , se somete a un sistema de fuerzas internas y a una fuerza externa resultante. La *fuerza interna*, representada simbólicamente como  $\mathbf{f}_i$ , es la resultante de todas las fuerzas que las demás partículas ejercen en la partícula  $i$ -ésima. La *fuerza externa resultante*  $\mathbf{F}_i$  representa, por ejemplo, el efecto de las fuerzas gravitacional, eléctrica, magnética o de contacto entre la partícula  $i$ -ésima y los cuerpos o las partículas adyacentes *no* incluidas dentro del sistema.

Los diagramas de cuerpo libre y cinético de la partícula  $i$ -ésima se muestran en la figura 13-4b. Al aplicar la ecuación de movimiento,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Cuando se aplica la ecuación de movimiento a cada una de las demás partículas del sistema, se obtienen ecuaciones similares. Y, si todas estas ecuaciones se suman *vectorialmente*, entonces

$$\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{f}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

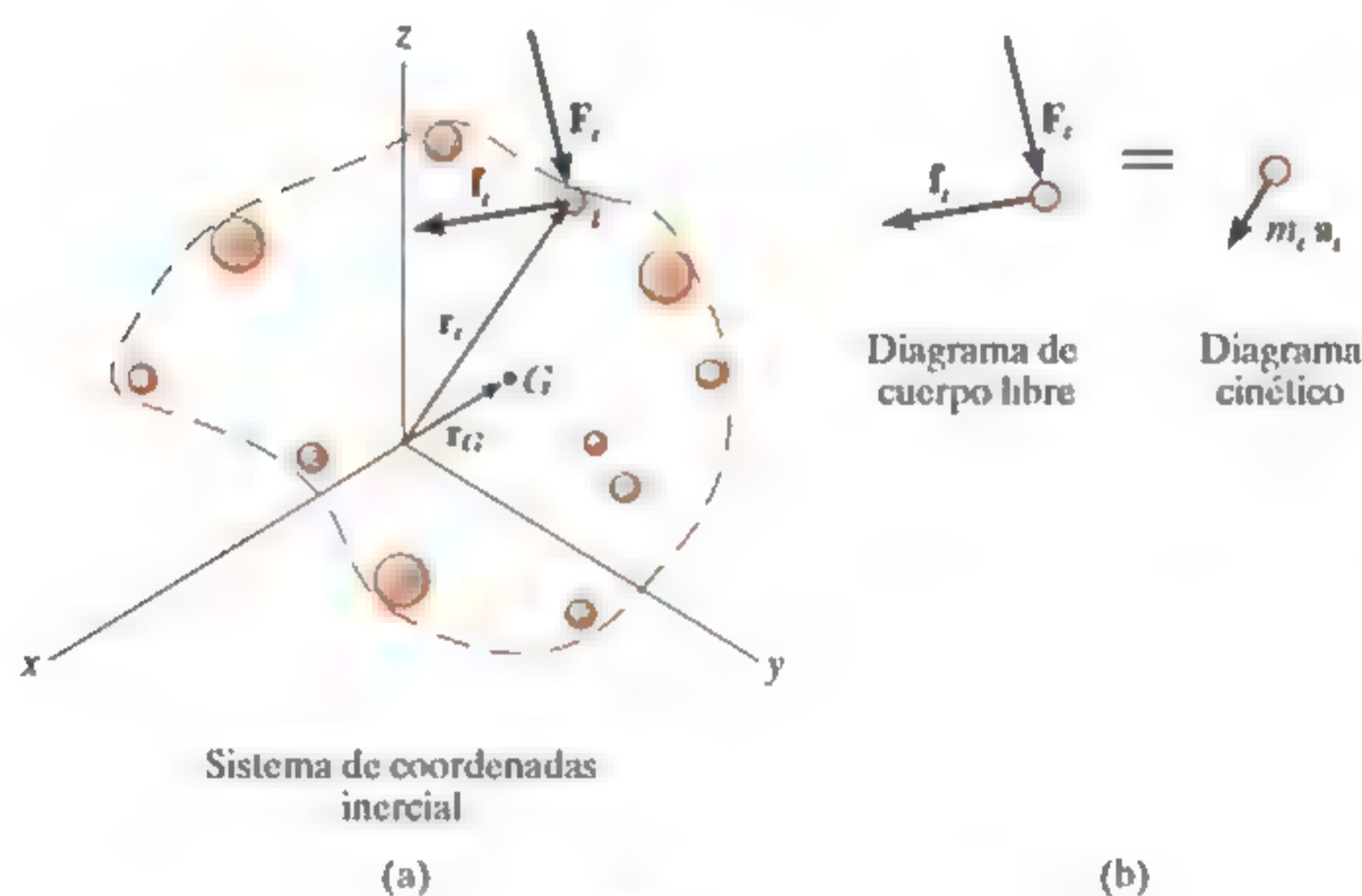


Fig. 13-4

La suma de las fuerzas internas, si se realiza, es igual a cero, ya que las fuerzas internas entre dos partículas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos. En consecuencia, sólo prevalecerá la suma de las fuerzas externas y, por consiguiente, la ecuación de movimiento escrita para el sistema de partículas es

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \quad (13-5)$$

Si  $\mathbf{r}_G$  es un vector de posición que se dirige al *centro de masa*  $G$  de las partículas (fig. 13-4a), entonces por definición del centro de masa  $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$ , donde  $m = \Sigma m_i$  es la masa total de todas las partículas. Al diferenciar esta ecuación dos veces con respecto al tiempo y suponer que ninguna masa entra al sistema o sale de éste, se obtiene

$$m\mathbf{a}_G = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación 13-5, obtenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad (13-6)$$

Por consiguiente, la suma de las fuerzas externas que actúan en el sistema de partículas es igual a la masa total de las partículas multiplicada por la aceleración de su centro de masa  $G$ . Como en realidad todas las partículas deben tener un tamaño finito para que posean masa, la ecuación 13-6 justifica la aplicación de la ecuación de movimiento a un *cuerpo* representado como una partícula única.

### Puntos importantes

- La ecuación de movimiento se basa en pruebas experimentales y es válida sólo cuando se aplica dentro de un marco de referencia inercial.
- La ecuación de movimiento establece que la *fuerza desbalanceada* aplicada a una partícula la *acelera*.
- Un marco de referencia inercial no gira, sino más bien sus ejes o se trasladan a velocidad constante o están en reposo.
- La masa es una propiedad de la materia que proporciona una medida cuantitativa de su resistencia a un cambio en la velocidad. Es una cantidad absoluta y, por ende, no cambia de un lugar a otro.
- El peso es una fuerza provocada por la gravitación terrestre. No es absoluta; más bien, depende de la altitud de la masa con respecto a la superficie terrestre.

## 13.4 Ecuaciones de movimiento: coordenadas rectangulares

Cuando una partícula se mueve con respecto a un marco de referencia inercial  $x, y, z$ , las fuerzas que actúan en la partícula, lo mismo que su aceleración, pueden expresarse en función de sus componentes  $i, j, k$  (fig. 13-5). Al aplicar la ecuación de movimiento, tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = m(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$$

Para que esta ecuación se satisfaga, las componentes  $i, j, k$  del lado izquierdo deben ser iguales a las componentes correspondientes del lado derecho. Por consiguiente, podemos escribir las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned} \quad (13-7)$$

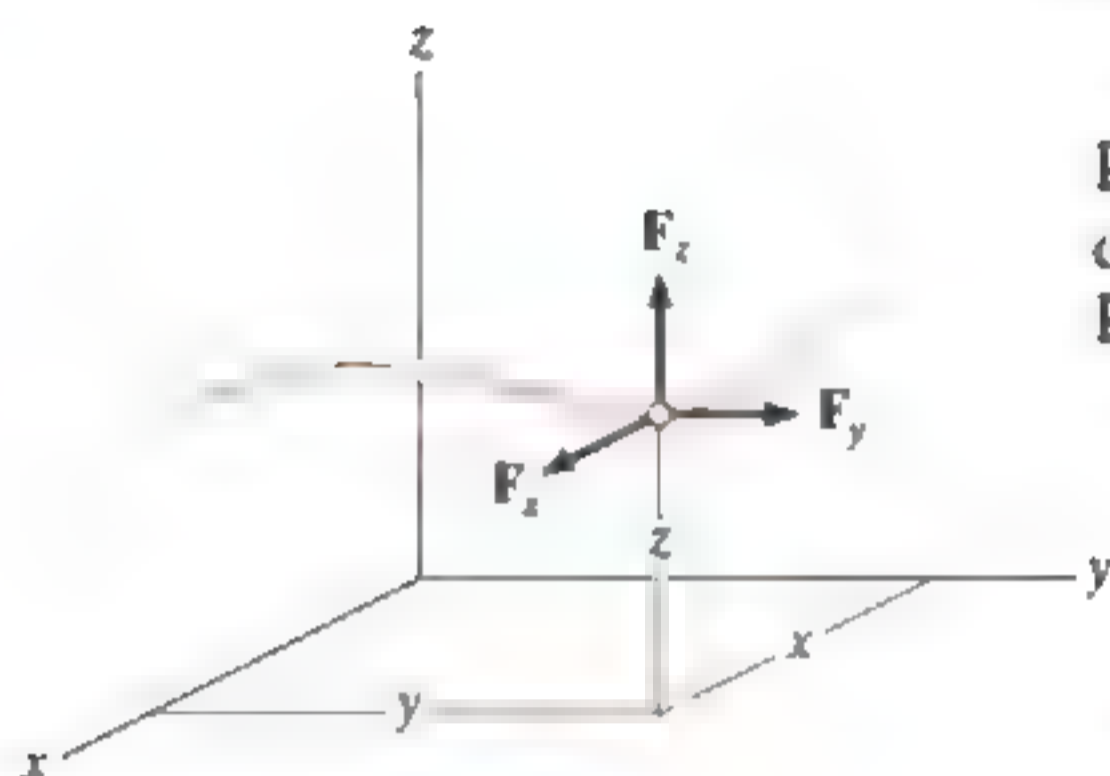


Fig. 13-5

En particular, si la partícula está limitada a moverse sólo en el plano  $x-y$ , entonces se utilizan las primeras dos ecuaciones anteriores para especificar el movimiento.

### Procedimiento para el análisis

Las ecuaciones de movimiento se utilizan para resolver problemas que requieren una relación entre las fuerzas que actúan en una partícula y el movimiento acelerado que ocasionan.

#### Diagrama de cuerpo libre

- Seleccione el sistema de coordenadas inercial. Por lo general, se eligen coordenadas rectangulares o  $x, y, z$  para analizar problemas en los cuales la partícula tiene *movimiento rectilíneo*.
- Una vez que se establecen las coordenadas, trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula. Dibujar este diagrama es *muy importante*, ya que proporciona una representación gráfica que incluye *todas las fuerzas* ( $\Sigma F$ ) que actúan en la partícula y, por lo tanto, es posible descomponer estas fuerzas en sus componentes  $x, y, z$ .
- La dirección y el sentido de la aceleración de la partícula  $\mathbf{a}$  también debe establecerse. Si se desconoce el sentido, por conveniencia matemática, suponga que el sentido de cada componente de aceleración actúa en la *misma dirección* que su eje de coordenadas inercial *positivo*.
- La aceleración puede representarse como el vector  $m\mathbf{a}$  en el diagrama cinético\*.
- Identifique las incógnitas en el problema.

\* En este texto por convención se utiliza siempre el diagrama cinético como auxiliar gráfico, cuando se desarrollan las comprobaciones y la teoría. En los ejemplos, la aceleración de la partícula o sus componentes se mostrarán como vectores de color azul cerca del diagrama de cuerpo libre.

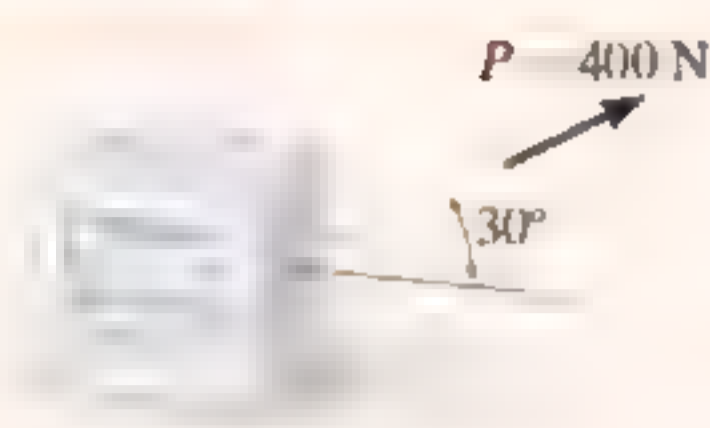
### Ecuaciones de movimiento

- Si las fuerzas pueden descomponerse directamente con el diagrama de cuerpo libre, aplique las ecuaciones de movimiento en su forma de componentes escalares.
- Si la geometría del problema parece complicada, lo que a menudo ocurre en tres dimensiones, puede utilizarse el análisis vectorial cartesiano para la solución.
- **Fricción.** Si una partícula en movimiento se pone en contacto con una superficie rugosa, quizá sea necesario utilizar la *ecuación de la fuerza de fricción*, la cual relaciona las fuerzas de fricción y normales  $F_f$  y  $N$  que actúan en la superficie de contacto mediante el coeficiente de fricción cinética, es decir,  $F_f = \mu_k N$ . Recuerde que  $F_f$  siempre actúa en el diagrama de cuerpo libre opuesta al movimiento de la partícula con respecto a la superficie con la que está en contacto. Si la partícula se encuentra *a punto* de moverse relativamente con respecto a la superficie rugosa, entonces se utilizará el coeficiente de fricción estática.
- **Resorte.** Si la partícula está conectada a un *resorte elástico* de masa despreciable, la fuerza  $F_s$  del resorte puede relacionarse con su deformación mediante la ecuación  $F_s = ks$ . Aquí  $k$  es la rigidez del resorte medida como una fuerza por unidad de longitud, y  $s$  es el alargamiento o la compresión, definidos como la diferencia entre la longitud deformada  $l$  y la longitud no deformada  $l_0$ , es decir,  $s = l - l_0$ .

### Cinemática

- Si se tiene que determinar la velocidad o la posición de la partícula, será necesario aplicar las ecuaciones cinemáticas necesarias, una vez que se determina la aceleración de la partícula con  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .
- Si la *aceleración* es una función del tiempo, use  $a = dv/dt$  y  $v = ds/dt$  que, cuando se integran, sirven para calcular la velocidad y posición de la partícula, respectivamente.
- Si la *aceleración* es una función del desplazamiento, integre  $a ds = v dv$  para obtener la velocidad en función de la posición.
- Si la *aceleración es constante*, use  $v = v_0 + a_c t$ ,  $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$ ,  $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$  para determinar la velocidad o la posición de la partícula.
- Si el problema implica el movimiento dependiente de varias partículas, use el método descrito en la sección 12.9 para relacionar sus aceleraciones. En todos los casos, asegúrese de que las direcciones de las coordenadas inerciales positivas usadas en las ecuaciones cinemáticas sean las mismas que las que se utilizaron para escribir las ecuaciones de movimiento; de lo contrario, la solución simultánea de las ecuaciones conducirá a errores.
- Si la solución para una componente vectorial desconocida da un escalar negativo, ello indica que la componente actúa en la dirección opuesta a la supuesta.

## EJEMPLO



(a)

El embalaje de 50 kg mostrado en la figura 13-6a descansa sobre una superficie horizontal, cuyo coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k = 0.3$ . Si el embalaje se somete a una fuerza de tracción de 400 N como se muestra, determine su velocidad en 3 s, si partió del reposo.

## SOLUCIÓN

Si utilizamos las ecuaciones de movimiento, podemos relacionar la aceleración del embalaje con la fuerza que ocasiona el movimiento. La velocidad del embalaje se determina entonces por medio de cinemática.

**Diagrama de cuerpo libre.** El peso del embalaje es  $W = mg = 50 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$ . Como se muestra en la figura 13-6b, la magnitud de la fuerza de fricción es  $F = \mu_k N_C$  y actúa hacia la izquierda, ya que se opone al movimiento del embalaje. Se supone que la aceleración  $a$  actúa horizontalmente, en la dirección  $x$  positiva. Existen dos incógnitas, que son  $N_C$  y  $a$ .

**Ecuaciones de movimiento.** Con los datos mostrados en el diagrama de cuerpo libre, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 400 \cos 30^\circ - 0.3N_C = 50a \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N_C - 490.5 + 400 \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

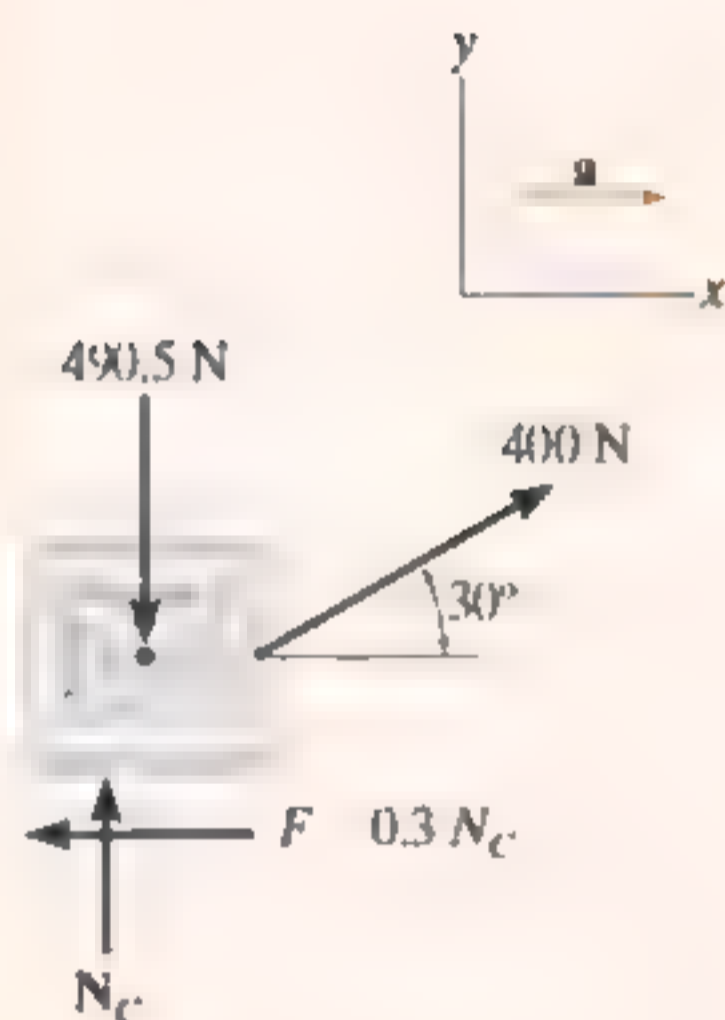
Al despejar la ecuación 2 para  $N_C$  y sustituyendo el resultado en la ecuación 1, y al despejar  $a$  se obtiene

$$N_C = 290.5 \text{ N}$$

$$a = 5.185 \text{ m/s}^2$$

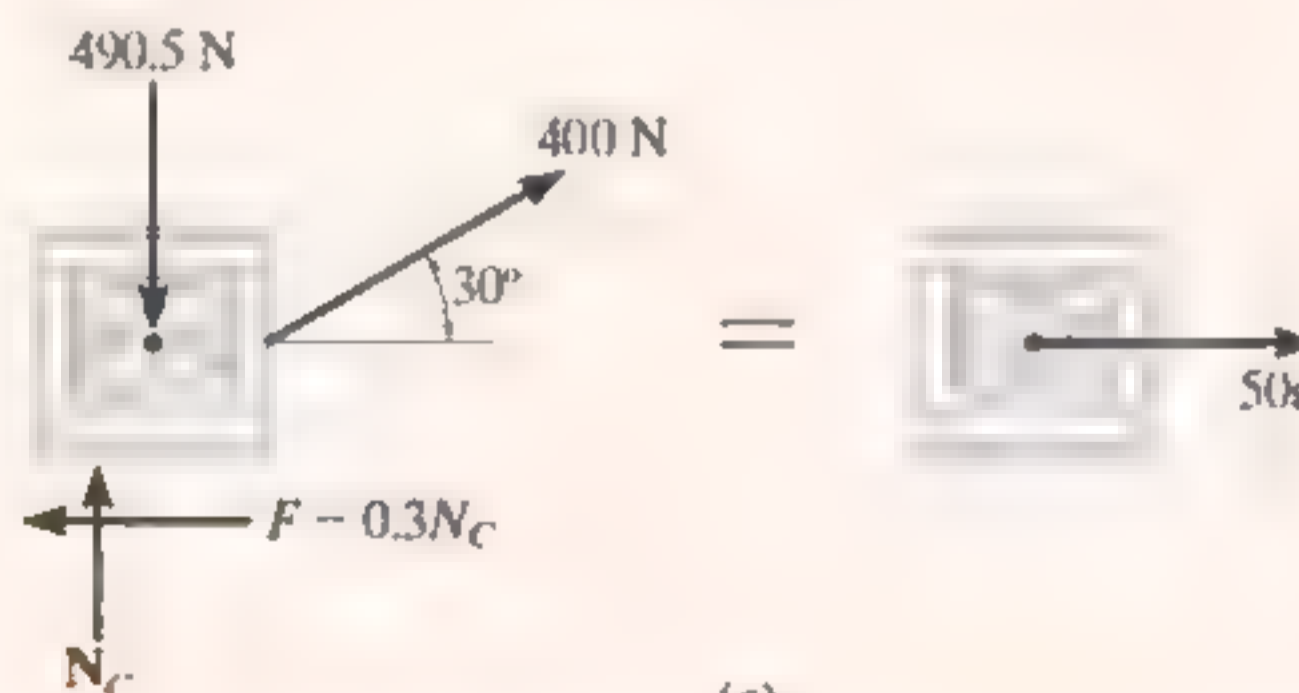
**Cinemática.** Observe que la aceleración es *constante*, ya que la fuerza aplicada  $P$  también lo es. Como la velocidad inicial es cero, la velocidad del embalaje en 3 s es

$$(\rightarrow) \quad v = v_0 + at = 0 + 5.185(3) = 15.6 \text{ m/s} \rightarrow$$



(b)

Fig. 13-6



(c)

**NOTA:** También podemos utilizar el procedimiento alternativo que consiste en dibujar el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético del embalaje (fig. 13-6c), antes de aplicar las ecuaciones de movimiento.

## EJEMPLO

Se dispara un proyectil de 10 kg verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 50 m/s (fig. 13-7a). Determine la altura máxima a la que llegará si (a) se ignora la resistencia atmosférica; y (b) la resistencia atmosférica se mide como  $F_D = (0.01v^2)$  N, donde  $v$  es la rapidez del proyectil en cualquier instante, medida en m/s.

## SOLUCIÓN

En ambos casos la fuerza conocida que actúa en el proyectil puede relacionarse con su aceleración por medio de la ecuación de movimiento. Puede utilizarse entonces la cinemática para relacionar la aceleración del proyectil con su posición.

**Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 13-7b, el peso del proyectil es  $W = mg = 10(9.81) = 98.1$  N. Supondremos que la aceleración  $a$  desconocida actúa hacia arriba en la dirección  $z$  positiva.

## Ecuación de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \quad -98.1 = 10a, \quad a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

El resultado indica que el proyectil, como todo objeto que tiene movimiento de vuelo libre cerca de la superficie terrestre, se ve sometido a una aceleración *constante* dirigida hacia abajo de  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

**Cinemática.** Inicialmente  $z_0 = 0$  y  $v_0 = 50 \text{ m/s}$  y a la altura máxima  $z = h$ ,  $v = 0$ . Como la aceleración es *constante*, entonces

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad v^2 &= v_0^2 + 2a_z(z - z_0) \\ 0 &= (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0) \\ h &= 127 \text{ m} \end{aligned}$$

Resp.

**Parte (b) Diagrama de cuerpo libre.** Como la fuerza  $F_D = (0.01v^2)$  N tiende a retardar el movimiento hacia arriba del proyectil, actúa hacia abajo como se indica en el diagrama de cuerpo libre (fig. 13-7c).

## Ecuación de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \quad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \quad a = -(0.001v^2 + 9.81)$$

**Cinemática.** Aquí la aceleración *no es constante* puesto que  $F_D$  depende de la velocidad. Como  $a = f(v)$ , podemos relacionar  $a$  con la posición mediante

$$(+\uparrow) a \, dz = v \, dv; \quad -(0.001v^2 + 9.81) \, dz = v \, dv$$

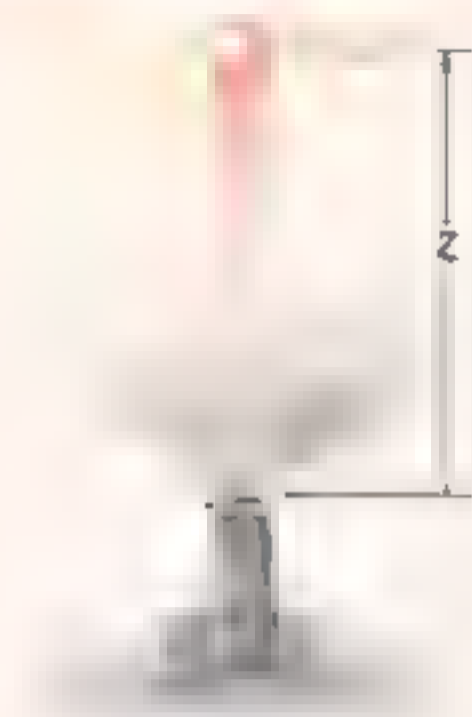
Al separar las variables e integrarlas, y como inicialmente  $z_0 = 0$ ,  $v_0 = 50 \text{ m/s}$  (positiva hacia arriba), y en  $z = h$ ,  $v = 0$ , tenemos

$$\int_0^h dz = -\int_{50 \text{ m/s}}^0 \frac{v \, dv}{0.001v^2 + 9.81} = -500 \ln(v^2 + 9810) \Big|_{50 \text{ m/s}}^0$$

$$h = 114 \text{ m}$$

Resp.

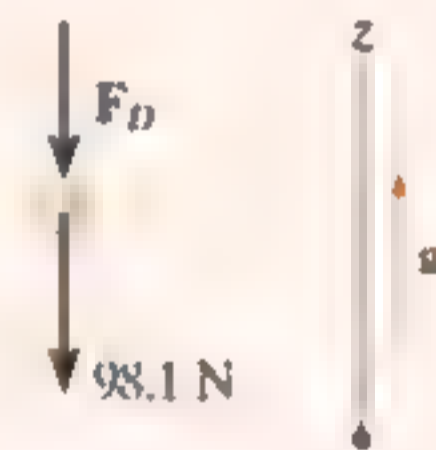
**NOTA:** La respuesta indica una altura más baja que la obtenida en la parte (a) debido a la resistencia atmosférica o resistencia al avance.



(a)



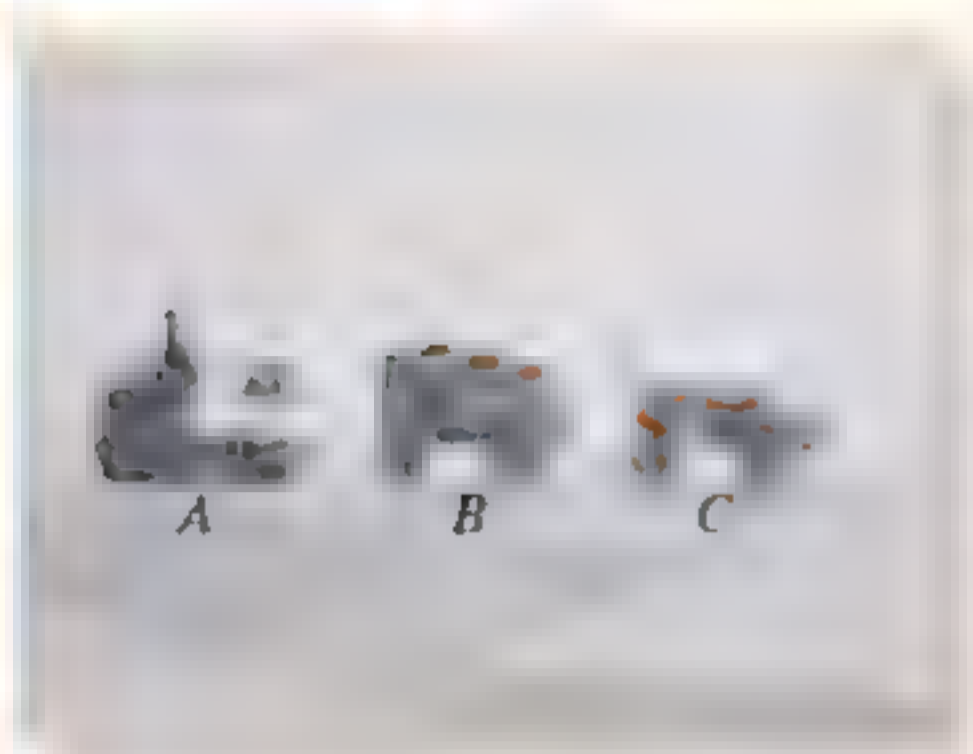
(b)



(c)

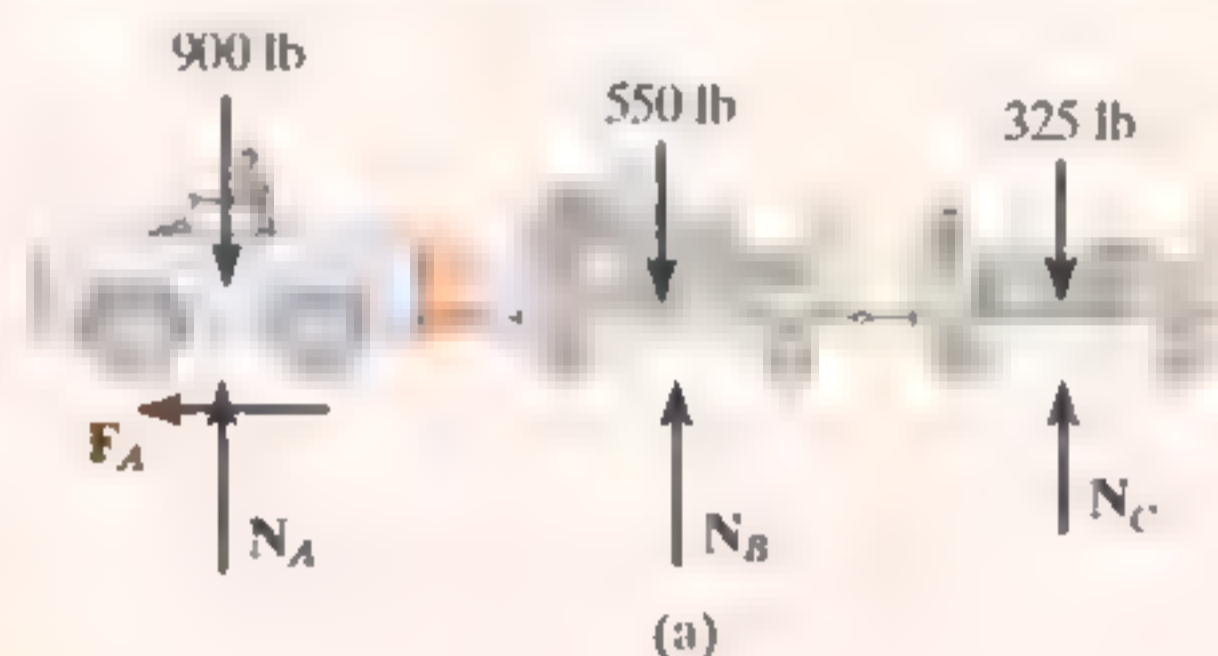
Fig. 13.7

## EJEMPLO



(© R. C. Hibbeler)

El furgón del equipaje *A* que se muestra en la fotografía pesa 900 lb y remolca un carro de 550 lb y un carro *C* de 325 lb. Durante un corto tiempo la fuerza de fricción desarrollada en las ruedas del furgón es  $F_A = (40t)$  lb, donde  $t$  está en segundos. Si el furgón arranca del reposo, determine su rapidez en 2 segundos. Además, ¿cuál es la fuerza horizontal que actúa en el acoplamiento entre el furgón y el carro *B* en este instante? Ignore el tamaño del furgón y de los carros.



## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 13-8a, es la fuerza de fricción la que acelera tanto al furgón como a los carros. En este caso, consideramos los tres vehículos como un solo sistema.

**Ecuación de movimiento.** Se tiene que considerar únicamente el movimiento en la dirección horizontal.

$$\leftarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 40t = \left( \frac{900 + 550 + 325}{32.2} \right) a$$

$$a = 0.7256t$$

**Cinemática.** Como la aceleración es una función del tiempo, la velocidad del furgón se obtiene mediante  $a = dv/dt$  con la condición inicial de que  $v_0 = 0$  en  $t = 0$ . Entonces,

$$\int_0^v dv = \int_0^{2s} 0.7256t \, dt; \quad v = 0.3628t^2 \Big|_0^{2s} = 1.45 \text{ ft/s} \quad \text{Resp.}$$

**Diagrama de cuerpo libre.** Para determinar la fuerza entre el furgón y el carro *B* consideraremos el diagrama de cuerpo libre del furgón para que podamos “expresar” la fuerza de acoplamiento *T* como externa al diagrama de cuerpo libre (fig. 13-8b).

**Ecuación de movimiento.** Cuando  $t = 2$  s, entonces

$$\leftarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 40(2) - T = \left( \frac{900}{32.2} \right) [0.7256(2)]$$

$$T = 39.4 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Pruebe y obtenga este mismo resultado considerando el diagrama de cuerpo libre de los carros *B* y *C* como un solo sistema.

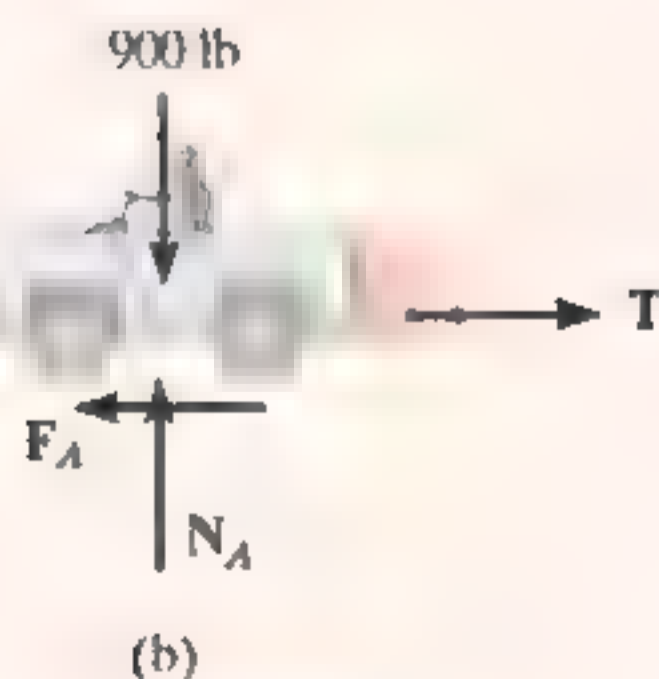


Fig. 13-8

## EJEMPLO

Un collar liso de 2 kg  $C$ , como se muestra en la figura 13-9a, está conectado a un resorte que tiene una rigidez de  $k = 3 \text{ N/m}$  y una longitud sin alargar de  $0.75 \text{ m}$ . Si el collar se suelta del reposo en  $A$ , determine su aceleración y la fuerza normal de la varilla sobre él en el instante  $y = 1 \text{ m}$ .

## SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre del collar cuando está en la posición arbitraria y se muestra en la figura 13-9b. Además, se supone que el collar se acelera de modo que " $a$ " actúa hacia abajo en la dirección y positiva. Existen cuatro incógnitas, que son  $N_C$ ,  $F_s$ ,  $a$  y  $\theta$ .

## Ecuaciones de movimiento

$$\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad -N_C + F_s \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 19.62 - F_s \sin \theta = 2a \quad (2)$$

A partir de la ecuación 2 se observa que la aceleración depende de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte. La solución para  $N_C$  y  $a$  es posible una vez que se conocen  $F_s$  y  $\theta$ .

La magnitud de la fuerza del resorte es una función del alargamiento  $s$  del resorte; es decir,  $F_s = ks$ . En este caso, la longitud sin estirar es  $AB = 0.75 \text{ m}$  (fig. 13-9a), por consiguiente,  $s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75$ . Como  $k = 3 \text{ N/m}$ , entonces

$$F_s = ks = 3\left(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75\right) \quad (3)$$

Como se muestra en la figura 13-9a, el ángulo  $\theta$  está relacionado con  $y$  por trigonometría.

$$\tan \theta = \frac{y}{0.75}$$

Al sustituir  $y = 1 \text{ m}$  en las ecuaciones 3 y 4 se obtiene  $F_s = 1.50 \text{ N}$  y  $\theta = 53.1^\circ$ . Al sustituir estos resultados en las ecuaciones 1 y 2, obtenemos

$$N_C = 0.900 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2 \downarrow \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Éste no es un caso de aceleración constante, puesto que la fuerza del resorte cambia tanto de magnitud como de dirección a medida que el collar se mueve hacia abajo.

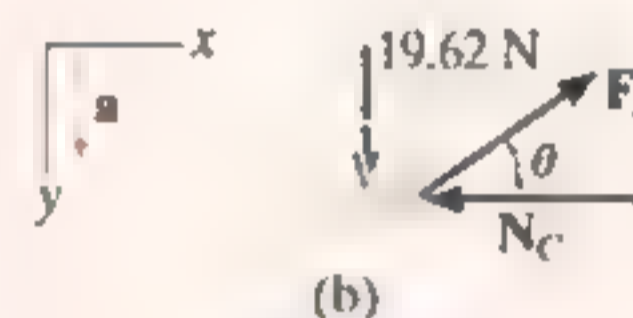
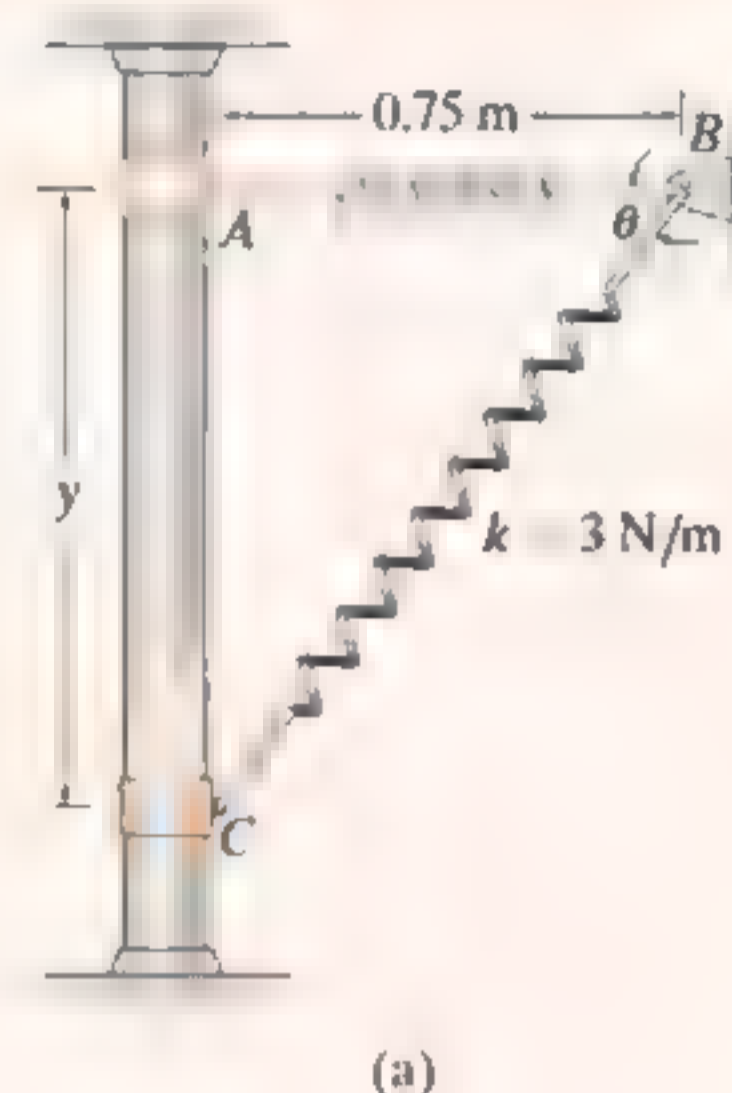


fig. 13.9

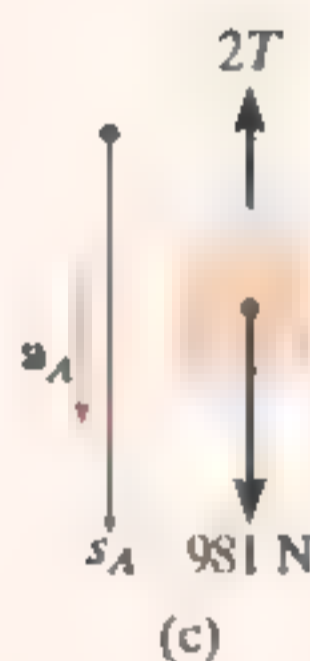
## EJEMPLO

Plano de  
referencia

(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 13-10

El bloque  $A$  de 100 kg mostrado en la figura 13-10a se suelta del reposo. Si no se toman en cuenta las masas de las poleas y las cuerdas, determine la velocidad del bloque  $B$  de 20 kg en 2 s.

## SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** Como se ignora la masa de las poleas, entonces para la polea  $C$ ,  $ma = 0$  y podemos aplicar  $\Sigma F_y = 0$  como se muestra en la figura 13-10b. En las figuras 13-10c y d se muestran los diagramas de cuerpo libre para los bloques  $A$  y  $B$ , respectivamente. Observe que para que  $A$  permanezca estacionario  $T = 490.5$  N, mientras que para que  $B$  permanezca estático  $T = 196.2$  N. De ahí que  $A$  se mueve hacia abajo mientras que  $B$  se mueve hacia arriba. Aunque éste es el caso, supondremos que ambos bloques se aceleran hacia abajo, en la dirección de  $+s_A$  y  $+s_B$ . Las tres incógnitas son  $T$ ,  $a_A$  y  $a_B$ .

**Ecuaciones de movimiento.** Bloque  $A$ ,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 981 - 2T = 100a_A \quad (1)$$

Bloque  $B$ ,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 196.2 - T = 20a_B \quad (2)$$

**Cinemática.** La tercera ecuación necesaria se obtiene al relacionar  $a_A$  con  $a_B$  mediante un análisis de movimiento dependiente, analizado en la sección 12.9. Las coordenadas  $s_A$  y  $s_B$  en la figura 13-10a miden las posiciones de  $A$  y  $B$  con respecto al plano de referencia fijo. Se observa que

$$2s_A + s_B = l$$

donde  $l$  es constante y representa la longitud vertical total de la cuerda. Al diferenciar esta expresión dos veces con respecto al tiempo se obtiene.

$$2a_A = -a_B \quad (3)$$

Observe que cuando se escribieron las ecuaciones 1 a 3, la *dirección positiva siempre se supuso hacia abajo*. Es muy importante ser *consistentes* en esta suposición, ya que buscamos una solución simultánea de las ecuaciones. Los resultados son

$$T = 321.0 \text{ N}$$

$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

De ahí que cuando el bloque  $A$  se acelera *hacia abajo*, el bloque  $B$  se acelera *hacia arriba* como se esperaba. Como  $a_B$  es constante, la velocidad del bloque  $B$  en 2 s es, por lo tanto,

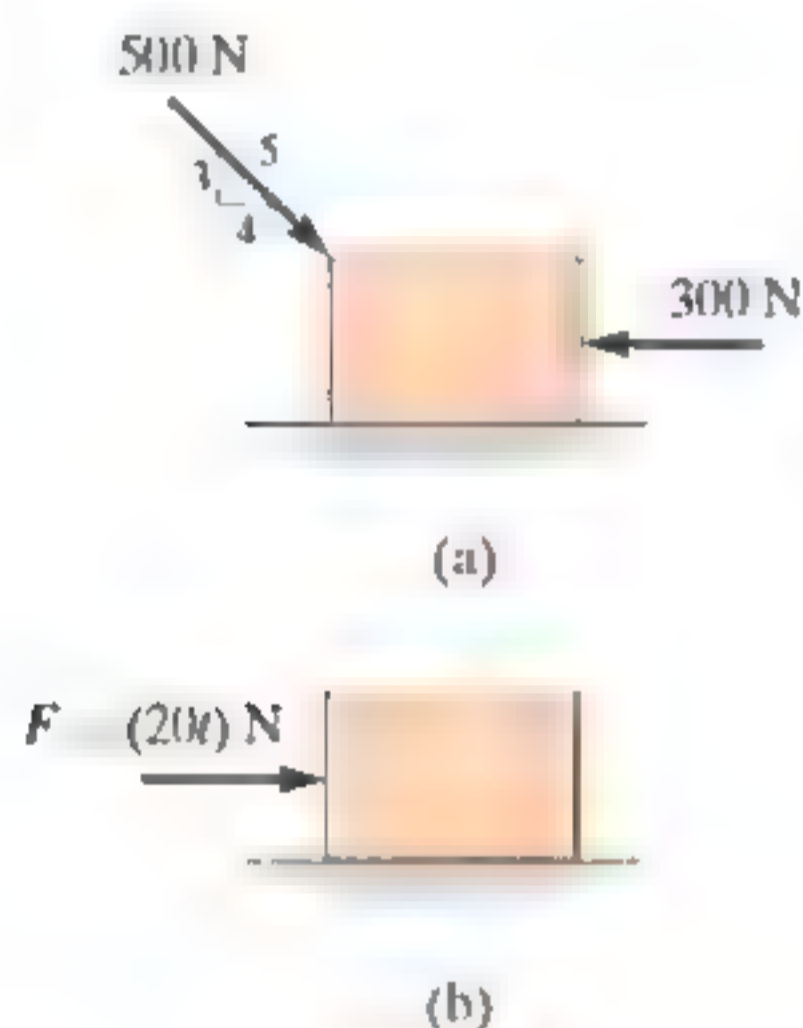
$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad v &= v_0 + a_B t \\ &= 0 + (-6.54)(2) \\ &= -13.1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Resp.

El signo negativo indica que el bloque  $B$  se mueve hacia arriba.

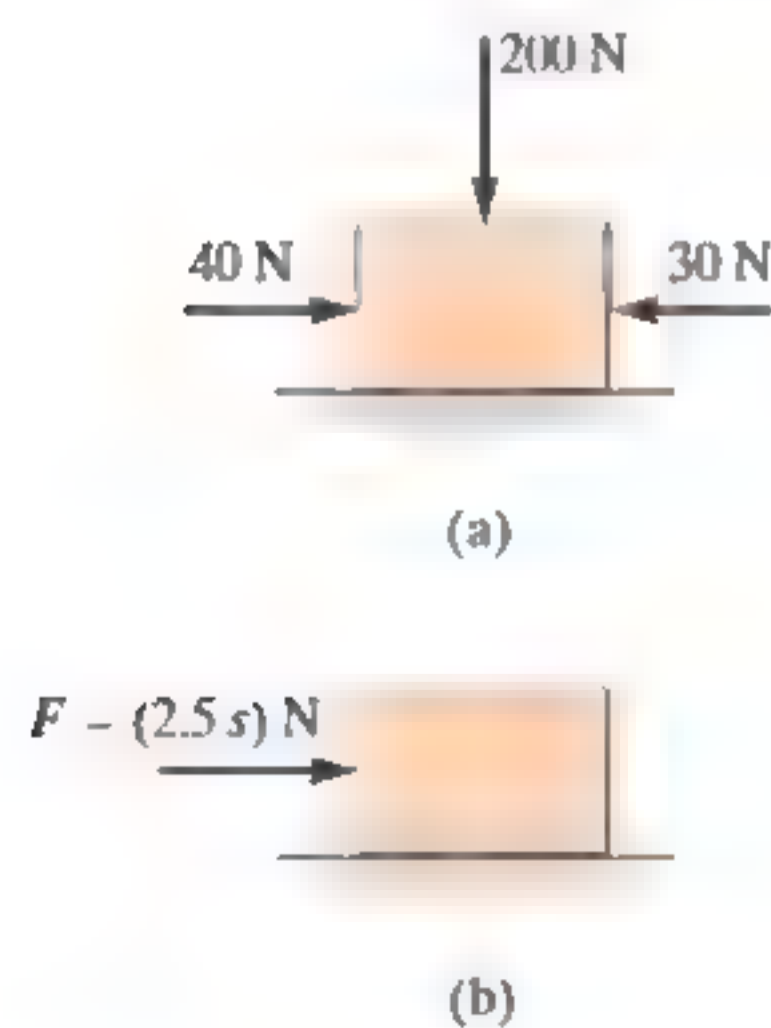
## PROBLEMAS PRELIMINARES

**P13-1.** El bloque de 10 kg se somete a las fuerzas mostradas. En cada caso, determine su velocidad en  $t = 2$  s si  $v = 0$  cuando  $t = 0$ .



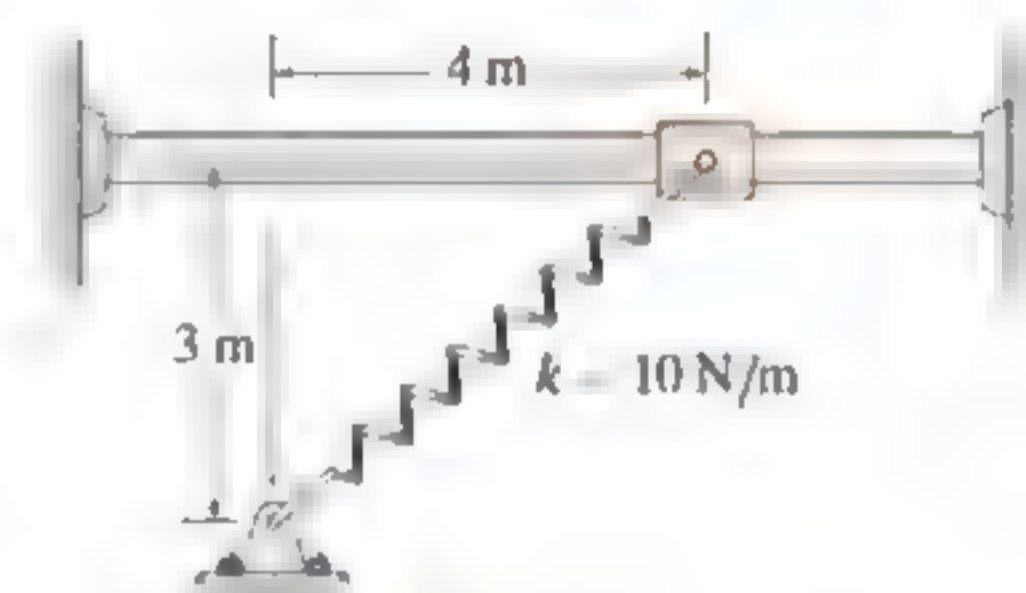
Prob. P13-1

**P13-2.** El bloque de 10 kg se somete a las fuerzas mostradas. En cada caso, determine su velocidad en  $s = 8$  m, si  $v = 3$  m/s cuando  $s = 0$ . El movimiento se produce hacia la derecha.



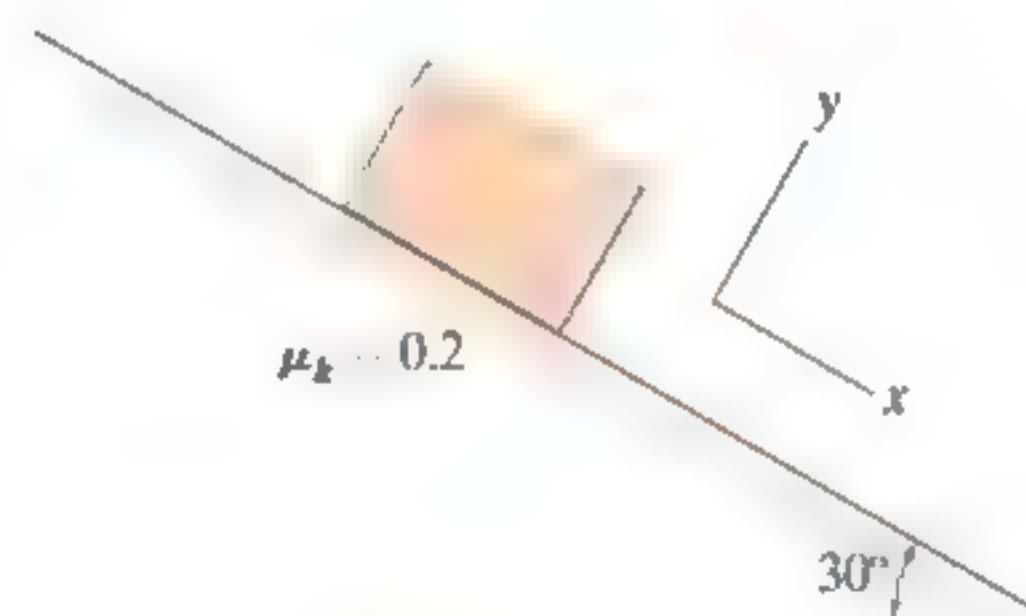
Prob. P13-2

**P13-3.** Determine la aceleración inicial del collarín liso de 10 kg. El resorte tiene una longitud sin estirar de 1 m.



Prob. P13-3

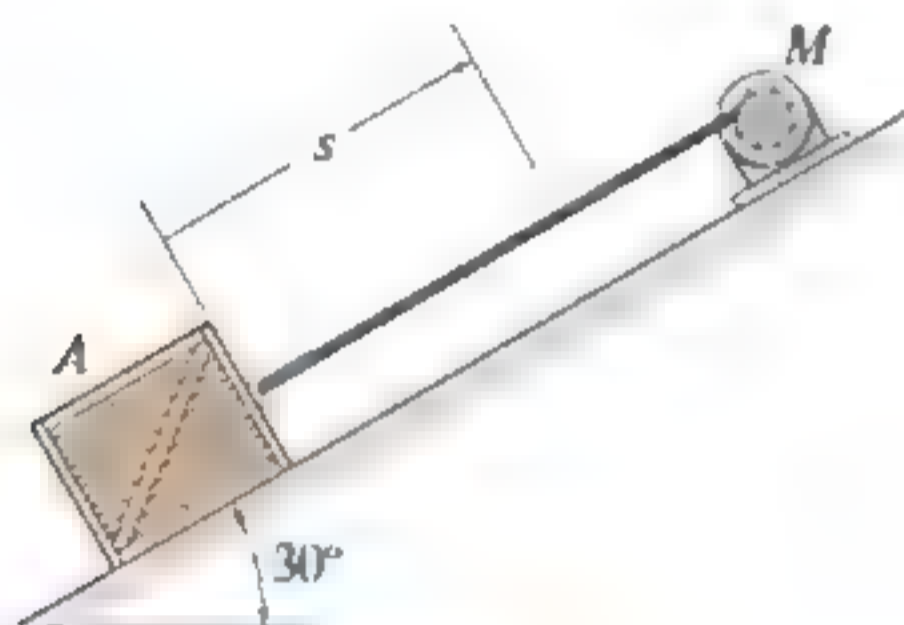
**P13-4.** Escriba las ecuaciones de movimiento en la direcciones  $x$  y  $y$  para el bloque de 10 kg.



Prob. P13-4

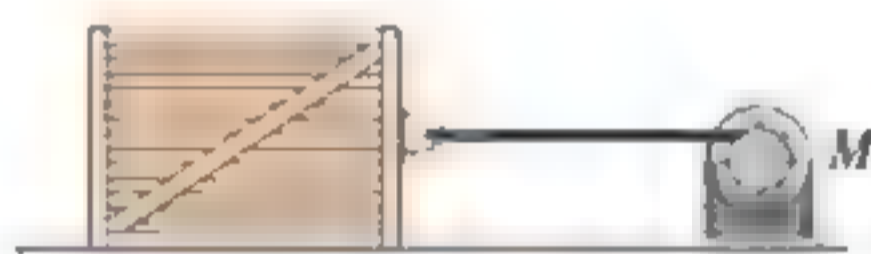
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F13-1.** El motor enrolla el cable con una aceleración constante, de modo que el embalaje de 20 kg se mueve una distancia  $s = 6$  m en 3 s, a partir del reposo. Determine la tensión desarrollada en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es  $\mu_k = 0.3$ .



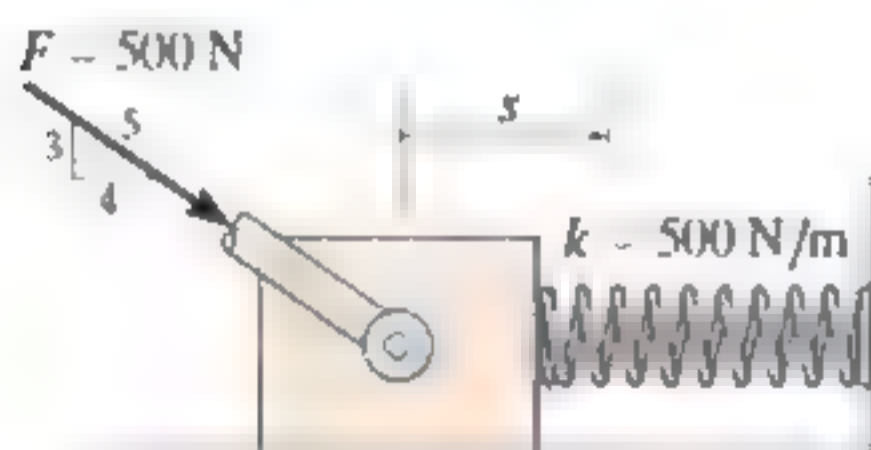
Prob. F13-1

**F13-2.** Si el motor ejerce una fuerza  $F = (10t^2 + 100)$  N en el cable, donde  $t$  está en segundos, determine la velocidad del embalaje de 25 kg cuando  $t = 4$  s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el plano son  $\mu_s = 0.3$  y  $\mu_k = 0.25$ , respectivamente. En un inicio el embalaje está en reposo.



Prob. F13-2

**F13-3.** Un resorte de rigidez  $k = 500$  N/m está montado contra el bloque de 10 kg. Si éste se somete a la fuerza de  $F = 500$  N, determine su velocidad en  $s = 0.5$  m. Cuando  $s = 0$ , el bloque está en reposo y el resorte no está comprimido. La superficie de contacto es lisa.



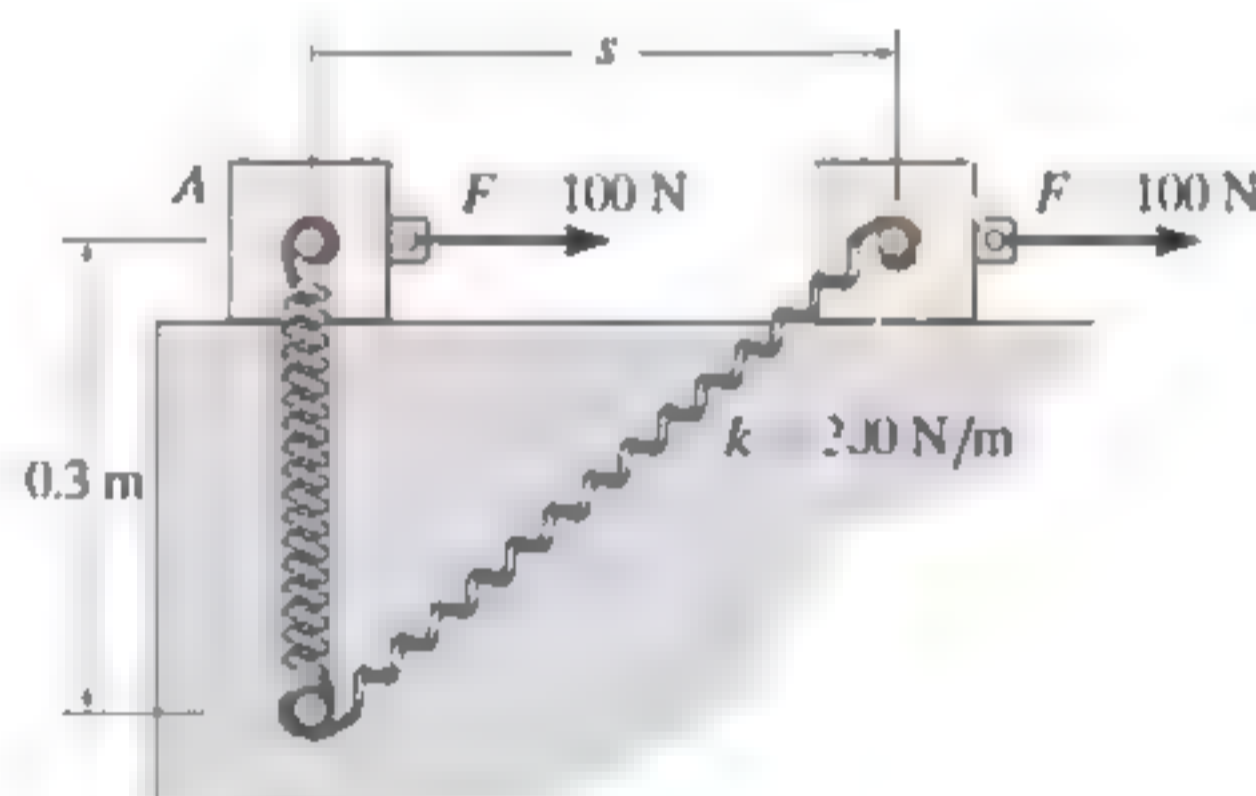
Prob. F13-3

**F13-4.** Al automóvil de 2 Mg lo remolca un malacate. Si éste ejerce una fuerza de  $T = 100(s + 1)$  N en el cable, donde  $s$  es el desplazamiento del auto en metros, determine la rapidez del automóvil cuando  $s = 10$  m, a partir del reposo. Ignore la resistencia a rodar del automóvil.



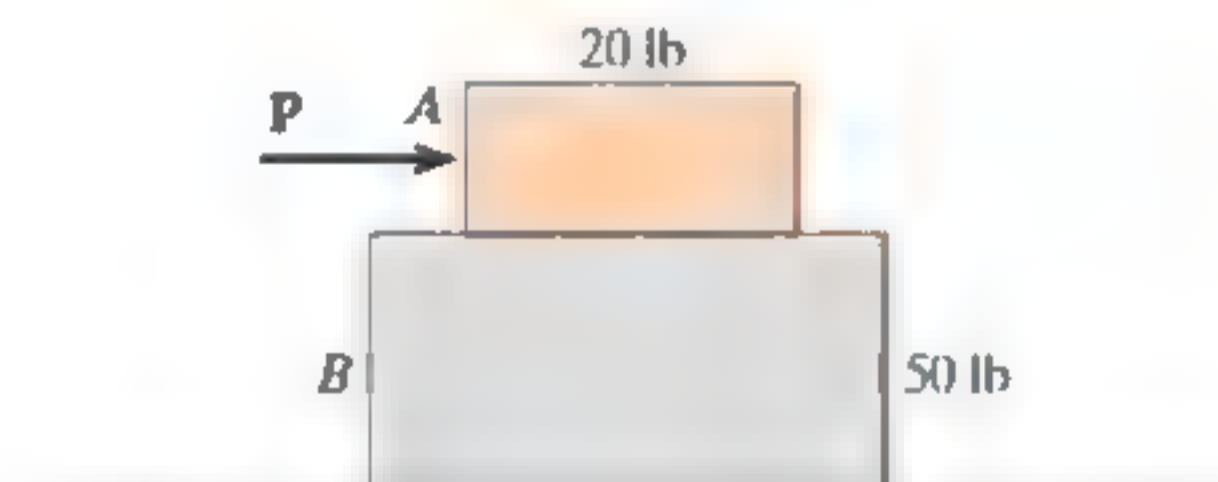
Prob. F13-4

**F13-5.** La rigidez del resorte es  $k = 200$  N/m y no está estirado cuando el bloque de 25 kg está en A. Determine la aceleración del bloque cuando  $s = 0.4$  m. La superficie de contacto entre el bloque y el plano es lisa.



Prob. F13-5

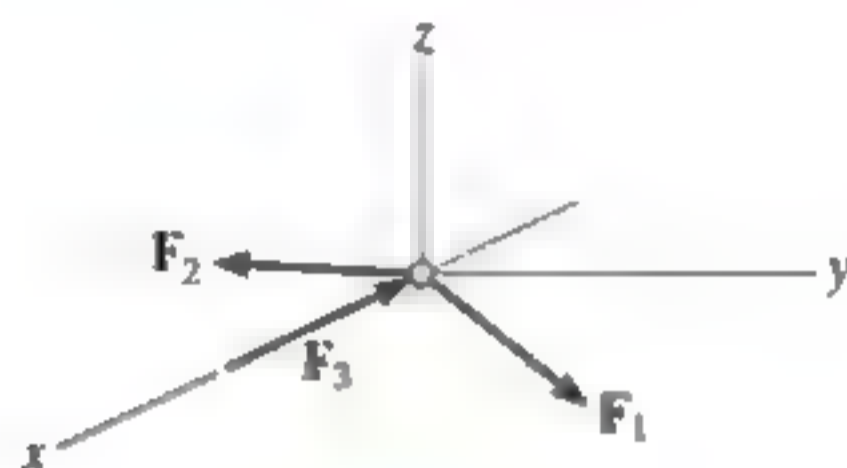
**F13-6.** El bloque B descansa sobre una superficie lisa. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre A y B son  $\mu_s = 0.4$  y  $\mu_k = 0.3$ , respectivamente, determine la aceleración de cada bloque si  $P = 6$  lb.



Prob. F13-6

## PROBLEMAS

**13-1.** La partícula de 6 lb se somete a la acción de su peso y de las fuerzas  $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$  lb,  $\mathbf{F}_2 = \{t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}$  lb y  $\mathbf{F}_3 = \{-2t\mathbf{i}\}$  lb, donde  $t$  se da en segundos. Determine la distancia medida desde el origen a la que está la bola, 2 s después de haber sido liberada desde el reposo.



Prob. 13-1

**13-2.** Los dos vagones de carga *A* y *B* pesan 20 000 lb y 30 000 lb, respectivamente. Si ruedan libremente pendiente abajo cuando se aplican los frenos a todas las ruedas del vagón *A*, lo cual lo hace patinar, determine la fuerza en el acoplamiento *C* entre los dos vagones. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas de *A* y los rieles es  $\mu_k = 0.5$ . Las ruedas del carro *B* giran libremente. Ignore su masa en el cálculo. *Sugerencia:* Resuelva el problema considerando de forma independiente los diagramas de cuerpo libre de los vagones *A* y *B*.



Prob. 13-2

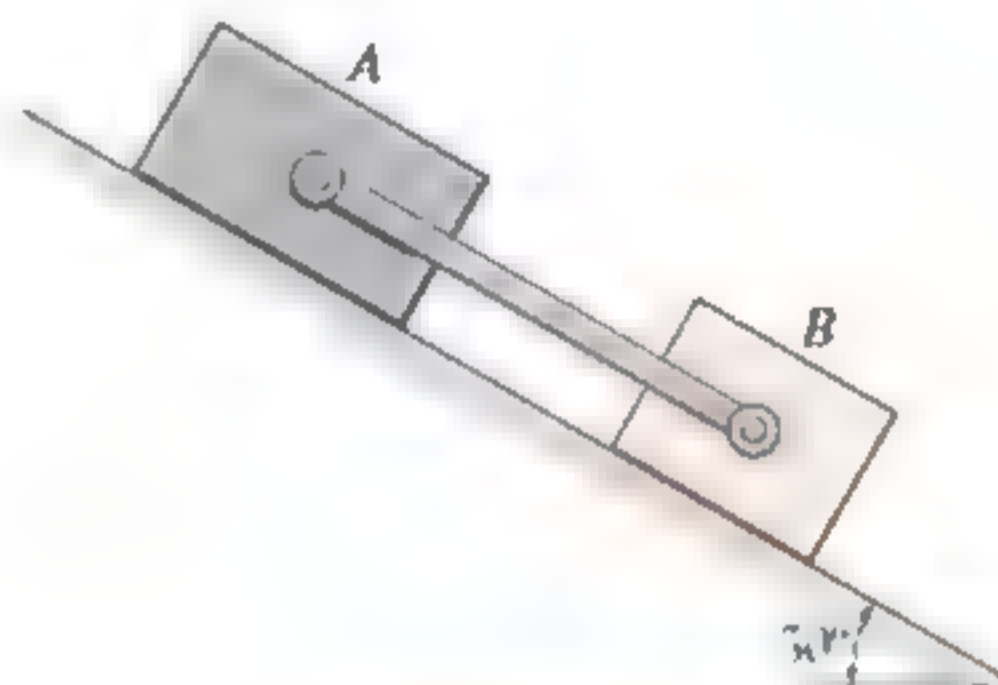
**13-3.** Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 50 kg y el suelo es  $\mu_k = 0.3$ , determine la distancia que recorre y su velocidad cuando  $t = 3$  s. El embalaje parte desde el reposo y  $P = 200$  N.

**\*13-4.** Si el embalaje de 50 kg parte del reposo y alcanza una velocidad de  $v = 4$  m/s al recorrer una distancia de 5 m hacia la derecha, determine la magnitud de la fuerza *P* que actúa sobre el embalaje. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el suelo es  $\mu_k = 0.3$ .



Probs. 13-3/4

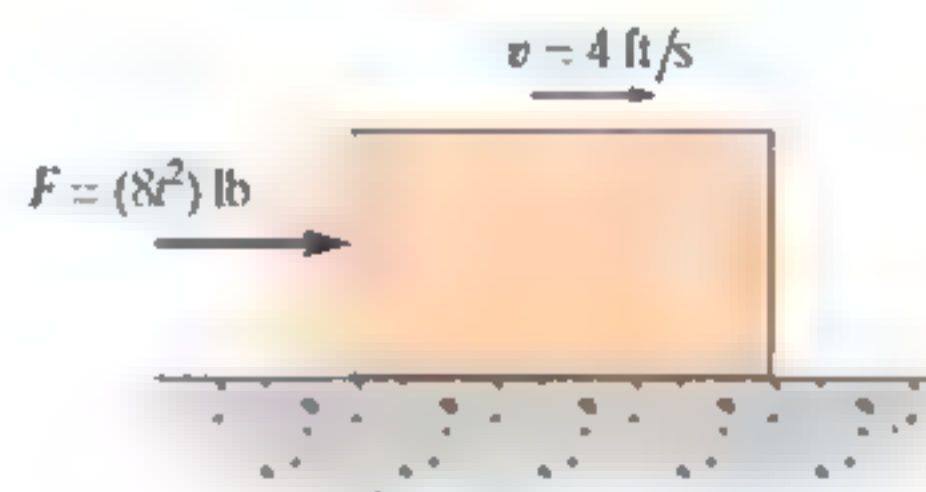
**13-5.** Si los bloques *A* y *B* de 10 kg y 6 kg de masa, respectivamente, se colocan sobre el plano inclinado y se sueltan, determine la fuerza desarrollada en el eslabón. Los coeficientes de fricción cinética entre los bloques y el plano inclinado son  $\mu_A = 0.1$  y  $\mu_B = 0.3$ . Desprecie la masa del eslabón.



Prob. 13-5

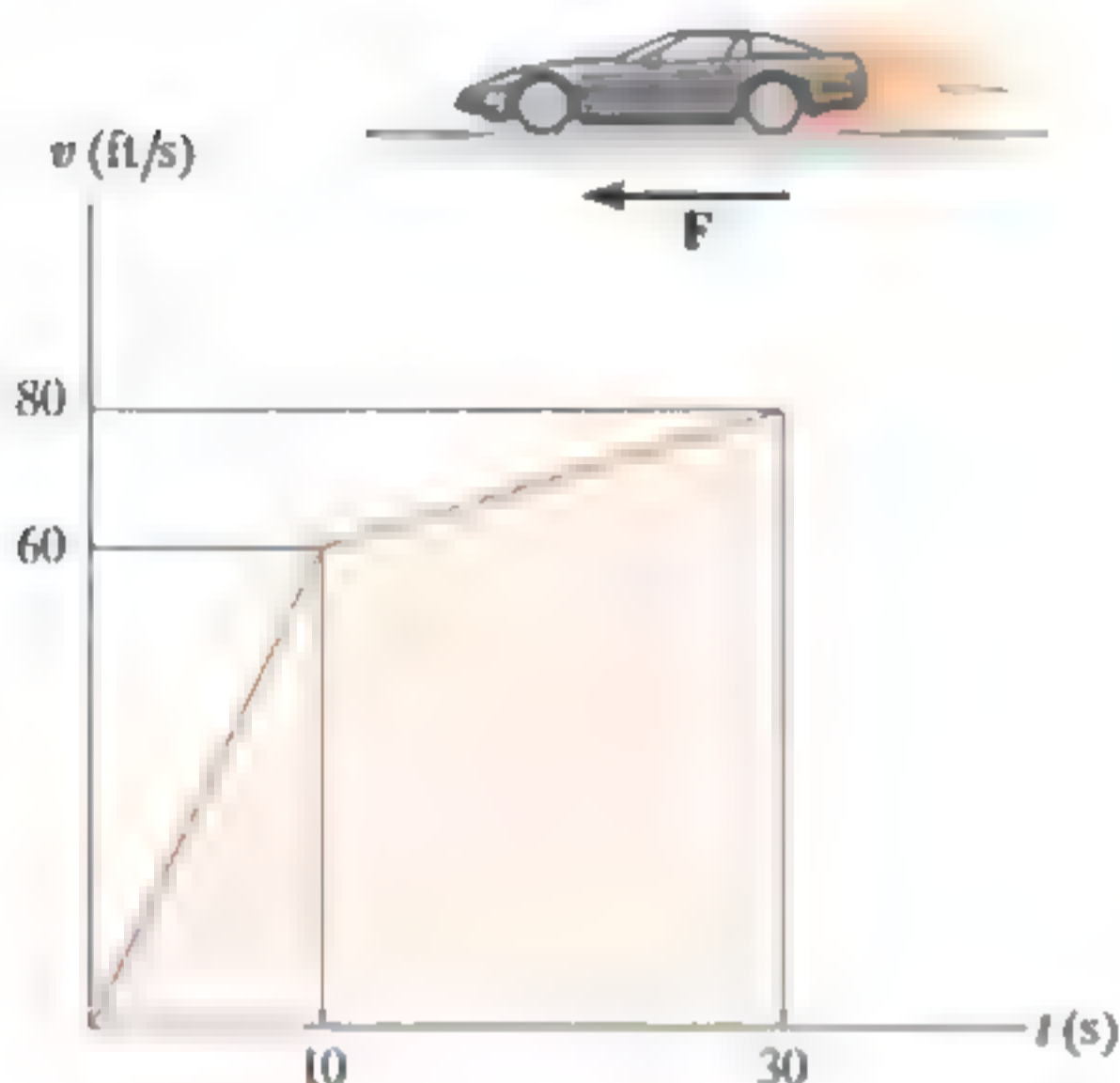
**13-6.** El bloque de 10 lb tiene una rapidez de 4 ft/s cuando se le aplica la fuerza  $F = (8t^2)$  lb. Determine la velocidad del bloque cuando  $t = 2$  s. El coeficiente de fricción cinética en la superficie es  $\mu_k = 0.2$ .

**13-7.** El bloque de 10 lb tiene una rapidez de 4 ft/s cuando se le aplica la fuerza  $F = (8t^2)$  lb. Determine la velocidad del bloque cuando se mueve  $s = 30$  ft. El coeficiente de fricción cinética en la superficie es  $\mu_k = 0.2$ .



Probs. 13-6/7

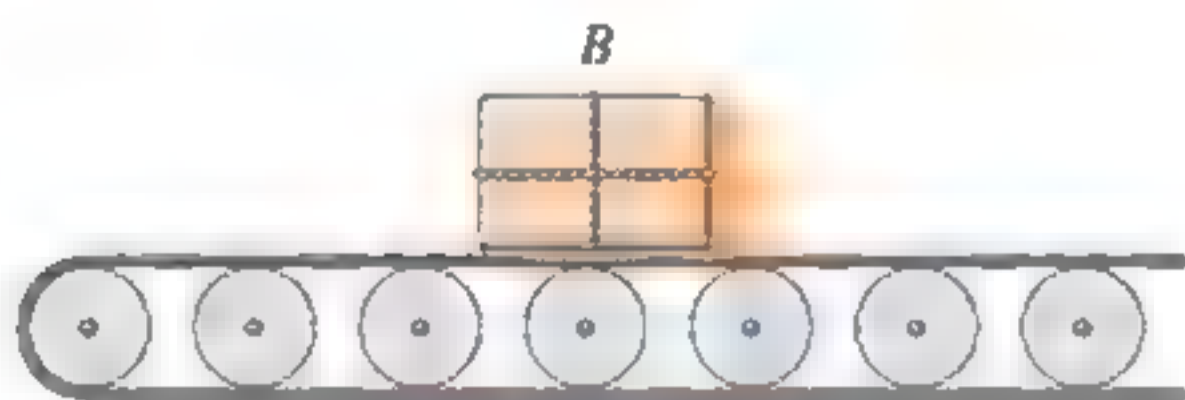
**\*13-8.** La gráfica representa la rapidez del automóvil deportivo de 3500 lb para el periodo de tiempo de 30 s. Grafique la variación de la fuerza de tracción  $F$  necesaria para producir el movimiento.



Prob. 13-8

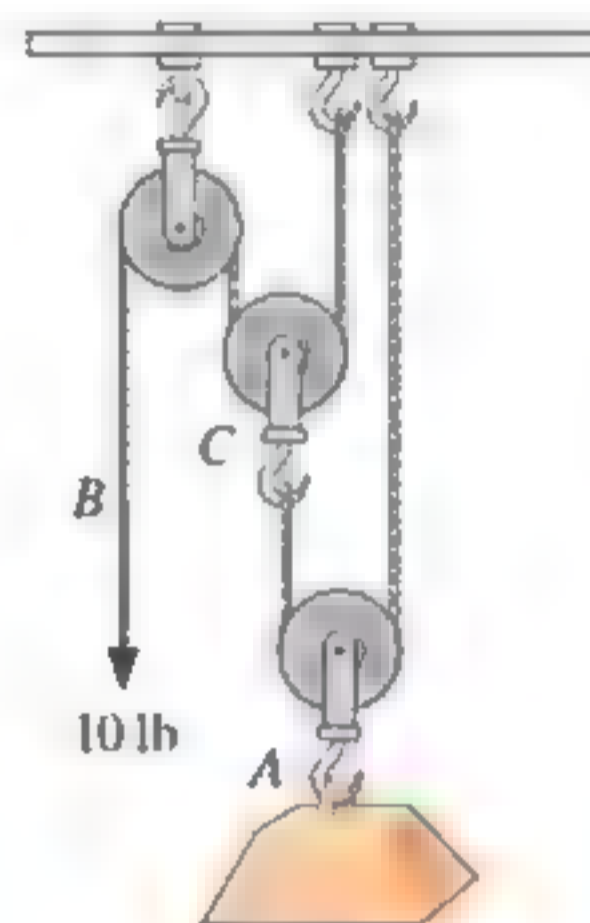
**13-9.** La banda transportadora se mueve a 4 m/s. Si el coeficiente de fricción estática entre la banda y el paquete  $B$  de 10 kg es  $\mu_s = 0.2$ , determine el tiempo más corto en el que puede detenerse la banda, de modo que el paquete no se deslice sobre ella.

**13-10.** La banda transportadora está diseñada para trasladar paquetes de diversos pesos. Cada paquete de 10 kg tiene un coeficiente de fricción cinética  $\mu_k = 0.15$ . Si la rapidez de la banda transportadora es de 5 m/s y después se detiene repentinamente, determine la distancia que se desliza el paquete sobre la banda antes de llegar al reposo.



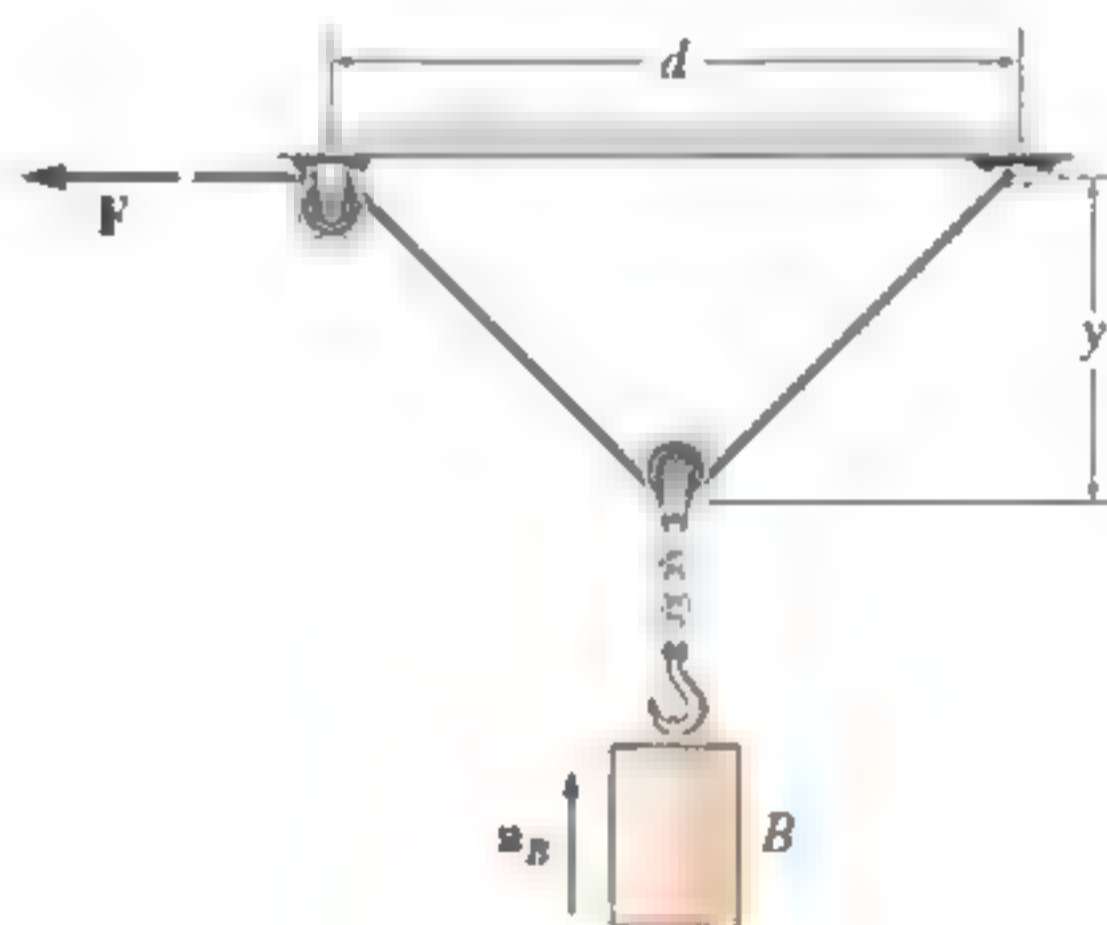
Probs. 13-9/10

**13-11.** Determine el tiempo necesario para jalar 4 ft hacia abajo la cuerda en  $B$ , si parte desde el reposo y se aplica una fuerza de 10 lb a la cuerda. El bloque  $A$  pesa 20 lb. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.



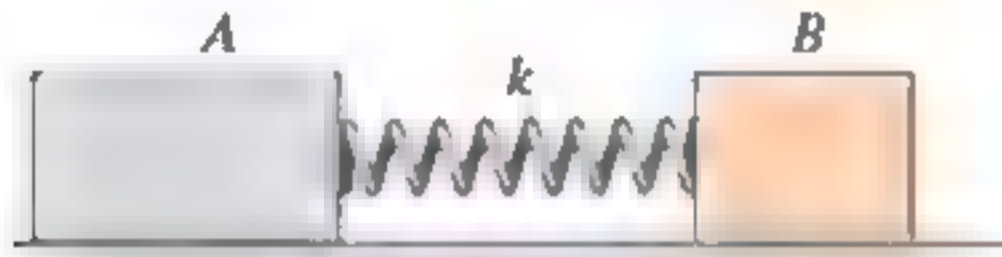
Prob. 13-11

**\*13-12.** El cilindro  $B$  tiene una masa  $m$  y se eleva usando la cuerda y el sistema de poleas ilustrado. Determine la magnitud de la fuerza  $F$  en función de la posición vertical y del bloque, de modo que al aplicar  $F$  el bloque se eleva con una aceleración constante  $a_B$ . Desprecie la masa de la cuerda y las poleas.



Prob. 13-12

**13-13.** El bloque  $A$  tiene un peso de 8 lb y el bloque  $B$  tiene un peso de 6 lb. Descansan sobre una superficie cuyo coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k = 0.2$ . Si el resorte tiene una rigidez de  $k = 20$  lb/ft y está comprimido 0.2 ft, determine la aceleración de cada bloque justo después de liberarse.



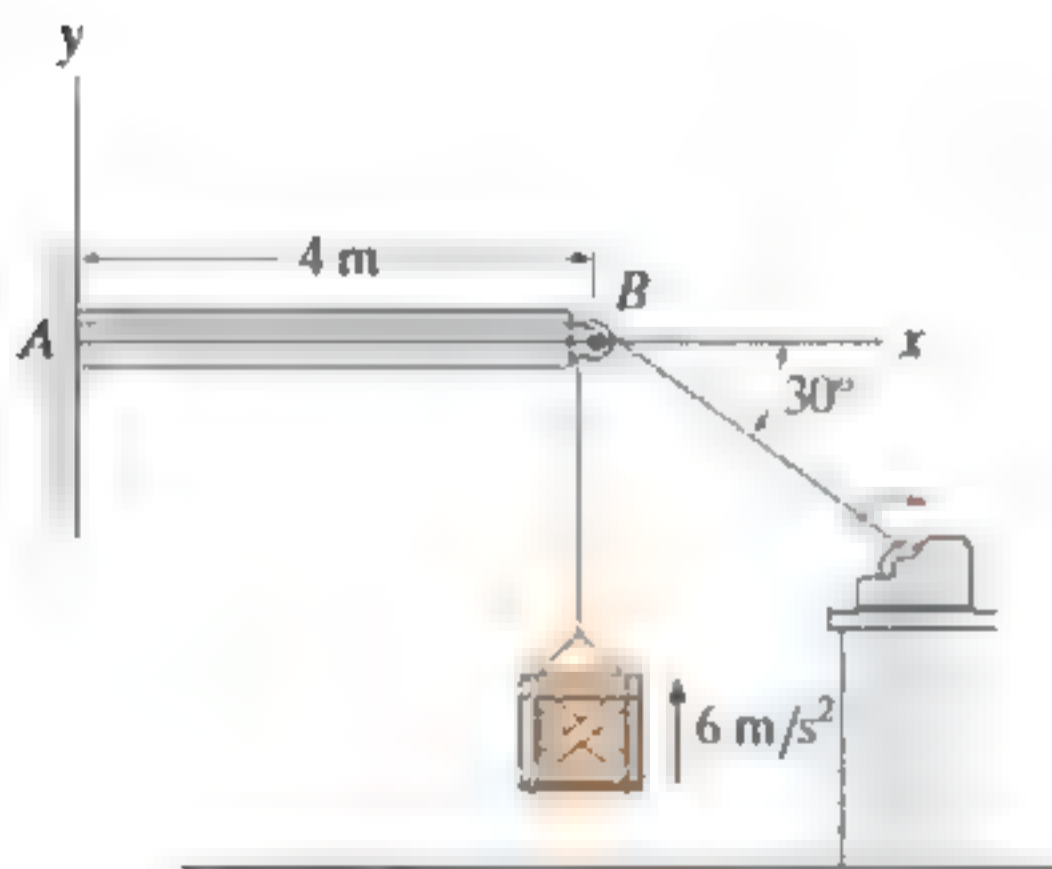
Prob. 13-13

**13-14.** La camioneta de 2 Mg está viajando a 15 m/s cuando se aplican los frenos en todas sus ruedas, de tal manera que patina una distancia de 10 m antes de llegar al reposo. Determine la fuerza horizontal constante desarrollada en el acoplamiento  $C$ , y la fuerza de fricción desarrollada entre los neumáticos de la camioneta y la carretera durante este tiempo. La masa total de la lancha y el remolque es de 1 Mg.



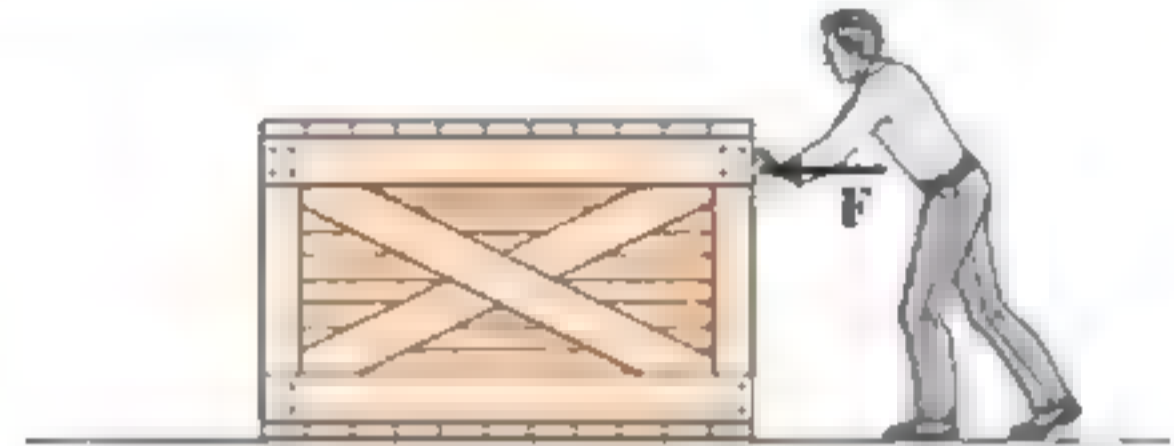
Prob. 13-14

**13-15.** El motor eleva el embalaje de 50 kg con una aceleración de  $6 \text{ m/s}^2$ . Determine las componentes de la fuerza de reacción y el momento de par en el soporte fijo  $A$ .



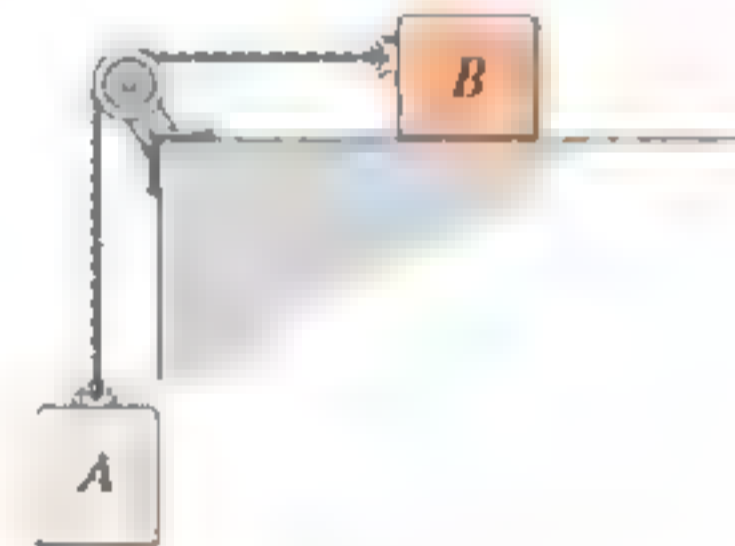
Prob. 13-15

**\*13-16.** El hombre de 75 kg empuja el embalaje de 150 kg con una fuerza horizontal  $F$ . Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y la superficie son  $\mu_s = 0.3$  y  $\mu_k = 0.2$ , y el coeficiente de fricción estática entre los zapatos del hombre y la superficie es  $\mu_s = 0.8$ , demuestre que el hombre es capaz de mover el embalaje. ¿Cuál es la mayor aceleración que el hombre puede dar al embalaje?



Prob. 13-16

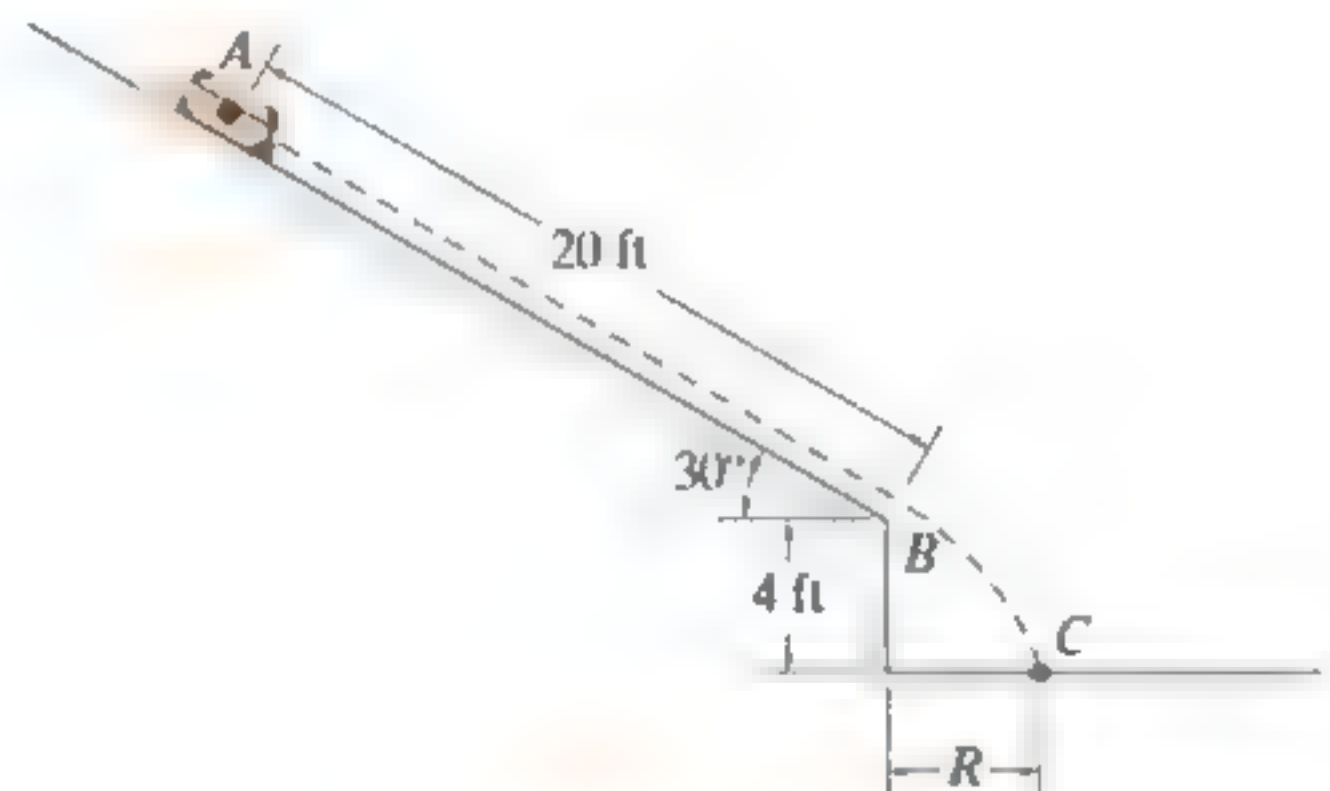
**13-17.** Determine la aceleración de los bloques cuando se libera el sistema. El coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k$  y la masa de cada bloque es  $m$ . Desprecie la masa de las poleas y la cuerda.



Prob. 13-17

**13-18.** Una maleta 40 lb se desliza desde el reposo 20 pies hacia abajo de la rampa lisa. Determine el punto donde golpea el suelo en  $C$ . ¿Cuánto tiempo se tarda en ir de  $A$  a  $C$ ?

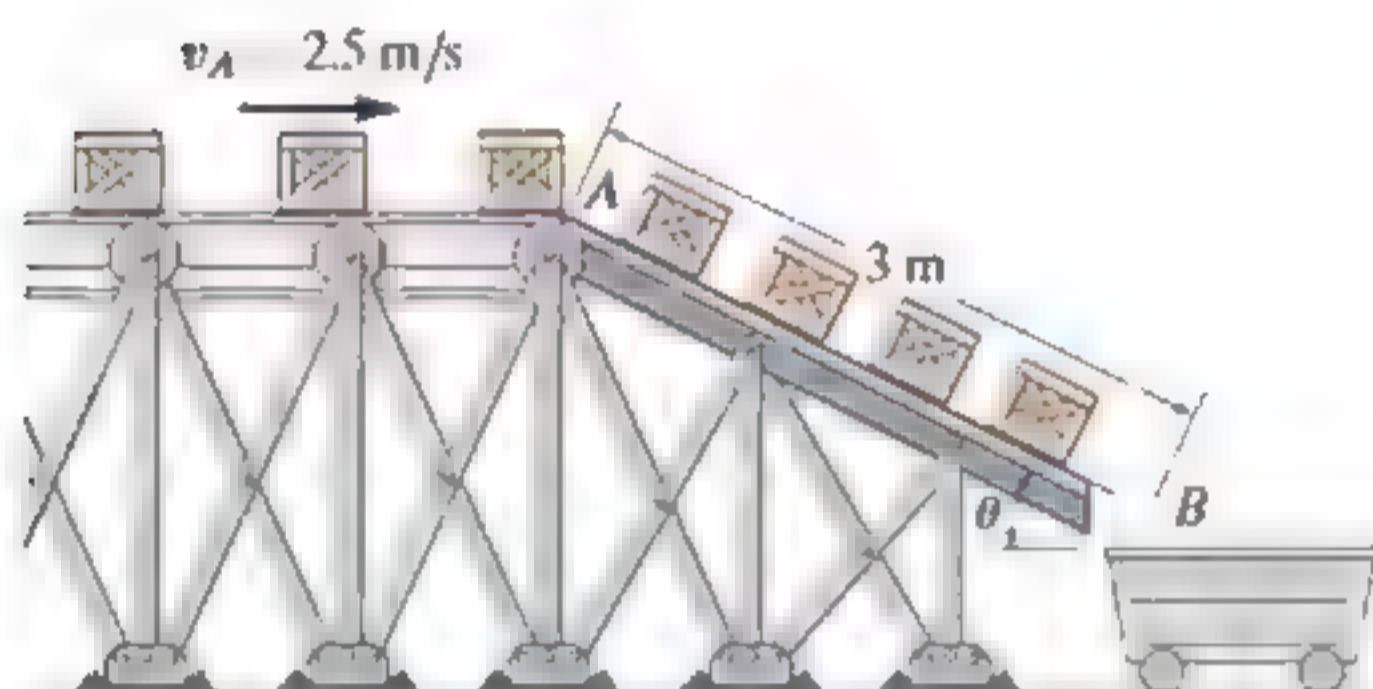
**13-19.** Resuelva el problema 13-18 si la maleta tiene una velocidad inicial de  $v_A = 10 \text{ ft/s}$ , paralela a la rampa y hacia abajo, y el coeficiente de fricción cinética a lo largo de  $AB$  es  $\mu_k = 0.2$ .



Probs. 13-18, 19

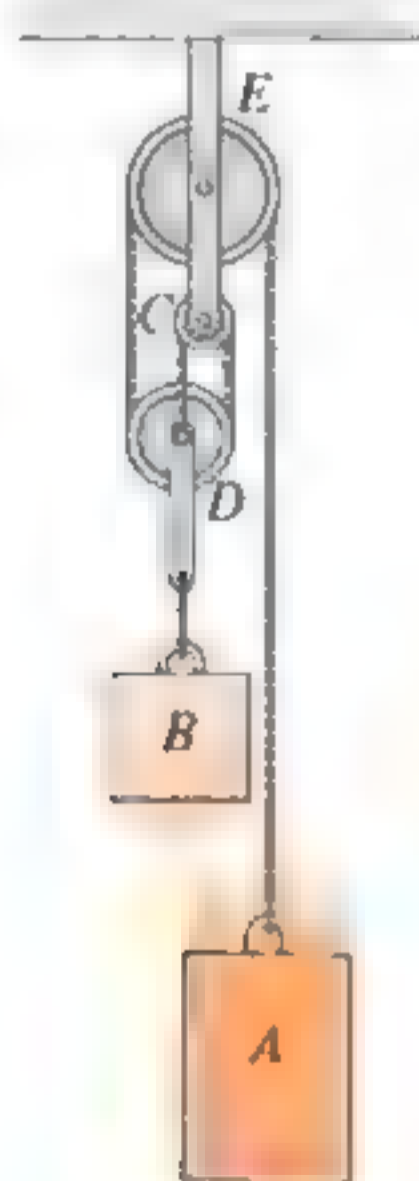
**\*13-20.** La banda transportadora traslada cada embalaje de 12 kg hacia la rampa en  $A$ , de modo que la rapidez del embalaje es  $v_A = 2.5$  m/s, dirigida *a lo largo* de la rampa. Si el coeficiente de fricción cinética entre cada embalaje y la rampa es  $\mu_k = 0.3$ , determine la rapidez a la que se desliza cada embalaje sobre la rampa en  $B$ . Suponga que no se vuelca. Considere que  $\theta = 30^\circ$ .

**13-21.** La banda transportadora traslada cada embalaje de 12 kg hacia la rampa en  $A$ , de modo que la rapidez del embalaje es  $v_A = 2.5$  m/s, dirigida *a lo largo* de la rampa. Si el coeficiente de fricción cinética entre cada embalaje y la rampa es  $\mu_k = 0.3$ , determine la inclinación  $\theta$  más pequeña de la rampa tal que los embalajes se deslizen y caen en el carro.



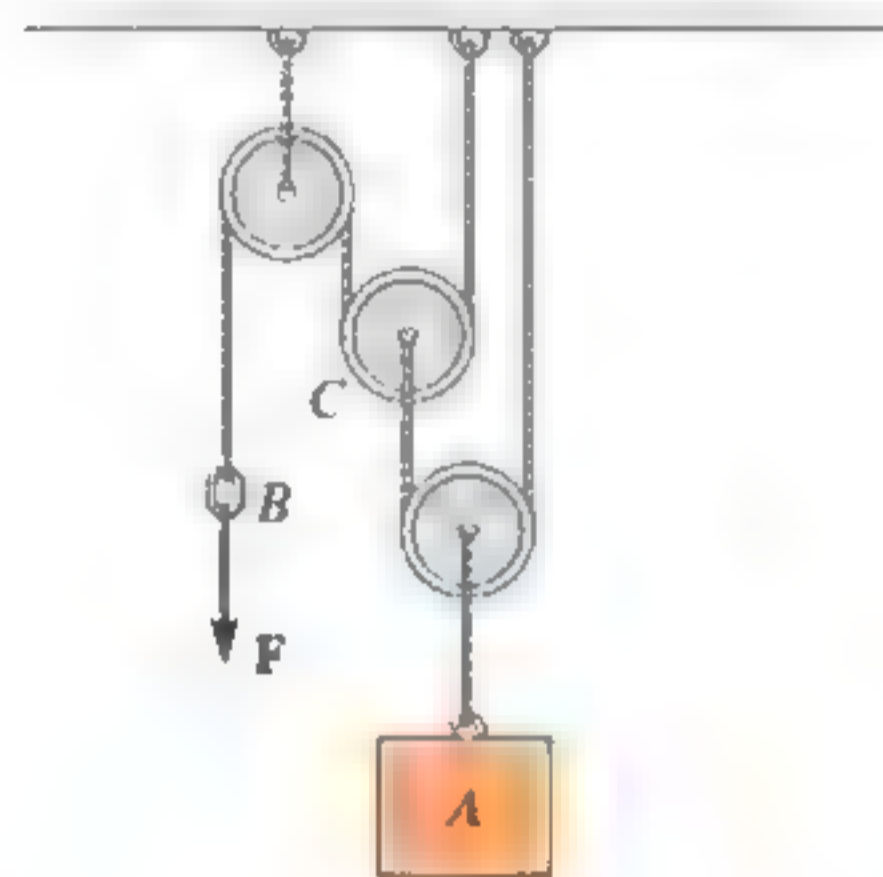
Prob. 13-20/21

**13-22.** El bloque  $A$  de 50 kg se libera desde el reposo. Determine la velocidad del bloque  $B$  de 15 kg en 2 s.



Prob. 13-22

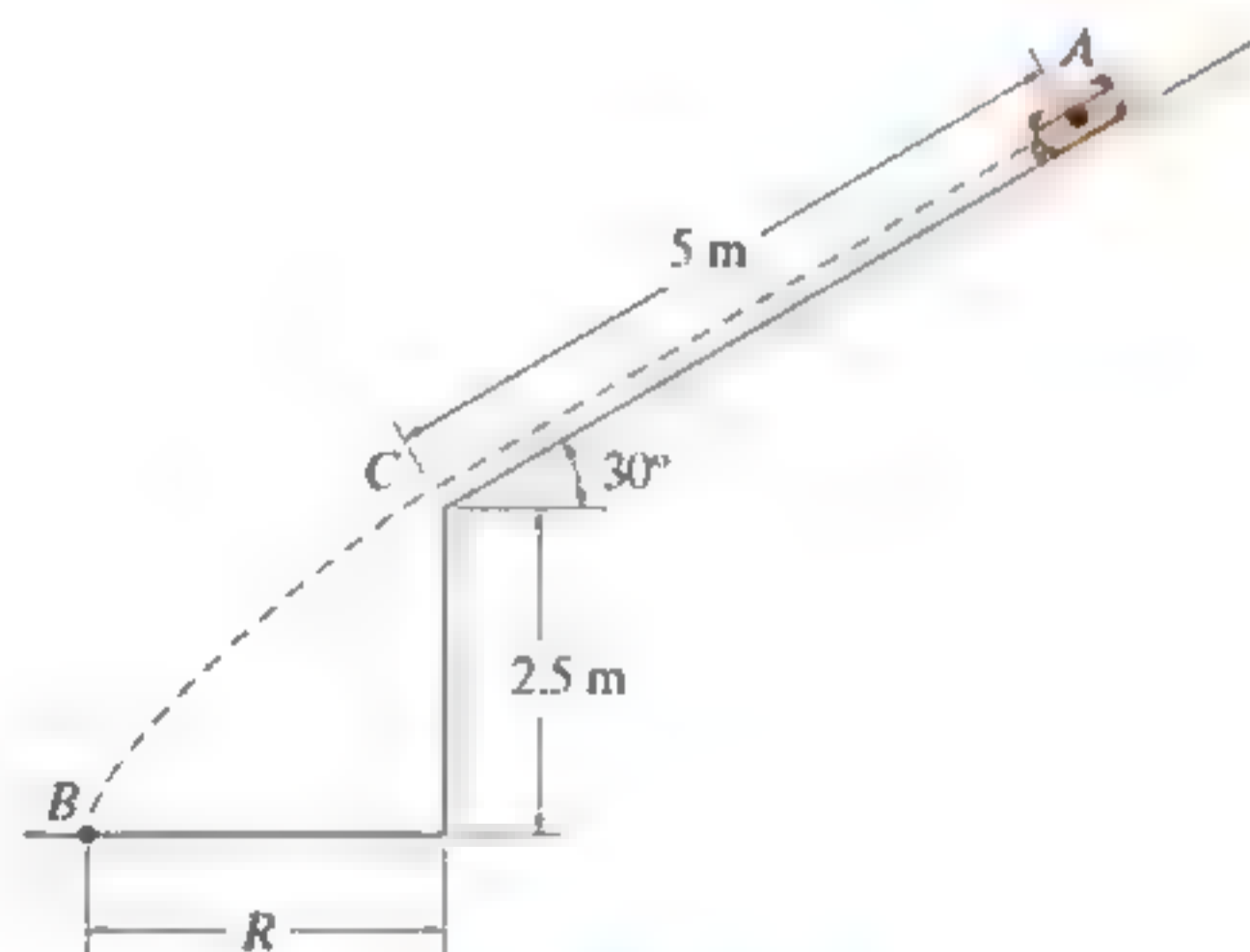
**13-23.** Si la fuerza suministrada es  $F = 150$  N, determine la velocidad del bloque  $A$  de 50 kg, si éste se ha elevado 3 m y parte desde el reposo.



Prob. 13-23

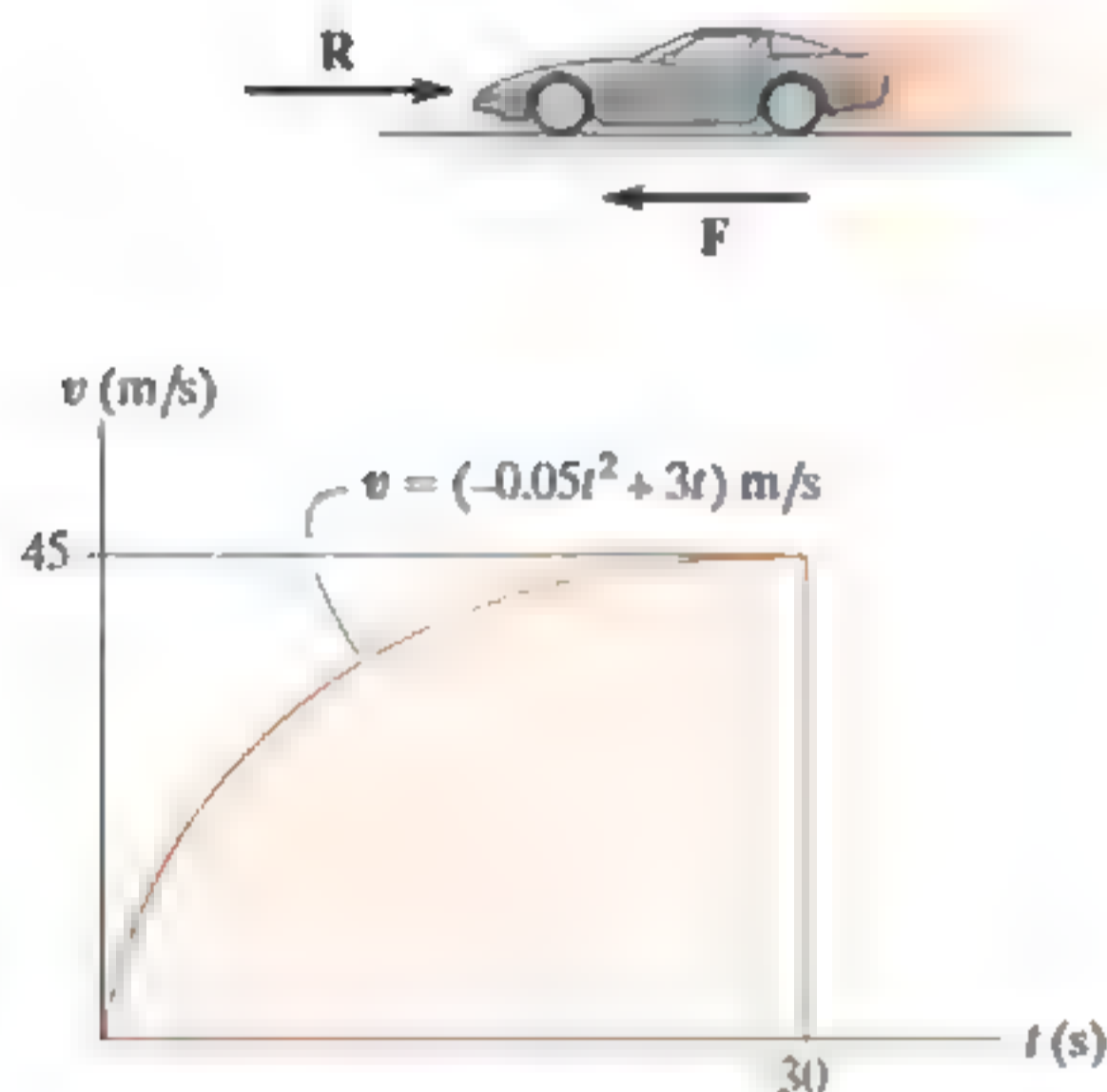
**\*13-24.** Una maleta de 60 kg se desliza desde el reposo 5 m hacia abajo sobre la rampa lisa. Determine la distancia  $R$  a la que golpea el suelo en  $B$ . ¿Cuánto tiempo tarda en ir desde  $A$  hasta  $B$ ?

**13-25.** Resuelva el problema 13-24 si la maleta tiene una velocidad inicial, hacia abajo paralela a la rampa, de  $v_A = 2$  m/s y el coeficiente de fricción cinética a lo largo de  $AC$  es  $\mu_k = 0.2$ .



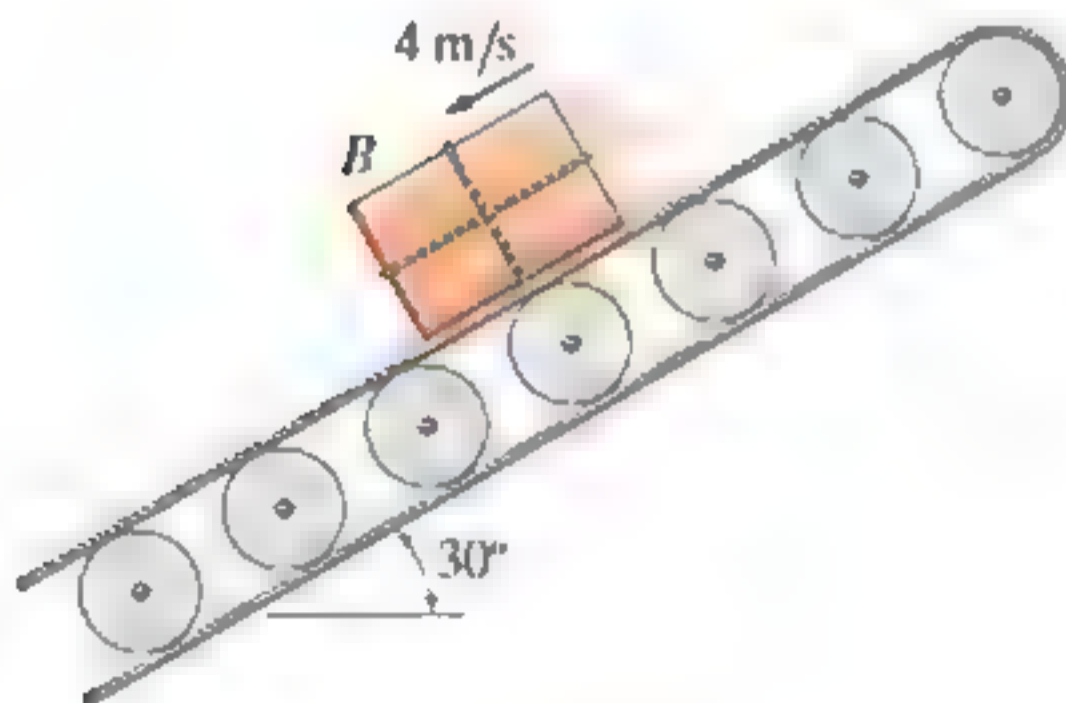
Probs. 13-24/25

**13-26.** El auto deportivo de 1.5 Mg tiene una fuerza de tracción de  $F = 4.5$  kN. Si produce la velocidad descrita por la gráfica de  $v-t$  mostrada, grafique la resistencia  $R$  del aire contra  $t$  para este periodo de tiempo.



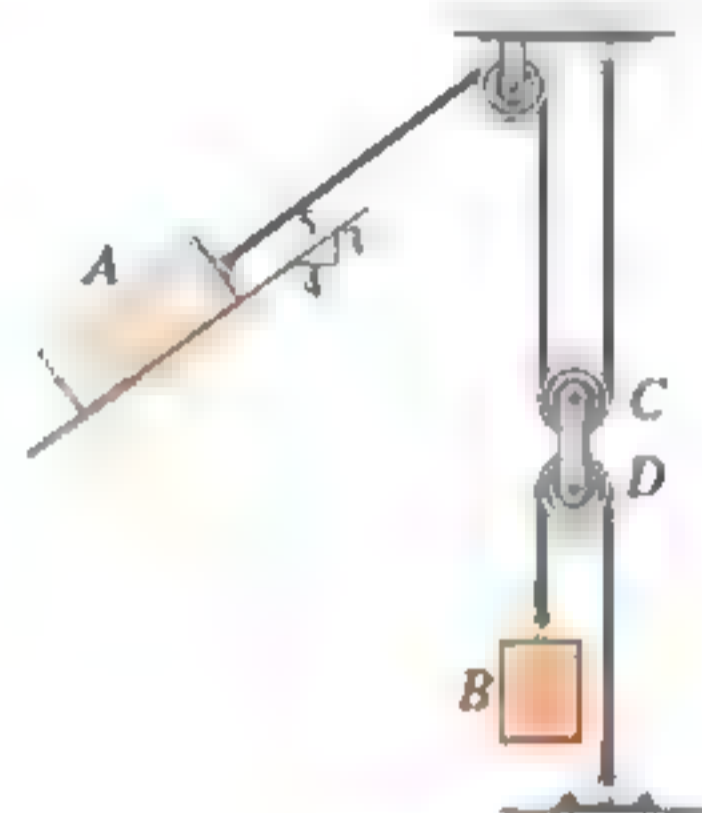
Prob. 13-26

**13-27.** La banda transportadora se mueve hacia abajo a 4 m/s. Si el coeficiente de fricción estática entre la banda y el paquete  $B$  de 15 kg es  $\mu_s = 0.8$ , determine el tiempo más corto en el que la banda se puede detener, de modo que el paquete no se deslice sobre ella.



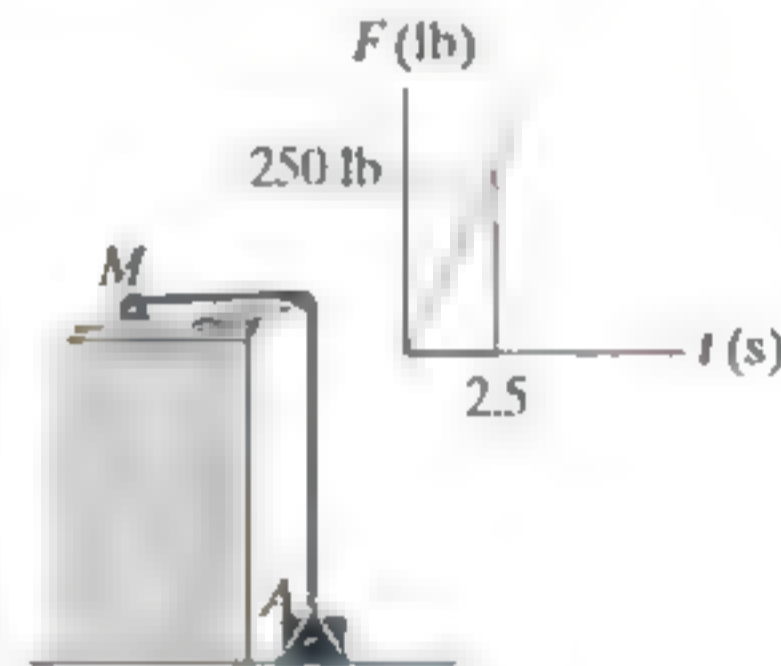
Prob. 13-27

**13-28.** En el instante mostrado, el bloque  $A$  de 100 lb está bajando por el plano a 5 ft/s y está unido al bloque  $B$  de 50 lb. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es  $\mu_k = 0.2$ , determine la aceleración de  $A$  y la distancia que se desliza  $A$  antes de detenerse. Desprecie la masa de las poleas y los cables.



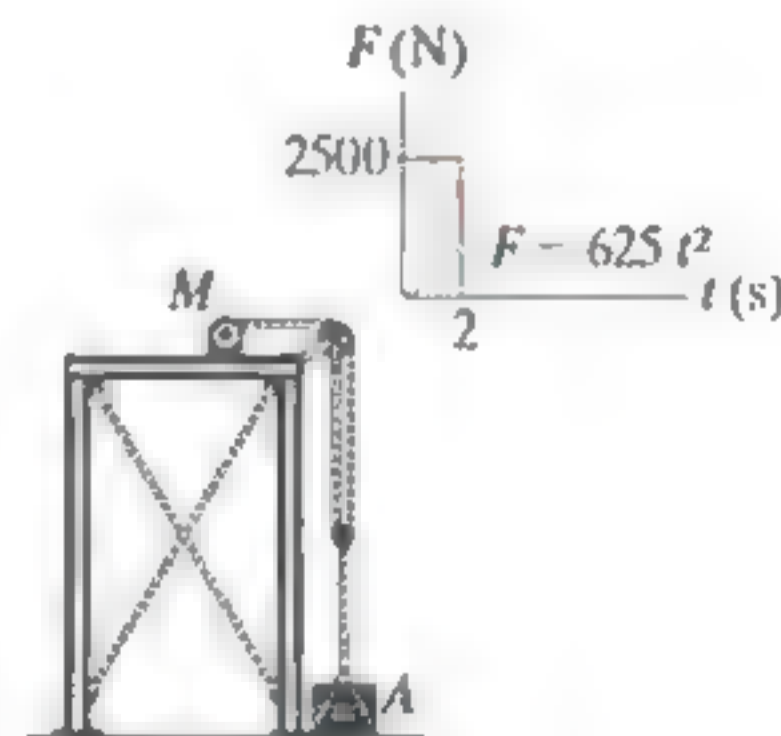
Prob. 13-28

**13-29.** En la gráfica se muestra la fuerza ejercida por el motor sobre el cable. Determine la velocidad del embalaje de 200 lb cuando  $t = 2.5$  s.



Prob. 13-29

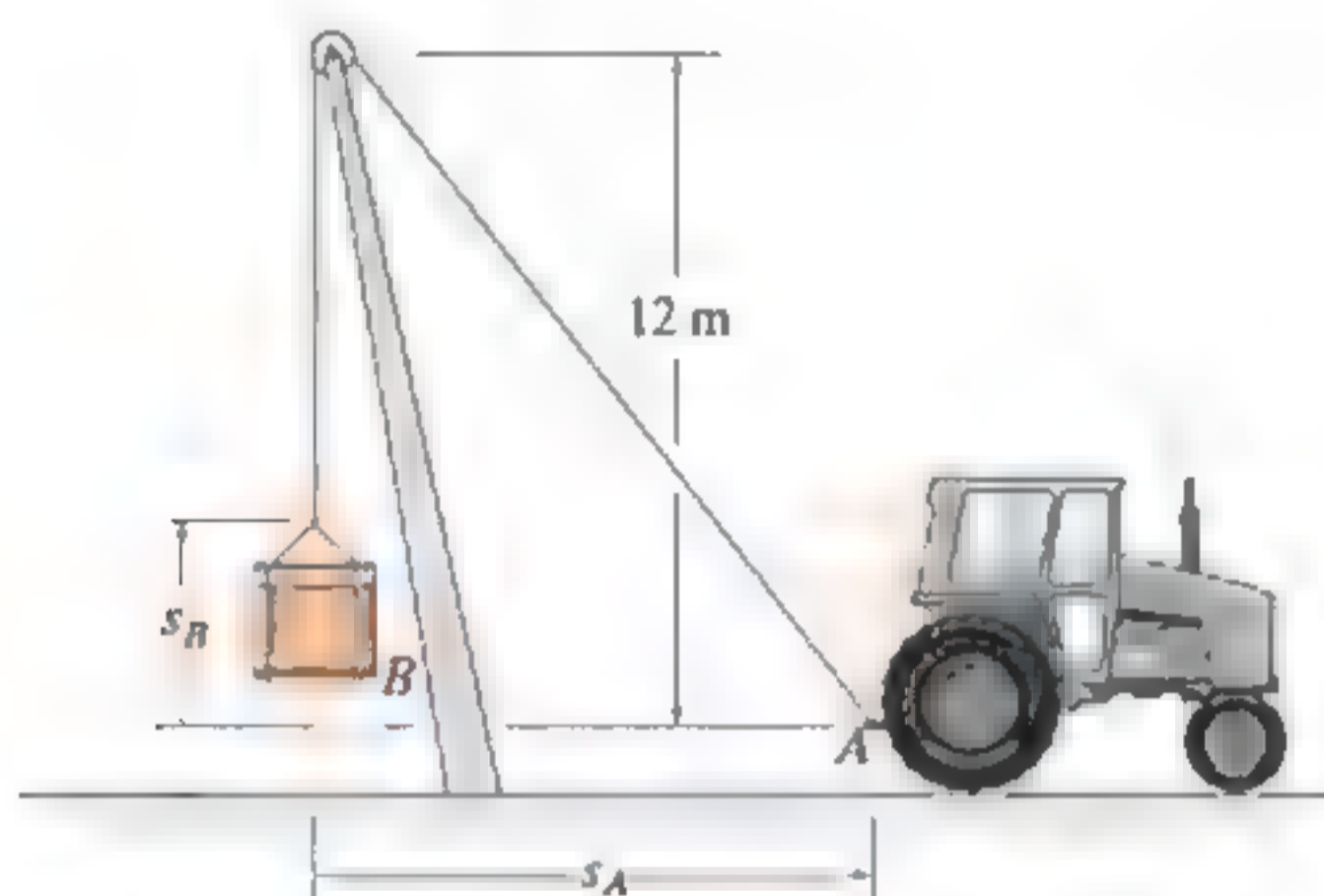
**13-30.** En la gráfica se muestra la fuerza del motor  $M$  sobre el cable. Determine la velocidad del embalaje  $A$  de 400 kg cuando  $t = 2$  s.



Prob. 13-30

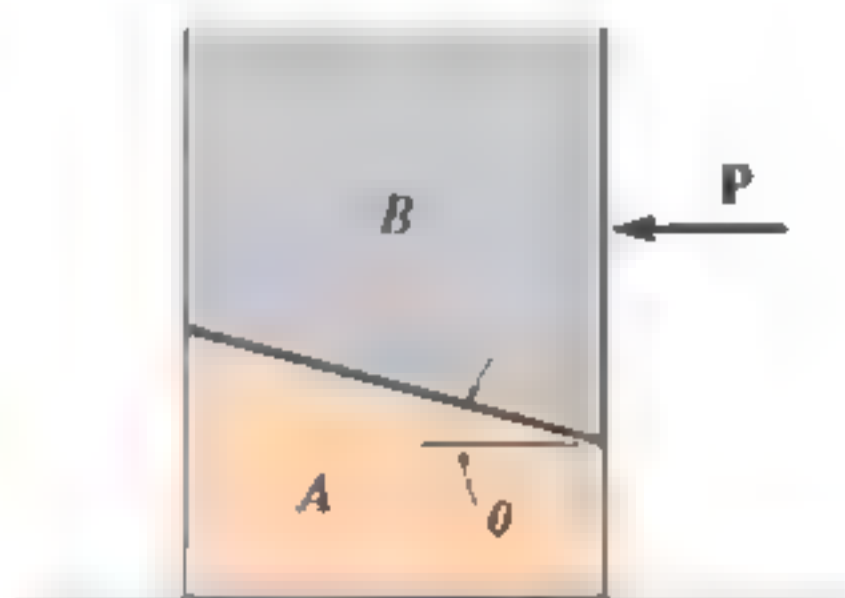
**13-31.** Se utiliza el tractor para levantar la carga  $B$  de 150 kg con el sistema que consiste de una cuerda de 24 m de largo, una grúa tipo pluma y una polea. Si el tractor se desplaza hacia la derecha a una rapidez constante de 4 m/s, determine la tensión en la cuerda si  $s_A = 5$  m. Cuando  $s_A = 0, s_B = 0$ .

**\*13-32.** Se utiliza el tractor para levantar la carga  $B$  de 150 kg con el sistema que consiste de una cuerda de 24 m de largo, una grúa tipo pluma y una polea. Si el tractor se desplaza hacia la derecha con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  y tiene una velocidad de 4 m/s en el instante en que  $s_A = 5$  m, determine la tensión en la cuerda en este instante. Cuando  $s_A = 0, s_B = 0$ .



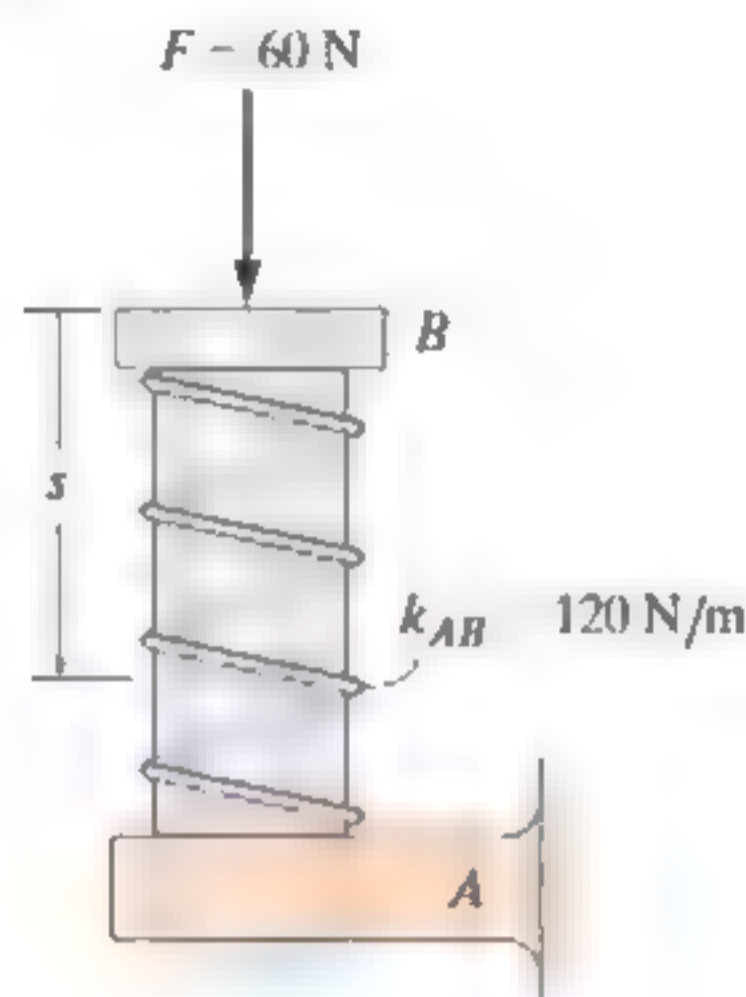
Probs. 13-31/32

**13-33.** Los bloques  $A$  y  $B$  tienen una masa  $m$ . Determine la mayor fuerza horizontal  $P$  que se puede aplicar a  $B$  de modo que no se deslice sobre  $A$ . Además, ¿cuál es la aceleración correspondiente? El coeficiente de fricción estática entre  $A$  y  $B$  es  $\mu_s$ . Desprecie la fricción entre  $A$  y la superficie horizontal.



Prob. 13-33

**13-34.** El cilindro liso de 4 kg se sostiene mediante el resorte que tiene una rigidez de  $k_{AB} = 120 \text{ N/m}$ . Determine la velocidad del cilindro cuando se mueve hacia abajo  $s = 0.2$  m, por la aplicación de la fuerza  $F = 60 \text{ N}$ , desde su posición de equilibrio.



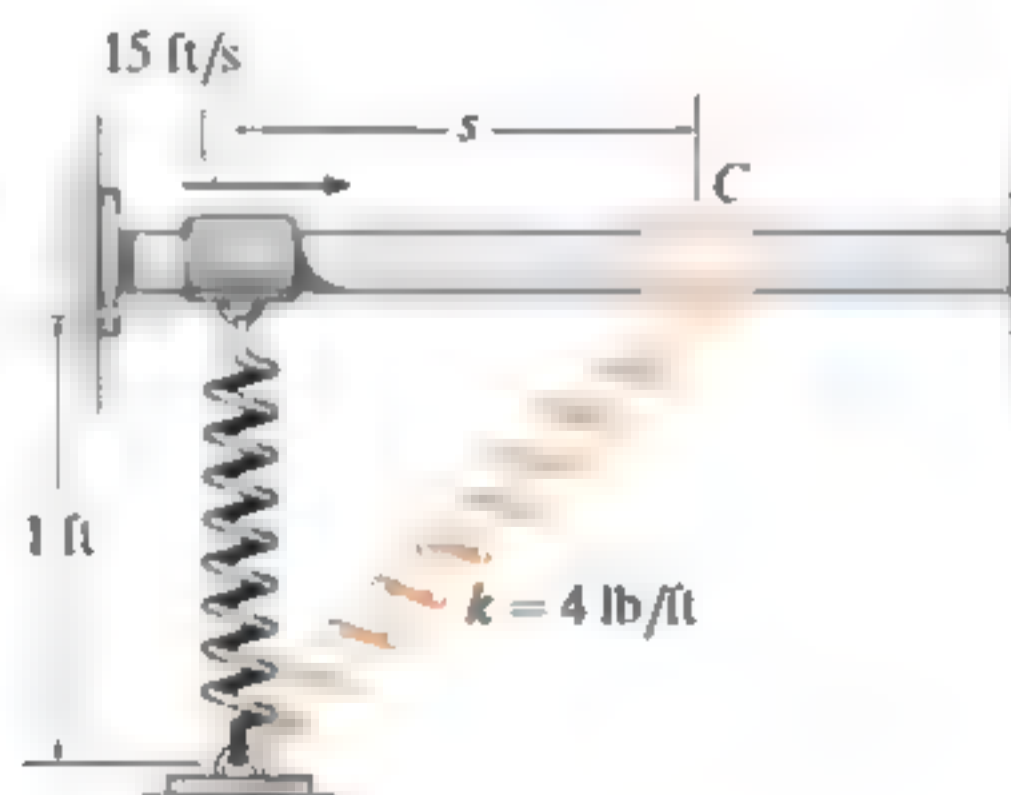
Prob. 13-34

**13-35.** El coeficiente de fricción estática entre el embalaje de 200 kg y la plataforma plana de la camioneta es  $\mu_s = 0.3$ . Determine el tiempo más corto para que la camioneta alcance una rapidez de 60 km/h, si parte desde el reposo con aceleración constante, de modo que el embalaje no se deslice.



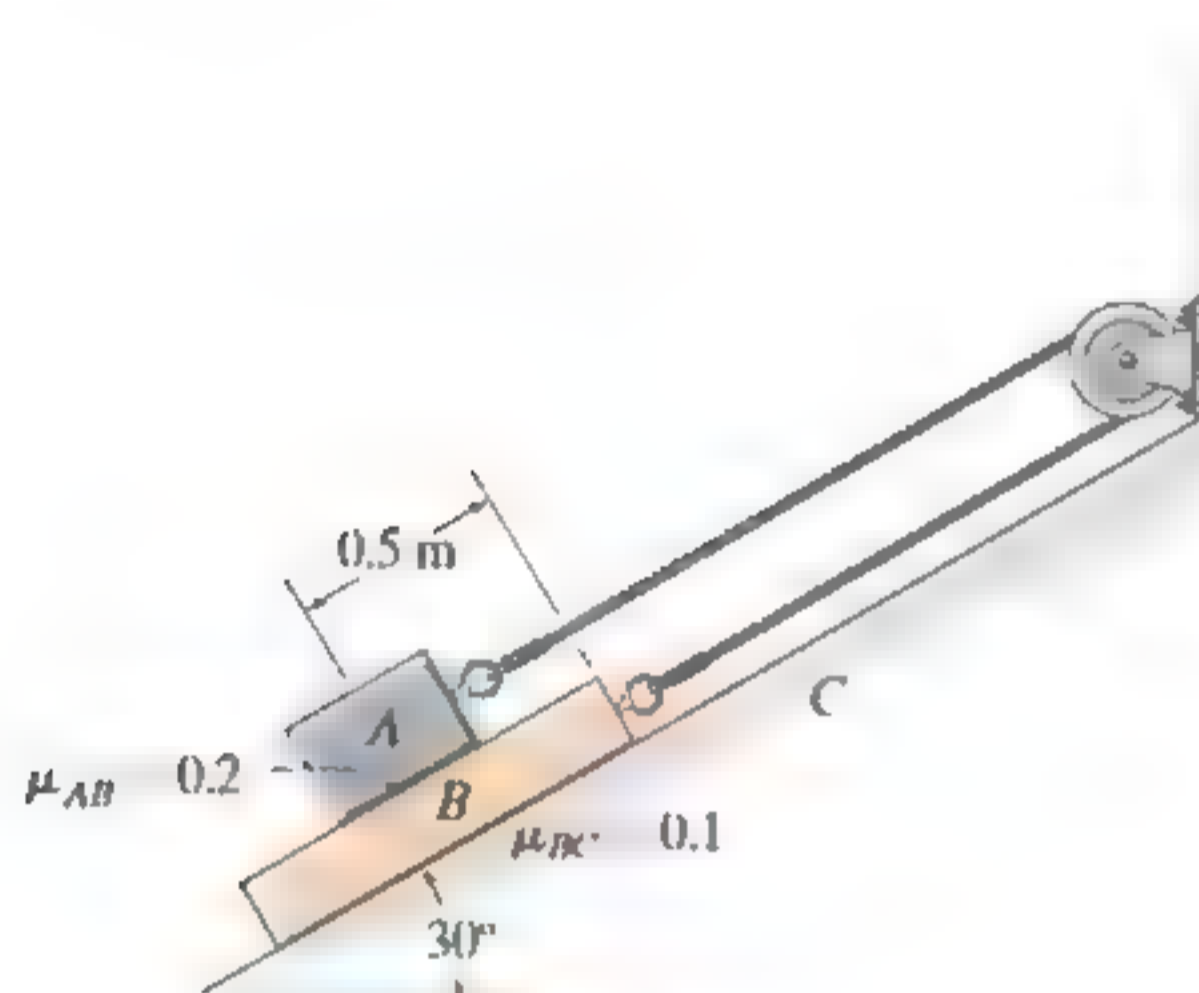
Prob. 13-35

**\*13-36.** El collarín de 2 lb  $C$  se ajusta holgadamente en el eje liso. Si el resorte no está estirado cuando  $s = 0$  y al collarín se le da una velocidad de 15 ft/s, determine la velocidad del collarín cuando  $s = 1$  ft.



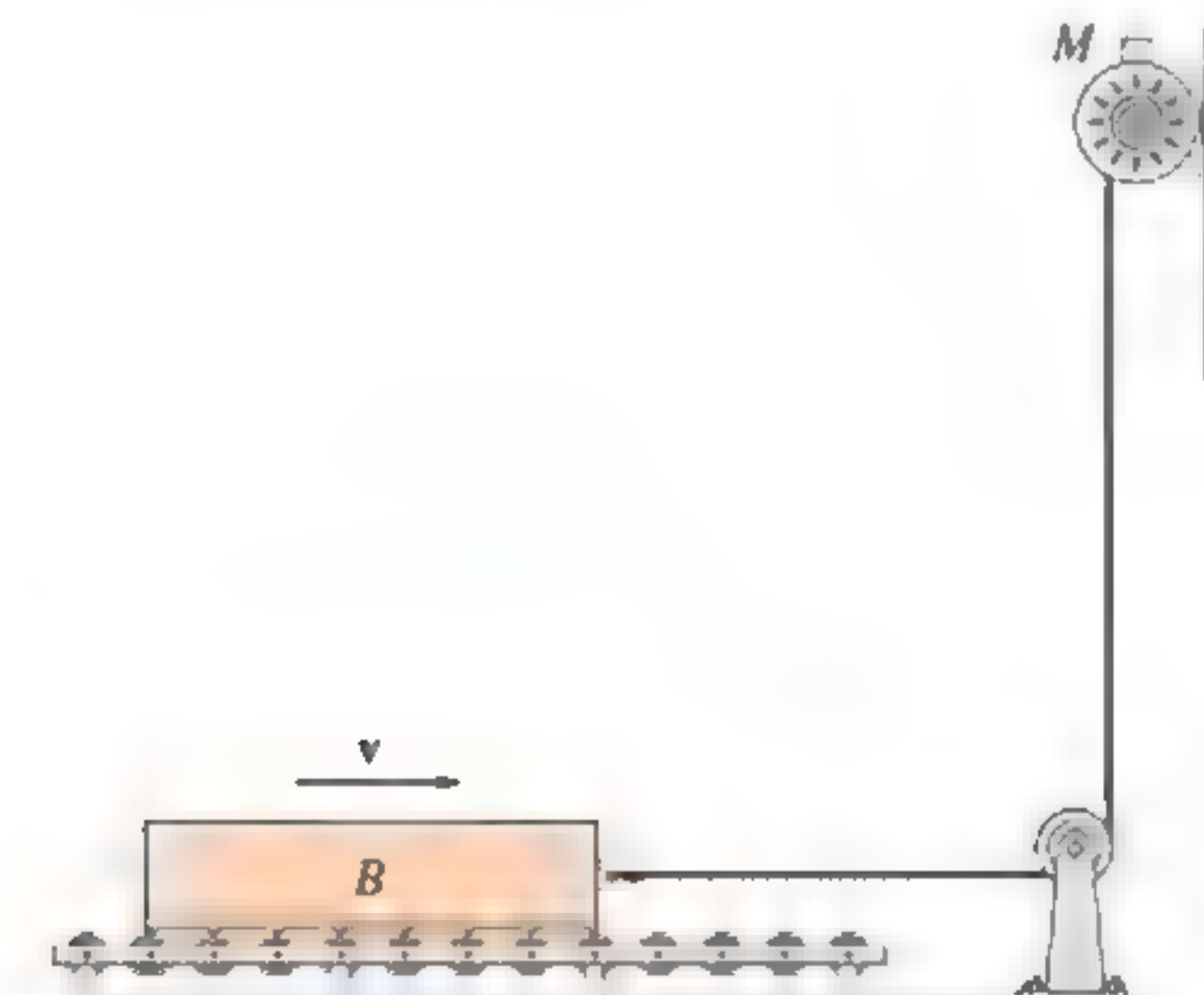
Prob. 13-36

**13-37.** El bloque  $A$  de 10 kg descansa sobre la placa  $B$  de 50 kg en la posición mostrada. Si se desprecia la masa de la cuerda y la polea, y se usan los coeficientes de fricción cinética indicados, determine el tiempo necesario para que el bloque  $A$  se deslice 0.5 m sobre la placa cuando el sistema se libera desde el reposo.



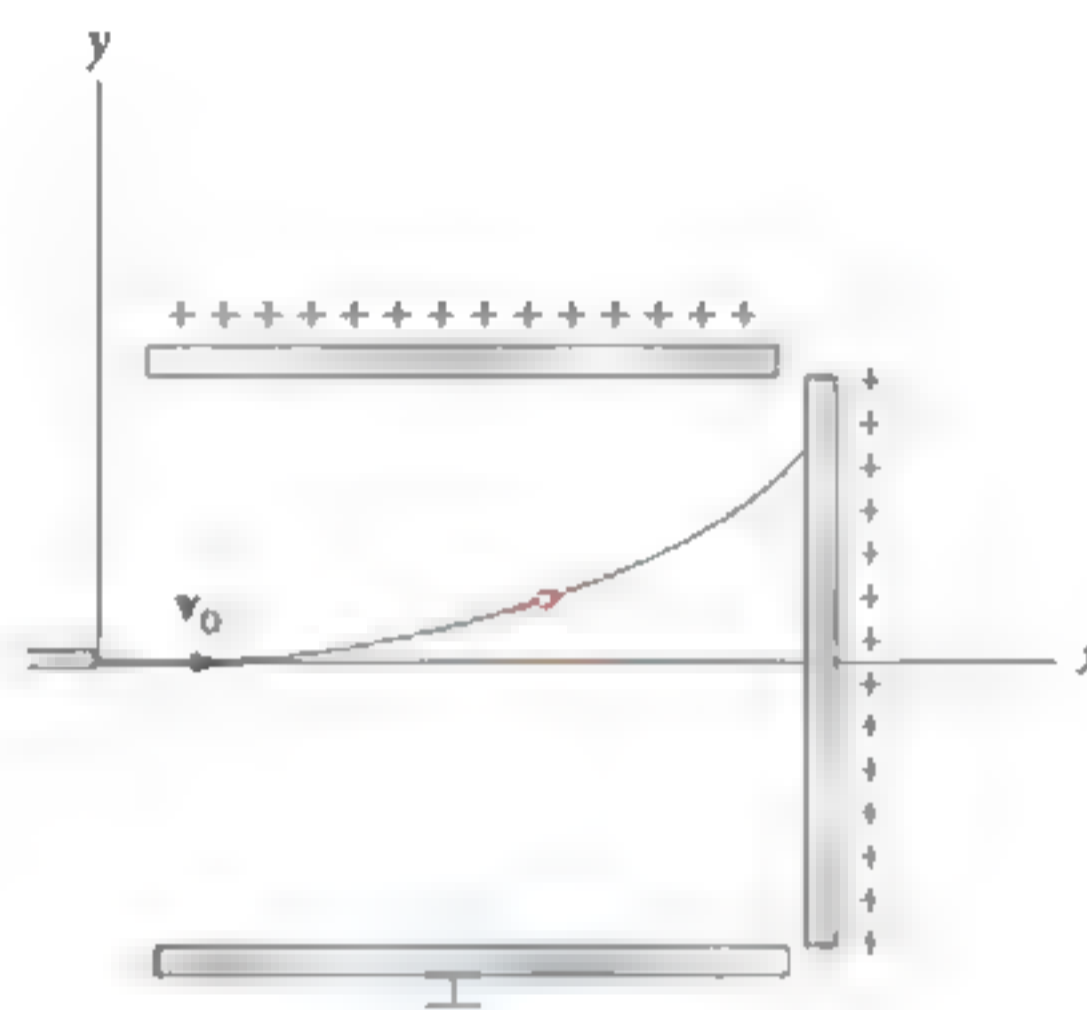
Prob. 13-37

**13-38.** La barra  $B$  de 300 kg, inicialmente en reposo, está siendo trasladada mediante una serie de rodillos pequeños. Determine la fuerza en el cable cuando  $t = 5$  s, si el motor  $M$  enrolla el cable durante un corto tiempo a razón de  $v = (0.4 t^2)$  m/s, donde  $t$  se da en segundos ( $0 \leq t \leq 6$  s). ¿Hasta qué distancia se mueve la barra en 5 s? Desprecie la masa del cable, la polea y los rodillos.



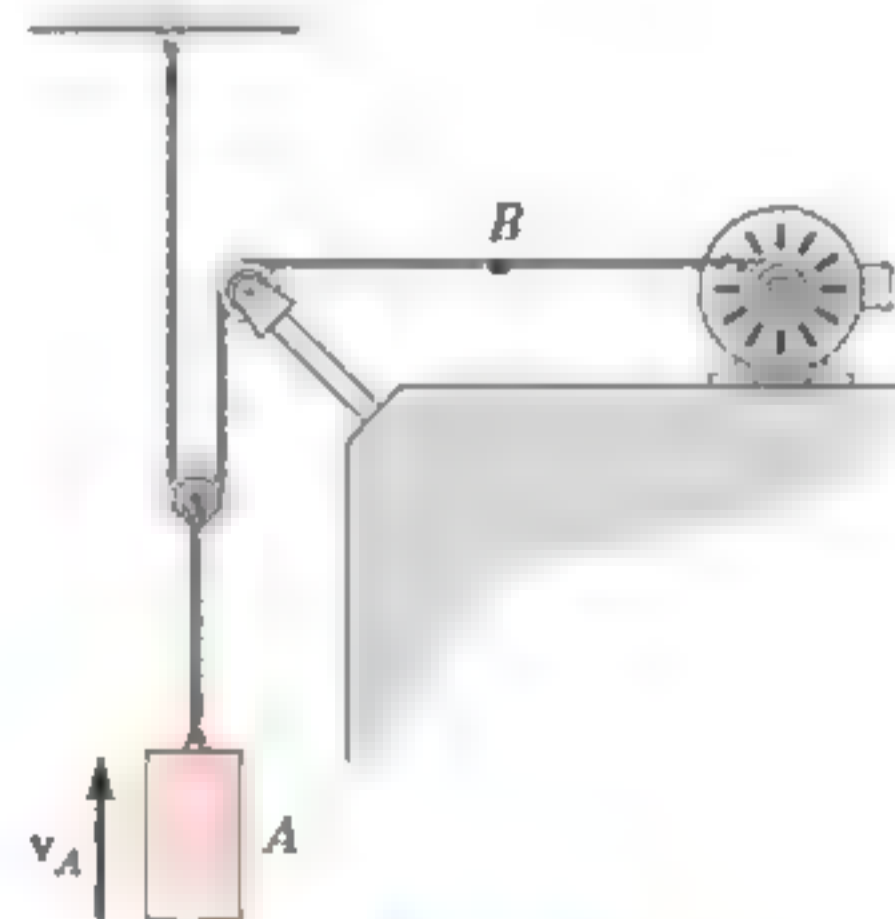
Prob. 13-38

**13-39.** Un electrón de masa  $m$  se libera con una velocidad horizontal inicial de  $v_0$ . Si se somete a dos campos de fuerza para los cuales  $F_x = F_0$  y  $F_y = 0.3F_0$ , donde  $F_0$  es constante, determine la ecuación de la trayectoria y la rapidez del electrón en cualquier instante  $t$ .



Prob. 13-39

**\*13-40.** El cilindro de 400 lb en  $A$  se eleva usando el motor y el sistema de poleas mostrado. Si la rapidez del punto  $B$  en el cable se incrementa a una razón constante desde cero hasta  $v_B = 10$  ft/s en  $t = 5$  s, determine la tensión en el cable en  $B$  para ocasionar el movimiento.



Prob. 13-40

**13-41.** El bloque  $A$  tiene una masa  $m_A$  y está unido a un resorte que tiene una rigidez  $k$  y una longitud sin estirar  $l_0$ . Si otro bloque  $B$ , que tiene una masa  $m_B$ , se presiona contra  $A$  de modo que el resorte se deforma una distancia  $d$ , determine la distancia que ambos bloques se deslizan sobre la superficie lisa antes de que comiencen a separarse. ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

**13-42.** El bloque  $A$  tiene una masa  $m_A$  y está unido a un resorte que tiene una rigidez  $k$  y una longitud no estirada  $l_0$ . Si otro bloque  $B$ , que tiene una masa  $m_B$ , se presiona contra  $A$  de modo que el resorte se deforma una distancia  $d$ , demuestre que para que se produzca la separación es necesario que  $d > 2\mu_k g(m_A + m_B)/k$ , donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el suelo. Además, ¿cuál es la distancia que los bloques se deslizan sobre la superficie antes de separarse?



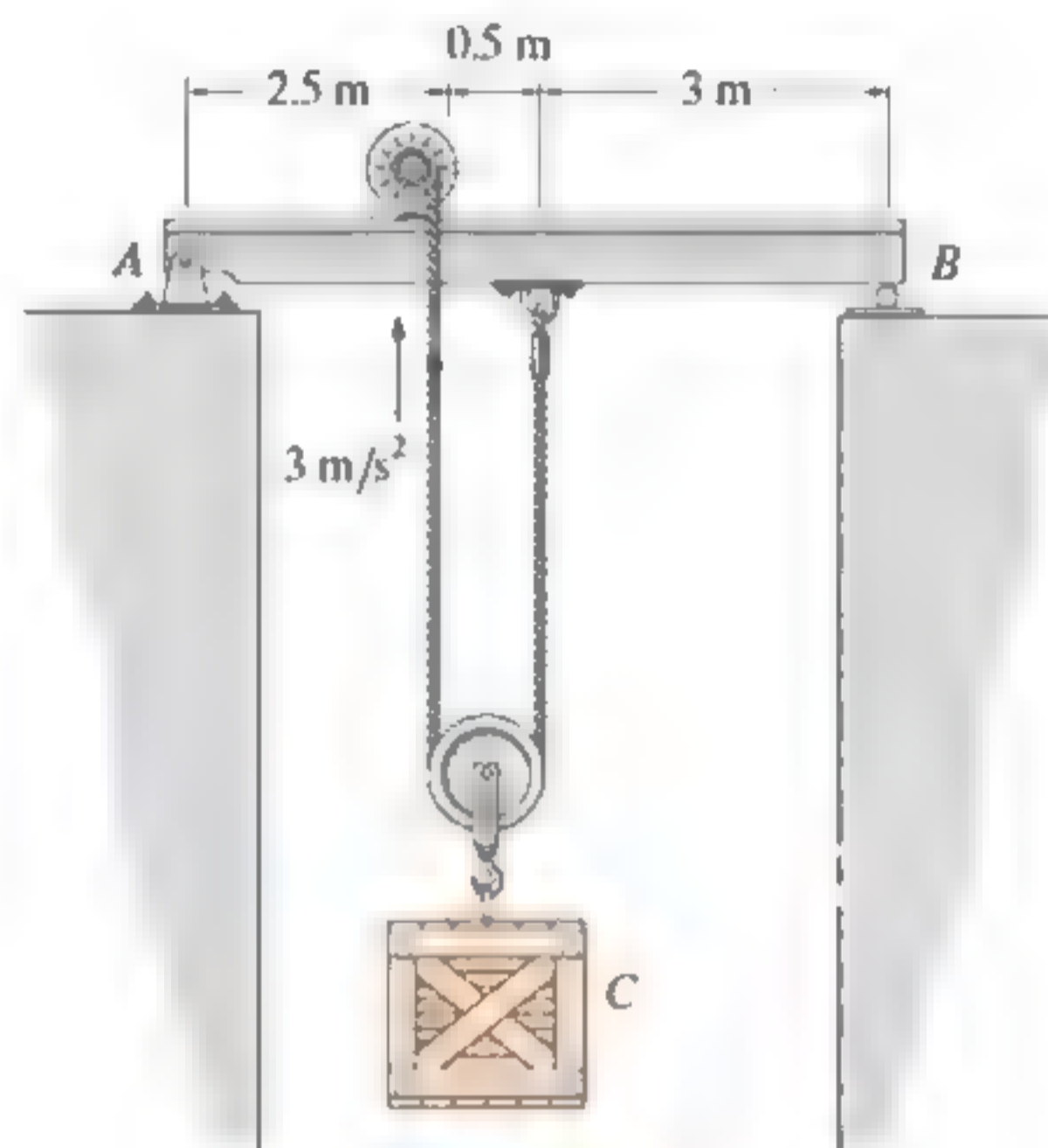
Probs. 13-41, 42

**13-43.** Un paracaidista que tiene una masa  $m$  abre su paracaídas desde una posición de reposo a una gran altura. Si la fuerza de arrastre atmosférica es  $F_D = kv^2$ , donde  $k$  es una constante, determine su velocidad cuando ha caído por un tiempo  $t$ . ¿Cuál es su velocidad cuando aterriza en el suelo? Esta velocidad se conoce como *velocidad terminal* y se encuentra al considerar que el tiempo de caída  $t \rightarrow \infty$ .



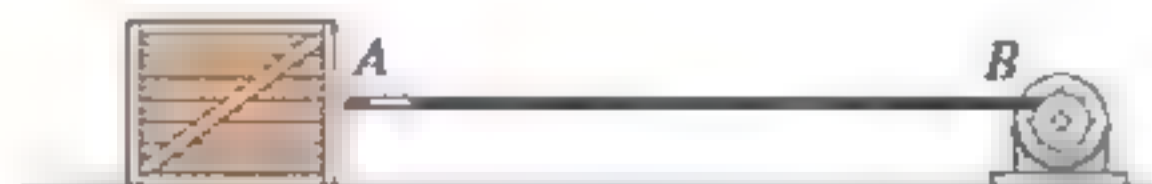
Prob. 13-43

**\*13-44.** Si el motor enrolla el cable con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$ , determine las reacciones en los apoyos  $A$  y  $B$ . La viga tiene una masa uniforme de  $30 \text{ kg/m}$  y el embalaje tiene una masa de  $200 \text{ kg}$ . Desprecie la masa del motor y las poleas.



Prob. 13-44

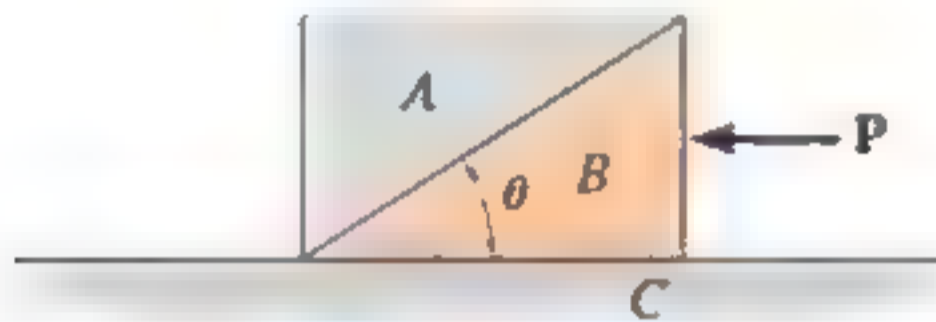
**13-45.** Si la fuerza ejercida sobre el cable  $AB$  por el motor es  $F = (100t^{3/2}) \text{ N}$ , donde  $t$  se da en segundos, determine la velocidad del embalaje de  $50 \text{ kg}$  cuando  $t = 5 \text{ s}$ . Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el suelo son  $\mu_s = 0.4$  y  $\mu_k = 0.3$ , respectivamente. En un inicio, el embalaje está en reposo.



Prob. 13-45

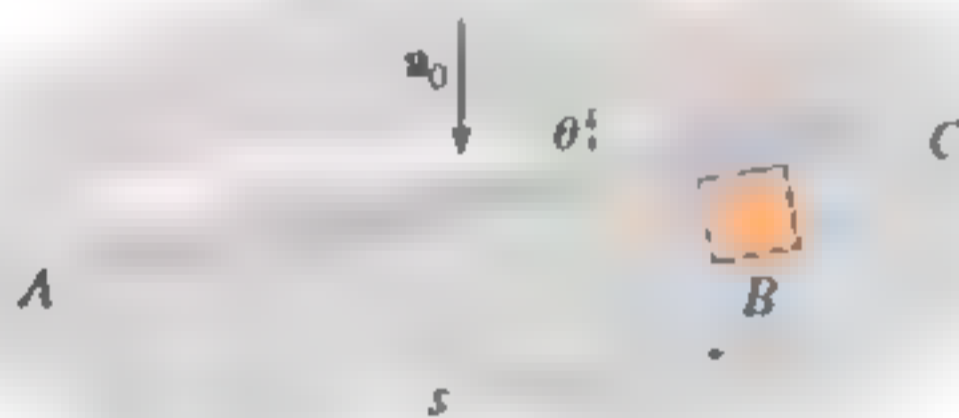
**13-46.** La masa de los bloques  $A$  y  $B$  es  $m$ . Determine la fuerza horizontal  $P$  máxima que puede aplicarse a  $B$ , de modo que  $A$  no se mueva con respecto a  $B$ . Todas las superficies son lisas.

**13-47.** La masa de los bloques  $A$  y  $B$  es  $m$ . Determine la fuerza horizontal  $P$  máxima que puede aplicarse a  $B$ , de modo que  $A$  no se deslice con respecto a  $B$ . El coeficiente de fricción estática entre  $A$  y  $B$  es  $\mu_s$ . Desprecie la fricción entre  $B$  y  $C$ .



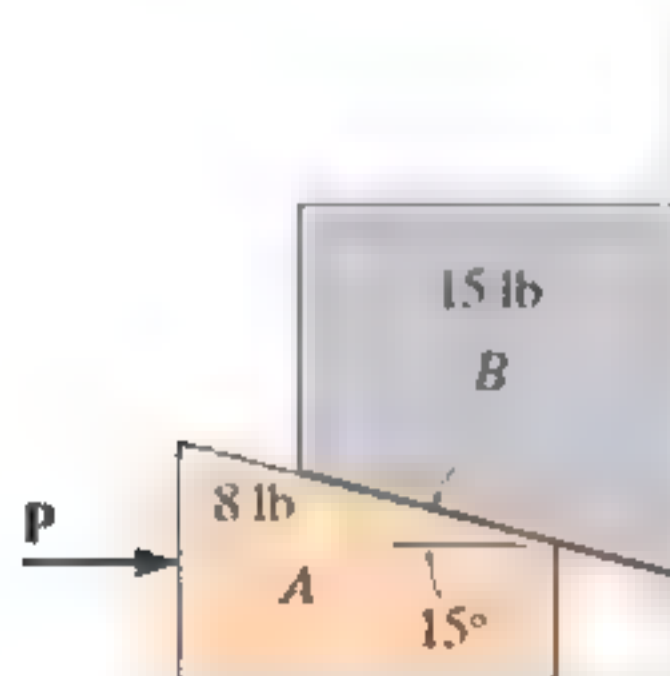
Probs. 13-46/47

**\*13-48.** El bloque liso  $B$  de tamaño despreciable tiene una masa  $m$  y descansa sobre el plano horizontal. Si la tabla  $AC$  empuja el bloque en un ángulo  $\theta$  con una aceleración constante  $a_0$ , determine la velocidad del bloque a lo largo de la tabla y la distancia  $s$  que se mueve el bloque a lo largo de la tabla en función del tiempo  $t$ . El bloque parte del reposo cuando  $s = 0, t = 0$ .



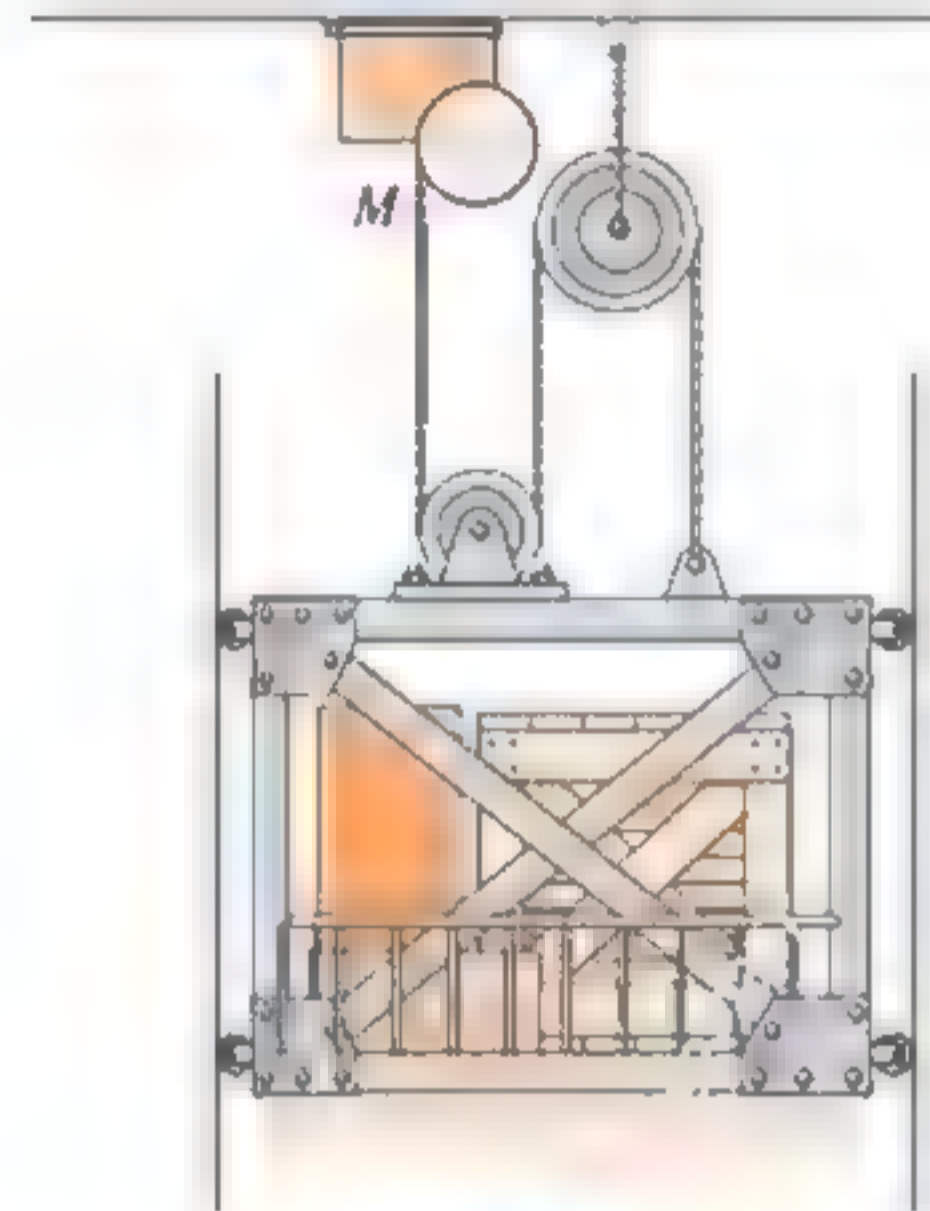
Prob. 13-48

**13-49.** Si se aplica una fuerza horizontal  $P = 12$  lb al bloque  $A$ , determine la aceleración del bloque  $B$ . Desprecie la fricción.



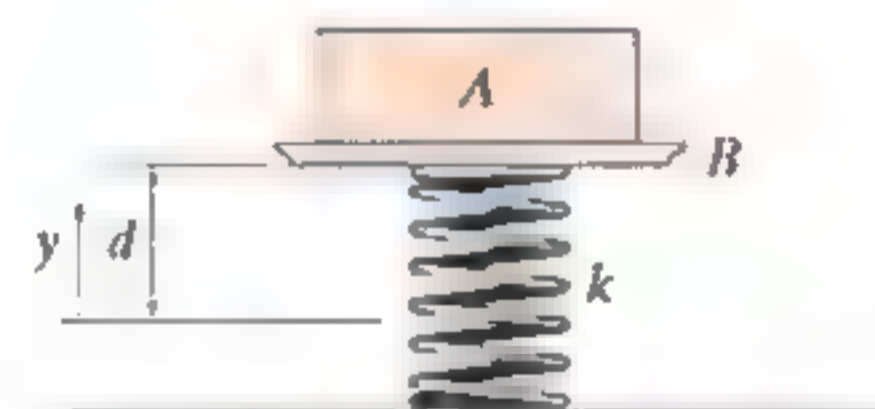
Prob. 13-49

**13-50.** Un elevador y su carga tienen una masa de 1 Mg. La rotación se evita mediante los rieles y las ruedas montadas en sus costados. Si el motor  $M$  desarrolla una tensión constante  $T = 4$  kN en el cable conectado al elevador, determine la velocidad del ascensor cuando se ha movido 6 m hacia arriba partiendo desde el reposo. Desprecie la masa de las poleas y los cables.



Prob. 13-50

**13-51.** El bloque  $A$  tiene una masa  $m_A$  y descansa sobre la bandeja  $B$ , que tiene una masa  $m_B$ . Ambos se apoyan sobre un resorte que tiene una rigidez  $k$  y éste está unido a la parte inferior de la bandeja y al suelo. Determine la distancia  $d$  que la bandeja debería empujarse hacia abajo desde la posición de equilibrio y que parta del reposo, de modo que ocurra una separación del bloque con respecto a la superficie de la bandeja, en el instante que el resorte regresa a su posición sin estirar.



Prob. 13-51

## 13.5 Ecuaciones de movimiento: coordenadas normales y tangenciales

Cuando una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva conocida, su ecuación de movimiento puede escribirse en las direcciones tangencial, normal y binormal (fig. 13-11). Observe que la partícula no se mueve en la dirección binormal, ya que está limitada a moverse a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

Esta ecuación se satisface siempre que

$$\begin{aligned}\Sigma F_t &= ma_t \\ \Sigma F_n &= ma_n \\ \Sigma F_b &= 0\end{aligned}\quad (13-8)$$

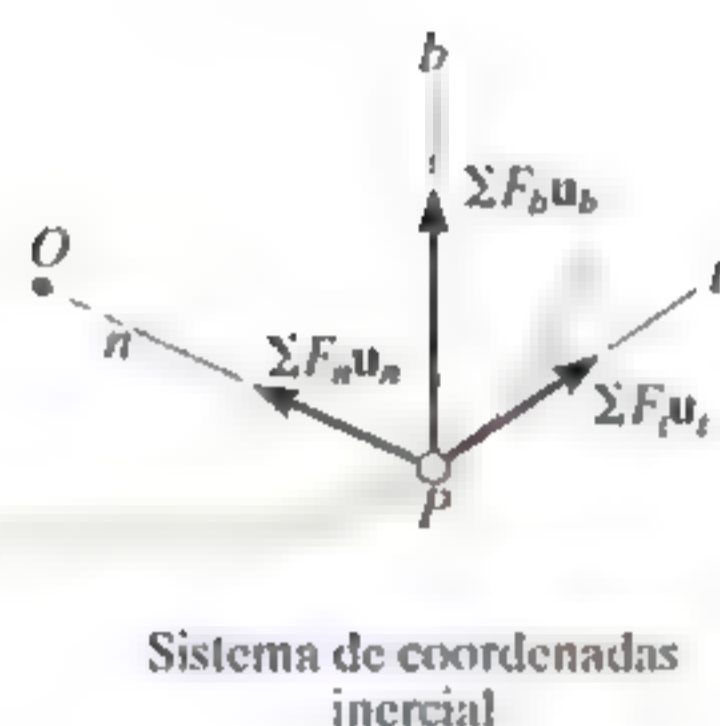
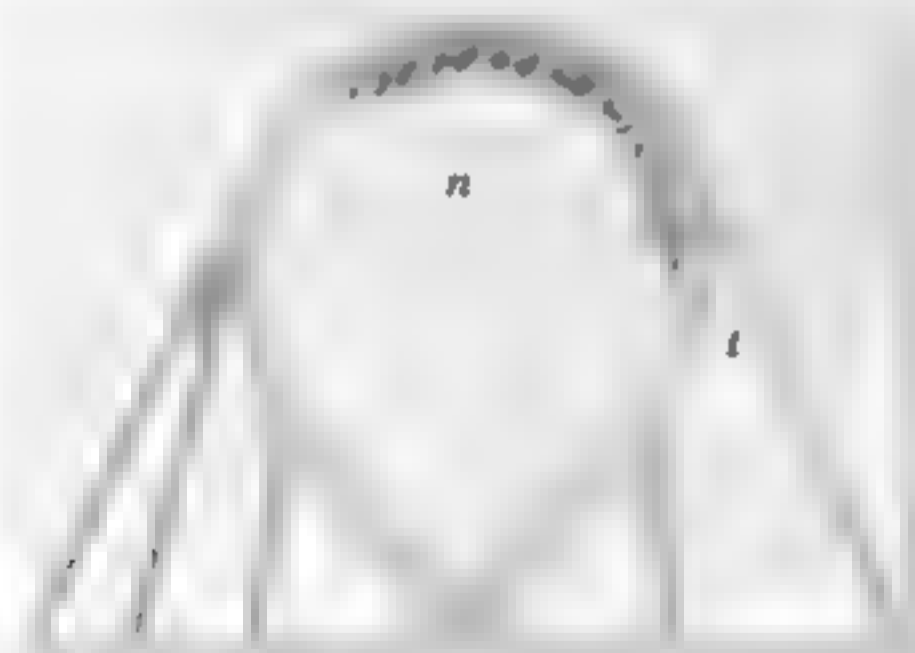


Fig. 13-11

Recuerde que  $a_t (= dv/dt)$  representa la razón de cambio de la magnitud de la velocidad con respecto del tiempo. Por lo tanto, si  $\Sigma F_t$  actúa en la dirección del movimiento, la rapidez de la partícula se incrementará; mientras que si actúa en la dirección opuesta, la partícula se desacelerará. Asimismo,  $a_n (= v^2/\rho)$  representa la razón de cambio de la dirección de la velocidad con respecto del tiempo. Ésta es provocada por  $\Sigma F_n$ , que *siempre* actúa en la dirección  $n$  positiva, es decir, hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Por eso a menudo se conoce como *fuerza centrípeta*.



La fuerza desequilibrada de la cuerda sobre el esquiador le proporciona una componente normal de aceleración. (© R. C. Hibbeler)

## Procedimiento para el análisis

Cuando un problema implica el movimiento de una partícula a lo largo de una *trayectoria curva conocida*, en el análisis se utilizarán coordenadas normales y tangenciales, ya que las componentes de aceleración son fáciles de formular. El método para aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas con las aceleraciones, se describió en el procedimiento explicado en la sección 13-4. Específicamente, para las coordenadas  $t, n, b$  se puede formular como sigue:

### Diagrama de cuerpo libre

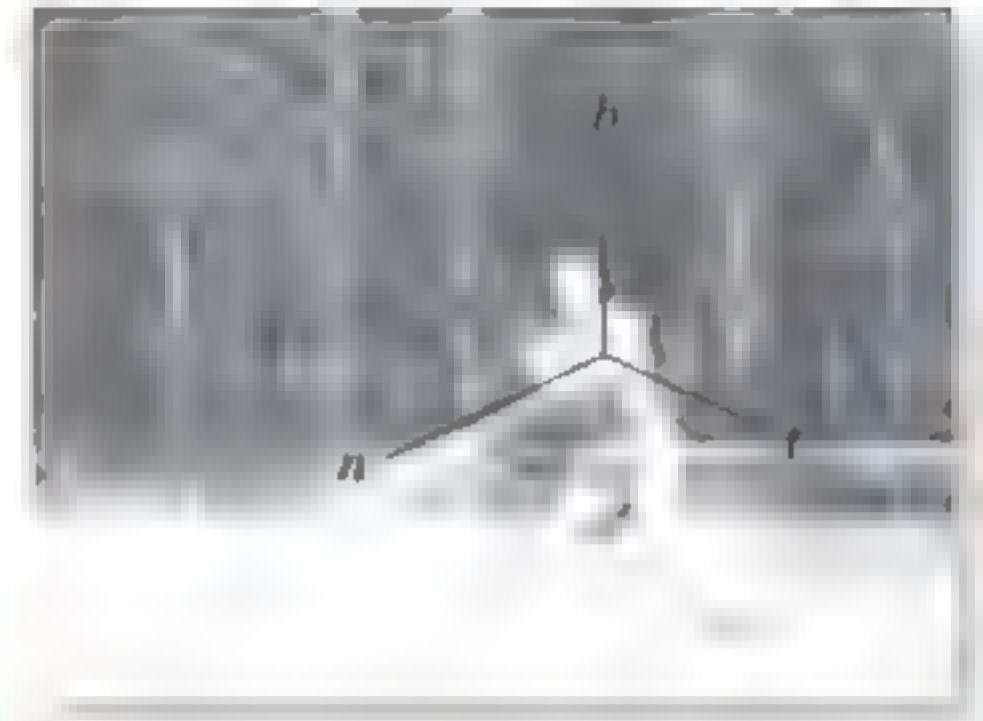
- Establezca el sistema de coordenadas  $t, n, b$  inercial en la partícula y trace el diagrama de cuerpo libre de ésta.
- La aceleración normal de la partícula  $a_n$  *siempre* actúa en la dirección  $n$  positiva.
- Si se desconoce la aceleración tangencial  $a_t$ , suponga que actúa en la dirección  $t$  positiva.
- No hay aceleración en la dirección  $b$ .
- Identifique las incógnitas en el problema.

### Ecuaciones de movimiento

- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-8.

### Cinemática

- Formule las componentes normales y tangenciales de la aceleración; es decir,  $a_t = dv/dt$  o bien  $a_t = v dv/ds$  y  $a_n = v^2/\rho$ .
- Si la trayectoria se define como  $y = f(x)$ , el radio de curvatura en el punto donde la partícula está localizada se obtiene con  $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / |d^2y/dx^2|$ .



La fuerza desequilibrada de la cuerda sobre el esquiador le proporciona una componente normal de aceleración. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

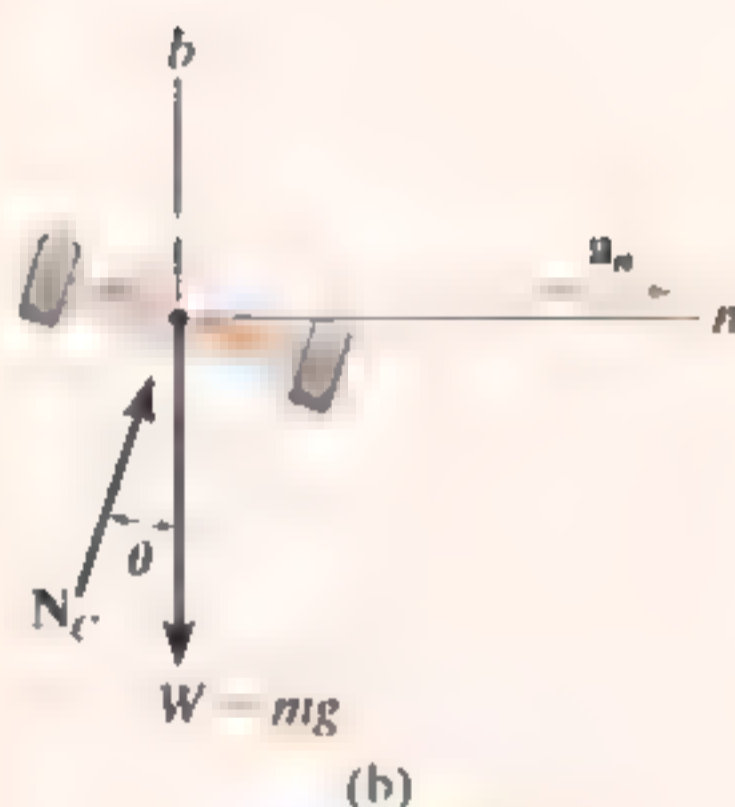


Determine el ángulo de inclinación  $\theta$  de la pista para que las llantas de los autos de carreras mostrados en la figura 13-12a no dependan de la fricción y no se deslicen hacia arriba o hacia abajo de la pista. Suponga que el tamaño de los automóviles es insignificante, que su masa es  $m$  y que se desplazan alrededor de la curva de radio  $\rho$  a una rapidez constante  $v$ .



(© R. C. Hibbeler)

(a)



(b)

Fig. 13-12

## SOLUCIÓN

Antes de analizar la siguiente solución, pensemos en por qué debería resolverse por medio de las coordenadas  $t, n, b$ .

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 13-12b y como se enunció en el problema, en el automóvil no actúa ninguna fuerza de fricción. En este caso  $N_C$  representa la *resultante* del suelo en las cuatro ruedas. Como  $a_n$  puede calcularse, las incógnitas son  $N_C$  y  $\theta$ .

**Ecuaciones de movimiento.** Con los ejes  $n, b$  mostrados,

$$\rightarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_C \sin \theta = m \frac{v^2}{\rho} \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_b = 0; \quad N_C \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

Al eliminar  $N_C$  y  $m$  de estas ecuaciones mediante la división de la ecuación 1 entre la ecuación 2, obtenemos

$$\tan \theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

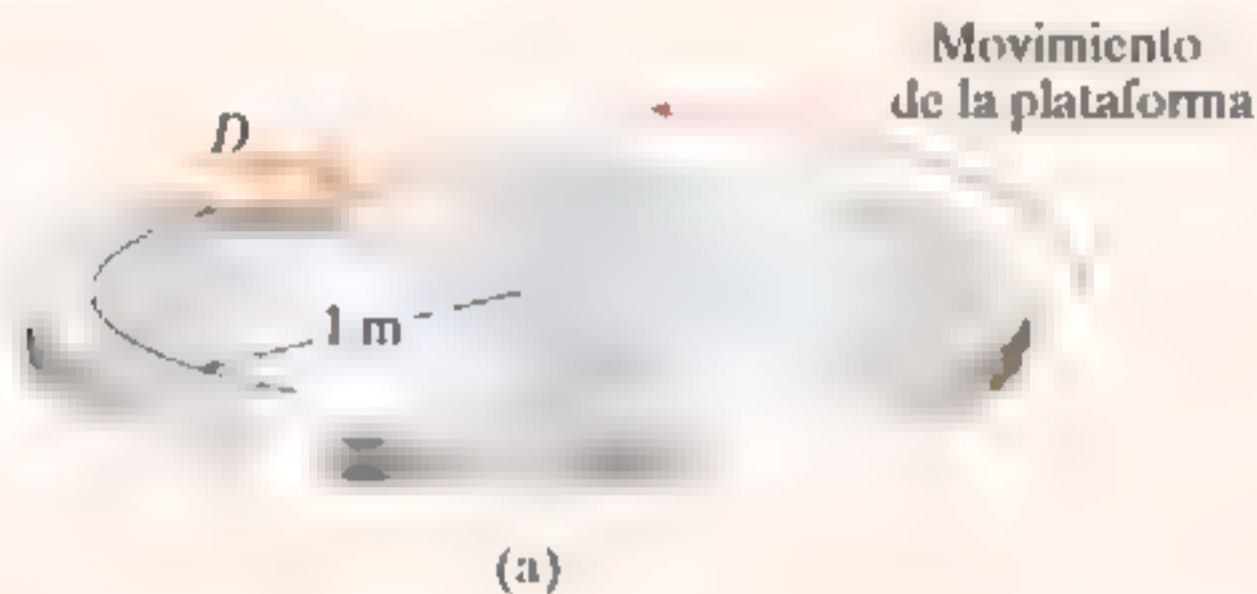
$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{v^2}{g\rho} \right)$$

*Resp.*

**NOTA:** El resultado es independiente de la masa del automóvil. Además, una suma de fuerzas en la dirección tangencial no afecta la solución. Si se hubiera considerado, entonces  $a_t = dv/dt = 0$ , ya que el automóvil se desplaza a *rapidez constante*. Un análisis adicional de este problema se aborda en el problema 21-53.

## EJEMPLO

El disco  $D$  de 3 kg está sujeto al extremo de una cuerda como se muestra en la figura 13-13a. El otro extremo de la cuerda está sujeto a una articulación de rótula ubicada en el centro de una plataforma. Si ésta gira con rapidez y el disco se coloca sobre ella y se suelta desde el reposo, como se muestra, determine el tiempo que le lleva alcanzar una rapidez lo bastante grande como para romper la cuerda. La tensión máxima que la cuerda puede soportar es 100 N y el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la plataforma es  $\mu_k = 0.1$ .



## SOLUCIÓN

La magnitud de la fuerza de fricción es  $F = \mu_k N_D = 0.1 N_D$  y su sentido en la dirección que se opone al movimiento relativo del disco con respecto de la plataforma. Esta fuerza es la que le imprime al disco una componente tangencial de aceleración que hace que  $v$  se incremente, por lo que  $T$  aumenta hasta que alcanza 100 N. El peso del disco es  $W = 3(9.81) = 29.43$  N. Como  $a_n$  puede relacionarse con  $v$ , las incógnitas son  $N_D$ ,  $a_t$  y  $v$ .

## Ecuaciones de movimiento

$$\Sigma F_n = ma_n; \quad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \quad (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \quad 0.1 N_D = 3a_t \quad (2)$$

$$\Sigma F_b = 0; \quad N_D - 29.43 = 0 \quad (3)$$

Con  $T = 100$  N, la ecuación 1 puede resolverse para la velocidad crítica  $v_{cr}$  del disco necesaria para romper la cuerda. Al resolver todas las ecuaciones, obtenemos

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$

$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$

$$v_{cr} = 5.77 \text{ m/s}$$

**Cinemática.** Como  $a_t$  es constante, el tiempo requerido para romper la cuerda es

$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$

$$5.77 = 0 + (0.981)t$$

$$t = 5.89 \text{ s}$$

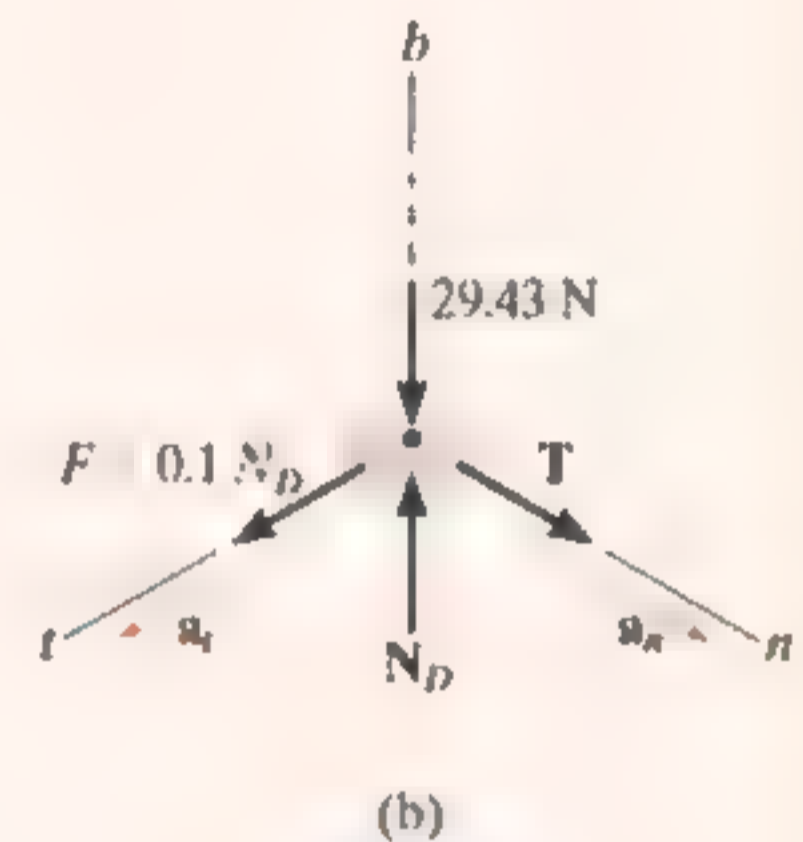
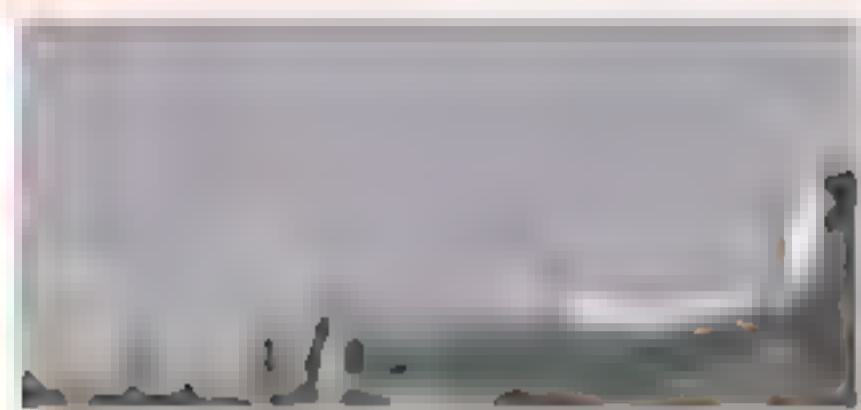


Fig. 13-13

## EJEMPLO



© R. C. Hibbeler

El diseño de la rampa de salto de esquís que se muestra en la fotografía requiere conocer el tipo de fuerzas que se ejercerán en la esquiadora y su trayectoria aproximada. Si en este caso la rampa se puede representar de forma aproximada por la parábola de la figura 13-14a, determine la fuerza normal en la esquiadora de 150 lb en el momento en que llega al extremo de la rampa, punto *A*, donde su velocidad es de 65 ft/s. Además, ¿cuál es su aceleración en este punto?

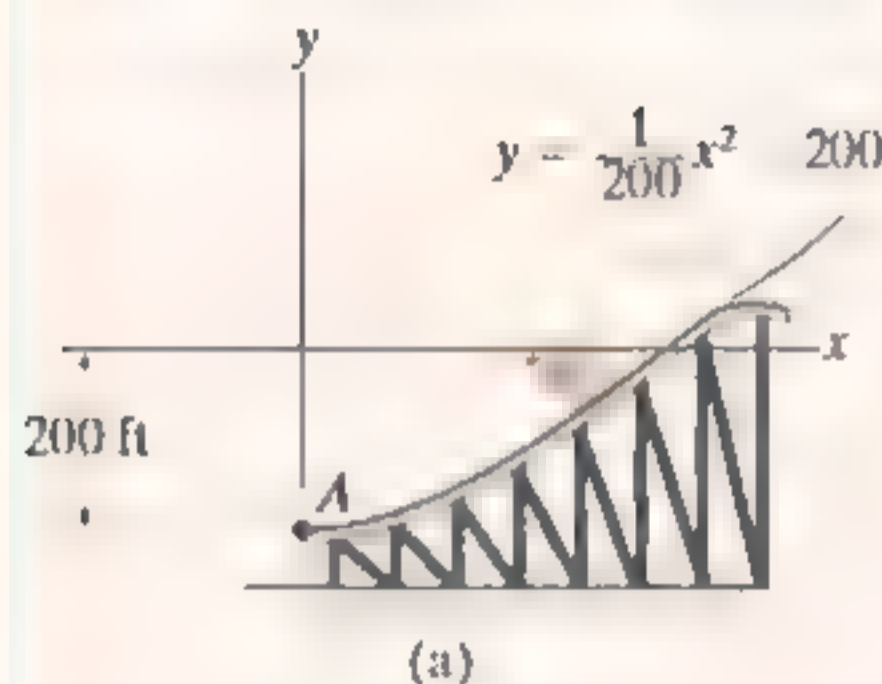


Fig. 13-14

## SOLUCIÓN

¿Por qué consideramos utilizar coordenadas *n, t* para resolver este problema?

**Diagrama de cuerpo libre.** Dado que  $dy/dx = x/100|_{x=0} = 0$ , la pendiente en *A* es horizontal. El diagrama de cuerpo libre de la esquiadora cuando está en *A* se muestra en la figura 13-14b. Como la trayectoria es *curva*, existen dos componentes de aceleración,  $a_n$  y  $a_t$ . Puesto que  $a_n$  puede calcularse, las incógnitas son  $a_t$  y  $N_A$ .

## Ecuaciones de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_A - 150 = \frac{150}{32.2} \left( \frac{(65)^2}{\rho} \right) \quad (1)$$

$$\leftarrow \Sigma F_t = ma_t; \quad 0 = \frac{150}{32.2} a_t \quad (2)$$

El radio de curvatura  $\rho$  de la trayectoria debe determinarse en el punto *A* (0, -200 ft). Aquí  $y = \frac{1}{200}x^2 - 200$ ,  $dy/dx = \frac{1}{100}x$ ,  $d^2y/dx^2 = \frac{1}{100}$ , de modo que en  $x = 0$ ,

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} \bigg|_{x=0} = \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{|1/100|} = 100 \text{ ft}$$

Si sustituimos este valor en la ecuación 1 y despejamos  $N_A$ , obtenemos

$$N_A = 347 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

**Cinemática.** A partir de la ecuación 2,

$$a_t = 0$$

Por lo tanto,

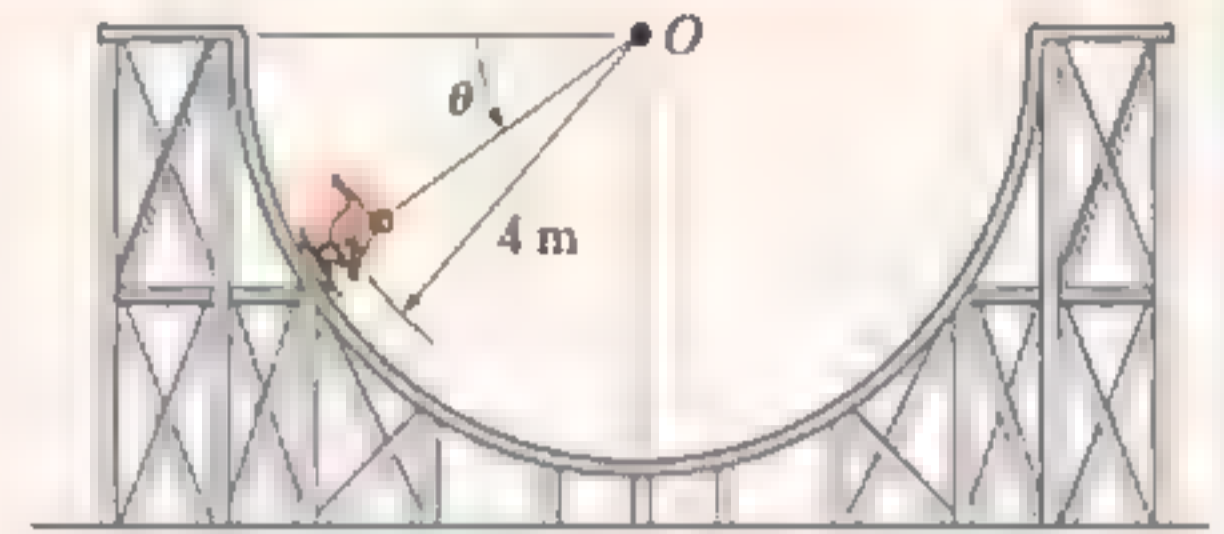
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(65)^2}{100} = 42.2 \text{ ft/s}^2$$

$$a_A = a_n = 42.2 \text{ ft/s}^2 \uparrow$$

**NOTA:** Aplique la ecuación de movimiento en la dirección *y* y demuestre que cuando la esquiadora está en el aire su aceleración hacia abajo es de 32.2 ft/s<sup>2</sup>.

## EJEMPLO

El patinador de 60 kg que aparece en la figura 13-15a se desliza cuesta abajo de la pista circular. Si parte del reposo cuando  $\theta = 0^\circ$ , determine la magnitud de la reacción normal que la pista ejerce en él cuando  $\theta = 60^\circ$ . Desprecie su tamaño en el cálculo.



(a)

## SOLUCIÓN

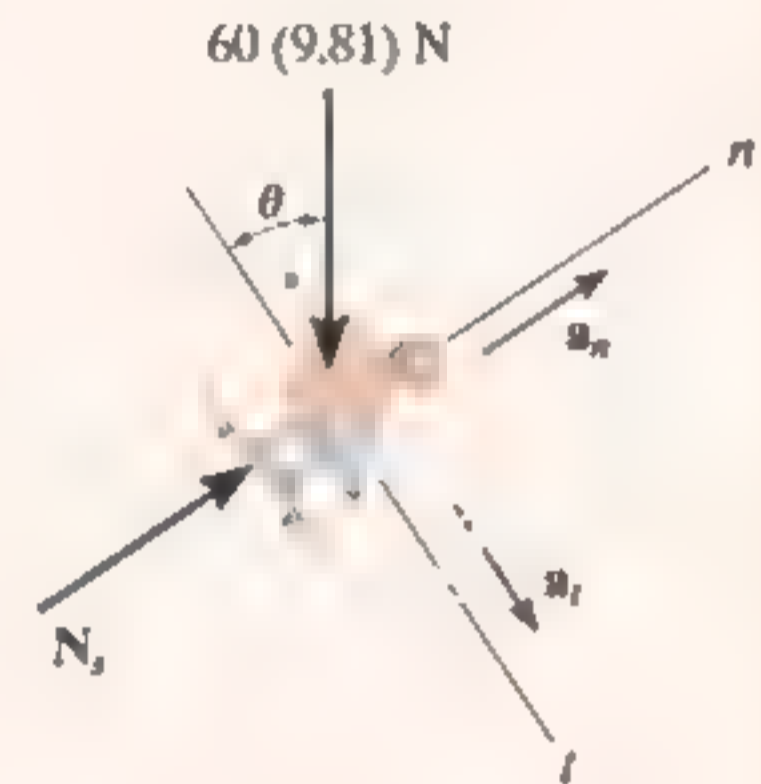
**Diagrama de cuerpo libre.** El diagrama de cuerpo libre del patinador cuando está en una posición arbitraria  $\theta$  se muestra en la figura 13-15b. En  $\theta = 60^\circ$  hay tres incógnitas,  $N$ ,  $a_t$  y  $a_n$  (o  $v$ ).

## Ecuaciones de movimiento

$$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N - [60(9.81)\text{N}] \cos \theta = (60\text{ kg})\left(\frac{v^2}{4\text{ m}}\right) \quad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \quad [60(9.81)\text{N}] \sin \theta = (60\text{ kg}) a_t$$

$$a_t = 9.81 \sin \theta$$



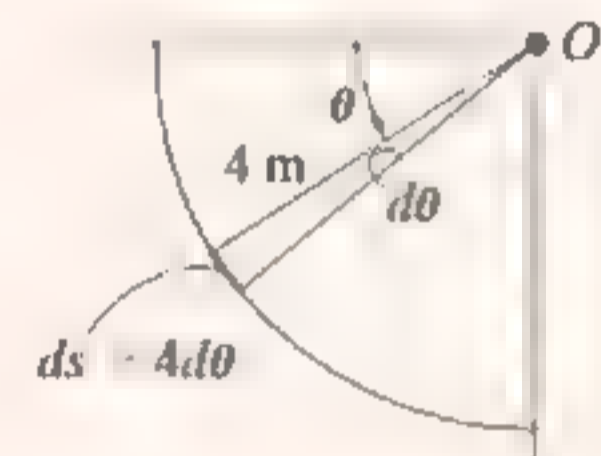
(b)

**Cinemática.** Como  $a_t$  se expresa en función de  $\theta$ , para determinar la rapidez del patinador cuando  $\theta = 60^\circ$  se utiliza la ecuación  $v dv = a_t ds$ . Con la relación geométrica  $s = r\theta$ , donde  $ds = r d\theta = (4\text{ m})d\theta$  (fig. 13-15c) y la condición inicial  $v = 0$  en  $\theta = 0^\circ$ , tenemos

$$\begin{aligned} v dv &= a_t ds \\ \int_0^v v dv &= \int_0^{60^\circ} 9.81 \sin \theta (4 d\theta) \\ \frac{v^2}{2} \Big|_0^v &= 39.24 \cos \theta \Big|_0^{60^\circ} \end{aligned}$$

$$\frac{v^2}{2} - 0 = 39.24(\cos 60^\circ - 0)$$

$$v^2 = 67.97 \text{ m}^2/\text{s}^2$$



(c)

Fig. 13-15

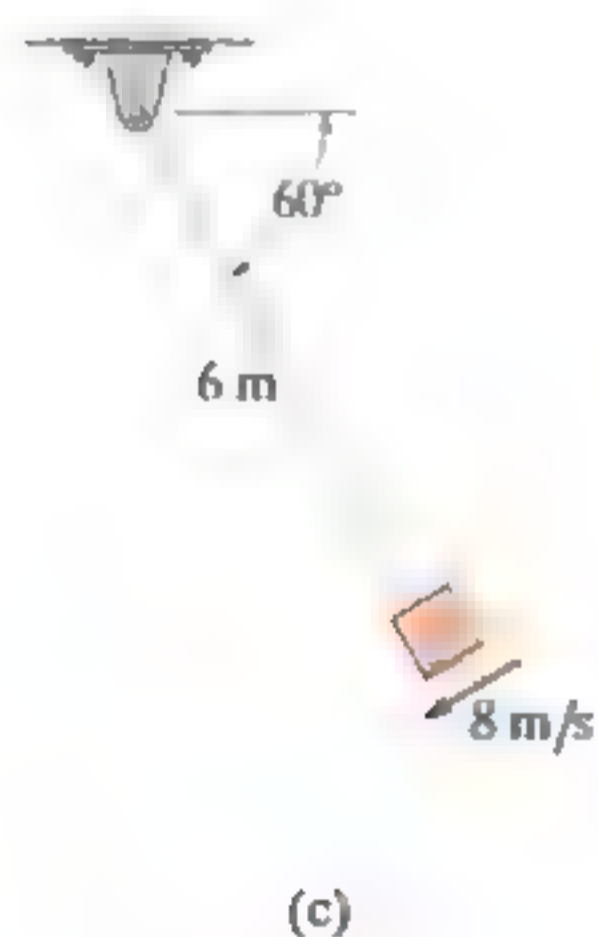
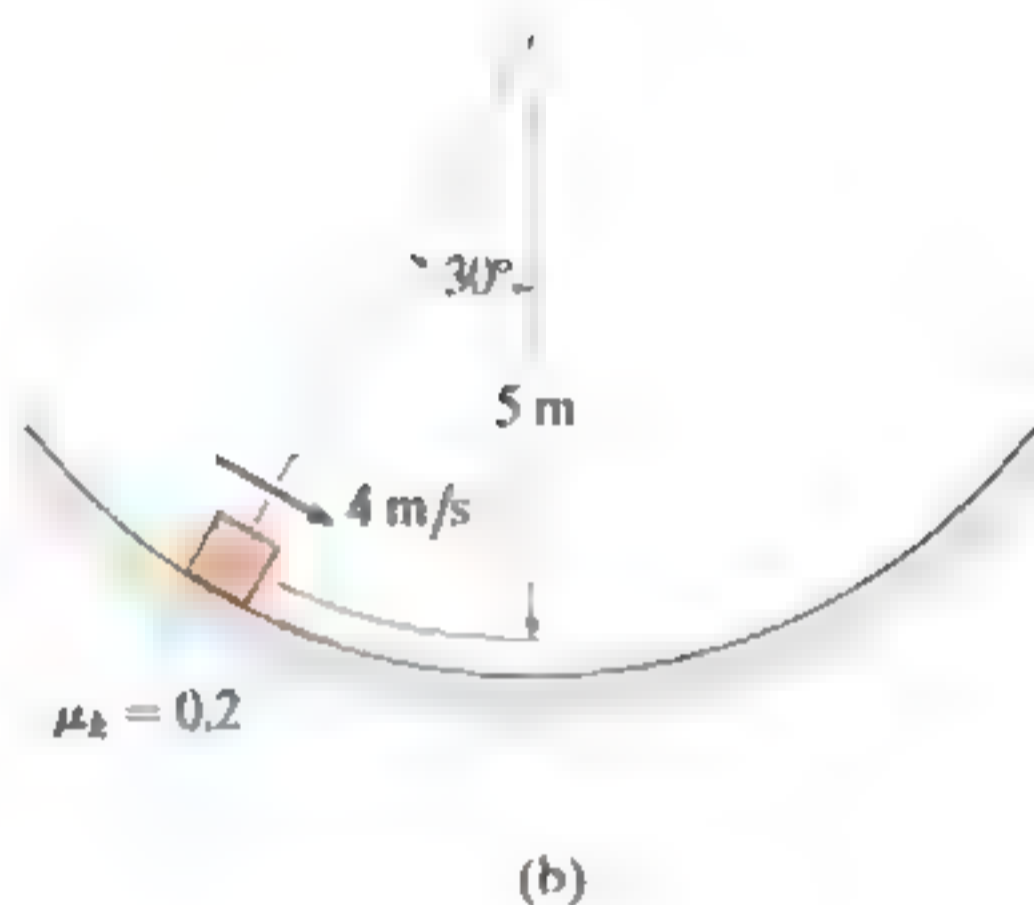
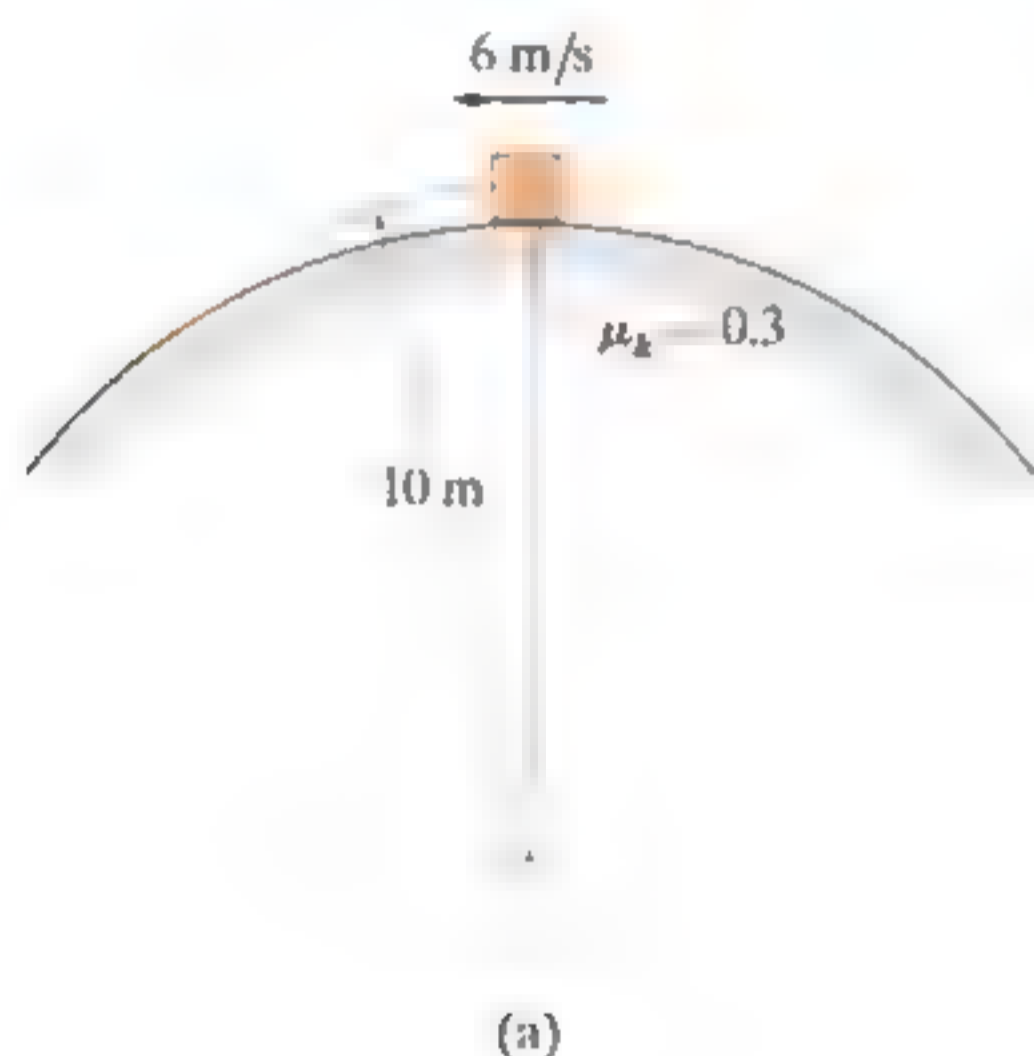
Si sustituimos este resultado y  $\theta = 60^\circ$  en la ecuación (1), tenemos

$$N = 1529.23 \text{ N} = 1.53 \text{ kN}$$

*Resp.*

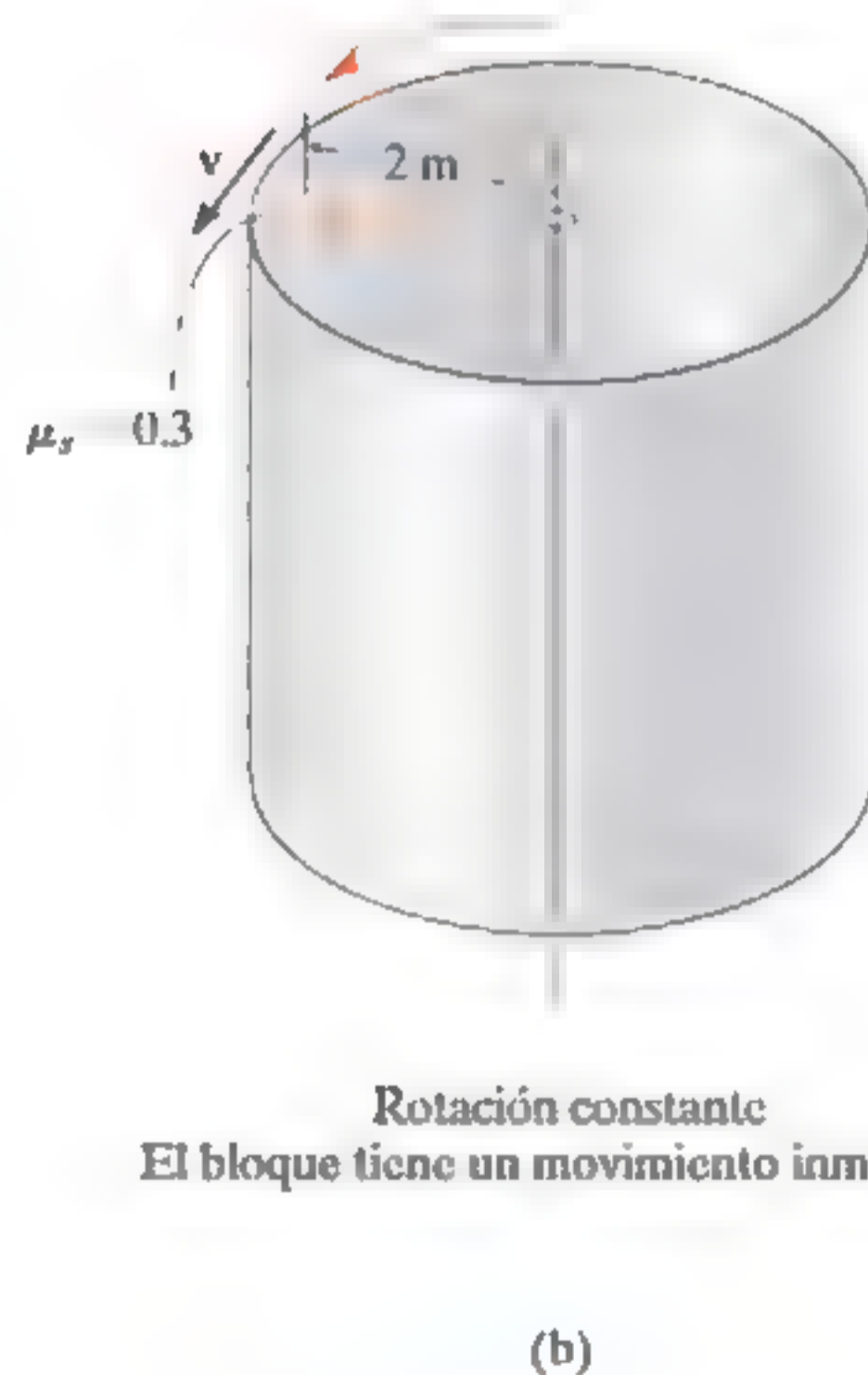
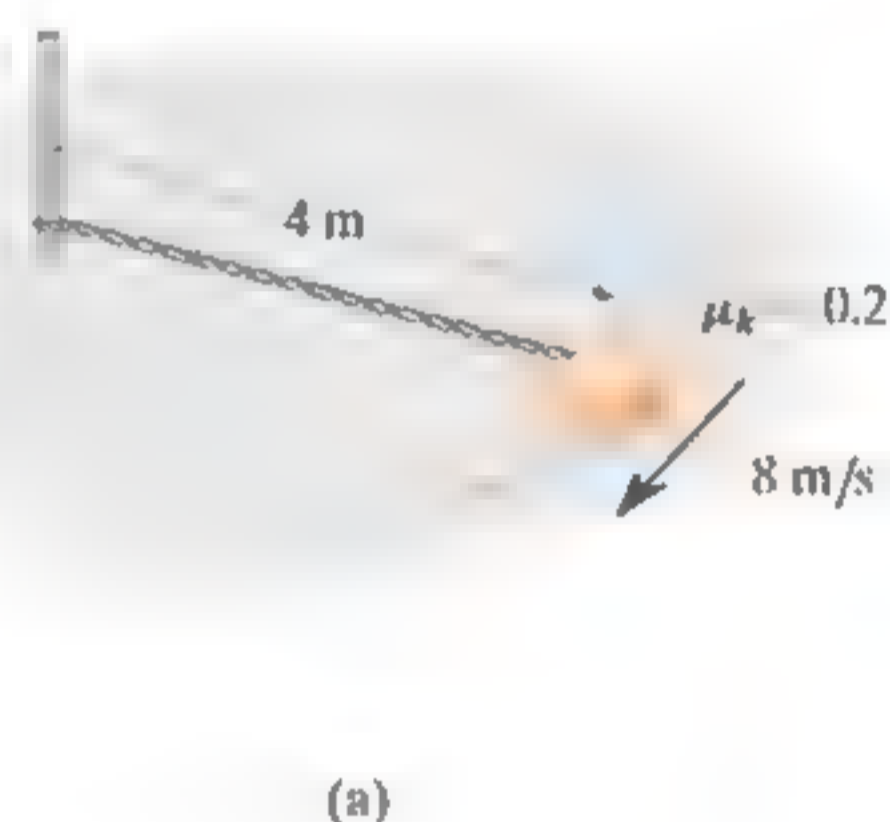
## PROBLEMAS PRELIMINARES

**P13.5.** Configure los ejes  $n, t$  y escriba las ecuaciones de movimiento para el bloque de 10 kg a lo largo de cada uno de estos ejes.



Prob. P13-5

**P13.6.** Configure los ejes  $n, b, t$  y escriba las ecuaciones de movimiento para el bloque de 10 kg a lo largo de cada uno de estos ejes.

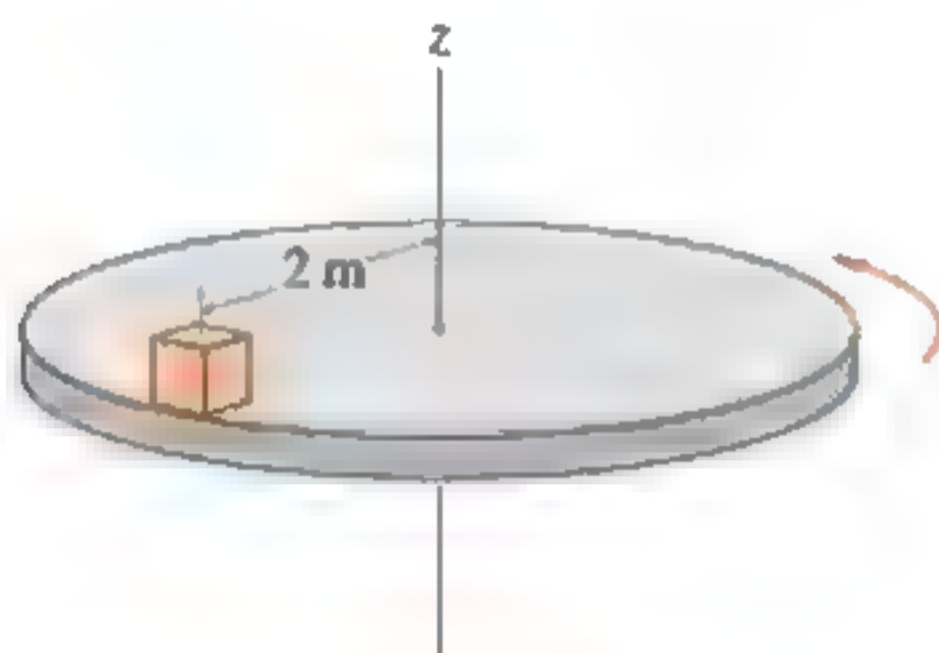


Rotación constante  
El bloque tiene un movimiento inminente

Prob. P13-6

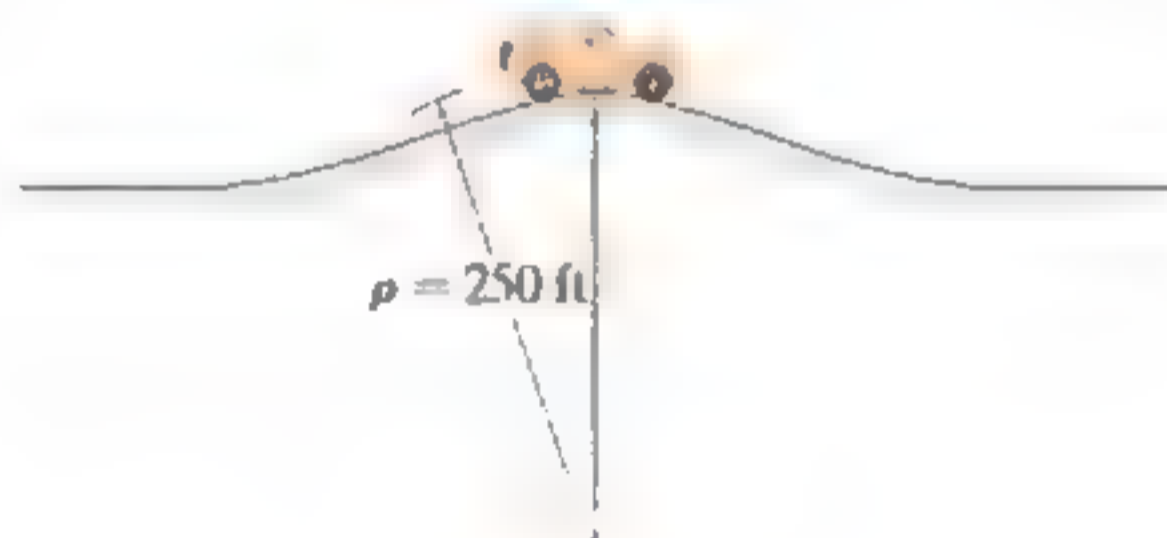
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F13-7.** El bloque descansa a una distancia de 2 m del centro de la plataforma. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la plataforma es  $\mu_s = 0.3$ , determine la rapidez máxima que el bloque puede alcanzar antes de que comience a deslizarse. Suponga que el movimiento angular del disco se incrementa lentamente.



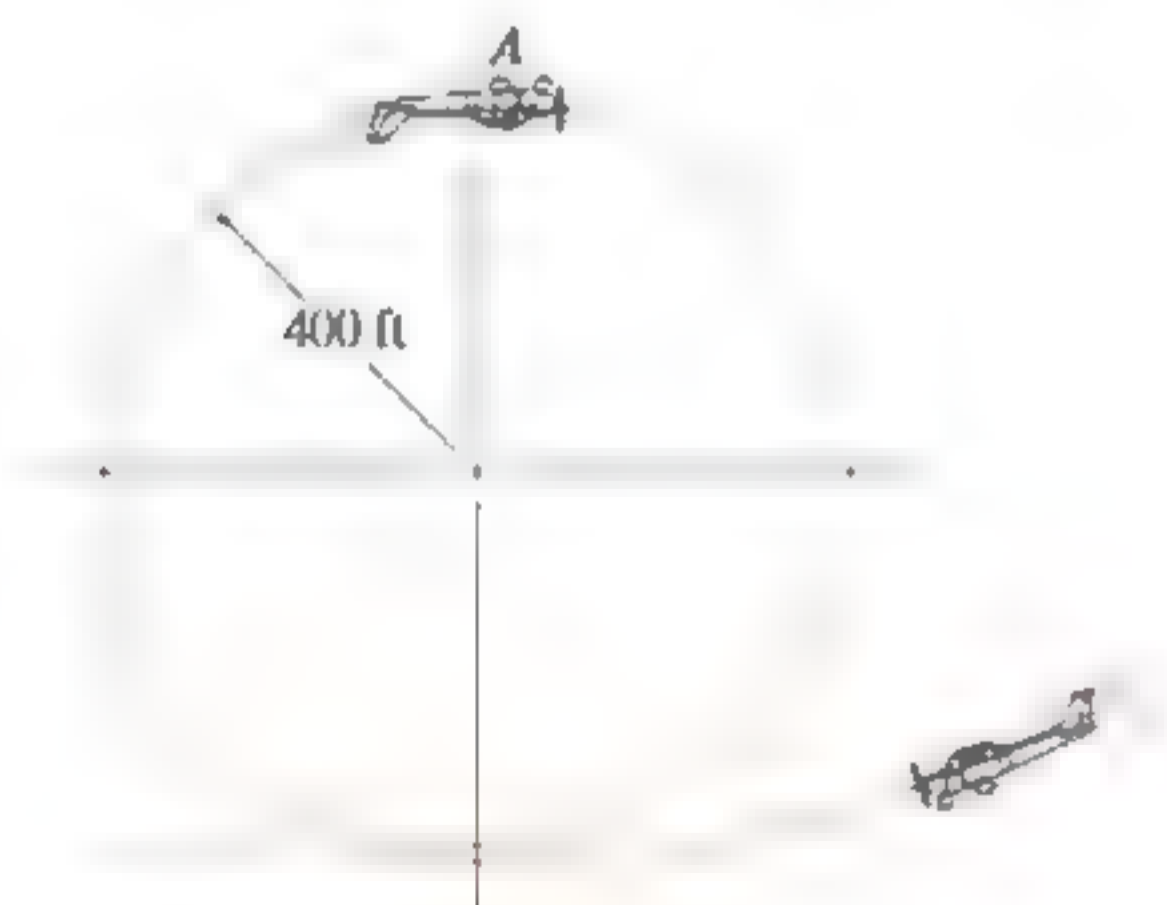
Prob. F13-7

**F13-8.** Determine la rapidez máxima a que el jeep puede viajar sobre la cresta de la colina sin que pierda contacto con la carretera.



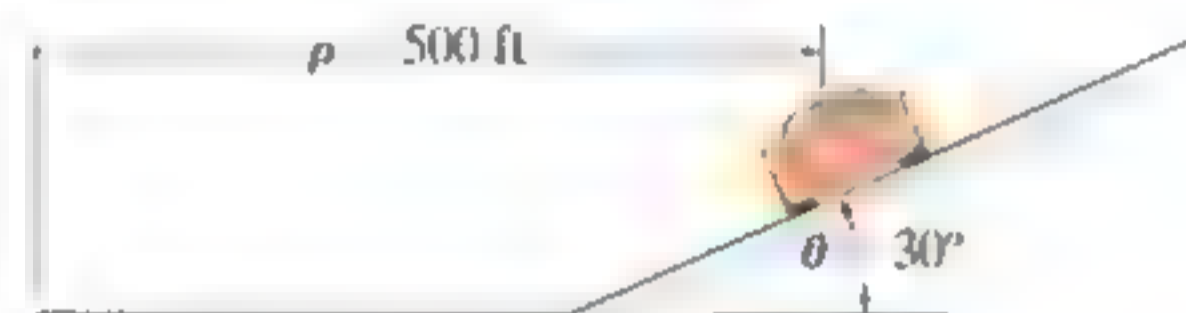
Prob. F13-8

**F13-9.** Un piloto pesa 150 lb y vuela a una rapidez constante de 120 ft/s. Determine la fuerza normal que ejerce en el asiento del avión cuando está de cabeza en A. La trayectoria circular tiene un radio de curvatura de 400 ft.



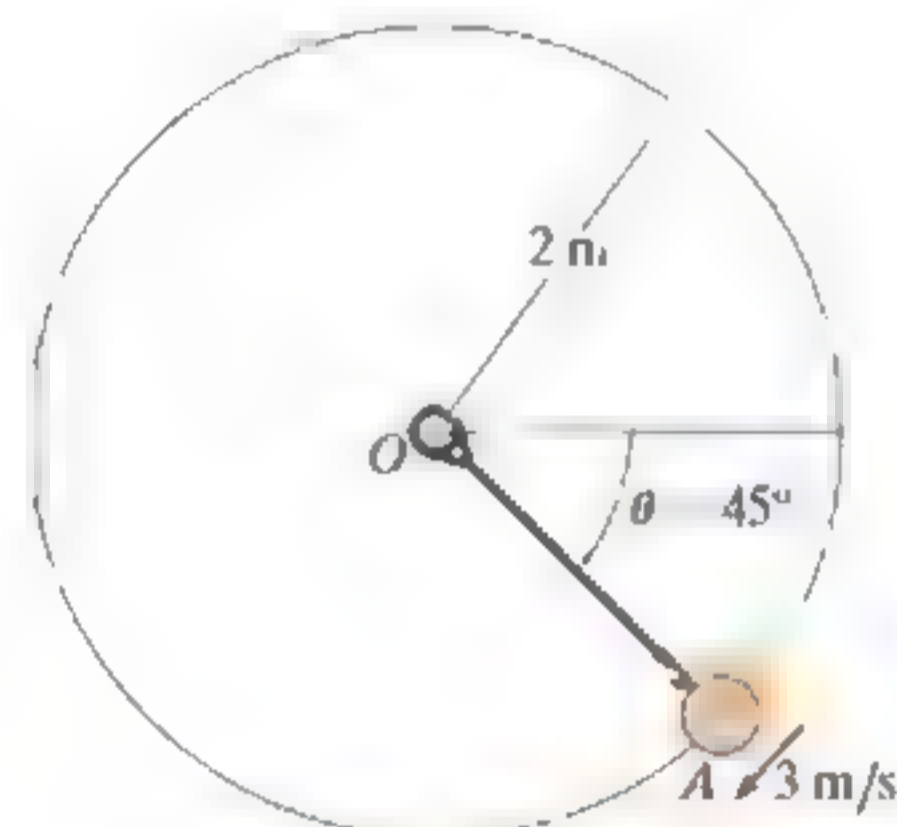
Prob. F13-9

**F13-10.** El auto deportivo se desplaza a lo largo de una carretera con una inclinación de  $30^\circ$  y cuyo radio de curvatura es de  $\rho = 500$  ft. Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera es  $\mu_s = 0.2$ , determine la rapidez máxima que es segura para que no se deslice. Ignore el tamaño del automóvil.



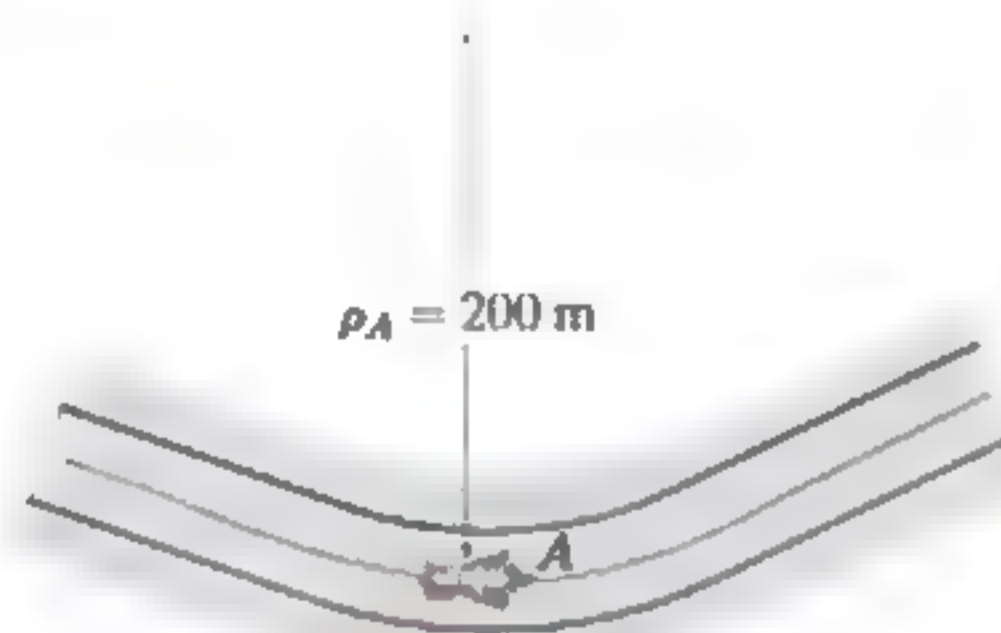
Prob. F13-10

**F13-11.** Si la velocidad de la bola de 10 kg es de 3 m/s cuando está en la posición A, a lo largo de la trayectoria vertical, determine la tensión en la cuerda y el incremento de su rapidez en esta posición.



Prob. F13-11

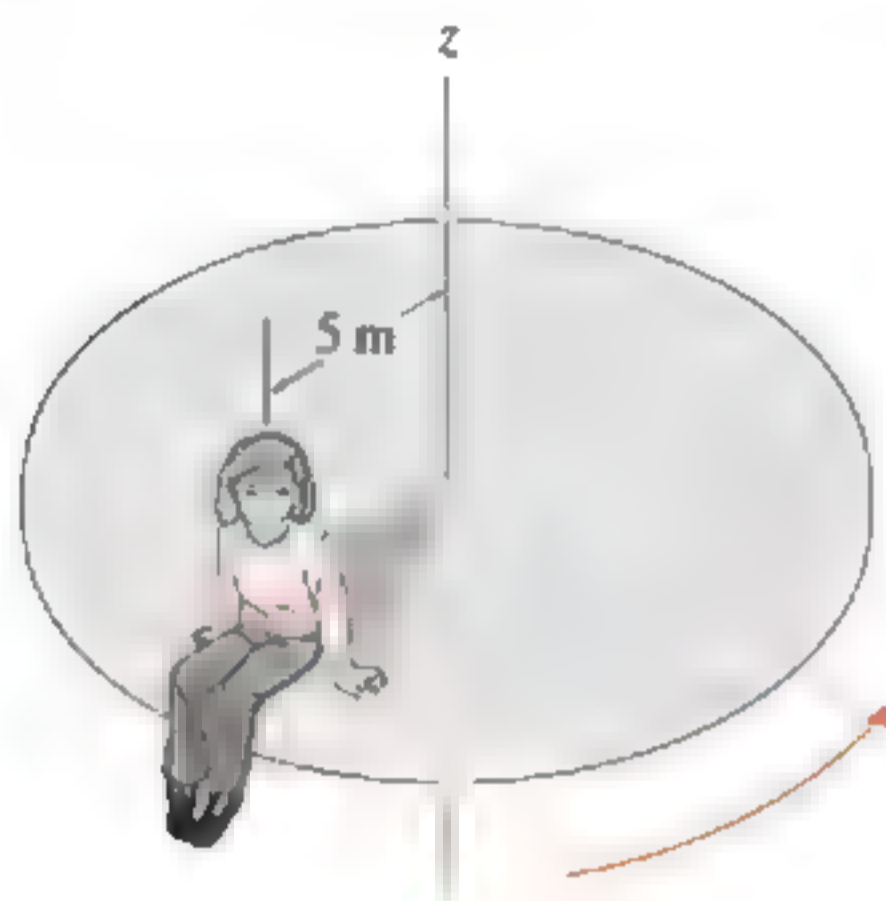
**F13-12.** La masa del motociclista es de 0.5 Mg y su tamaño es despreciable. Pasa por el punto A a una rapidez de 15 m/s, la cual se incrementa a un ritmo constante de  $1.5 \text{ m/s}^2$ . Determine la fuerza de fricción resultante ejercida por la carretera en los neumáticos en este instante.



Prob. F13-12

## PROBLEMAS

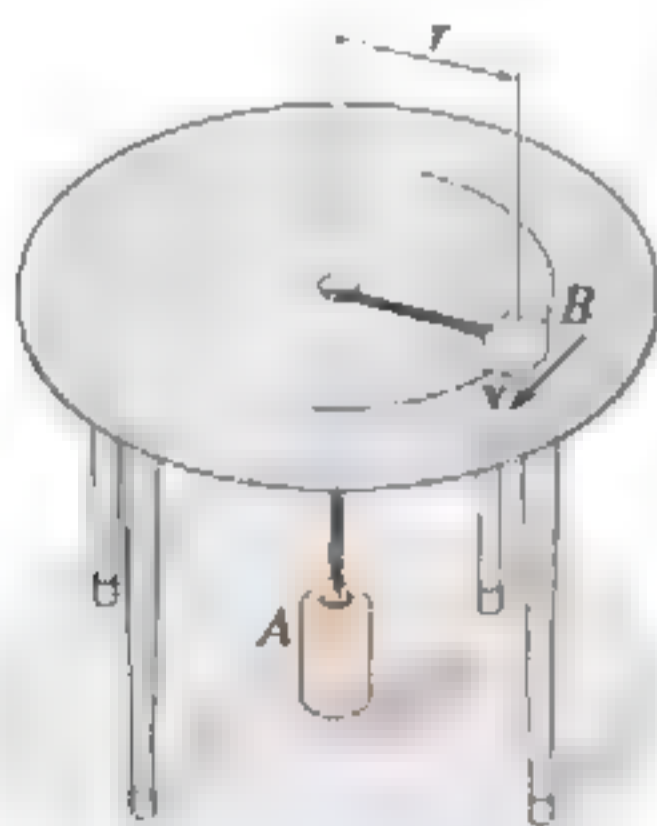
**\*13-52.** Una niña que tiene una masa de 15 kg se sienta inmóvil con respecto a la superficie de una plataforma horizontal a una distancia de  $r = 5$  m desde el centro de la plataforma. Si el movimiento angular de la plataforma se incrementa *lentamente*, de modo que la componente tangencial de la aceleración de la niña puede despreciarse, determine la rapidez máxima que tendrá la niña antes de empezar a deslizarse hacia afuera de la plataforma. El coeficiente de fricción estática entre la niña y la plataforma es  $\mu_s = 0.2$ .



Prob. 13-52

**13-53.** El bloque  $B$  de 2 kg y el cilindro  $A$  de 15 kg están conectados a una cuerda delgada que pasa por un orificio en el centro de una mesa lisa. Si al bloque se le imprime una rapidez de  $v = 10$  m/s, determine el radio  $r$  de la trayectoria circular a lo largo de la cual se desplaza.

**13-54.** El bloque  $B$  de 2 kg y el cilindro  $A$  de 15 kg están conectados a una cuerda delgada que pasa por un orificio en el centro de una mesa lisa. Si el bloque se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de radio  $r = 1.5$  m, determine la rapidez del bloque.



Prob. 13-53, 54

**13-55.** Determine la rapidez constante máxima a la que el piloto puede viajar alrededor de la curva que está en un plano vertical que tiene un radio de curvatura  $\rho = 800$  m, de manera que experimenta una aceleración máxima  $a_n = 8g = 78.5$  m/s<sup>2</sup>. Si el piloto tiene una masa de 70 kg, determine la fuerza normal que ejerce sobre el asiento del avión cuando viaja a esta velocidad y se encuentra en su punto más bajo.

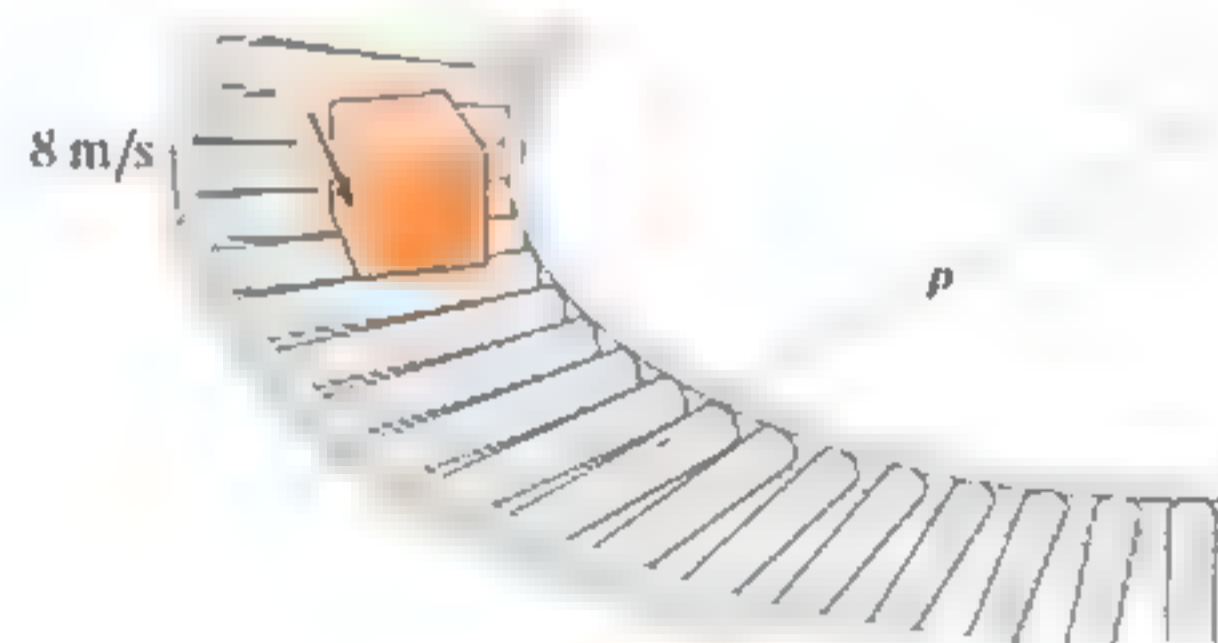
$\rho = 800$  m



Prob. 13-55

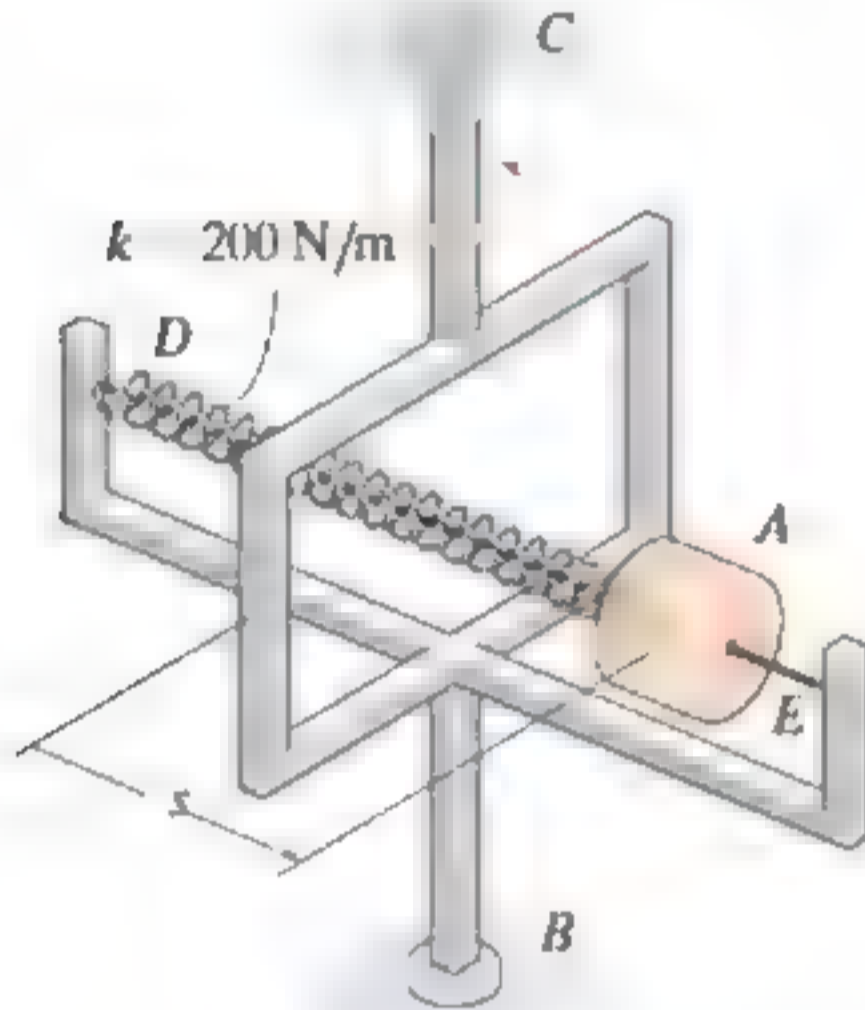
**\*13-56.** Se requiere mover cajas de cartón con una masa de 5 kg a lo largo de la línea de ensamble a una rapidez constante de 8 m/s. Determine el radio de curvatura más pequeño,  $\rho$ , para el transportador, de modo que las cajas de cartón no se deslicen. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre una caja de cartón y el transportador son  $\mu_s = 0.7$  y  $\mu_k = 0.5$ , respectivamente.

8 m/s



Prob. 13-56

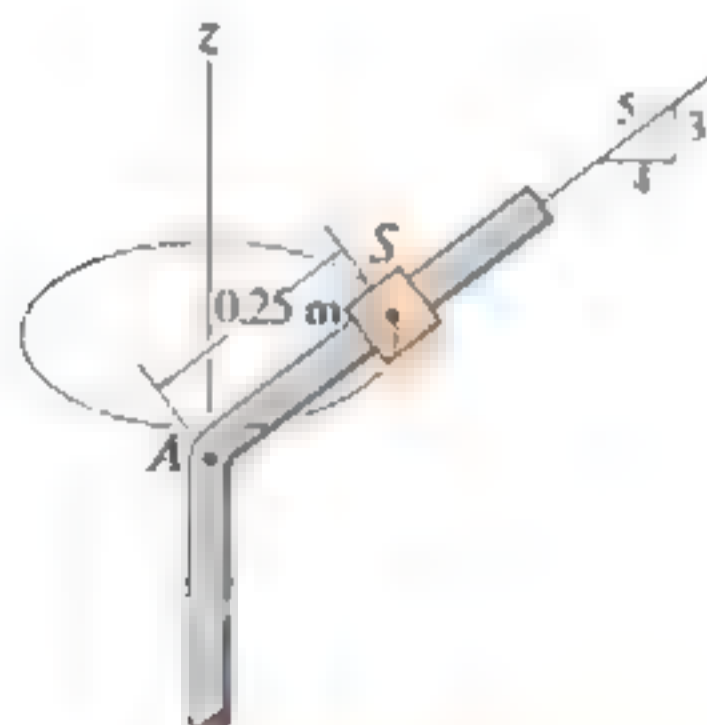
**13-57.** El collarín  $A$ , que tiene una masa de  $0.75 \text{ kg}$ , está unido a un resorte que tiene una rigidez de  $k = 200 \text{ N/m}$ . Cuando la varilla  $BC$  gira alrededor del eje vertical, el collarín se desliza hacia el exterior a lo largo de la varilla lisa  $DE$ . Si el resorte no está estirado cuando  $s = 0$ , determine la rapidez constante del collarín a fin de que  $s = 100 \text{ mm}$ . Además, ¿cuál es la fuerza normal de la varilla sobre el collarín? Desprecie el tamaño del collarín.



Prob. 13-57

**11-58.** El carrito  $S$  de  $2 \text{ kg}$  se ajusta holgadamente sobre la varilla inclinada, cuyo coeficiente de fricción estática es  $\mu_s = 0.2$ . Si el carrito se encuentra a  $0.25 \text{ m}$  de  $A$ , determine la rapidez constante mínima que puede tener el carrito, de modo que no se deslice hacia abajo sobre la varilla.

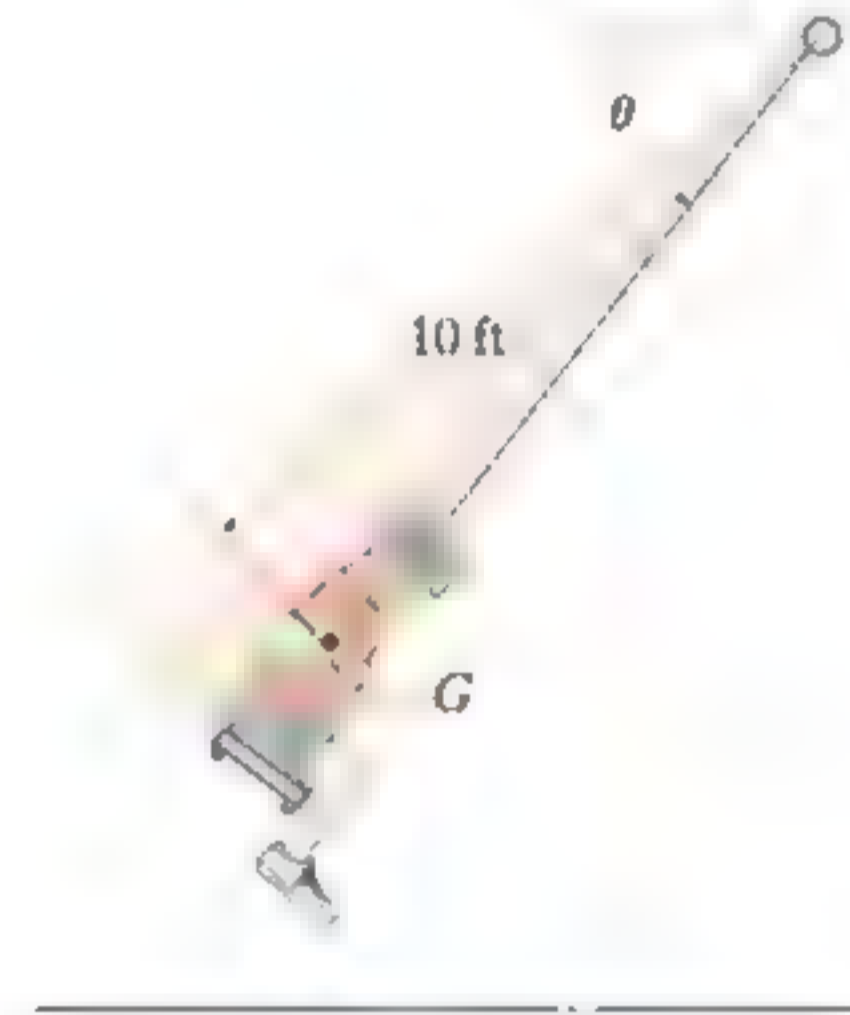
**13-59.** El carrito  $S$  de  $2 \text{ kg}$  se ajusta holgadamente sobre la varilla inclinada, cuyo coeficiente de fricción estática es  $\mu_s = 0.2$ . Si el carrito se encuentra a  $0.25 \text{ m}$  de  $A$ , determine la rapidez constante máxima que puede tener el carrito, de modo que no se deslice hacia arriba sobre la varilla.



Probs. 13-58/59

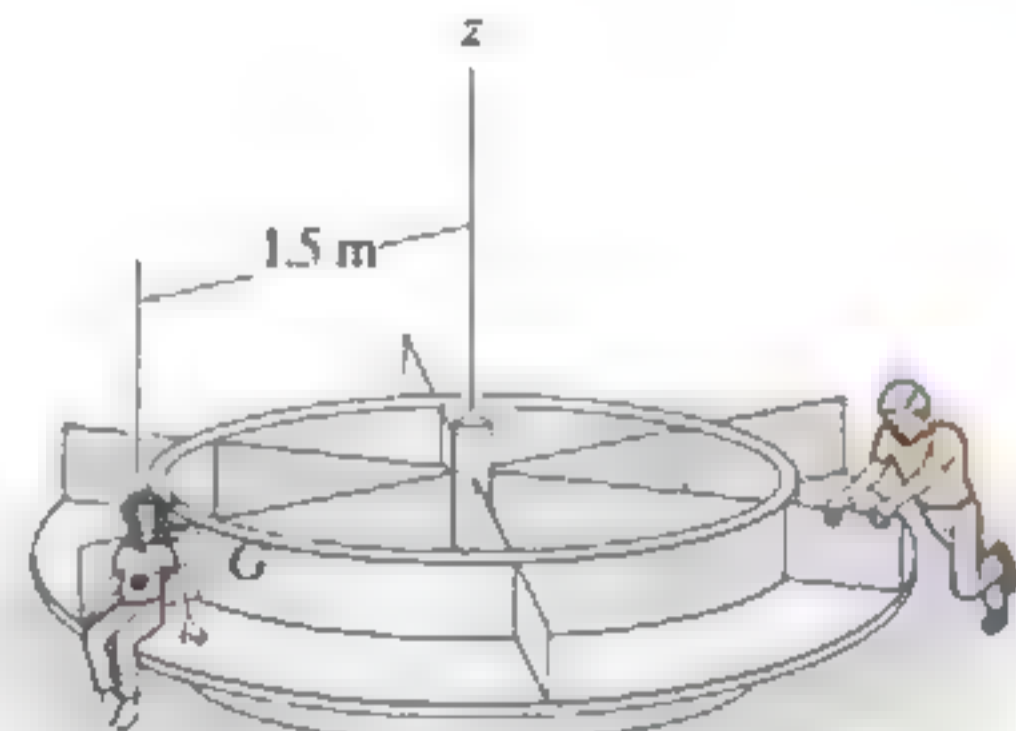
**\*13-60.** En el instante  $\theta = 60^\circ$ , el centro de masa  $G$  del niño tiene una rapidez hacia abajo  $v_G = 15 \text{ ft/s}$ . Determine la razón de cambio de su incremento y la tensión en cada una de las dos cuerdas del columpio en ese instante. El niño tiene un peso de  $60 \text{ lb}$ . Desprecie el tamaño del niño y la masa del asiento y de las cuerdas.

**13-61.** En el instante  $\theta = 60^\circ$ , el centro de masa  $G$  del niño está momentáneamente en reposo. Determine su rapidez y la tensión en cada una de las dos cuerdas del columpio, cuando  $\theta = 90^\circ$ . El niño tiene un peso de  $60 \text{ lb}$ . Desprecie el tamaño del niño y la masa del asiento y de las cuerdas.



Probs. 13-60/61

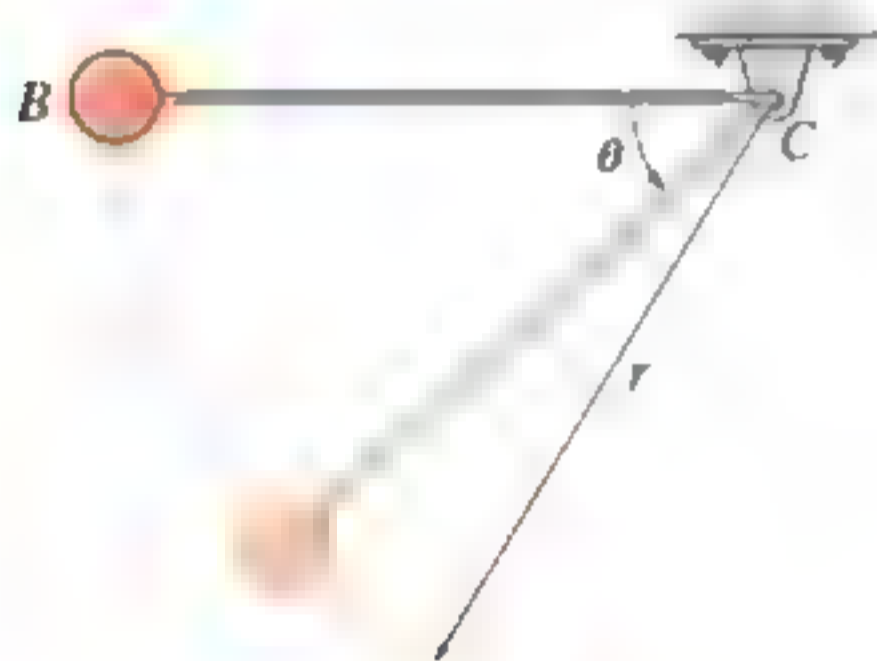
**13-62.** Una niña que tiene una masa de  $25 \text{ kg}$  se sienta en el borde del carrusel, de modo que su centro de masa  $G$  está a una distancia de  $1.5 \text{ m}$  del eje de rotación. Si el movimiento angular de la plataforma se incrementa lentamente de manera que la componente tangencial de la aceleración de la niña es despreciable, determine la rapidez máxima que puede tener antes de que ella comience a deslizarse hacia afuera del carrusel. El coeficiente de fricción estática entre la niña y el carrusel es  $\mu_s = 0.3$ .



Prob. 13-62

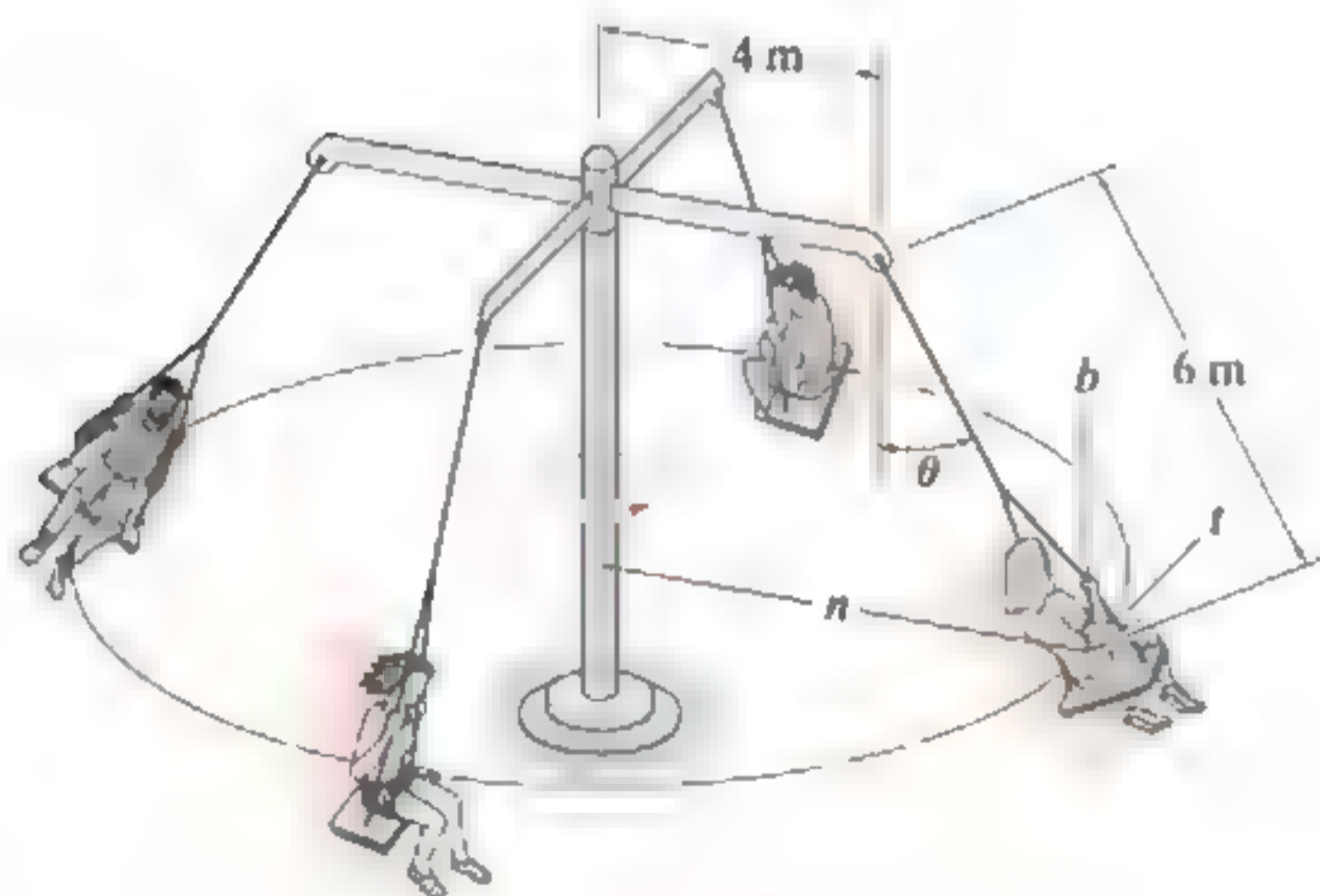
**13-63.** La bola  $B$  del péndulo tiene un peso de 5 lb y se suelta desde el reposo en la posición mostrada,  $\theta = 0^\circ$ . Determine la tensión en la cuerda  $BC$  justo después de que se liberó la bola,  $\theta = 0^\circ$ , y también en el instante en que la bola alcanza  $\theta = 45^\circ$ . Considere que  $r = 3$  ft.

**\*13-64.** La bola  $B$  del péndulo tiene una masa  $m$ , y se suelta desde el reposo cuando  $\theta = 0^\circ$ . Determine la tensión en la cuerda  $BC$  inmediatamente después de eso; también, calcule la tensión en el instante en que la bola alcanza la posición arbitraria  $\theta$ .



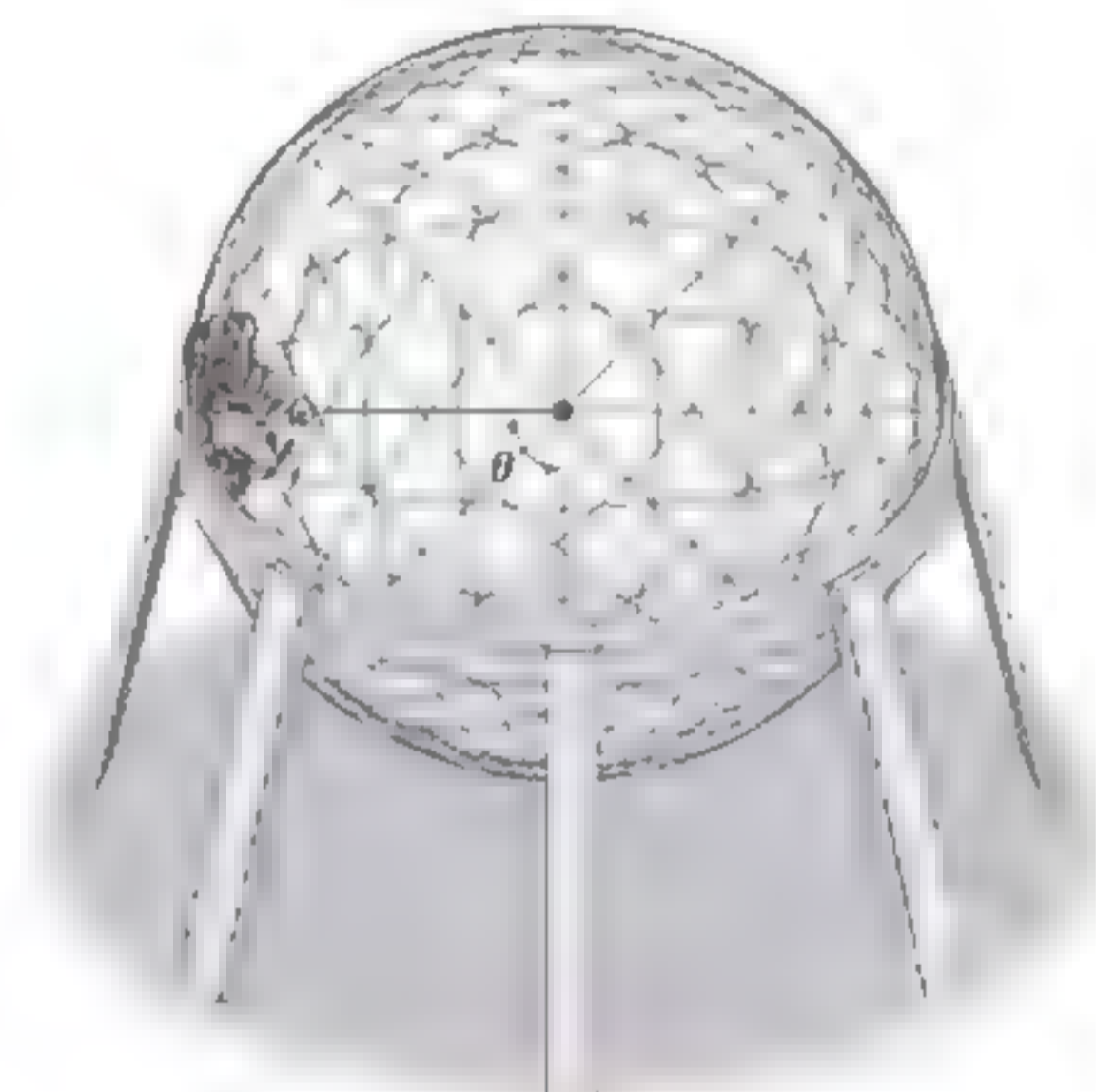
Probs. 13-63/64

**13-65.** Determine la rapidez constante de los pasajeros en el juego mecánico, si se observa que los cables de soporte están dirigidos a un ángulo  $\theta = 30^\circ$  de la vertical. Cada silla tiene una masa de 80 kg incluyendo a su pasajero. Además, ¿cuáles son las componentes de la fuerza en las direcciones  $n$ ,  $t$  y  $b$  que ejerce la silla sobre un pasajero de 50 kg durante el movimiento?



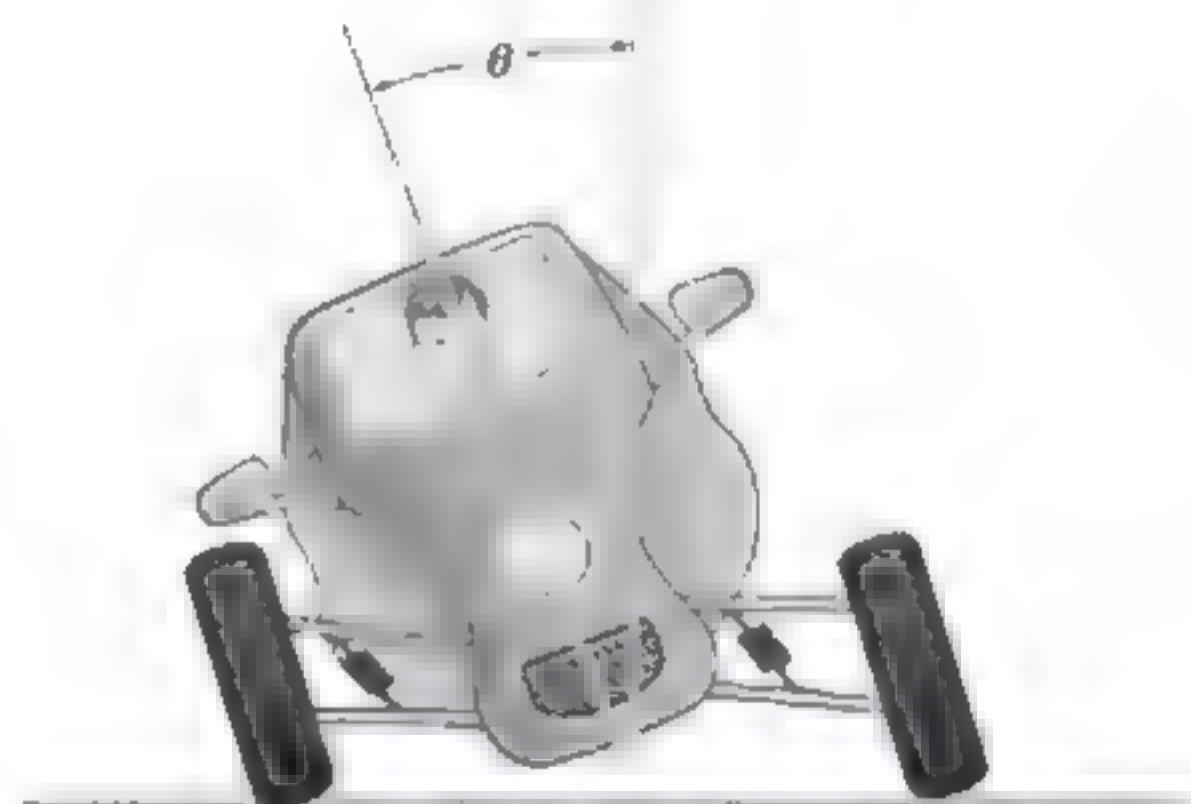
Prob. 13-65

**13-66.** Un motociclista en un circo conduce su moto dentro de la esfera hueca. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas de la motocicleta y la esfera es  $\mu_s = 0.4$ , determine la rapidez mínima a la que debe viajar si debe subir a la pared cuando  $\theta = 90^\circ$ . La masa de la motocicleta y el piloto es de 250 kg, y el radio de curvatura desde el centro de gravedad es  $\rho = 20$  ft. Para realizar el cálculo, desprecie el tamaño de la motocicleta.



Prob. 13-66

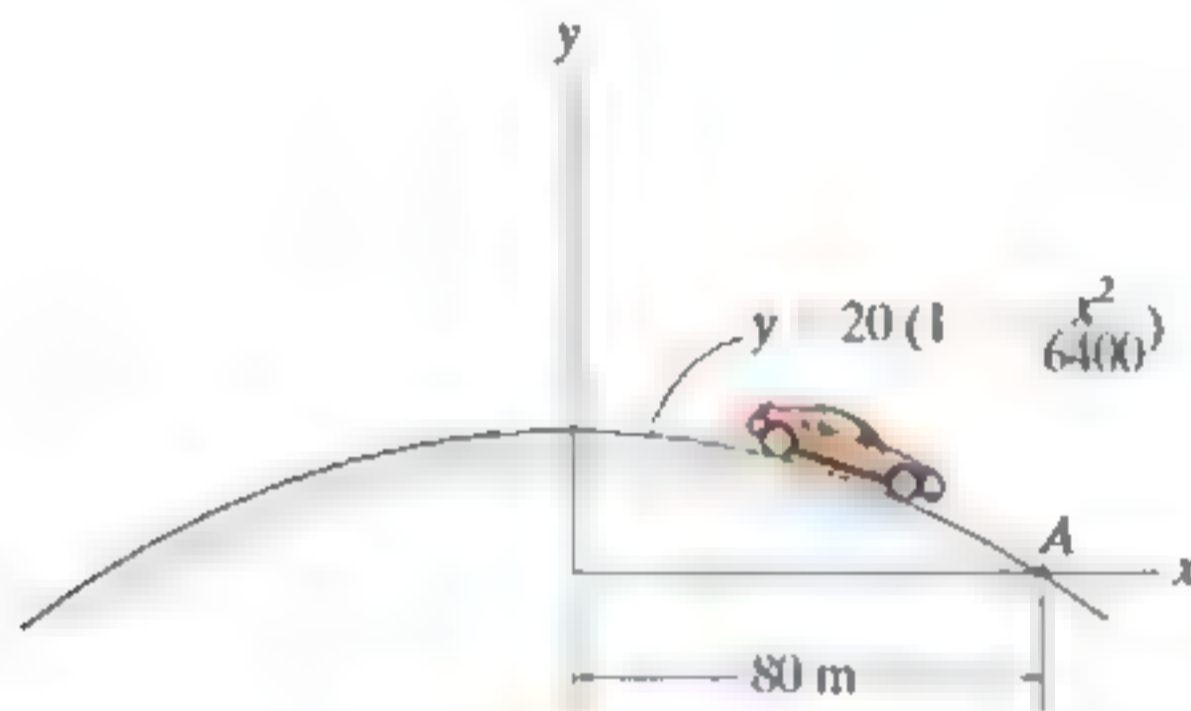
**13-67.** El vehículo está diseñado para combinar la sensación de una motocicleta con la comodidad y seguridad de un automóvil. Si el vehículo viaja a una rapidez constante de 80 km/h por una carretera curva circular de 100 m de radio, determine el ángulo de inclinación  $\theta$  del vehículo, de modo que sólo una fuerza normal producida por el asiento actúe en el conductor. Desprecie el tamaño del conductor.



Prob. 13-67

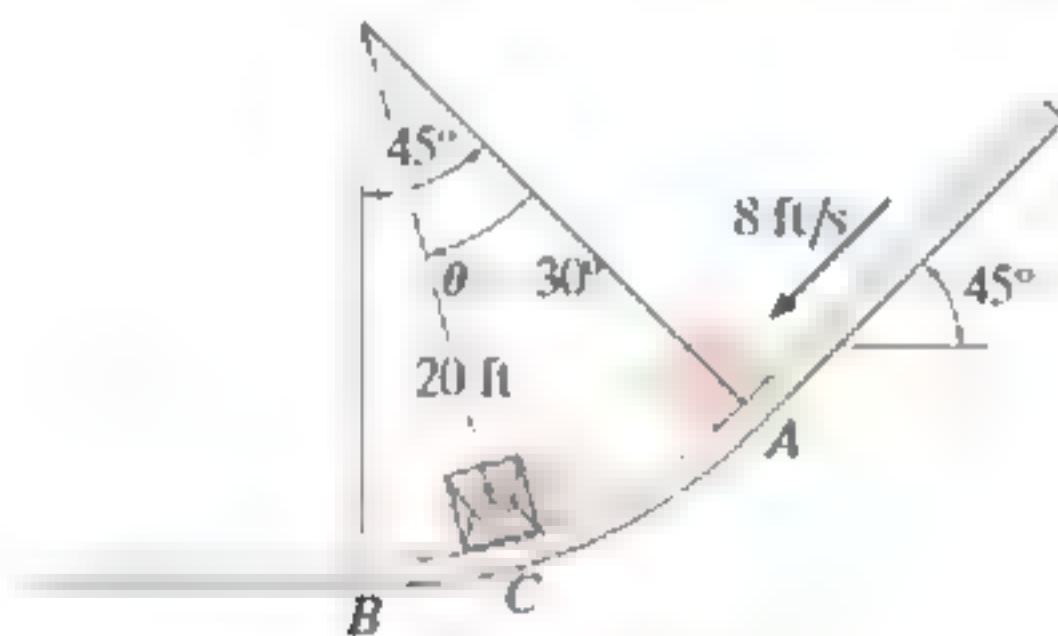
**\*13-68.** Un automóvil de 0.8 Mg viaja sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Si el conductor mantiene una rapidez constante de 9 m/s, determine tanto la fuerza normal resultante como la fuerza de fricción resultante, que todas las ruedas del carro ejercen sobre la carretera en el instante en que llega al punto A. Ignore el tamaño del automóvil.

**13-69.** Un automóvil de 0.8 Mg viaja sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Cuando el automóvil está en el punto A, viaja a una rapidez de 9 m/s y la incrementa a  $3 \text{ m/s}^2$ . Determine tanto la fuerza normal resultante como la fuerza de fricción resultante que todas las ruedas del automóvil ejercen en la carretera en este instante. Ignore el tamaño del automóvil.



Probs. 13-68, 69

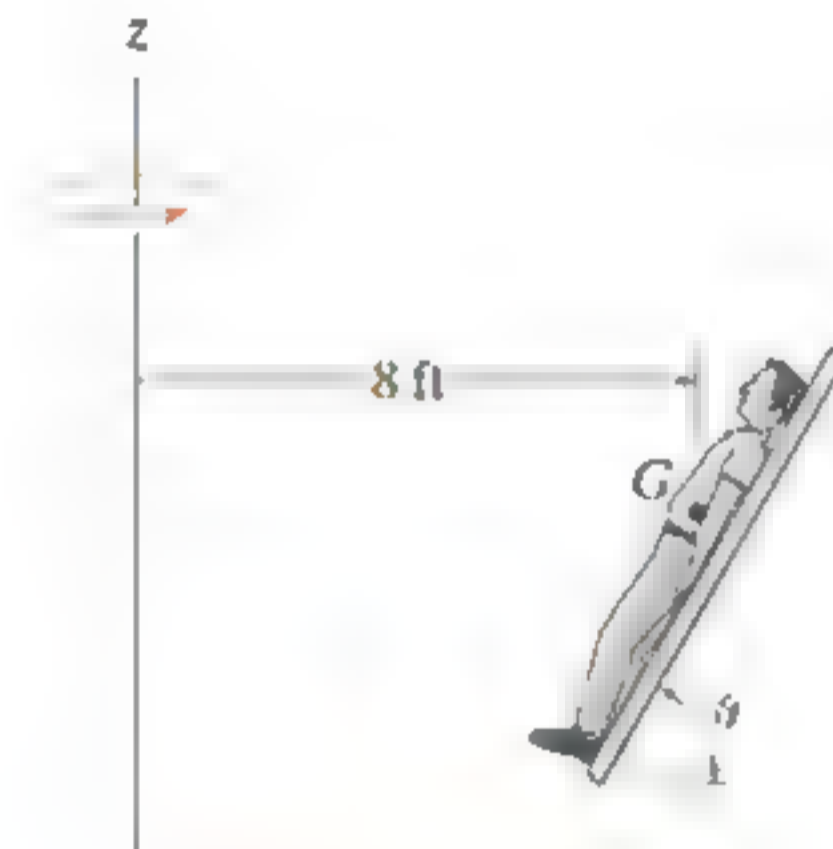
**13-70.** El paquete tiene un peso de 5 lb y se desliza hacia abajo sobre la rampa. Cuando llega a la parte curva AB, se desliza a 8 ft/s ( $\theta = 0^\circ$ ). Si la rampa es lisa, determine la rapidez del paquete cuando alcanza el punto intermedio C ( $\theta = 30^\circ$ ) y cuando alcanza el plano horizontal ( $\theta = 45^\circ$ ). Además, encuentre la fuerza normal sobre el paquete en C.



Prob. 13-70

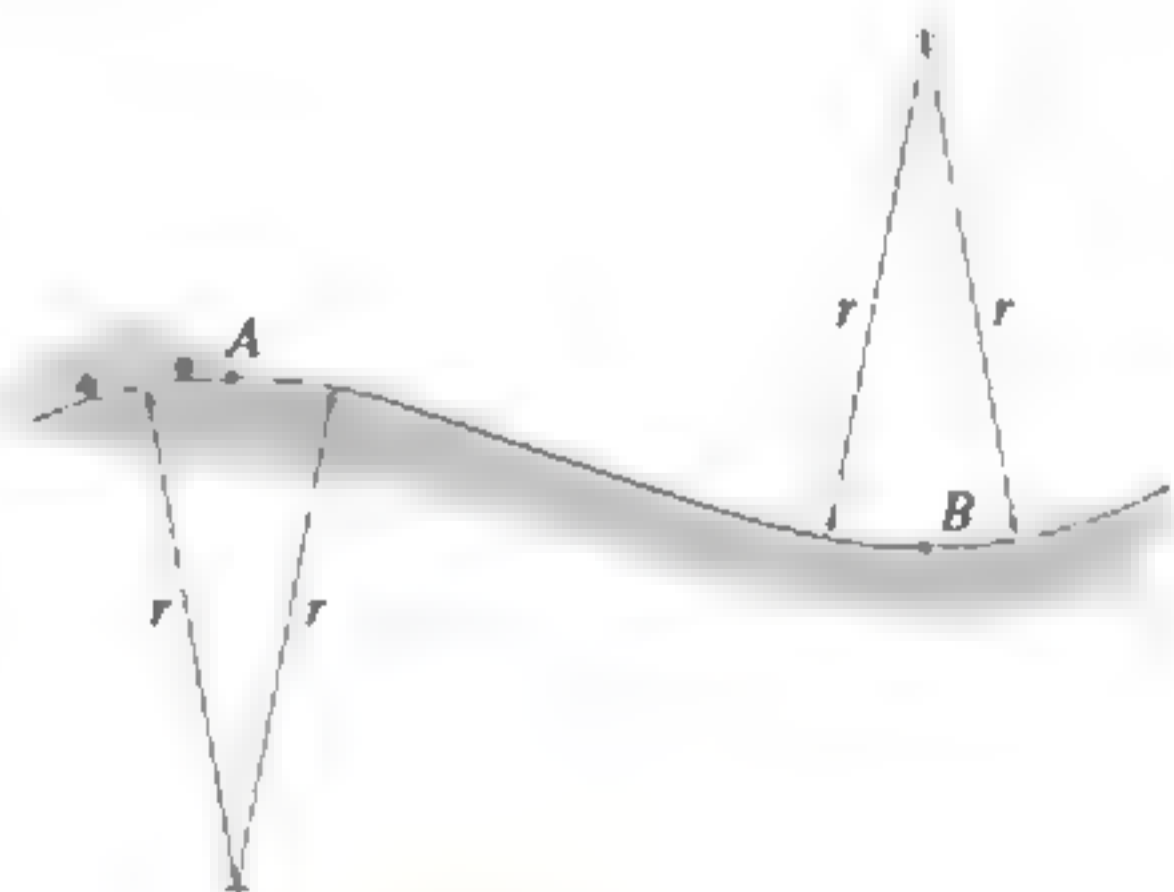
**13-71.** El hombre de 150 lb descansa contra un cojín, cuyo coeficiente de fricción estática es  $\mu_s = 0.5$ . Determine las fuerzas resultantes normal y de fricción que el cojín ejerce sobre el hombre si, debido a la rotación con respecto al eje z, tiene una rapidez constante  $v = 20 \text{ ft/s}$ . Desprecie el tamaño del hombre. Considere que  $\theta = 60^\circ$ .

**\*13-72.** El hombre de 150 lb descansa contra un cojín cuyo coeficiente de fricción estática es  $\mu_s = 0.5$ . Si gira con respecto al eje z con una rapidez constante  $v = 30 \text{ ft/s}$ , determine el menor ángulo  $\theta$  del cojín en el que comenzará a deslizarse.



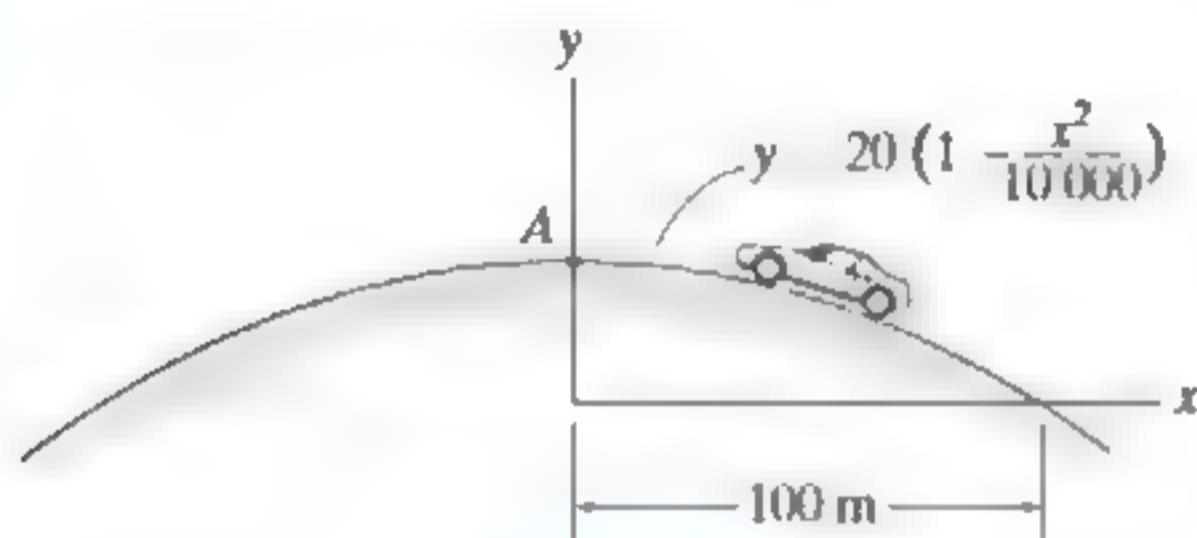
Probs. 13-71, 72

**13-73.** Determine la rapidez máxima a la que el automóvil con masa  $m$  puede pasar por encima del punto A de la carretera con segmentos curvos y seguir manteniendo contacto con la carretera. Si el auto mantiene esta rapidez, ¿cuál es la reacción normal que ejerce la carretera sobre el automóvil cuando pasa el punto más bajo del camino en B?



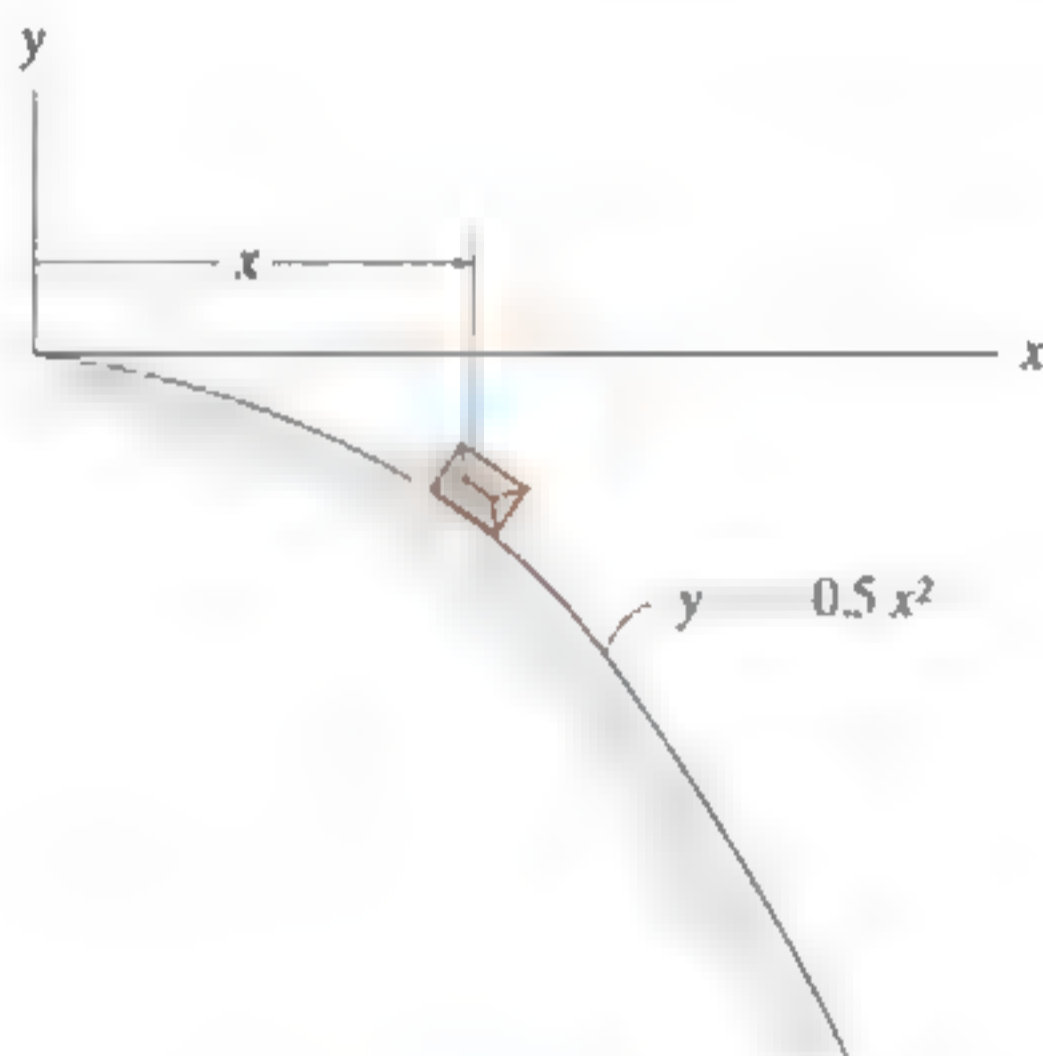
Prob. 13-73

**13-74.** Determine la rapidez constante máxima a la que el automóvil de 2 Mg puede viajar sobre la cresta de la colina en  $A$  sin despegarse de la superficie de la carretera. Para realizar los cálculos, desprecie el tamaño del auto.



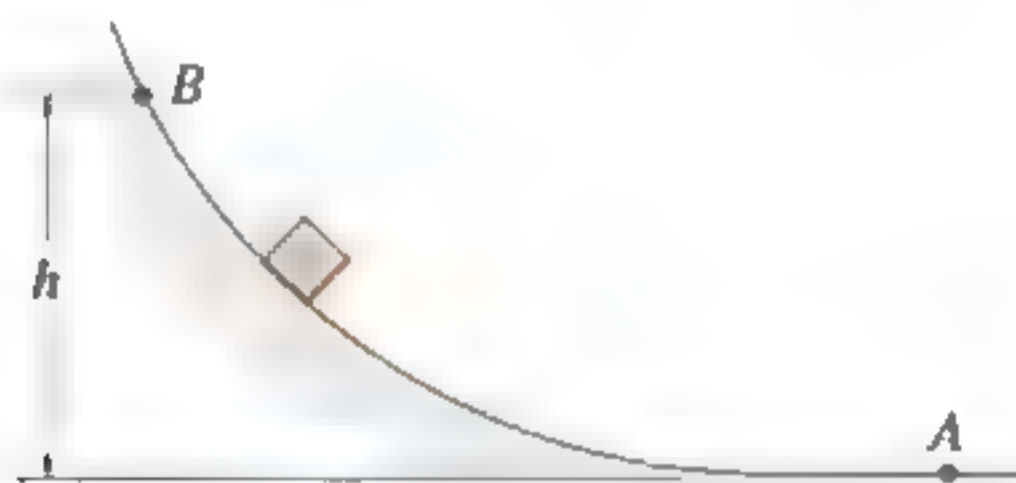
Prob. 13-74

**13-75.** La caja tiene una masa  $m$  y se desliza hacia abajo por la rampa lisa que tiene la forma de una parábola. Si tiene una velocidad inicial de  $v_0$  en el origen, determine su velocidad como una función de  $x$ . Además, ¿cuál es la fuerza normal sobre la caja y la aceleración tangencial en función de  $x$ ?



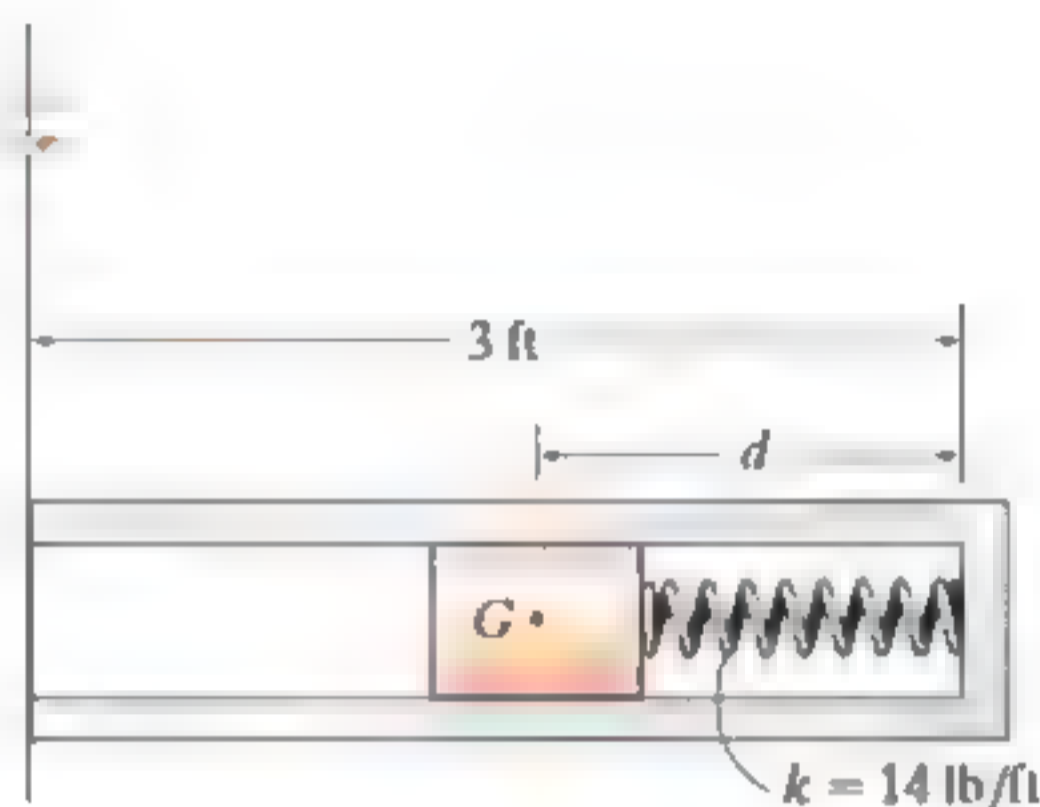
Prob. 13-75

**\*13-76.** Demuestre que si el bloque se libera desde el reposo en el punto  $B$  de una trayectoria lisa con forma arbitraria, la rapidez que alcanza cuando se llega al punto  $A$  es igual a la rapidez que alcanza cuando cae libremente a través de una altura  $h$ ; es decir,  $h$ ; i.e.,  $v = \sqrt{2gh}$ .



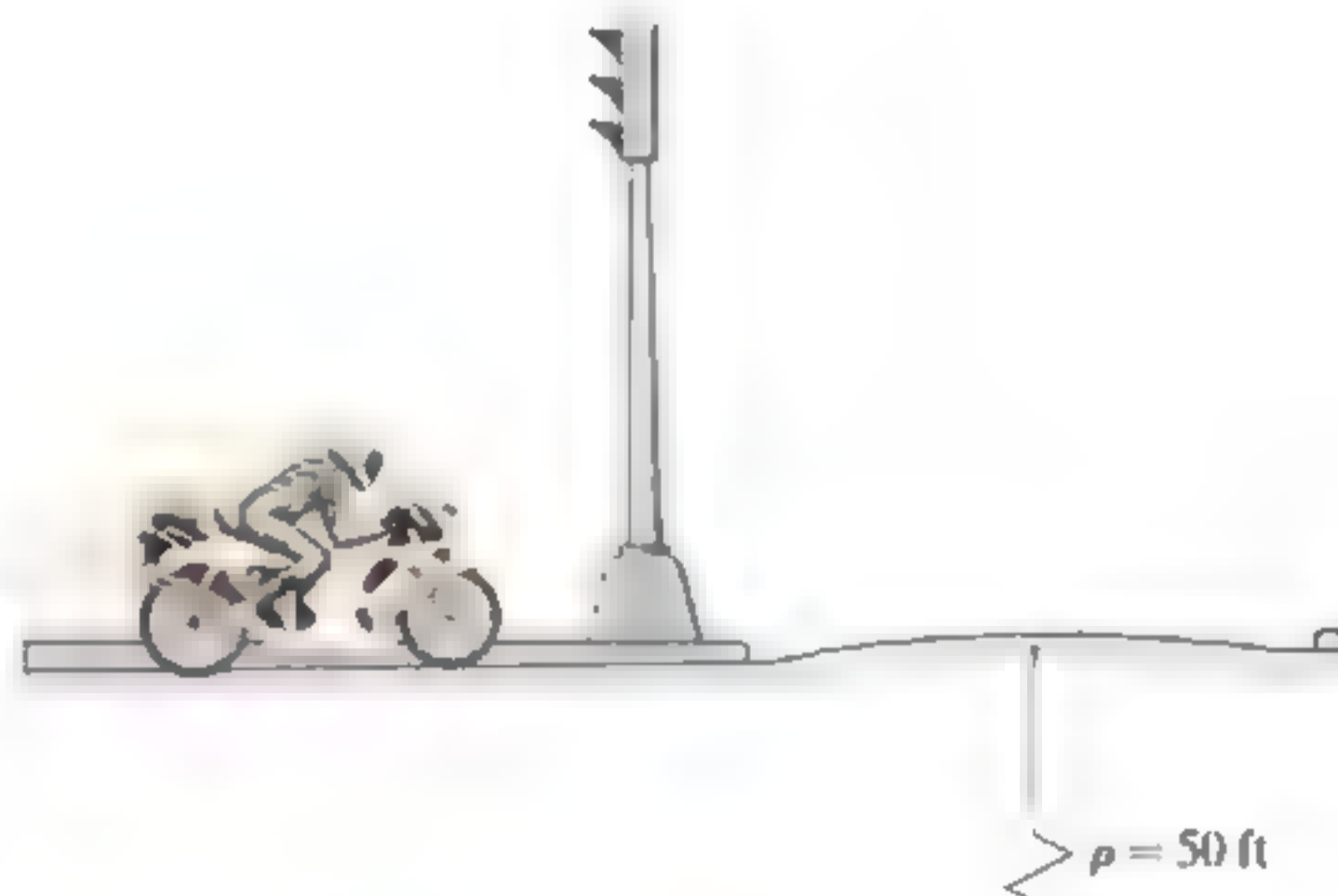
Prob. 13-76

**13-77.** El tapón cilíndrico tiene un peso de 2 lb y se mueve libremente dentro del tubo liso. El resorte tiene una rigidez  $k = 14 \text{ lb/ft}$  y, cuando no se produce ningún movimiento, la distancia  $d = 0.5 \text{ ft}$ . Determine la fuerza del resorte sobre el tapón cuando éste se encuentra en reposo con respecto al tubo. El tapón se desplaza con una rapidez constante de 15 ft/s, que es causada por la rotación del tubo con respecto al eje vertical.



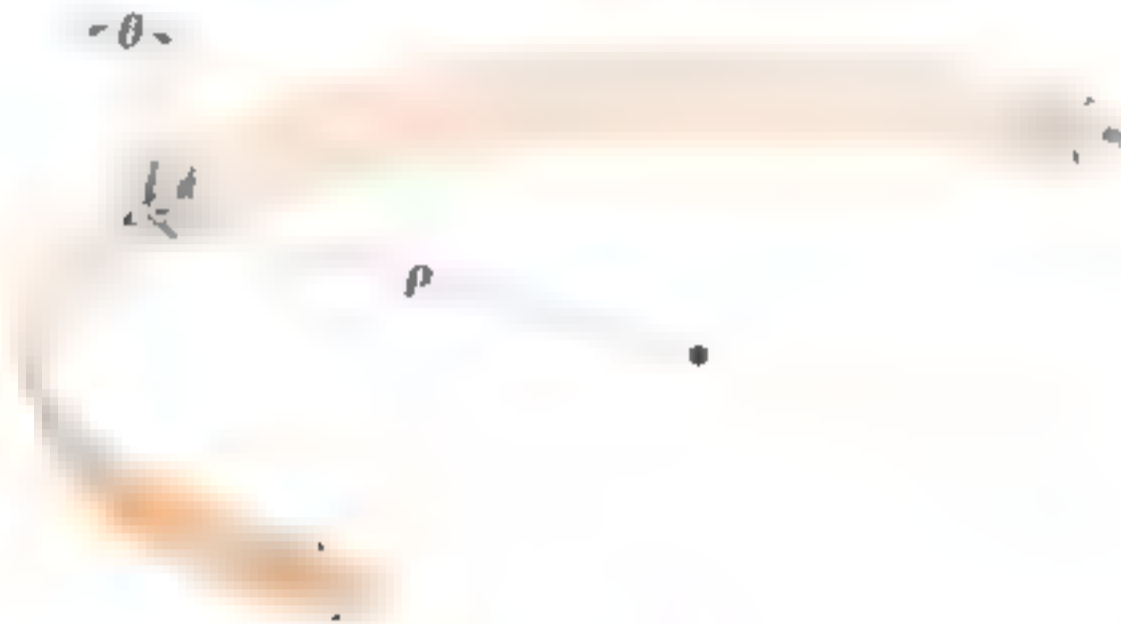
Prob. 13-77

**13-78.** Al pasar por un cruce, un motociclista se encuentra con el ligero desnivel o corona causada por el cruce de las calles. Si la cresta del desnivel tiene un radio de curvatura  $\rho = 50 \text{ ft}$ , determine la rapidez constante máxima a la que puede viajar sin despegarse de la superficie de la carretera. Para los cálculos, desprecie el tamaño de la motocicleta y el motociclista. El piloto y su moto tienen un peso total de 450 lb.



Prob. 13-78

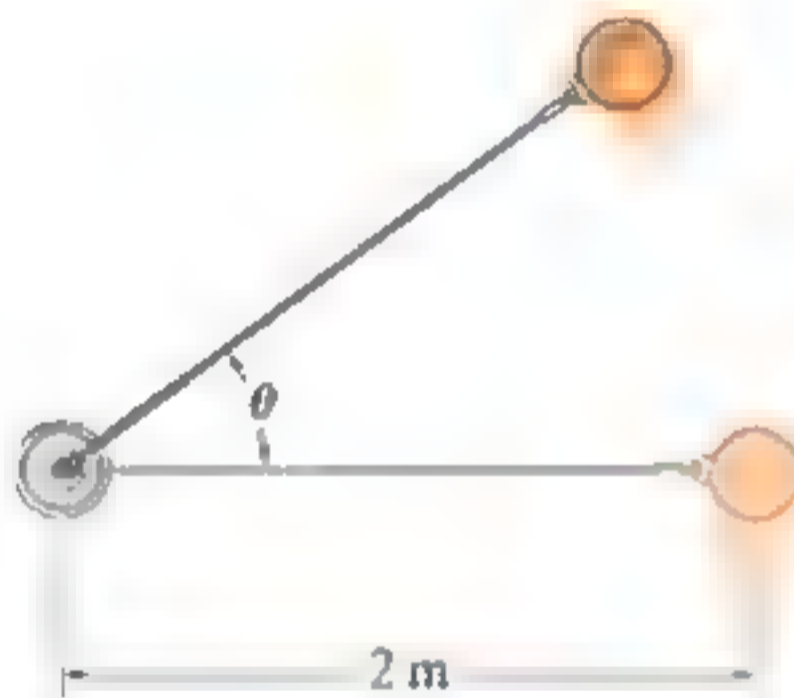
**13-79.** El avión, que viaja a una rapidez constante de 50 m/s, ejecuta un giro en la curva que está en un plano horizontal. Si el avión se inclina a  $\theta = 15^\circ$ , cuando el piloto experimenta sólo una fuerza normal sobre el asiento del avión, determine el radio de curvatura  $\rho$  de la curva. También, calcule la fuerza normal del asiento sobre el piloto, si él tiene una masa de 70 kg.



Prob. 13-79

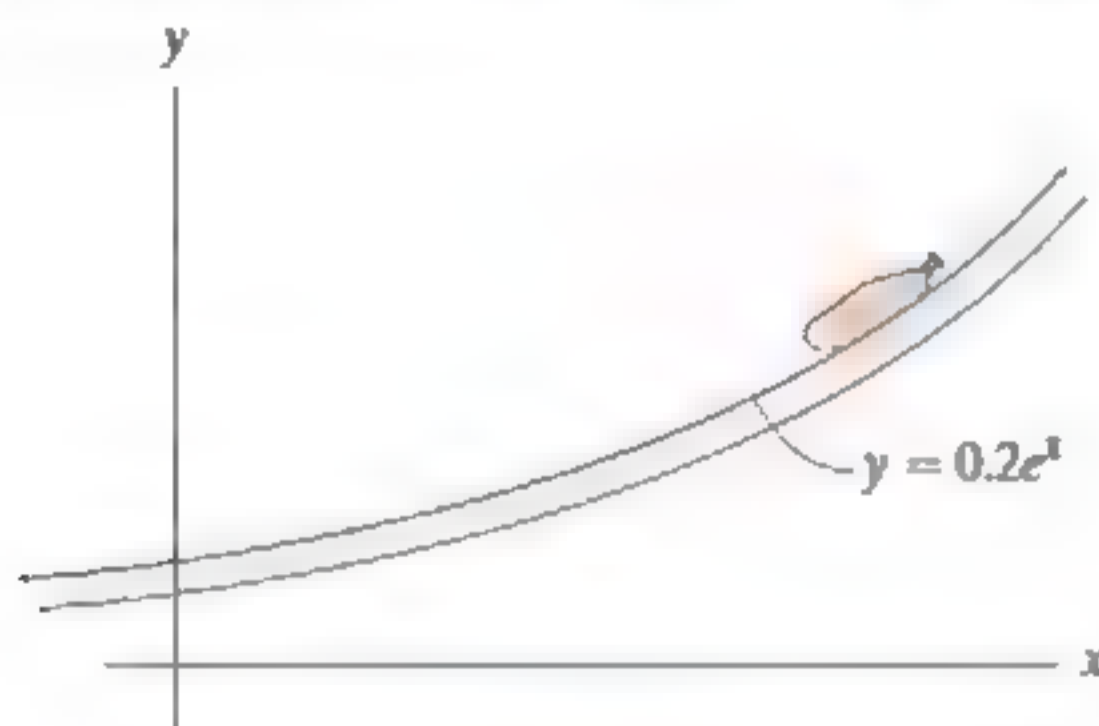
**\*13-80.** La bola del péndulo de 2 kg se mueve en el plano vertical con una velocidad de 8 m/s, cuando  $\theta = 0^\circ$ . Determine la tensión inicial de la cuerda y también, su magnitud, en el instante en que la bola llega a  $\theta = 30^\circ$ . Desprecie el tamaño de la bola.

**13-81.** La bola del péndulo de 2 kg se mueve en el plano vertical con una velocidad de 6 m/s cuando  $\theta = 0^\circ$ . Determine el ángulo  $\theta$ , donde la tensión en la cuerda se vuelve cero.



Probs. 13-80-81

**13-82.** El saco de 8 kg se desliza sobre la rampa lisa. Si tiene una rapidez de 1.5 m/s cuando  $y = 0.2$  m, determine la reacción normal que ejerce la rampa sobre el saco y la razón de cambio de la rapidez del saco en ese instante.



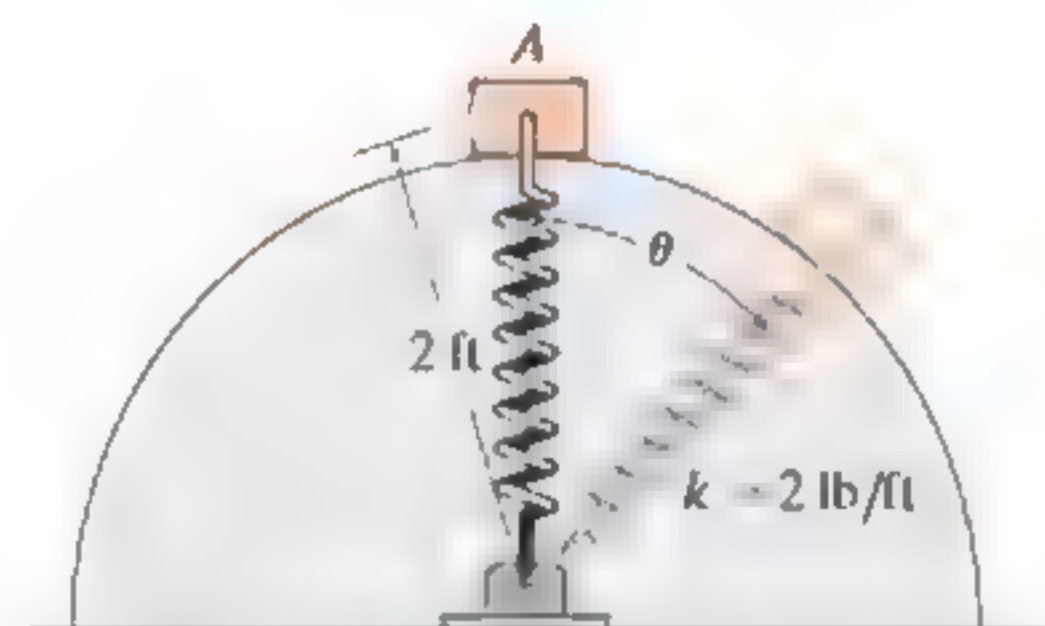
Prob. 13-82

**13-83.** La bola tiene una masa  $m$  y está unida a la cuerda de longitud  $l$ . La cuerda se encuentra atada en la parte superior a un eslabón giratorio y la bola recibe una velocidad inicial  $v_0$ . Demuestre que el ángulo  $\theta$  que forma la cuerda con la vertical, cuando la bola viaja alrededor de la trayectoria circular, debe satisfacer la ecuación  $\tan \theta \sin \theta = v_0^2 / gl$ . Desprecie la resistencia del aire y el tamaño de la bola.

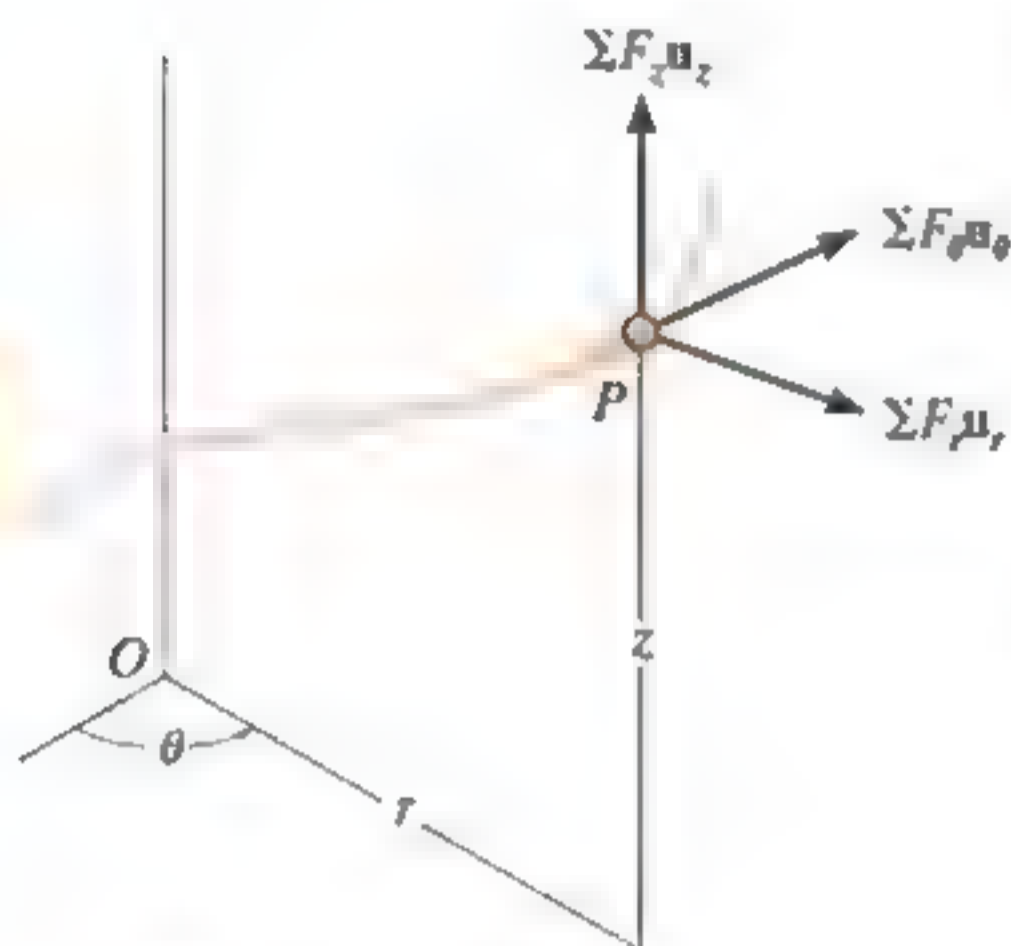


Prob. 13-83

**\*13-84.** El bloque de 2 lb se suelta desde el reposo en A y se desliza hacia abajo sobre la superficie cilíndrica lisa. Si el resorte tiene una rigidez  $k = 2$  lb/ft, determine su longitud no estirada, tal que no permita que el bloque se despegue de la superficie hasta que  $\theta = 60^\circ$ .



Prob. 13-84



Sistema de coordenadas inercial

Fig. 13-16

## 13.6 Ecuaciones de movimiento: coordenadas cilíndricas

Cuando todas las fuerzas que actúan en una partícula se descomponen en sus componentes cilíndricas, es decir, a lo largo de las direcciones de los vectores unitarios  $u_r$ ,  $u_\theta$  y  $u_z$  (fig. 13-16), la ecuación de movimiento se expresa como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_r u_r + \Sigma F_\theta u_\theta + \Sigma F_z u_z = ma_r u_r + ma_\theta u_\theta + ma_z u_z$$

Para que esta ecuación se satisfaga, requerimos

$$\begin{aligned}\Sigma F_r &= ma_r \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta \\ \Sigma F_z &= ma_z\end{aligned}\quad (13-9)$$

Si la partícula sólo puede moverse en el plano  $r$ - $\theta$ , entonces únicamente se utilizan las primeras dos ecuaciones 13-9 para especificar el movimiento.

**Fuerzas tangenciales y normales.** El tipo de problema más directo que implica coordenadas cilíndricas requiere determinar las componentes de fuerza resultantes  $\Sigma F_r$ ,  $\Sigma F_\theta$ ,  $\Sigma F_z$  que hacen que una partícula se mueva con una aceleración *conocida*. Si, no obstante, el movimiento acelerado de la partícula no está completamente especificado en el instante dado, entonces se deberán tener o calcular algunos datos relacionados con las direcciones o magnitudes de las fuerzas que actúan en la partícula, para resolver las ecuaciones 13-9. Por ejemplo, la fuerza  $\mathbf{P}$  hace que la partícula de la figura 13-17a se mueva a lo largo de una trayectoria  $r = f(\theta)$ . La *fuerza normal*  $\mathbf{N}$  que la trayectoria ejerce en la partícula siempre es *perpendicular a la tangente de la trayectoria*, en tanto que la fuerza de fricción  $\mathbf{F}$  siempre actúa a lo largo de la tangente en la dirección opuesta del movimiento. Las *direcciones* de  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{F}$  pueden especificarse con respecto a la coordenada radial con el ángulo  $\psi$  (psi) (fig. 13-17b), el cual se define entre la línea radial *extendida* y la tangente a la curva.



El movimiento de los carros de la montaña rusa a lo largo de esta espiral puede estudiarse utilizando coordenadas cilíndricas (© R. C. Hibbeler)

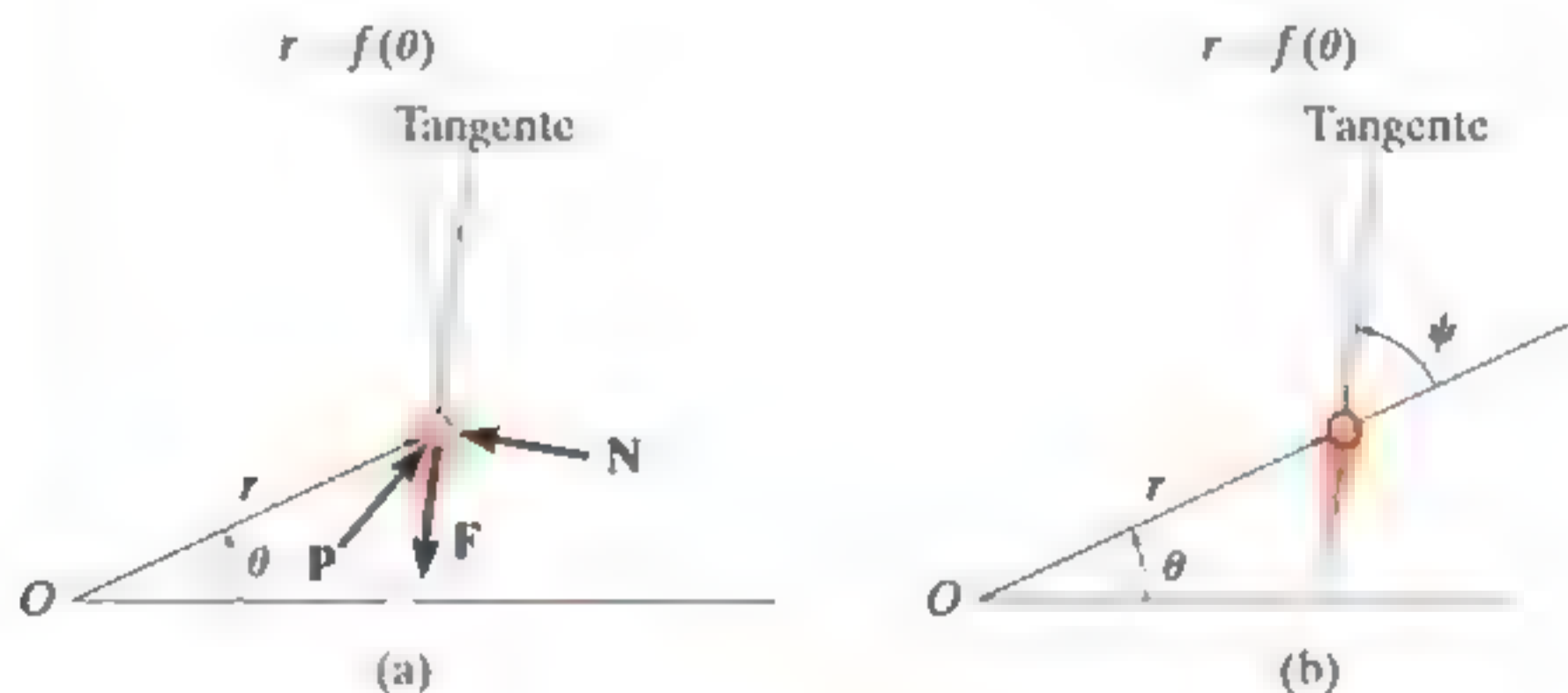
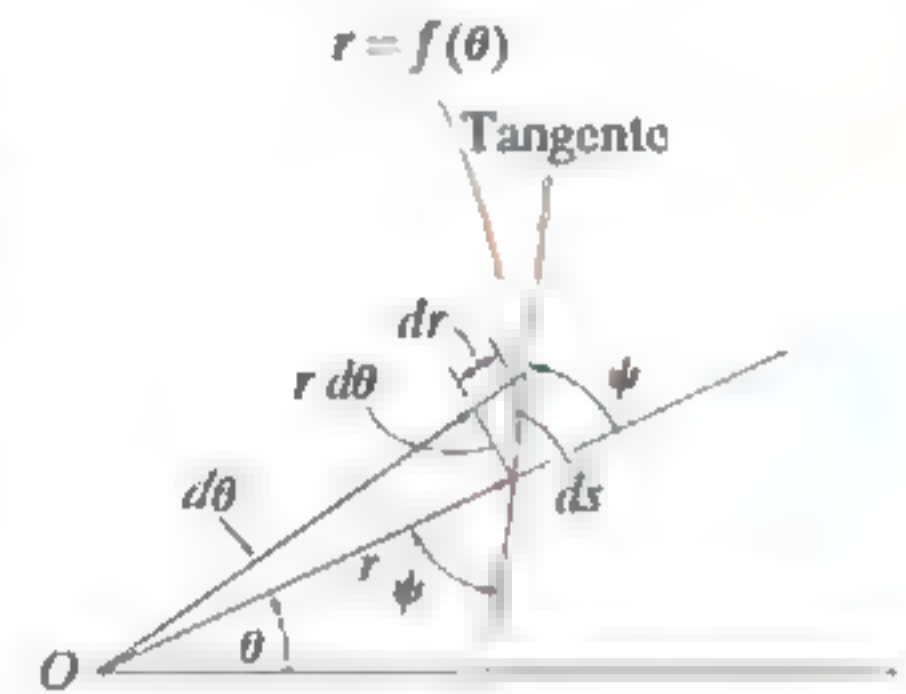


Fig. 13-17

Este ángulo se obtiene al observar que cuando la partícula recorre una distancia  $ds$  a lo largo de la trayectoria (fig. 13-17c), la componente del desplazamiento en la dirección radial es  $dr$  y en la dirección transversal es  $r d\theta$ . Como estas dos componentes son mutuamente perpendiculares, el ángulo  $\psi$  se determina a partir de  $\tan \psi = r d\theta/dr$ , o bien,

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} \quad (13-10)$$

Si  $\psi$  se calcula como una cantidad positiva, entonces se mide de la *línea radial extendida* a la tangente en sentido antihorario o en la dirección positiva de  $\theta$ . Si es negativo, se mide en la dirección opuesta a la  $\theta$  positiva. Por ejemplo, considere el cardioide  $r = a(1 + \cos \theta)$ , de la figura 13-18. Como  $dr/d\theta = -a \sin \theta$ , entonces cuando  $\theta = 30^\circ$ ,  $\tan \psi = a(1 + \cos 30^\circ)/(-a \sin 30^\circ) = -3.732$ , o  $\psi = -75^\circ$ , medido en sentido horario, opuesto a  $+\theta$  como se indica en la figura.



(c)

Fig. 13-17(cont.)

## Procedimiento para el análisis

Las coordenadas cilíndricas o polares son una elección adecuada para el análisis de un problema para el cual se dan datos con respecto al movimiento angular de la línea radial  $r$ , o en casos donde la trayectoria puede expresarse convenientemente en función de estas coordenadas. Una vez que se establecen estas coordenadas, las ecuaciones de movimiento pueden aplicarse entonces para relacionar las fuerzas que actúan en la partícula con sus componentes de aceleración. El método para hacerlo se describió en el procedimiento para el análisis dado en la sección 13.4. Lo siguiente es un resumen de este procedimiento.

### Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el sistema de coordenadas  $r, \theta, z$  inercial y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula.
- Suponga que  $a_r, a_\theta, a_z$  actúan en las *direcciones positivas* de  $r, \theta, z$  si son desconocidas.
- Identifique todas las incógnitas en el problema.

### Ecuaciones de movimiento

- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9.

### Cinemática

- Use los métodos de la sección 12.8 para determinar  $r$  y las derivadas con respecto al tiempo  $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \ddot{z}$ , y luego, evalúe las componentes de aceleración  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, a_z = \ddot{z}$ .
- Si cualquiera de las componentes de aceleración se calcula como una cantidad negativa, ello indica que actúa en la dirección de su coordenada negativa.
- Cuando calculan las derivadas con respecto al tiempo de  $r = f(\theta)$ , es muy importante utilizar la regla de la cadena del cálculo, la cual se analiza en el apéndice C.

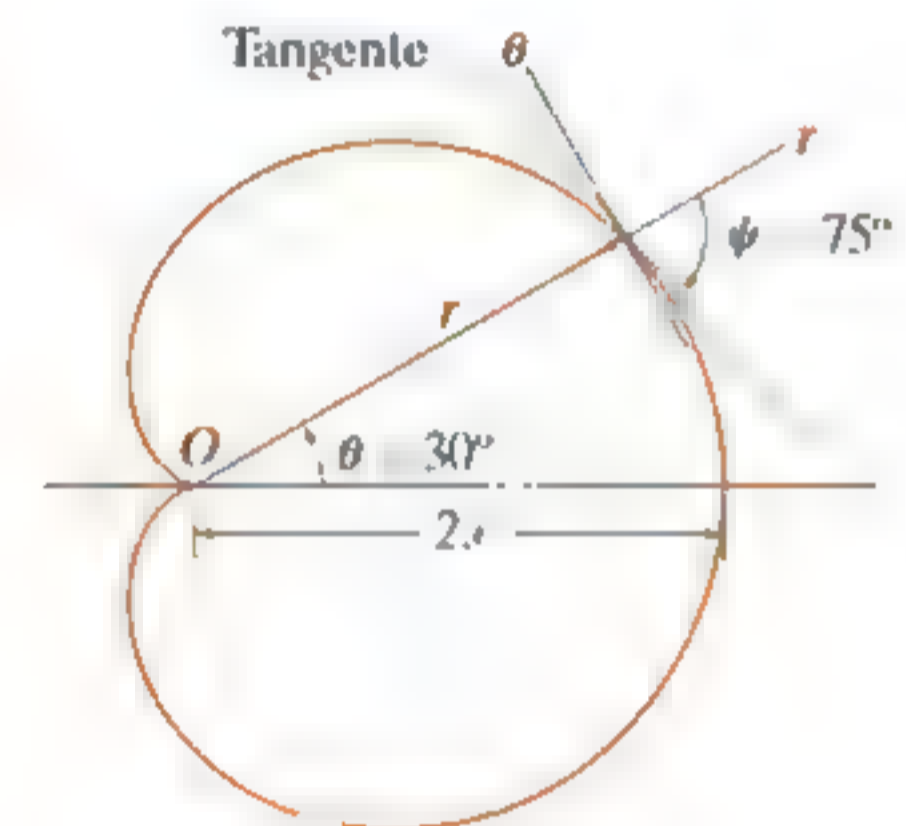


Fig. 13-18

## EJEMPLO

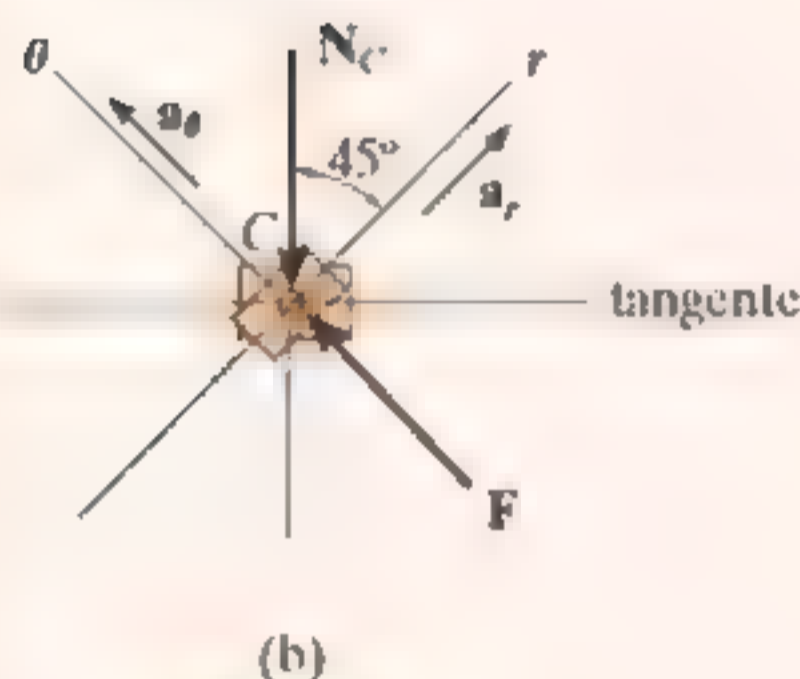
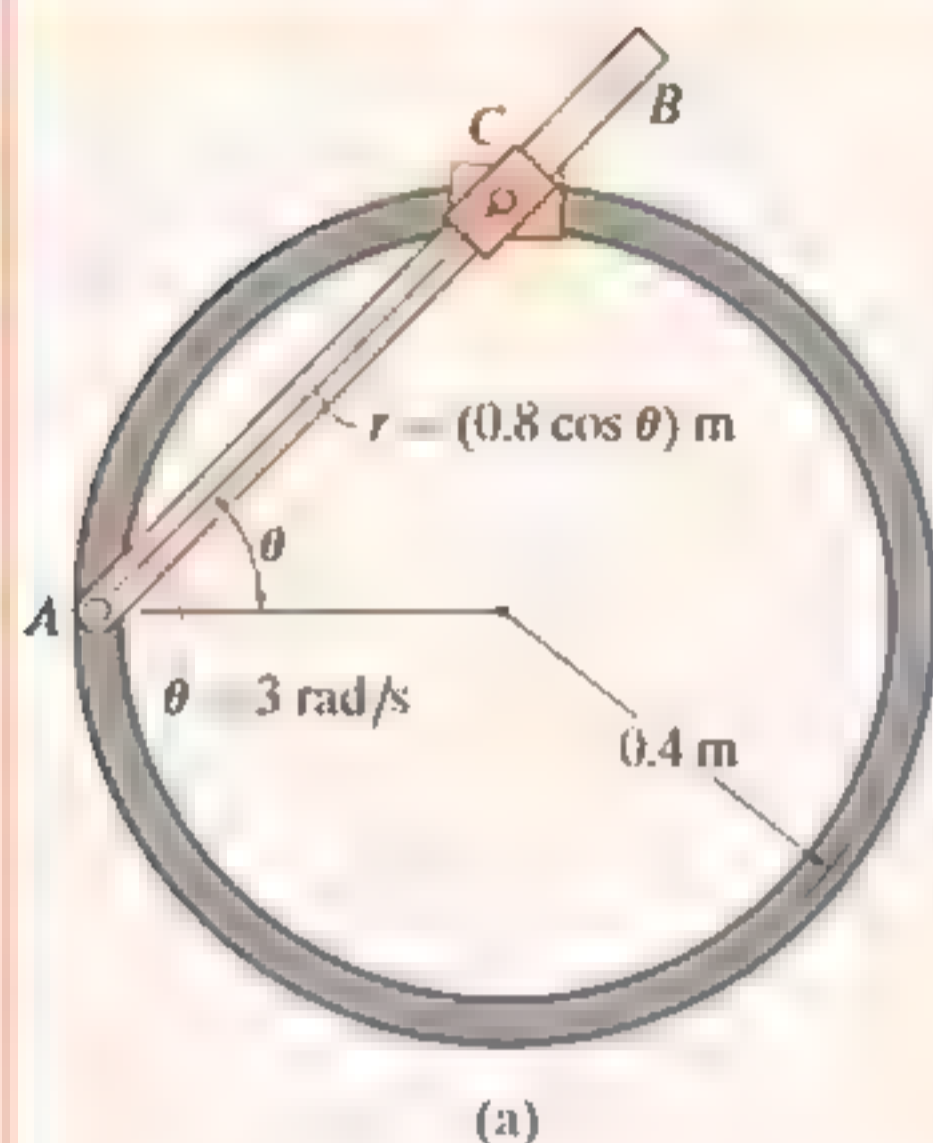


Fig. 13-19

El doble anillo liso de 0.5 kg que se muestra en la figura 13-19a puede deslizarse libremente sobre el brazo  $AB$  y la varilla guía circular. Si el brazo gira a una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$ , determine la fuerza que el brazo ejerce sobre el anillo en el instante  $\theta = 45^\circ$ . El movimiento ocurre en el plano horizontal.

## SOLUCIÓN

La reacción normal  $N_C$  de la varilla guía circular y la fuerza  $F$  del brazo  $AB$  actúan en el anillo en el plano del movimiento (fig. 13-19b). Observe que  $F$  actúa perpendicular al eje del brazo  $AB$ , es decir, en la dirección del eje  $\theta$ , en tanto que  $N_C$  lo hace perpendicular a la tangente de la trayectoria circular en  $\theta = 45^\circ$ . Las cuatro incógnitas son  $N_C$ ,  $F$ ,  $a_r$  y  $a_\theta$ .

## Ecuaciones de movimiento

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r: \quad -N_C \cos 45^\circ = (0.5 \text{ kg}) a_r \quad (1)$$

$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta: \quad F - N_C \sin 45^\circ = (0.5 \text{ kg}) a_\theta \quad (2)$$

**Cinemática.** Con la regla de la cadena (vea el apéndice C), la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de  $r$  cuando  $\theta = 45^\circ$ ,  $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$ ,  $\ddot{\theta} = 0$ , son

$$r = 0.8 \cos \theta = 0.8 \cos 45^\circ = 0.5657 \text{ m}$$

$$\dot{r} = -0.8 \sin \theta \dot{\theta} = -0.8 \sin 45^\circ (3) = -1.6971 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -0.8 [\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2] \\ &= -0.8 [\sin 45^\circ (0) + \cos 45^\circ (3^2)] = -5.091 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -5.091 \text{ m/s}^2 - (0.5657 \text{ m})(3 \text{ rad/s})^2 = -10.18 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.5657 \text{ m})(0) + 2(-1.6971 \text{ m/s})(3 \text{ rad/s}) \\ &= -10.18 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Si sustituimos estos resultados en las ecuaciones (1) y (2) y resolvemos,

$$N_C = 720 \text{ N}$$

$$F = 0$$

Resp.

## EJEMPLO

El cilindro  $C$  liso de 2 kg de la figura 13-20a tiene un pasador  $P$  en su centro, el cual pasa a través de la ranura del brazo  $OA$ . Si se hace que el brazo gire en el *plano vertical* a una razón constante  $\dot{\theta} = 0.5 \text{ rad/s}$ , determine la fuerza que ejerce el brazo sobre el perno guía en el instante  $\theta = 60^\circ$ .

## SOLUCIÓN

¿Por qué es una buena idea utilizar coordenadas polares para resolver este problema?

[Ilustración] El diagrama de cuerpo libre del cilindro se muestra en la figura 13-20b. La fuerza en el perno guía,  $F_P$ , actúa perpendicular a la ranura del brazo. Como siempre, se supone que  $a_r$  y  $a_\theta$  actúan en las direcciones de  $r$  y  $\theta$  positivas, respectivamente. Identifique las cuatro incógnitas.

**Ecuaciones de movimiento.** Con los datos en la figura 13-20b, tenemos

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r; \quad 19.62 \sin \theta - N_C \sin \theta = 2a_r \quad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad 19.62 \cos \theta + F_P - N_C \cos \theta = 2a_\theta \quad (2)$$

**Cinemática.** A partir de la figura 13-20a,  $r$  puede relacionarse con  $\theta$  mediante la ecuación

$$r = \frac{0.4}{\sin \theta} = 0.4 \csc \theta$$

Como  $d(\csc \theta) = -(\csc \theta \cot \theta) d\theta$  y  $d(\cot \theta) = -(\csc^2 \theta) d\theta$ , entonces  $r$  y las derivadas con respecto al tiempo necesarias son

$$\dot{\theta} = 0.5 \quad r = 0.4 \csc \theta$$

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \dot{r} = -0.4(\csc \theta \cot \theta) \dot{\theta}$$

$$= -0.2 \csc \theta \cot \theta$$

$$\ddot{r} = -0.2(-\csc \theta \cot \theta)(\dot{\theta}) \cot \theta - 0.2 \csc \theta (-\csc^2 \theta) \dot{\theta}$$

$$= 0.1 \csc \theta (\cot^2 \theta + \csc^2 \theta)$$

Al evaluar estas fórmulas en  $\theta = 60^\circ$ , obtenemos

$$\dot{\theta} = 0.5 \quad r = 0.462$$

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \dot{r} = -0.133$$

$$\ddot{r} = 0.192$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$$

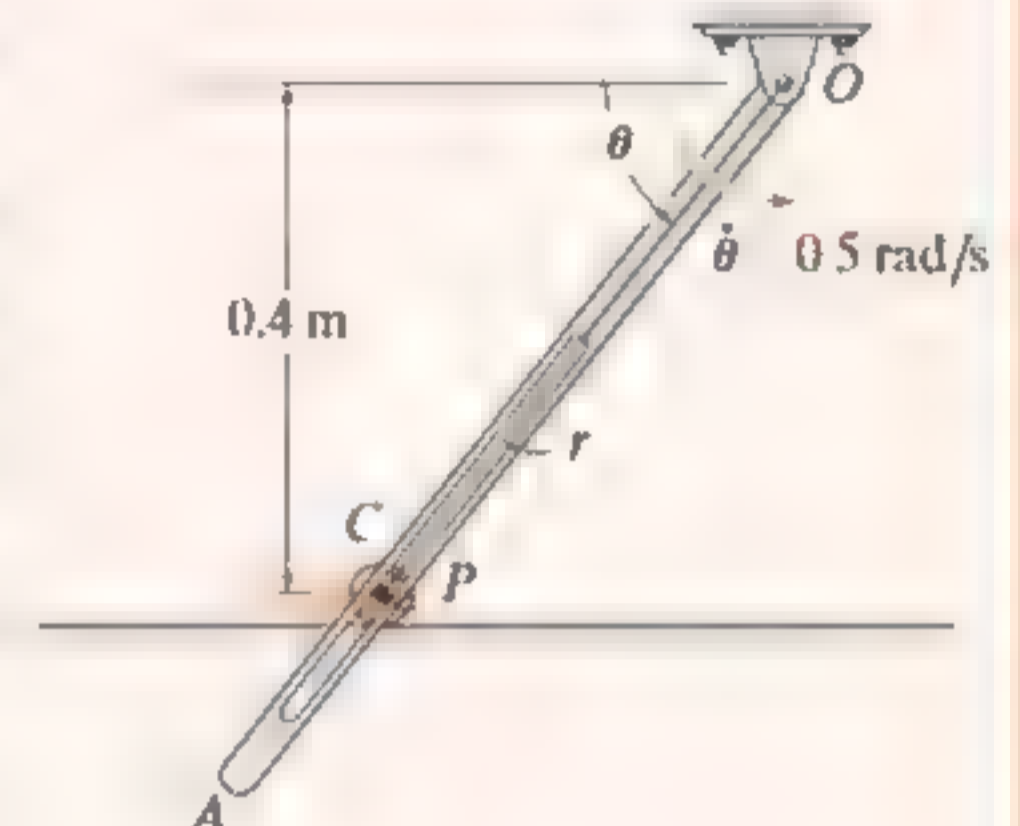
Si sustituimos estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 con  $\theta = 60^\circ$  y resolvemos, se obtiene

$$N_C = 19.4 \text{ N}$$

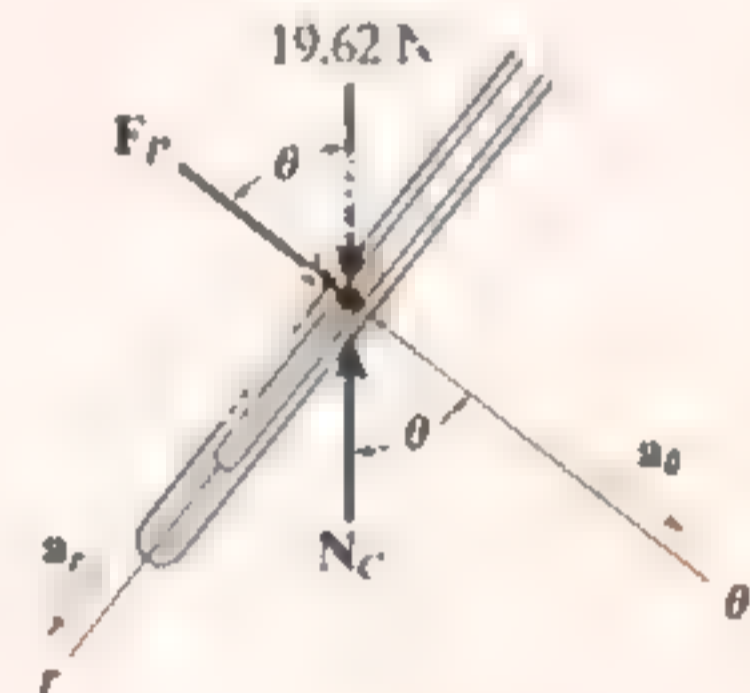
$$F_P = -0.356 \text{ N}$$

*Resp.*

El signo negativo indica que  $F_P$  actúa opuesta a la dirección mostrada en la figura 13-20b.



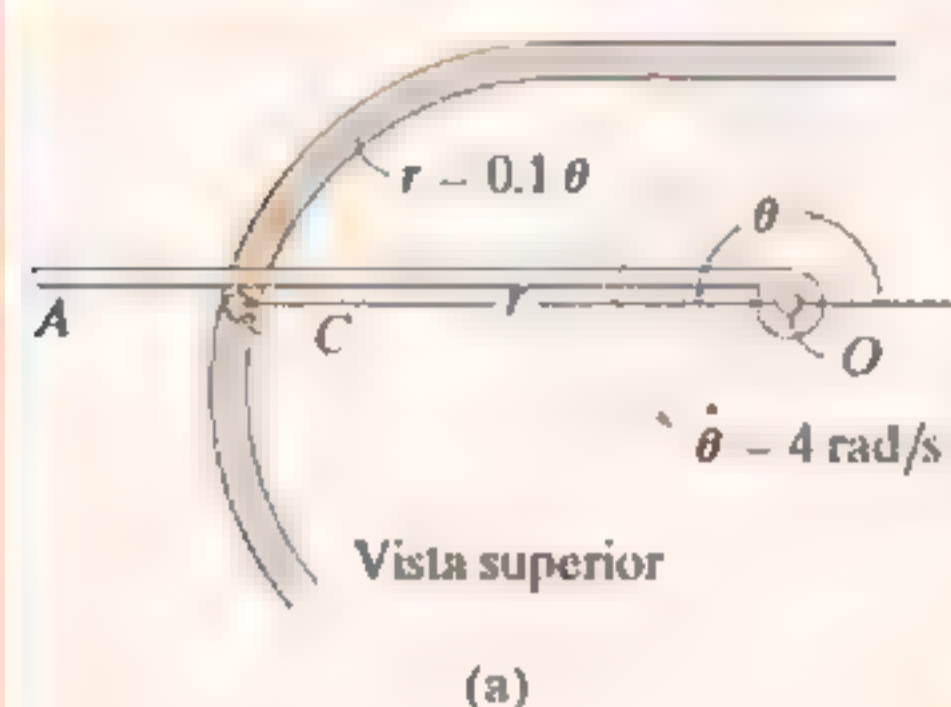
(a)



(b)

Fig. 13-20

## EJEMPLO



Una lata C de 0.5 kg de masa se mueve a lo largo del canal ubicado en el plano horizontal que se muestra en la figura 13-21a. El canal tiene forma de espiral, la cual está definida por la ecuación  $r = (0.1\theta)\text{m}$ , donde  $\theta$  está en radianes. Si el brazo  $OA$  gira a una velocidad constante  $\dot{\theta} = 4\text{ rad/s}$  en el plano horizontal, determine la fuerza que ejerce en la lata en el instante  $\theta = \pi\text{ rad}$ . Ignore la fricción y el tamaño de la lata.

## SOLUCIÓN

La fuerza impulsora  $F_C$  actúa perpendicular al brazo  $OA$ , en tanto que la fuerza normal que ejerce la pared del canal en la lata,  $N_C$ , lo hace perpendicular a la tangente a la curva en  $\theta = \pi\text{ rad}$  (fig. 13-21b). Como siempre, se supone que  $a_r$  y  $a_\theta$  actúan en las direcciones positivas de  $r$  y  $\theta$ , respectivamente. Como la trayectoria está especificada, el ángulo  $\psi$  que la línea radial extendida  $r$  forma con la tangente (fig. 13-21c) se determina con la ecuación 13-10. Tenemos  $r = 0.1\theta$ , de modo que  $dr/d\theta = 0.1$  y, por consiguiente,

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{0.1\theta}{0.1} = \theta$$

Cuando  $\theta = \pi$ ,  $\psi = \tan^{-1} \pi = 72.3^\circ$ , de modo que  $\phi = 90^\circ - \psi = 17.7^\circ$ , como se muestra en la figura 13-21c. Identifique las cuatro incógnitas en la figura 13-21b.

**Ecuaciones de movimiento.** Con  $\phi = 17.7^\circ$  y los datos de la figura 13-21b, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_r = ma_r; \quad N_C \cos 17.7^\circ = 0.5a_r \quad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad F_C - N_C \sin 17.7^\circ = 0.5a_\theta \quad (2)$$

**Cinemática.** Las derivadas con respecto al tiempo de  $r$  y  $\theta$  son

$$\dot{\theta} = 4\text{ rad/s}$$

$$r = 0.1\theta$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{r} = 0.1\dot{\theta} = 0.1(4) = 0.4\text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0.1\ddot{\theta} = 0$$

En el instante  $\theta = \pi\text{ rad}$ ,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0.1(\pi)(4)^2 = -5.03\text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0.4)(4) = 3.20\text{ m/s}^2$$

Al sustituir estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 y resolviendo, resulta

$$N_C = -2.64\text{ N}$$

$$F_C = 0.800\text{ N}$$

*Resp.*

¿Qué indica el signo negativo de  $N_C$ ?

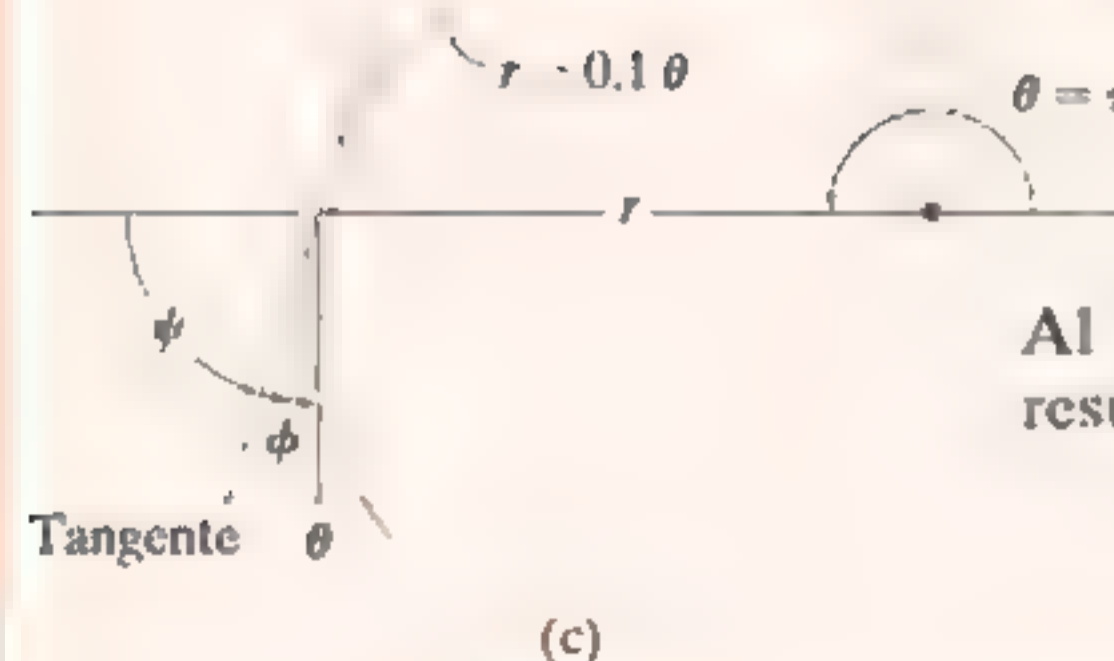
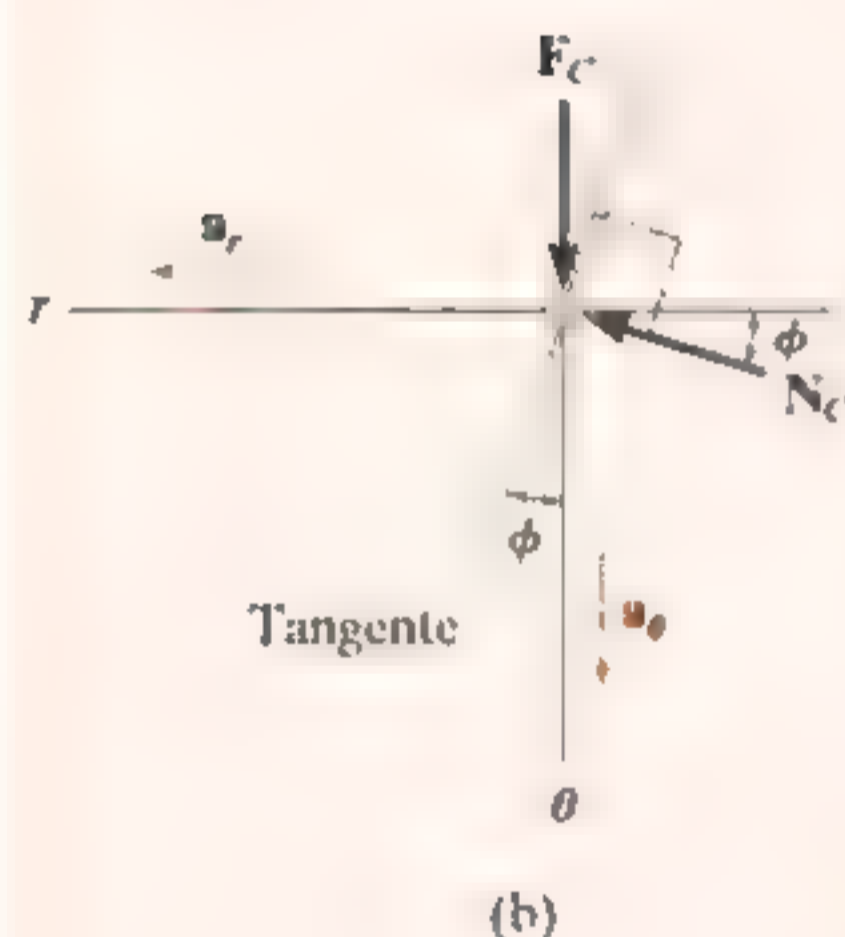
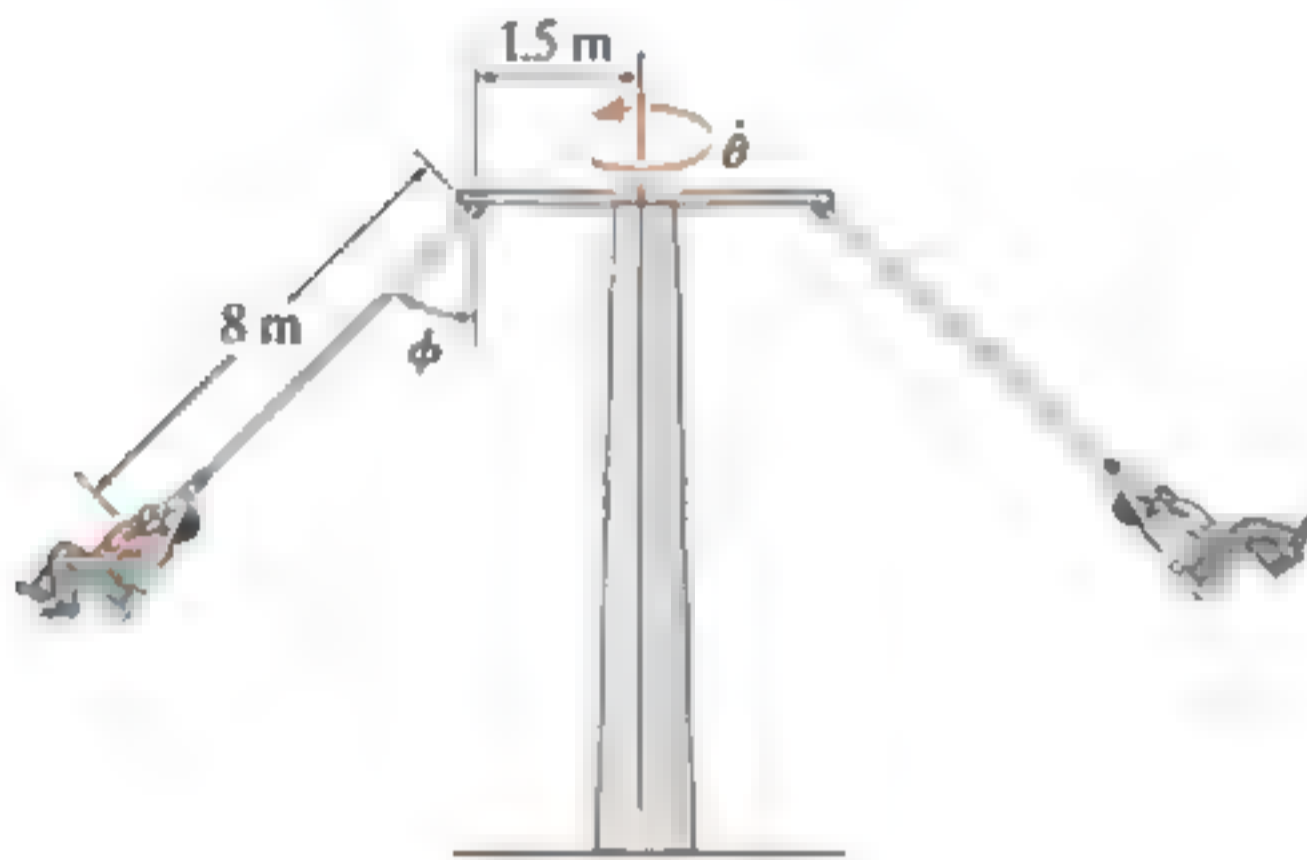


Fig. 13-21

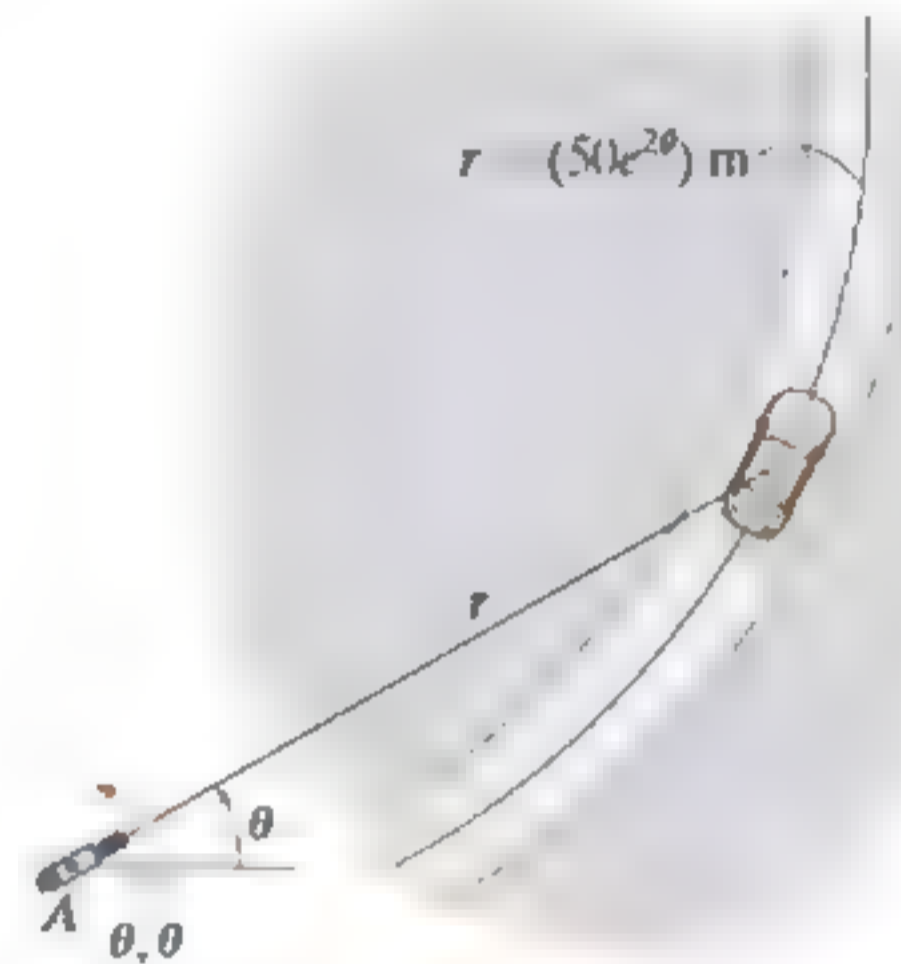
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F13-13.** Determine la velocidad angular constante  $\dot{\theta}$  del poste vertical del juego mecánico si  $\phi = 45^\circ$ . Ignore la masa de los cables y el tamaño de los pasajeros.



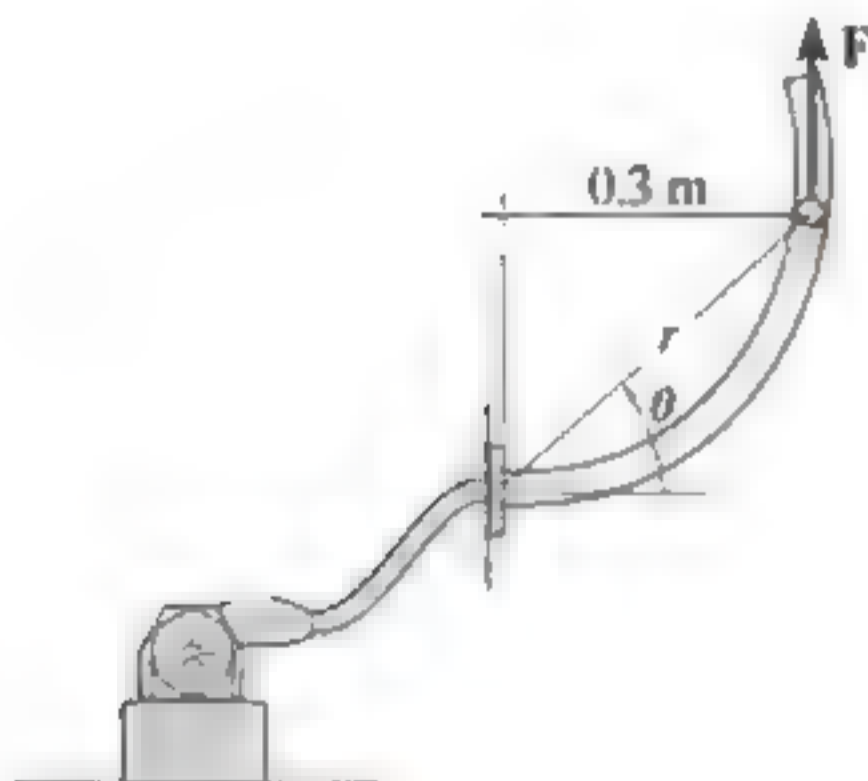
Prob. F13-13

**F13-15.** El automóvil de 2 Mg toma la curva descrita por  $r = (50e^{2\theta})$  m, donde  $\theta$  está en radianes. Si se coloca una cámara en A y gira con una velocidad angular de  $\dot{\theta} = 0.05$  rad/s y una aceleración angular de  $\ddot{\theta} = 0.01$  rad/s<sup>2</sup> en el instante  $\theta = \frac{\pi}{6}$  rad, determine la fuerza de fricción resultante desarrollada entre los neumáticos y la carretera en este instante.



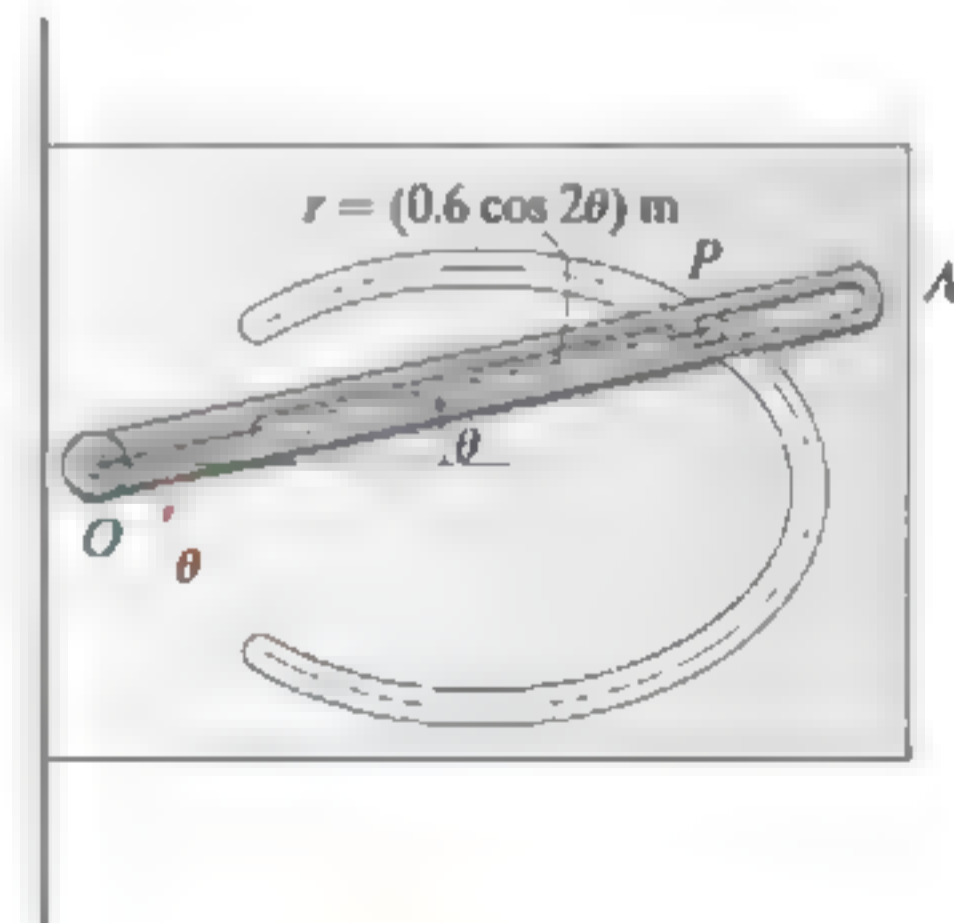
Prob. F13-15

**F13-14.** La bola de 0.2 kg es impulsada por medio de aire a través del tubo circular liso, que está en un plano vertical, y cuya forma está definida por  $r = (0.6 \sin \theta)$  m, donde  $\theta$  está en radianes. Si  $\theta = (\pi t^2)$  rad, donde  $t$  está en segundos, determine la magnitud de la fuerza  $F$  ejercida por el ventilador en la bola cuando  $t = 0.5$  s.



Prob. F13-14

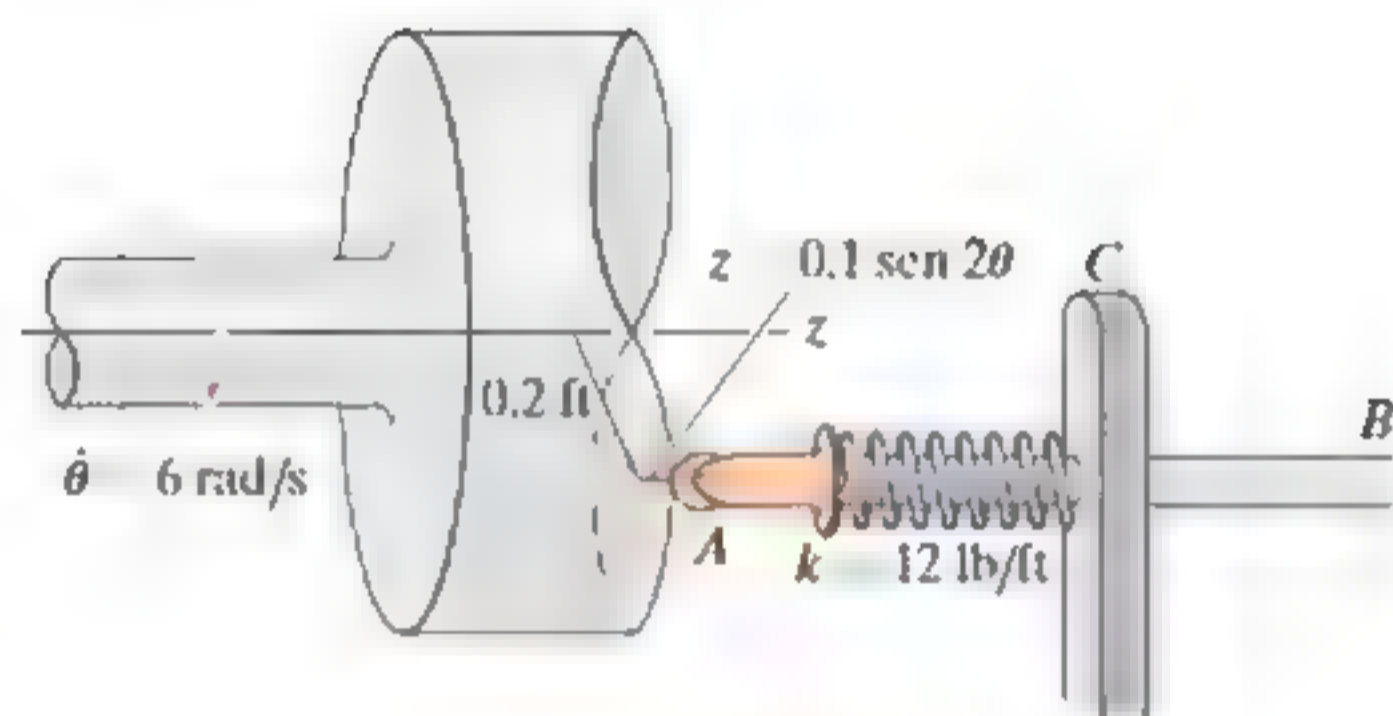
**F13-16.** El pasador  $P$  de 0.2 kg sólo puede moverse en la ranura curva lisa, la cual está definida por la lemniscata de Bernoulli  $r = (0.6 \cos 2\theta)$ . El brazo ranurado  $OA$ , el cual tiene una velocidad angular constante en sentido horario de  $\dot{\theta} = -3$  rad/s, controla su movimiento. Determine la fuerza que el brazo  $OA$  ejerce en el pasador  $P$  cuando  $\theta = 0^\circ$ . El movimiento se da en el plano vertical.



Prob. F13-16

## PROBLEMAS

**13-85.** El seguidor de resorte  $AB$  tiene un peso de 0.75 lb y se mueve hacia atrás y adelante conforme su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde  $r = 0.2$  ft y  $z = (0.1 \sin 2\theta)$  ft. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 6 rad/s, determine la fuerza en el extremo  $A$  del seguidor cuando  $\theta = 45^\circ$ . En esta posición, el resorte está comprimido 0.4 ft. Desprecie la fricción en el rodamiento  $C$ .

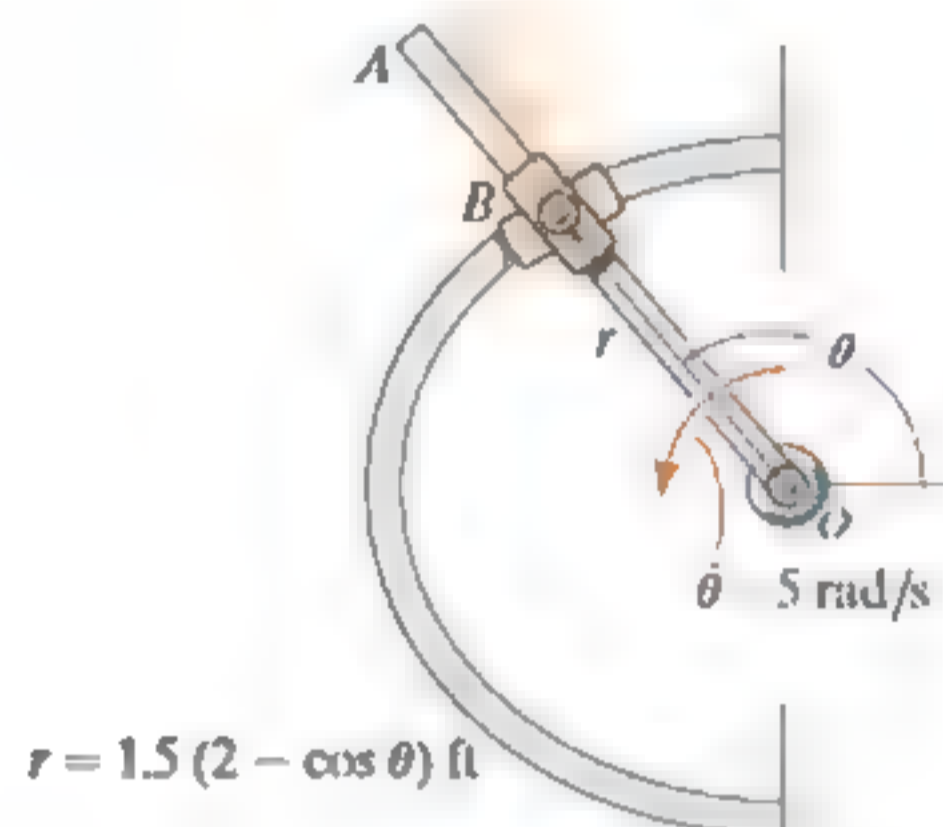


Prob. 13-85

**13-86.** Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre una partícula de 5 kg en el instante  $t = 2$  s, si la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal definida por las ecuaciones  $r = (2t + 10)$  m y  $\theta = (1.5t^2 - 6t)$  rad, donde  $t$  se da en segundos.

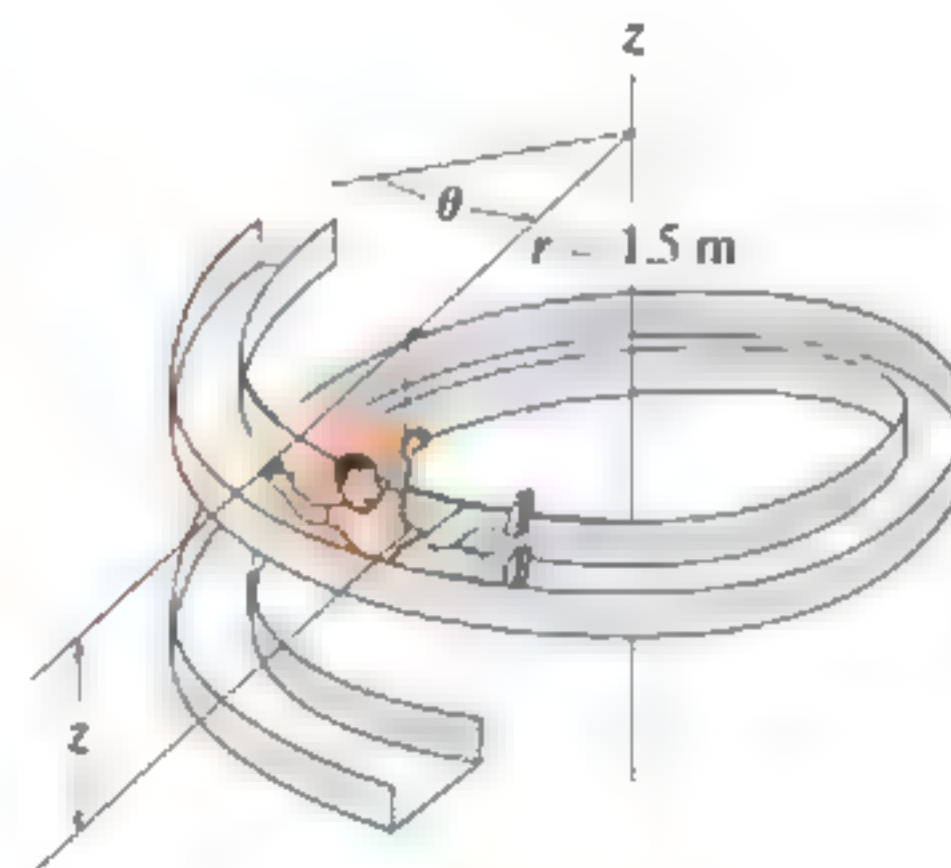
**13-87.** La trayectoria del movimiento de una partícula de 5 lb en el plano horizontal se describe en términos de coordenadas polares como  $r = (2t + 1)$  ft y  $\theta = (0.5t^2 - t)$  rad, donde  $t$  se da en segundos. Determine la magnitud de la fuerza desbalanceada que actúa sobre la partícula cuando  $t = 2$  s.

**\*13-88.** La varilla  $OA$  gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 5$  rad/s. El collarín doble  $B$  está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla giratoria y el otro se desliza sobre la varilla curva que está en un plano horizontal, cuya forma se describe mediante la ecuación  $r = 1.5(2 - \cos \theta)$  ft. Si los dos collares pesan 0.75 lb, determine la fuerza normal que la varilla curva ejerce sobre un collarín en el instante  $\theta = 120^\circ$ . Desprecie la fricción.



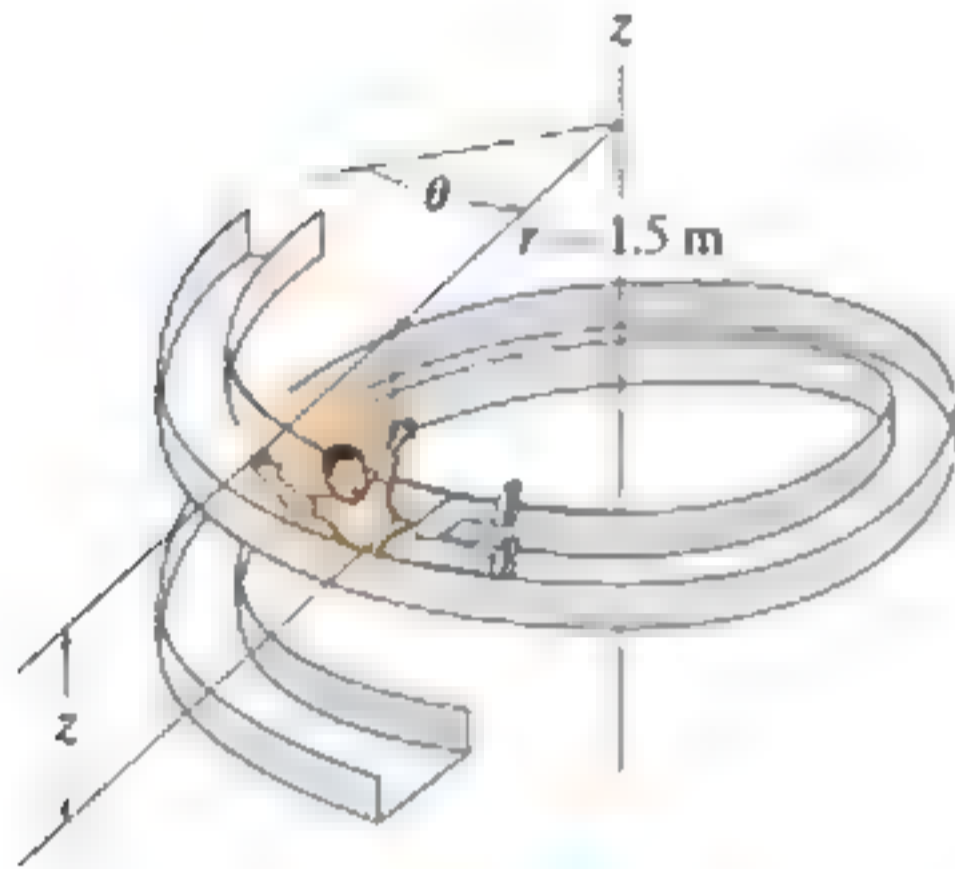
Prob. 13-88

**13-89.** El niño con masa de 40 kg se desliza por el tobogán en espiral a una rapidez constante tal que su posición, medida desde la parte superior del tobogán, tiene componentes  $r = 1.5$  m,  $\theta = (0.7t)$  rad y  $z = (-0.5t)$  m, donde  $t$  se da en segundos. Determine las componentes de fuerza  $F_r$ ,  $F_\theta$  y  $F_z$  que ejerce el tobogán sobre el niño en el instante  $t = 2$  s. Desprecie el tamaño del niño.



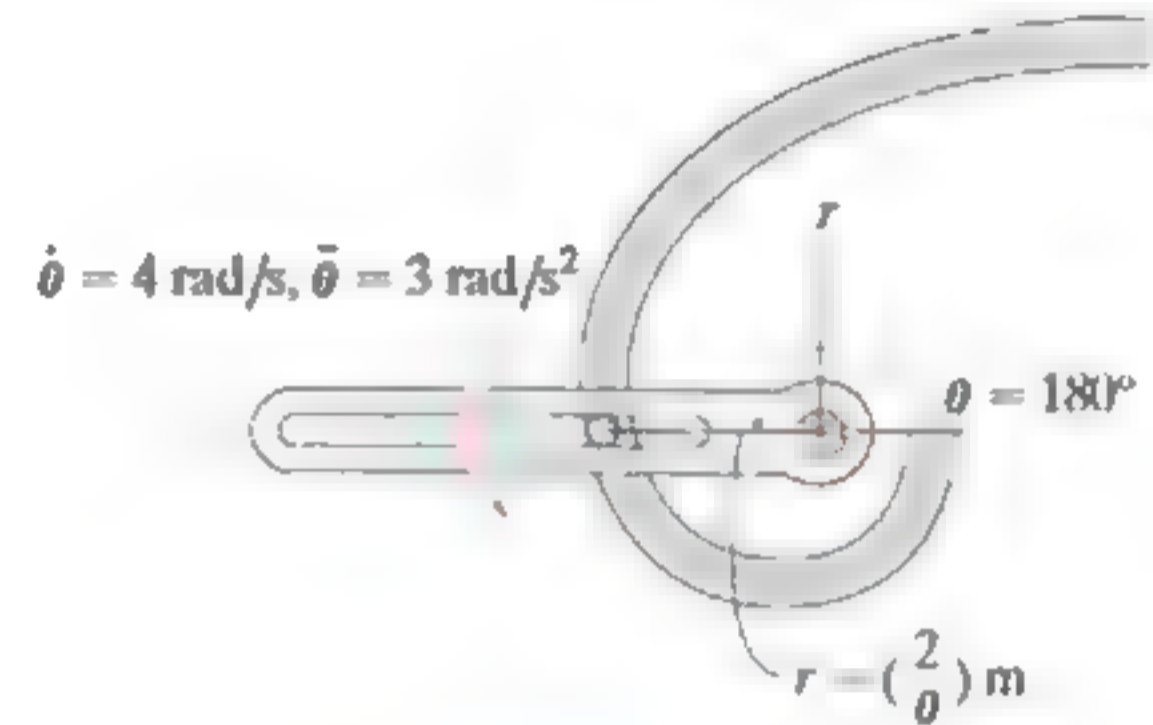
Prob. 13-89

**13.90.** El niño de 40 kg se desliza por el tobogán liso en espiral, de modo que cuando  $z = -2$  m/s su rapidez es de 2 m/s. Determine las componentes  $r, \theta, z$  de la fuerza que el tobogán ejerce sobre el niño en este instante. Desprecie el tamaño del niño.



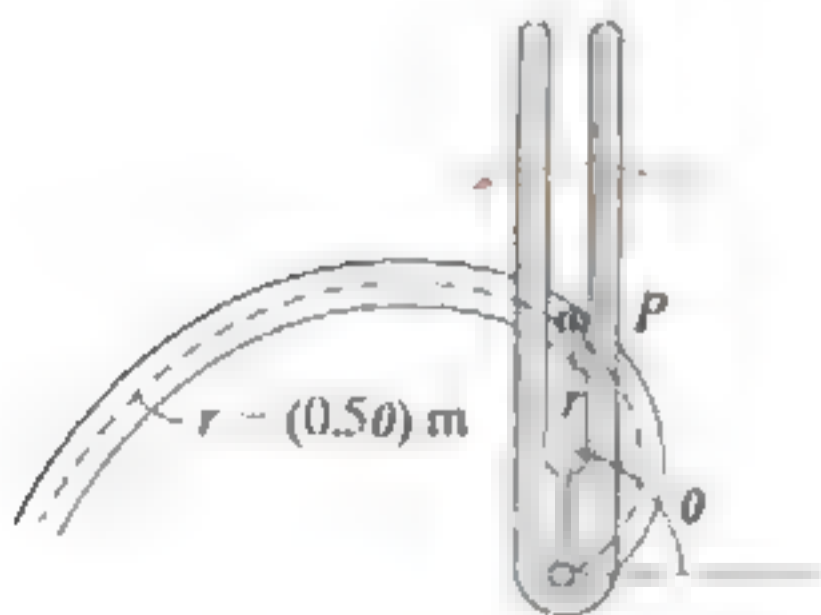
Prob. 13.90

**\*13.92.** El brazo gira a razón de  $\dot{\theta} = 4$  rad/s cuando  $\ddot{\theta} = 3$  rad/s<sup>2</sup> y  $\theta = 180^\circ$ . Determine la fuerza que debe ejercer sobre el cilindro liso de 0.5 kg, si está limitado a moverse a lo largo de la trayectoria ranurada. El movimiento se produce en el plano horizontal.



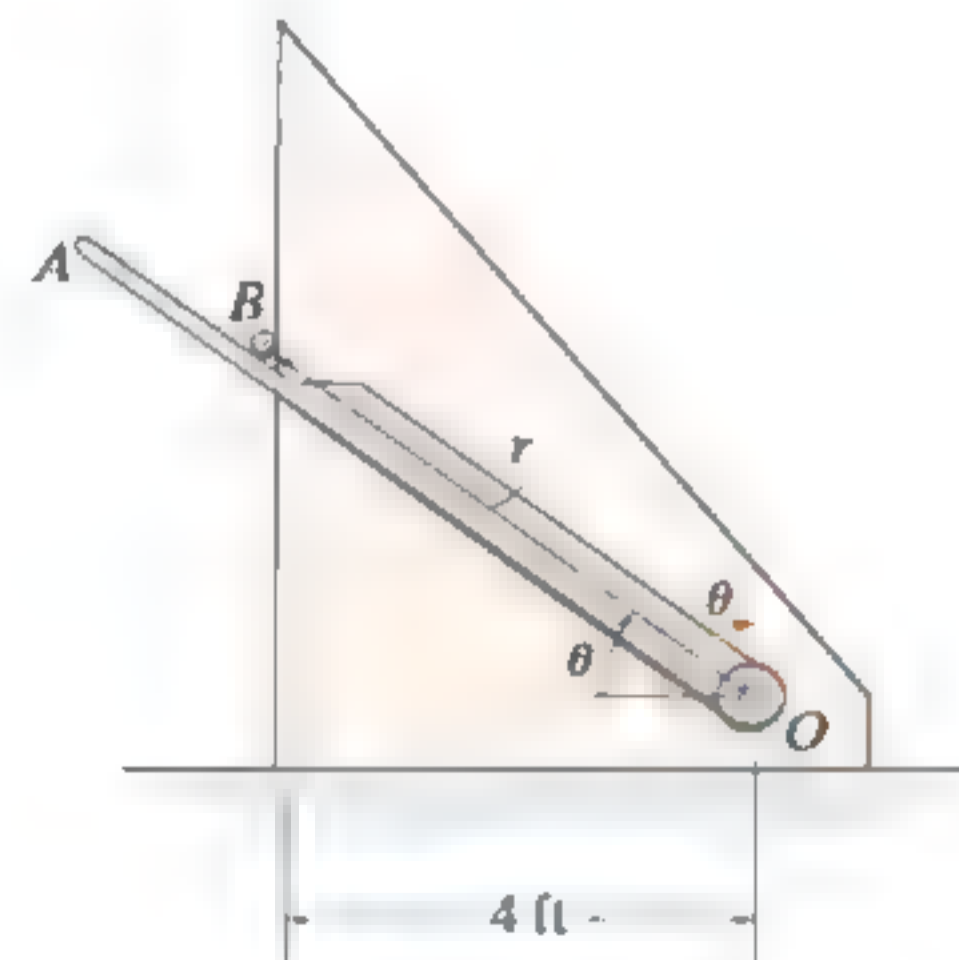
Prob. 13.92

**13.91.** Usando una varilla en forma de horquilla, un perno guía liso  $P$  de 5 kg es obligado a moverse verticalmente a lo largo de la trayectoria ranurada vertical  $r = (0.5\theta)$  m, donde  $\theta$  se da en radianes. Si la posición angular del brazo es  $\theta = (\frac{\pi}{8}t^2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos, determine la fuerza de la varilla sobre el perno guía y la fuerza normal de la ranura sobre el perno guía en el instante  $t = 2$  s. El perno guía está en contacto con sólo *un* borde de la varilla y la ranura en cualquier instante.



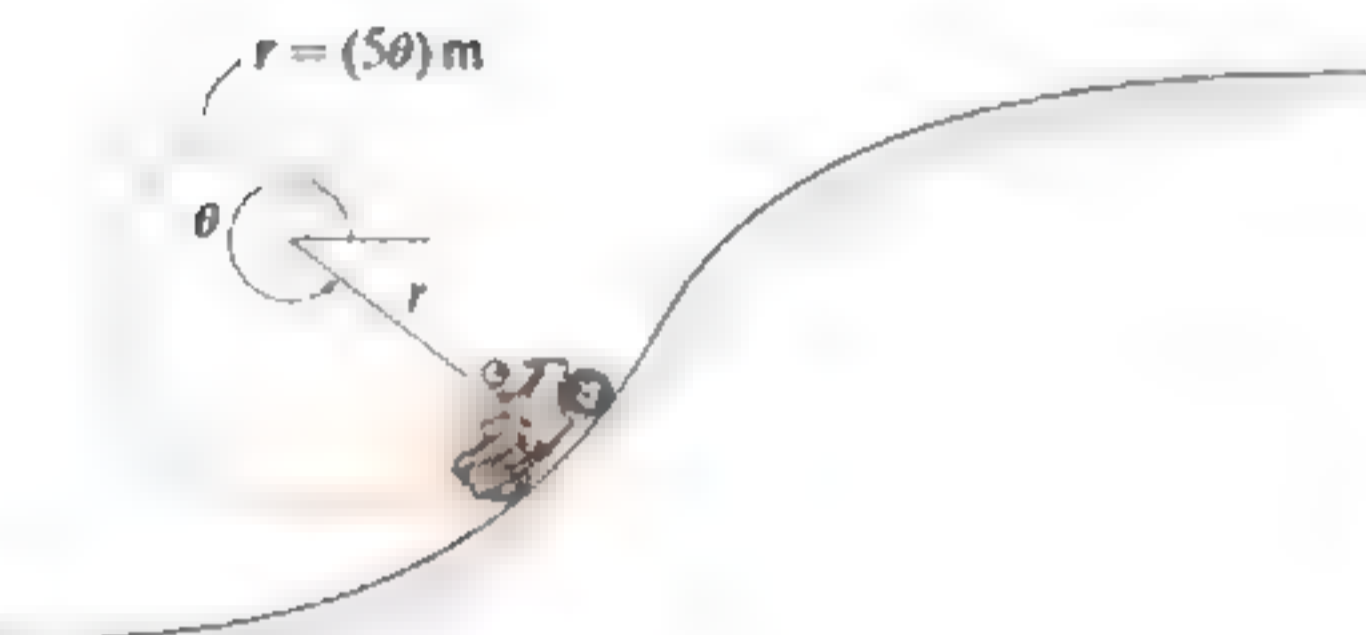
Prob. 13.91

**13.93.** Si el brazo  $OA$  gira en sentido horario con una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 1.5$  rad/s, determine la fuerza que el brazo  $OA$  ejerce sobre el cilindro liso  $B$  de 4 lb cuando  $\theta = 45^\circ$ .



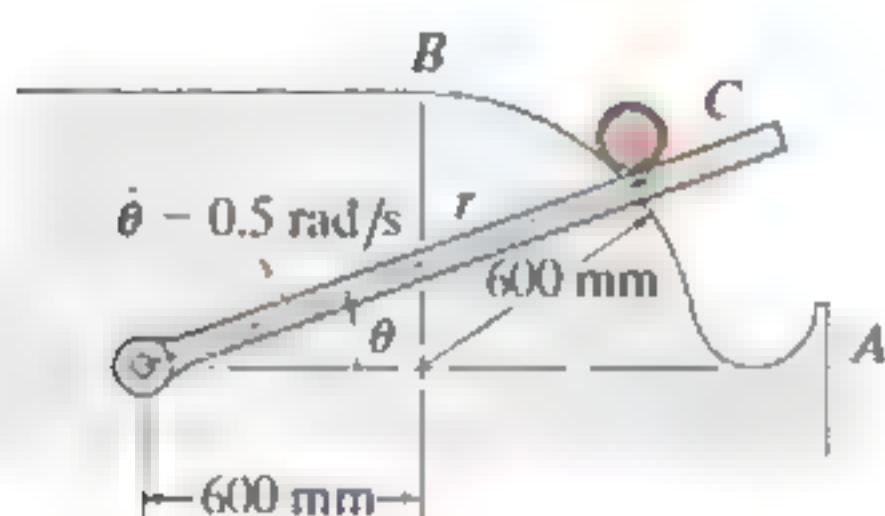
Prob. 13.93

**13-94.** Determine las fuerzas normal y de fricción que ejerce la pista parcialmente en espiral sobre la motocicleta de 200 kg en el instante  $\theta = \frac{5}{3}\pi$  rad,  $\dot{\theta} = 0.4$  rad/s,  $\ddot{\theta} = 0.8$  rad/s<sup>2</sup>. Desprecie el tamaño de la motocicleta.



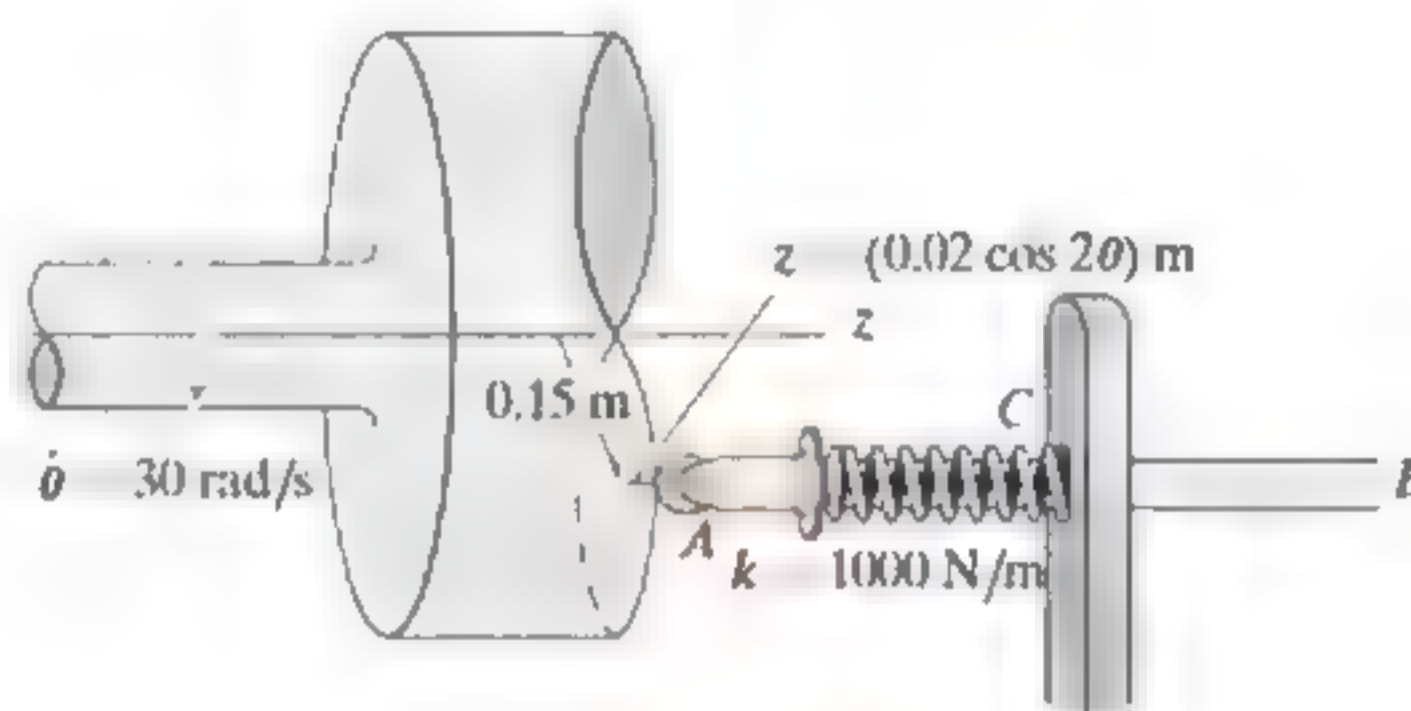
Prob. 13-94

**13-95.** Una lata lisa  $C$ , con una masa de 3 kg, se levanta desde un depósito en  $A$  hasta una rampa en  $B$  mediante una varilla giratoria. Si la varilla mantiene una velocidad angular constante de  $\dot{\theta} = 0.5$  rad/s, determine la fuerza que ejerce la varilla sobre la lata en el instante  $\theta = 30^\circ$ . Para realizar los cálculos, desprecie los efectos de la fricción y el tamaño de la lata, de modo que  $r = (1.2 \cos \theta)$  m. La rampa desde  $A$  hasta  $B$  es circular, con un radio de 600 mm.



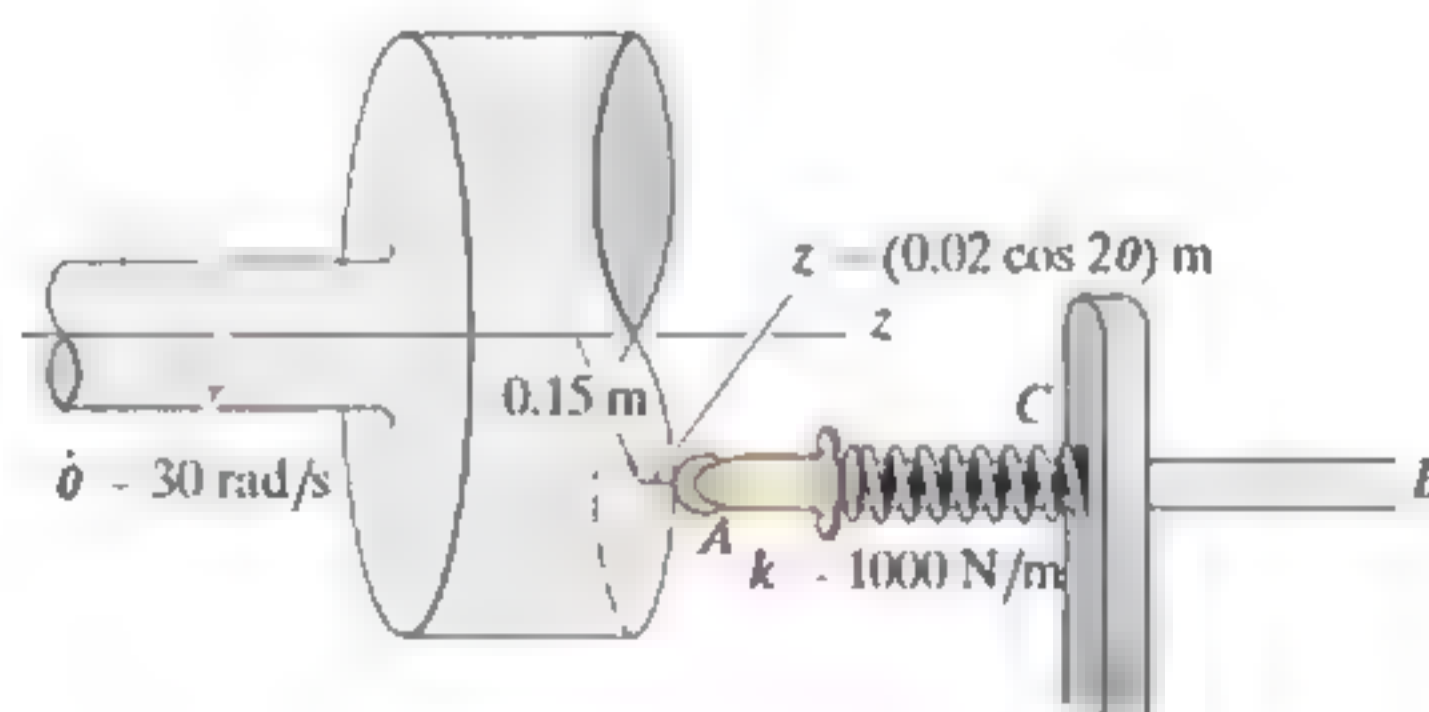
Prob. 13-95

**\*13-96.** El seguidor de resorte  $AB$  tiene una masa de 0.5 kg y se mueve hacia atrás y adelante, mientras su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde  $r = 0.15$  m y  $z = (0.02 \cos 2\theta)$  m. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 30 rad/s, determine la componente de fuerza  $F_z$  en el extremo  $A$  del seguidor cuando  $\theta = 30^\circ$ . El resorte no está comprimido cuando  $\theta = 90^\circ$ . Desprecie la fricción en el rodamiento  $C$ .



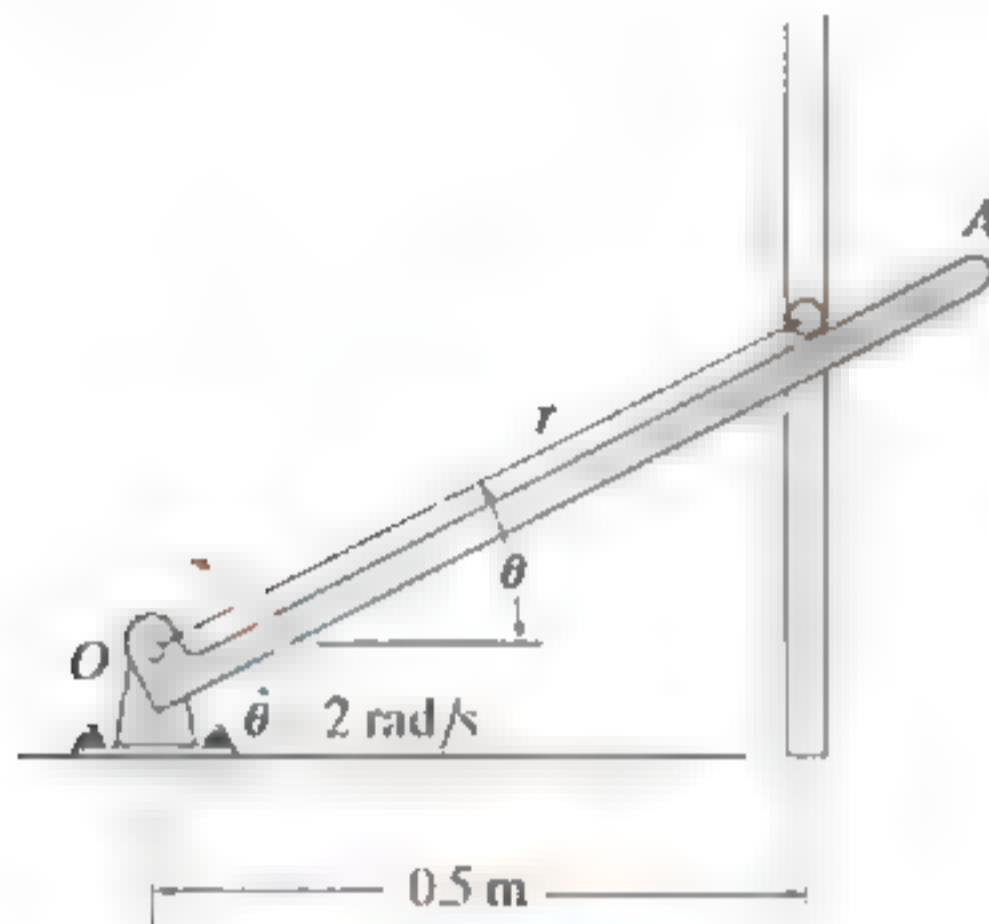
Prob. 13-96

**13-97.** El seguidor de resorte  $AB$  tiene una masa de 0.5 kg y se mueve hacia atrás y adelante, mientras su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde  $r = 0.15$  m y  $z = (0.02 \cos 2\theta)$  m. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 30 rad/s, determine las componentes máxima y mínima de la fuerza  $F_z$  que el seguidor ejerce sobre la leva, si el resorte está sin comprimir cuando  $\theta = 90^\circ$ .



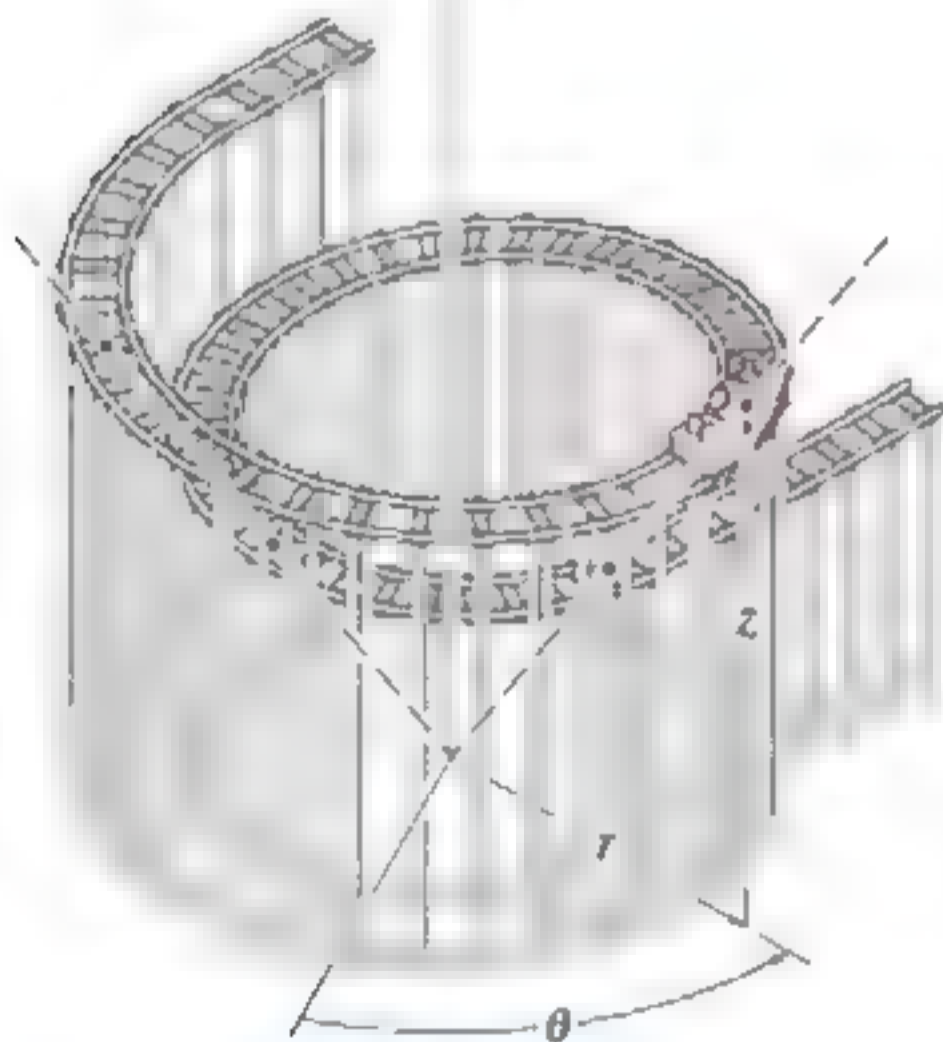
Prob. 13-97

**13-98.** La partícula tiene una masa de 0.5 kg y está limitada a moverse a lo largo de la ranura vertical lisa debido a la rotación del brazo  $OA$ . Determine la fuerza de la varilla sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula cuando  $\theta = 30^\circ$ . La varilla gira con una velocidad angular constante  $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ . Suponga que la partícula sólo tiene contacto con un lado de la ranura en cualquier instante.



Prob. 13-98

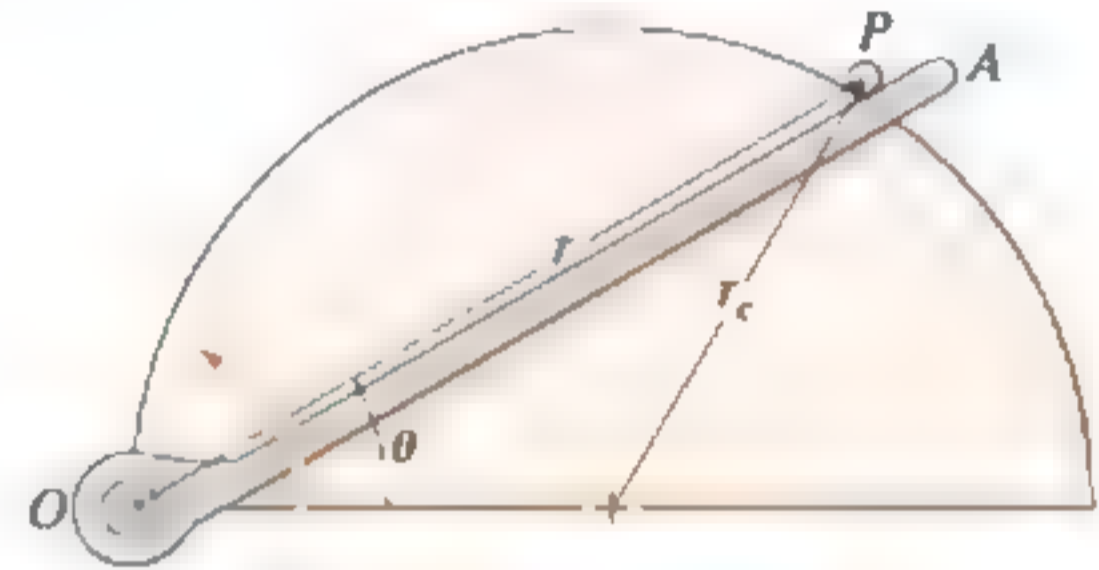
**13-99.** Un carro de una montaña rusa viaja a lo largo de una pista que por una corta distancia se define mediante una espiral cónica,  $r = \frac{3}{4}z$ ,  $\theta = -1.5z$ , donde  $r$  y  $z$  están en metros y  $\theta$  en radianes. Si el movimiento angular  $\dot{\theta} = 1 \text{ rad/s}$  se mantiene siempre, determine las componentes  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  de la reacción ejercida por la pista sobre el carro en el instante  $z = 6 \text{ m}$ . El carro y los pasajeros tienen una masa total de 200 kg.



Prob. 13-99

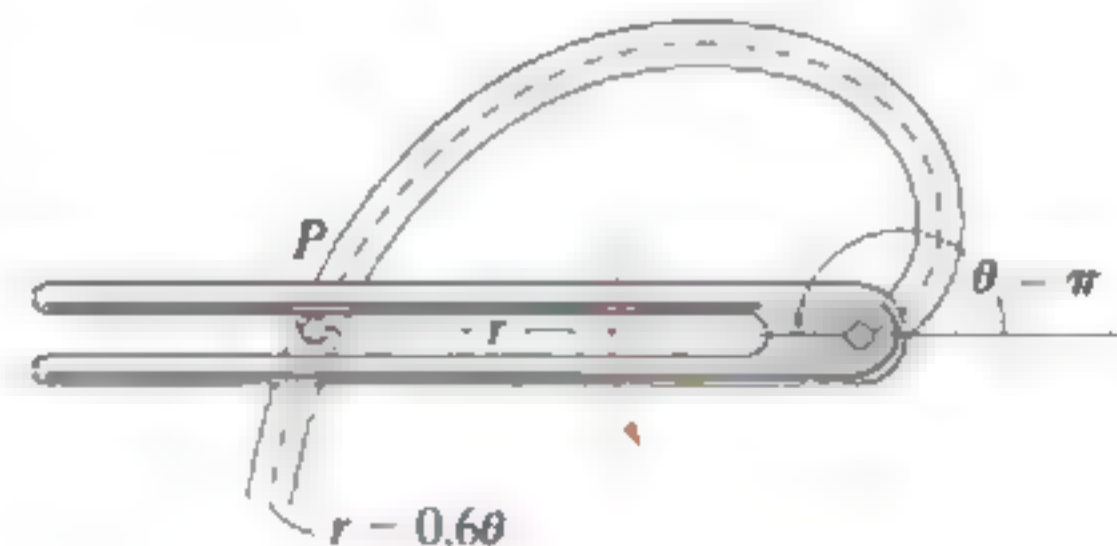
**\*13-100.** El brazo  $OA$  guía la bola de 0.5 lb a lo largo de la trayectoria circular que está en un plano vertical  $r = 2r_c \cos \theta$ . Si la velocidad angular del brazo es  $\dot{\theta} = 0.4 \text{ rad/s}$  y la aceleración angular es  $\ddot{\theta} = 0.8 \text{ rad/s}^2$  en el instante  $\theta = 30^\circ$ , determine la fuerza del brazo en la bola. Ignore la fricción y el tamaño de la bola. Establezca  $r_c = 0.4 \text{ ft}$ .

**13-101.** El brazo  $OA$  guía la bola de masa  $m$  a lo largo de la trayectoria circular que está en un plano vertical  $r = 2r_c \cos \theta$ . Si la velocidad angular constante del brazo es  $\dot{\theta}_0$ , determine el ángulo  $\theta \leq 45^\circ$  al cual la bola comienza a dejar la superficie del semicilindro. Ignore la fricción y el tamaño de la bola.



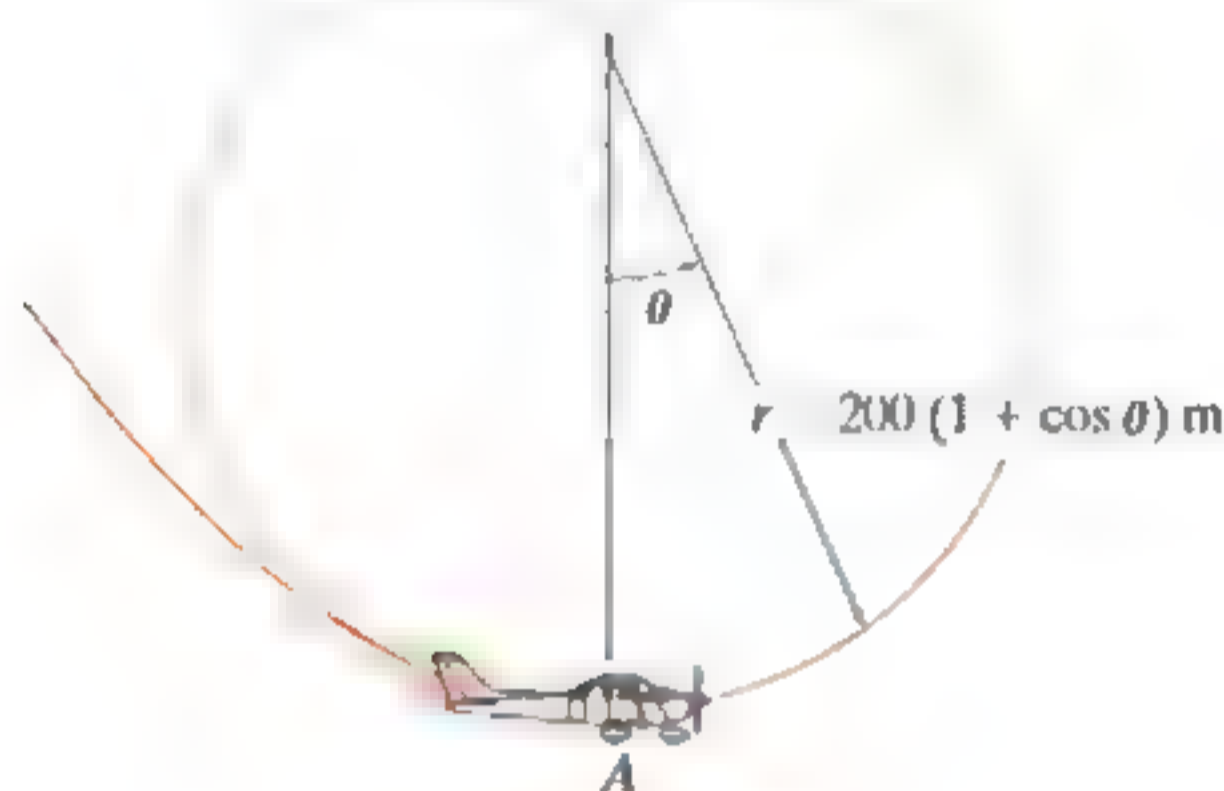
Probs. 13-100/101

**13-102.** Usando una varilla en forma de horquilla, un cilindro liso  $P$  con masa de 0.4 kg es obligado a moverse a lo largo de la trayectoria ranurada que está en un plano vertical  $r = (0.6\theta) \text{ m}$ , donde  $\theta$  se da en radianes. Si el cilindro tiene una rapidez constante de  $v_c = 2 \text{ m/s}$ , determine la fuerza de la varilla y la fuerza normal de la ranura sobre el cilindro en el instante  $\theta = \pi \text{ rad}$ . Suponga que el cilindro está en contacto sólo con un borde de la varilla y la ranura en cualquier instante. *Sugerencia:* Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias para calcular las componentes de aceleración del cilindro  $a_r$  y  $a_\theta$ , calcule la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de  $r = 0.6\theta$ . Luego, para más información, utilice la ecuación 12-26 a fin de determinar  $\dot{\theta}$ . Además, obtenga la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-26 notando que  $\dot{v} = 0$  para determinar  $\ddot{\theta}$ .



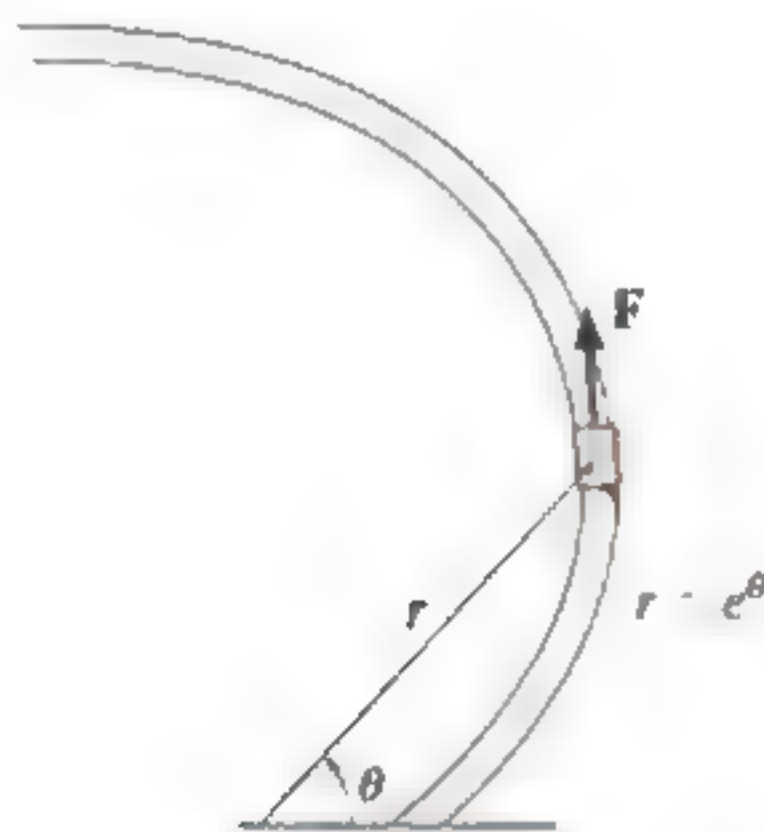
Prob. 13-102

**13-103.** El piloto del avión vuela en un trayecto que está en un plano vertical que en parte sigue la trayectoria de una cardioide,  $r = 200(1 + \cos\theta)$  m, donde  $\theta$  está en radianes. Si su rapidez en A es una constante  $v_p = 85$  m/s, determine la reacción vertical que ejerce el asiento del avión sobre el piloto, cuando el avión está en A. Él tiene una masa de 80 kg. *Sugerencia:* Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias para calcular las componentes de aceleración  $a_r$  y  $a_\theta$ , calcule la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de  $r = 200(1 + \cos\theta)$ . Después, para mayor información, use la ecuación 12-26 a fin de determinar  $\dot{\theta}$ .



Prob. 13-103

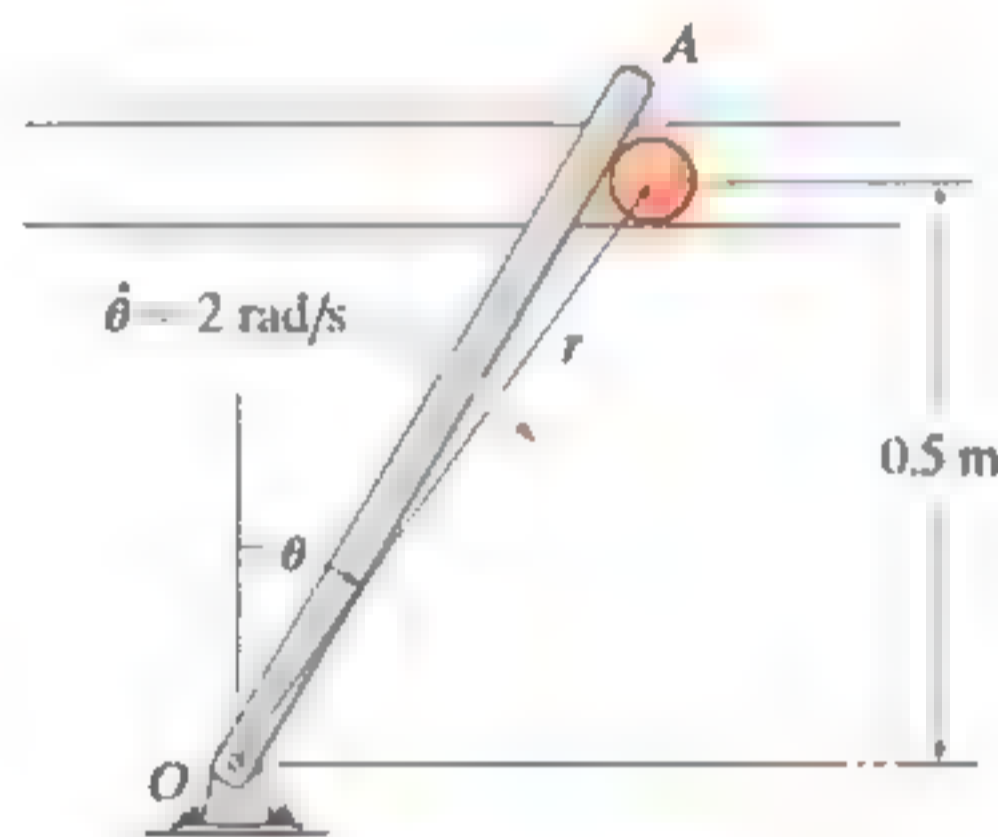
**\*13-104.** El collarín tiene una masa de 2 kg y se desplaza a lo largo de la varilla lisa que está en un plano horizontal definida por la espiral equiangular  $r = (e^\theta)$  m, donde  $\theta$  está en radianes. Determine la fuerza tangencial  $F$  y la fuerza normal  $N$  que actúan sobre el collarín cuando  $\theta = 45^\circ$ , si la fuerza  $F$  mantiene un movimiento angular constante  $\dot{\theta} = 2$  rad/s.



Prob. 13-104

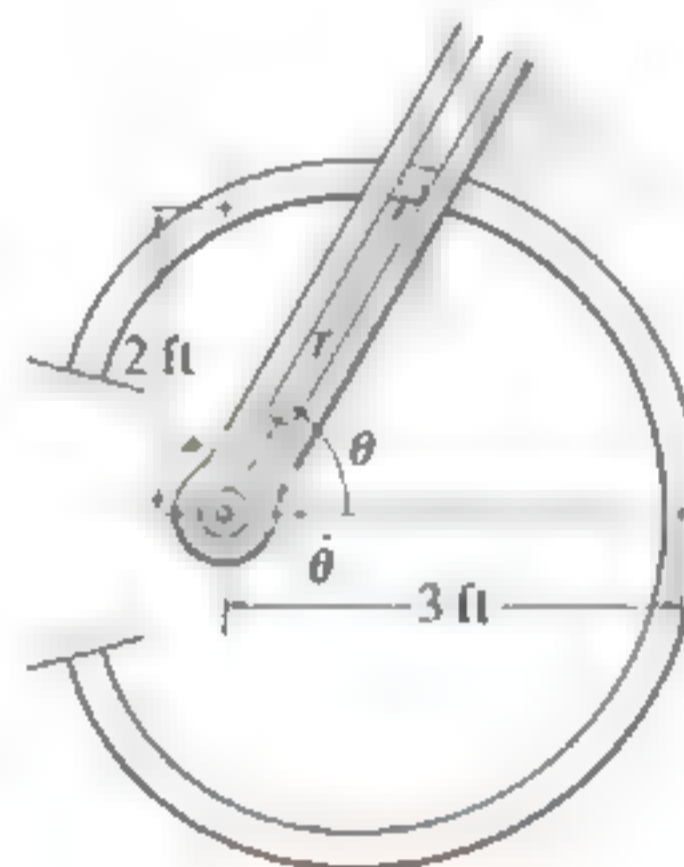
**13-105.** La partícula tiene una masa de 0.5 kg y está limitada a moverse a lo largo de la ranura horizontal lisa debido a la rotación del brazo OA. Determine la fuerza de la varilla sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula cuando  $\theta = 30^\circ$ . La varilla gira con una velocidad angular constante  $\dot{\theta} = 2$  rad/s. Suponga que la partícula sólo tiene contacto con un lado de la ranura en cualquier instante.

**13-106.** Resuelva el problema 13-105 si el brazo tiene una aceleración angular de  $\ddot{\theta} = 3$  rad/s<sup>2</sup> cuando  $\dot{\theta} = 2$  rad/s en  $\theta = 30^\circ$ .



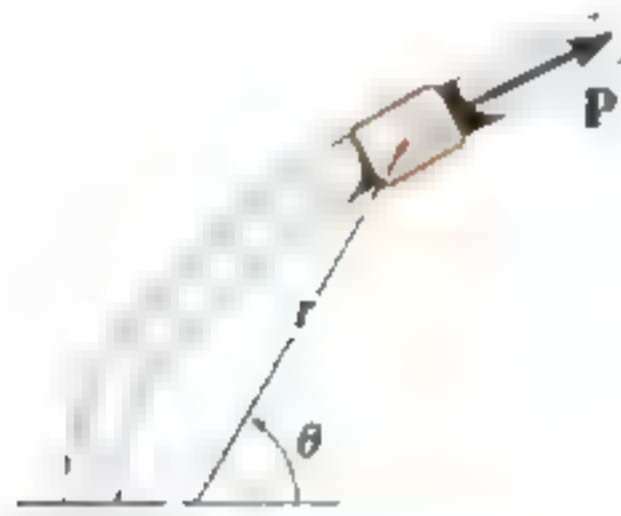
Probs. 13-105/106

**13-107.** La varilla en forma de horquilla se utiliza para mover la partícula lisa de 2 lb alrededor de la trayectoria que está en un plano horizontal en la forma de un limaçon de Pascal,  $r = (2 + \cos\theta)$  ft. Si  $\theta = (0.5t^2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos, determine la fuerza que ejerce la varilla sobre la partícula en el instante  $t = 1$  s. La horquilla y la trayectoria hacen contacto con la partícula en un solo lado.



Prob. 13-107

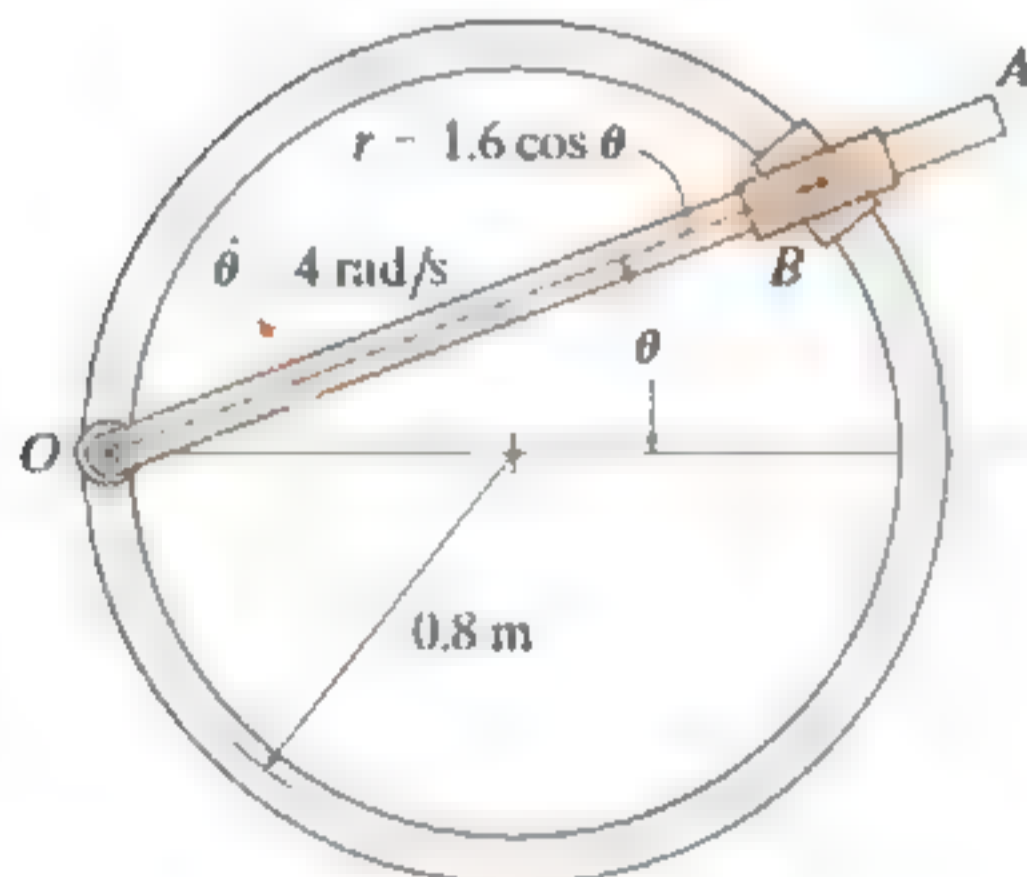
**\*13-108.** El collarín con peso de 3 libras se desliza a lo largo de la varilla lisa, que descansa en un plano horizontal y tiene la forma de una parábola  $r = 4/(1 - \cos \theta)$ , donde  $\theta$  se da en radianes y  $r$  está en pies. Si la velocidad angular del collarín es constante y es igual  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ , determine la fuerza de retardo tangencial  $P$  necesaria para causar el movimiento y la fuerza normal que el collarín ejerce sobre la varilla en el instante  $\theta = 90^\circ$ .



Prob. 13-108

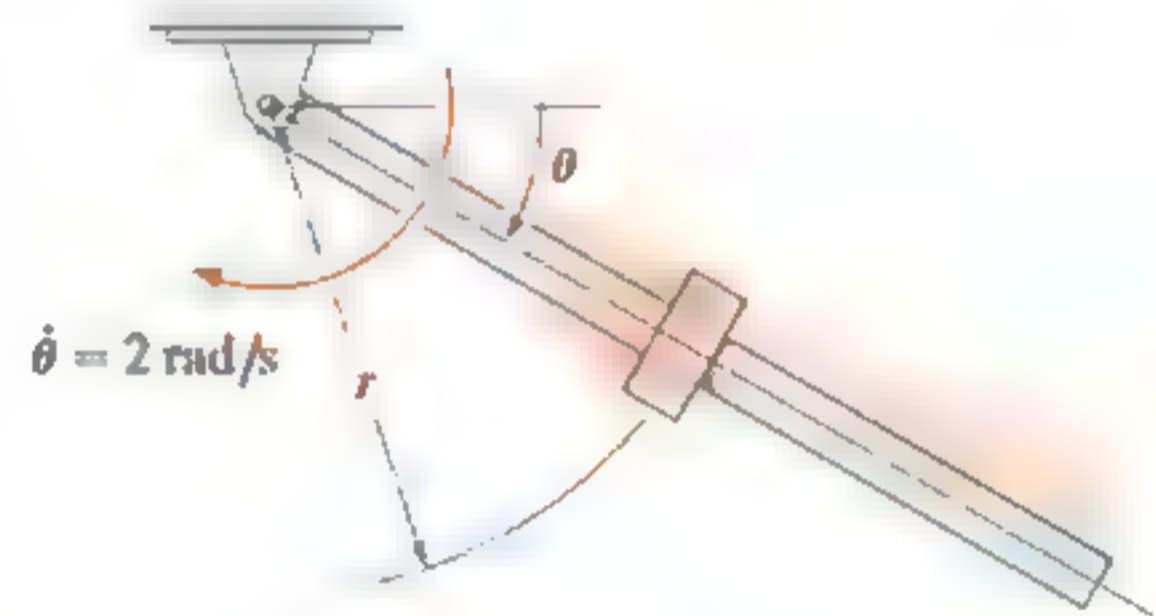
**13-109.** La varilla  $OA$  gira en sentido antihorario a una velocidad angular constante  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ . El collarín doble  $B$  está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla giratoria y el otro se desliza sobre la varilla circular descrita por la ecuación  $r = (1.6 \cos \theta) \text{ m}$ . Si ambos collarines tienen una masa de  $0.5 \text{ kg}$ , determine la fuerza que ejerce la varilla circular sobre uno de los collarines y la fuerza que ejerce  $OA$  sobre el otro collarín en el instante  $\theta = 45^\circ$ . El movimiento ocurre en el plano horizontal.

**13-110.** Resuelva el problema 13-109 si el movimiento ocurre en el plano vertical.



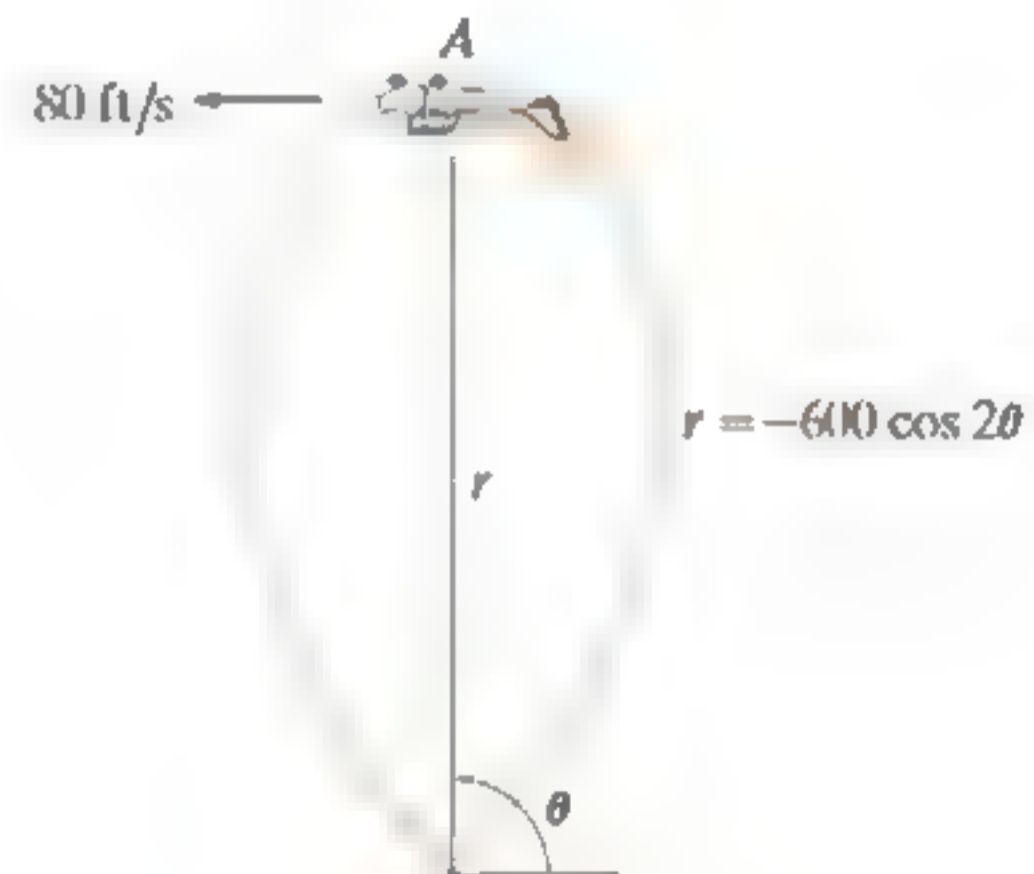
Probs. 13-109/110

**13-111.** Un carrito de  $0.2 \text{ kg}$  se desliza hacia abajo a lo largo de una varilla lisa. Si la varilla tiene una velocidad angular constante  $\dot{\theta} = \text{rad/s}$  en el plano vertical, demuestre que las ecuaciones de movimiento para el carrito son  $\ddot{r} - 4\dot{r} - 9.81 \sin \theta = 0$  y  $0.8\ddot{\theta} + N_r - 1.962 \cos \theta = 0$ , donde  $N_r$  es la magnitud de la fuerza normal de la varilla sobre el carrito. Si se usan los métodos de ecuaciones diferenciales, es posible demostrar que la solución de la primera de estas ecuaciones es  $r = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - (9.81/8) \sin 2t$ . Si  $r$ ,  $\dot{r}$ , y  $\theta$  son cero cuando  $t = 0$ , evalúe las constantes  $C_1$  y  $C_2$  determine  $r$  en el instante  $\theta = \pi/4 \text{ rad}$ .



Prob. 13-111

**\*13-112.** El piloto de un avión vuela en un trayecto que está en un plano vertical que en parte sigue la trayectoria de una "rosa de cuatro hojas",  $r = (-600 \cos 2\theta) \text{ ft}$ , donde  $\theta$  está en radianes. Si su rapidez es una constante  $v_p = 80 \text{ ft/s}$ , determine la reacción vertical que el asiento del avión ejerce sobre el piloto cuando el avión está en  $A$ . El piloto pesa  $130 \text{ lb}$ . *Sugerencia:* Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias y calcular las componentes de aceleración  $a_r$  y  $a_\theta$ , determine la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de  $r = (-600 \cos 2\theta)$ . Luego, para más información, utilice la ecuación 12-26 a fin de determinar  $\dot{\theta}$ . Además, obtenga la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-26 notando que  $\dot{v}_p = 0$  para determinar  $\dot{\theta}$ .

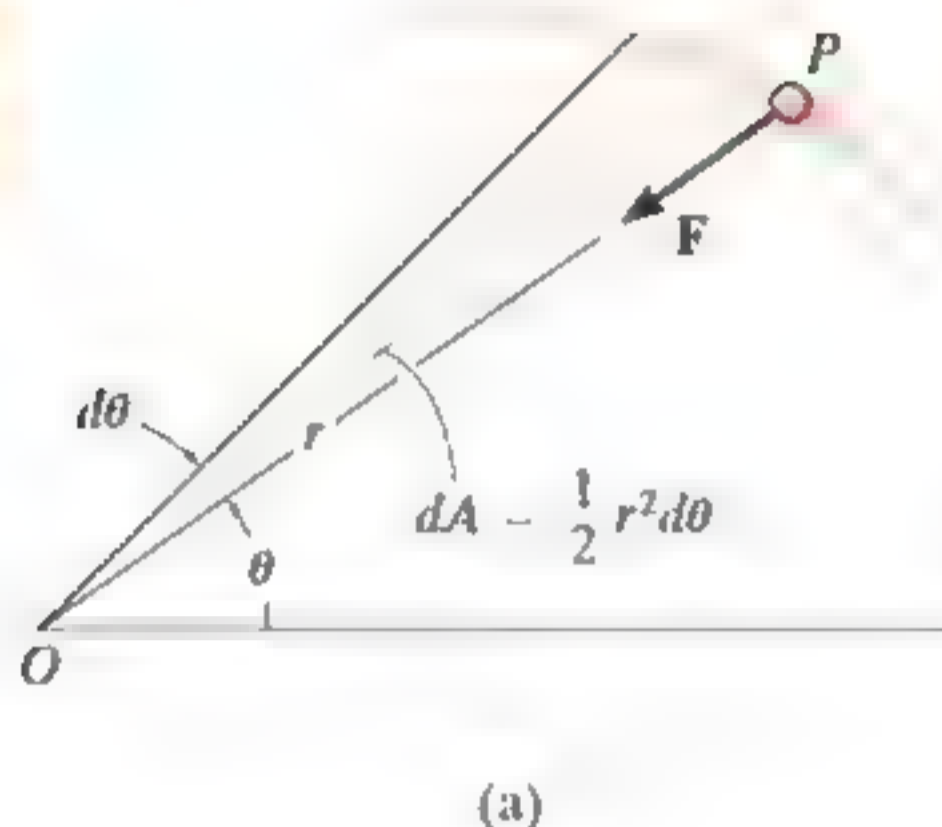


Prob. 13-112

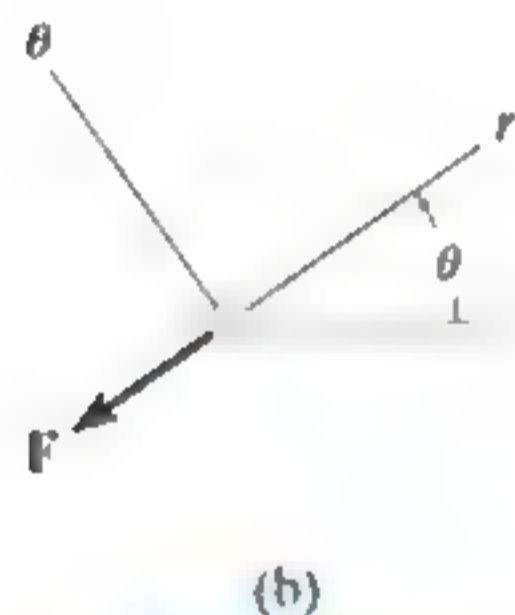
## \*13.7 Movimiento de fuerza central y mecánica espacial

Si una partícula se mueve sólo bajo la influencia de una fuerza cuya línea de acción siempre está dirigida hacia un punto fijo, el movimiento se llama *movimiento de fuerza central*. Por lo común, este tipo de movimiento lo provocan las fuerzas electrostática y gravitacional.

Para analizar el movimiento, consideraremos la partícula  $P$  de la figura 13-22a, de masa  $m$ , en la que actúa sólo la fuerza central  $F$ . El diagrama de cuerpo libre de la partícula se muestra en la figura 13-22b. Con coordenadas polares  $(r, \theta)$ , las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9, se escriben



(a)



(b)

Fig. 13-22

$$\begin{aligned}\Sigma F_r &= ma_r; \\ -F &= m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (13-11)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad 0 = m \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right)$$

La segunda de estas ecuaciones se escribe como

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = 0$$

de modo que al integrar se obtiene

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (13-12)$$

Aquí  $h$  es la constante de integración.

En la figura 13-22a observe que el área sombreada descrita por el radio  $r$ , a medida que  $r$  describe un ángulo  $d\theta$ , es  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ . Si la *velocidad areolar* se define como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \quad (13-13)$$

entonces se observa que la velocidad areolar de una partícula sometida a un movimiento de fuerza central es *constante*. Expresado de otra manera, la partícula barrerá segmentos de área iguales por unidad de tiempo a medida que se desplaza a lo largo de la trayectoria. Para obtener la *trayectoria del movimiento*,  $r = f(\theta)$ , la variable independiente  $t$  se elimina de las ecuaciones 13-11. Con la regla de la cadena del cálculo y la ecuación 13-12, las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones 13-11 se pueden reemplazar por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \right] \frac{h}{r^2}$$

Si sustituimos una nueva variable dependiente (xi)  $\xi = 1/r$  en la segunda ecuación, entonces

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h^2 \xi^2 \frac{d^2 \xi}{d\theta^2}$$

Además, el cuadrado de la ecuación 13-12 se escribe como

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h^2 \xi^4$$

Al sustituir estas dos ecuaciones en la primera de las ecuaciones 13-11 se tiene

$$-h^2 \xi^2 \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} - h^2 \xi^3 = -\frac{F}{m}$$

o

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2 \xi^2} \quad (13-14)$$

Esta ecuación diferencial define la trayectoria por la que la partícula viaja cuando se somete a la fuerza central  $F^*$ .

Para su aplicación, se considerará la fuerza de atracción gravitacional. Algunos ejemplos comunes de sistemas de fuerza central que dependen de la gravitación incluyen el movimiento de la Luna y los satélites artificiales alrededor de la Tierra, así como el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Como un problema típico de mecánica espacial, considere la trayectoria de un satélite o un vehículo espacial lanzado a una órbita de vuelo libre con una velocidad inicial  $v_0$  (fig. 13-23). Se supondrá que esta velocidad inicialmente es *paralela* a la tangente en la superficie terrestre, como se indica en la figura†. Un poco después de que el satélite vuelva libremente, la única fuerza que actúa en él es la fuerza gravitacional de la Tierra. (Las atracciones gravitacionales que implican otros cuerpos como la Luna o el Sol se omitirán, ya que el caso de órbitas cercanas a la Tierra su efecto es pequeño comparado con la gravitación terrestre.) Según la ley de Newton de la gravitación, la fuerza  $F$  siempre actuará entre los centros de masa de la Tierra y el satélite (fig. 13-23). De acuerdo con la ecuación 13-1, la magnitud de esta fuerza de atracción es

$$F = G \frac{M_e m}{r^2}$$

donde  $M_e$  y  $m$  representan la masa de la Tierra y el satélite, respectivamente,  $G$  es la constante gravitacional y  $r$  es la distancia entre los centros de



Este satélite está sometido a una fuerza central y su movimiento orbital se puede pronosticar de forma aproximada mediante las ecuaciones desarrolladas en esta sección. (UniversalImagesGroup/Getty Images)

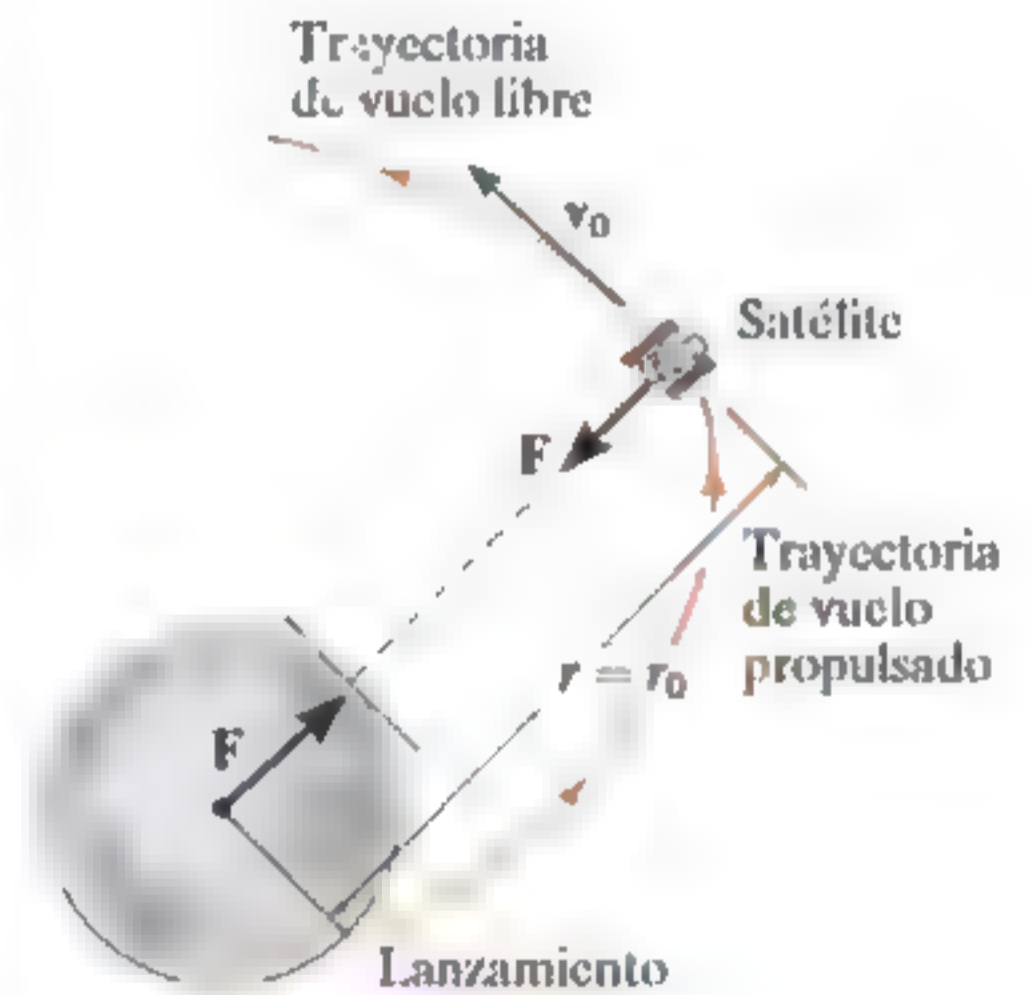


Fig. 13-23

\*En la derivación,  $F$  se considera positiva cuando está dirigida hacia el punto  $O$ . Si  $F$  se dirige en sentido opuesto, el lado derecho de la ecuación 13-14 deberá ser negativo.

†El caso en que  $v_0$  actúa a cierto ángulo inicial  $\theta$  con respecto a la tangente, puede describirse mejor mediante el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular.

masa. Para obtener la trayectoria orbital, establecemos  $\xi = 1/r$  en la ecuación precedente y sustituimos el resultado en la ecuación 13-14. Obtenemos

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM_e}{h^2} \quad (13-15)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden tiene coeficientes constantes y es no homogénea. La solución es la suma de las soluciones complementarias y particulares dadas por

$$\xi = \frac{1}{r} = C \cos(\theta - \phi) + \frac{GM_e}{h^2} \quad (13-16)$$

Esta ecuación representa la *trayectoria de vuelo libre* del satélite. Es la ecuación de una sección cónica expresada en función de coordenadas polares.

Una interpretación geométrica de la ecuación 13-16 requiere conocer la ecuación de una sección cónica. Como se muestra en la figura 13-24, una sección cónica se define como el lugar geométrico de un punto  $P$  que se desplaza de modo que la relación de su distancia a un *foco*, punto fijo  $F$ , a su distancia perpendicular a una línea fija  $DD$  llamada *directriz*, es constante. Esta relación constante se denotará como  $e$  y se llama *excentricidad*. Por definición

$$e = \frac{FP}{PA}$$

Por la figura 13-24,

$$FP = r = e(PA) = e[p - r \cos(\theta - \phi)]$$

o bien,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Al **comparar** esta ecuación con la ecuación 13-16, se observa que la distancia fija del foco a la directriz es

$$p = \frac{1}{C} \quad (13-17)$$

Y la excentricidad de la sección cónica de la trayectoria es

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} \quad (13-18)$$

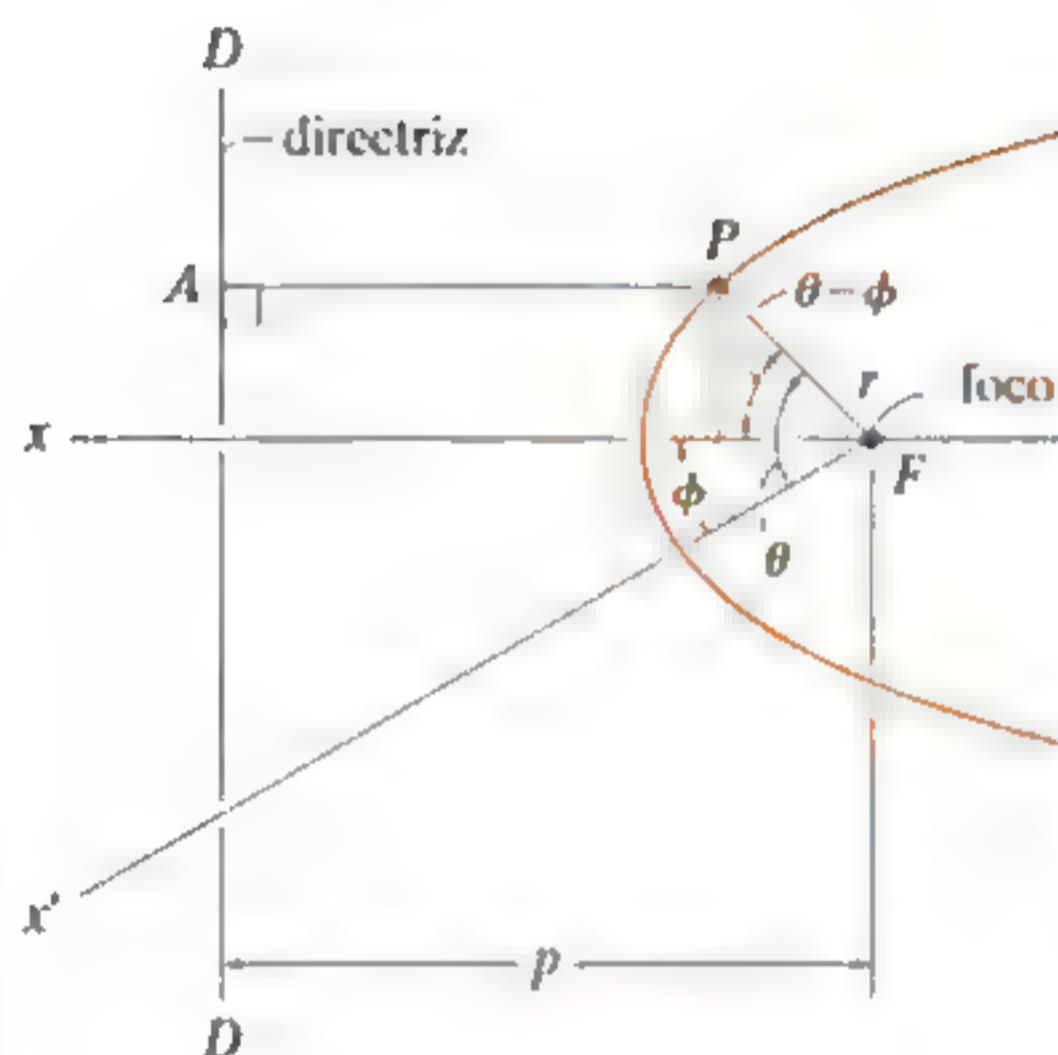


Fig. 13-24

Siempre que el ángulo polar  $\theta$  se mida con respecto al eje  $x$  (un eje de simetría pues es perpendicular a la directriz), el ángulo  $\phi$  es cero (fig. 13-24) y, por consiguiente, la ecuación 13-16 se reduce a

$$\frac{1}{r} = C \cos \theta + \frac{GM_e}{h^2} \quad (13-19)$$

Las constantes  $h$  y  $C$  se determinan con los datos obtenidos para la posición y velocidad del satélite al final de la *trayectoria de vuelo propulsado*. Por ejemplo, si la altura o distancia inicial al vehículo espacial es  $r_0$ , medida desde el centro de la Tierra, y su velocidad inicial es  $v_0$  al inicio de su vuelo libre (fig. 13-25), entonces la constante  $h$  se obtiene con la ecuación 13-12. Cuando  $\theta = \phi = 0^\circ$ , la velocidad  $v_0$  no tiene componente radial; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 12-25,  $v_0 = r_0(d\theta/dt)$ , de modo que

$$h = r_0^2 \frac{d\theta}{dt}$$

o bien,

$$h = r_0 v_0 \quad (13-20)$$

Para determinar  $C$ , use la ecuación 13-19 con  $\theta = 0^\circ$ ,  $r = r_0$  y sustituya en la ecuación 13-20 para  $h$ :

$$C = \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2} \right) \quad (13-21)$$

La ecuación de la trayectoria de vuelo libre es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2} \right) \cos \theta + \frac{GM_e}{r_0^2 v_0^2} \quad (13-22)$$

El tipo de trayectoria recorrida por el satélite se determina con el valor de la excentricidad de la sección cónica dada por la ecuación 13-18. Si

$e = 0$	la trayectoria de vuelo libre es un círculo	(13-23)
$e = 1$	la trayectoria de vuelo libre es una parábola	
$e < 1$	la trayectoria de vuelo libre es una elipse	
$e > 1$	la trayectoria de vuelo libre es una hipérbola	

**Trayectoria parabólica.** Cada una de estas trayectorias se muestra en la figura 13-25. De las curvas se observa que cuando el satélite sigue una trayectoria parabólica, está “en el borde” de que nunca regrese a su punto de partida inicial. La velocidad de lanzamiento inicial,  $v_0$ , requerida para que el satélite siga una trayectoria parabólica se llama *velocidad de escape*. La rapidez  $v_e$  se determina con la segunda de las ecuaciones 13-23,  $e = 1$ , con las ecuaciones 13-18, 13-20 y 13-21. Se deja como ejercicio demostrar que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_0}} \quad (13-24)$$

**Órbita circular.** La rapidez  $v_e$  requerida para lanzar un satélite a una órbita circular se puede determinar mediante la primera de las ecuaciones 13-23,  $e = 0$ . Como  $e$  está relacionada con  $h$  y  $C$ , ecuación 13-18,  $C$  debe ser cero para satisfacer esta ecuación (de acuerdo con la ecuación 13-20,  $h$  no puede ser cero) y, por consiguiente, mediante la ecuación 13-21, tenemos

$$v_e = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}} \quad (13-25)$$

Siempre que  $r_0$  representa la altura mínima de lanzamiento, en la cual se omite la resistencia a la fricción de la atmósfera, las velocidades de lanzamiento menores que  $v_e$  harán que el satélite reingrese a la atmósfera terrestre y se quemará o estrellará (fig. 13-25).

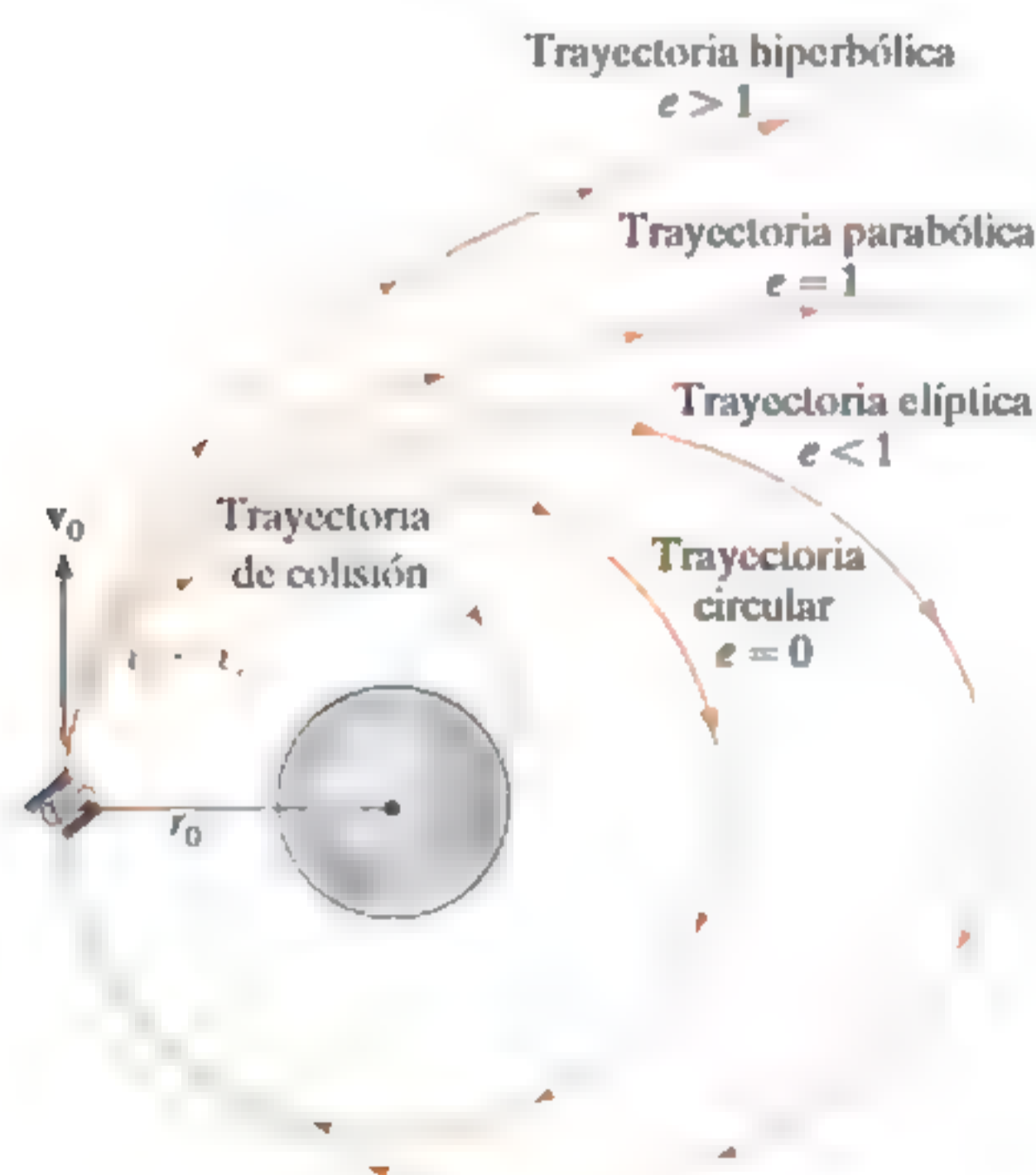


Fig. 13-25

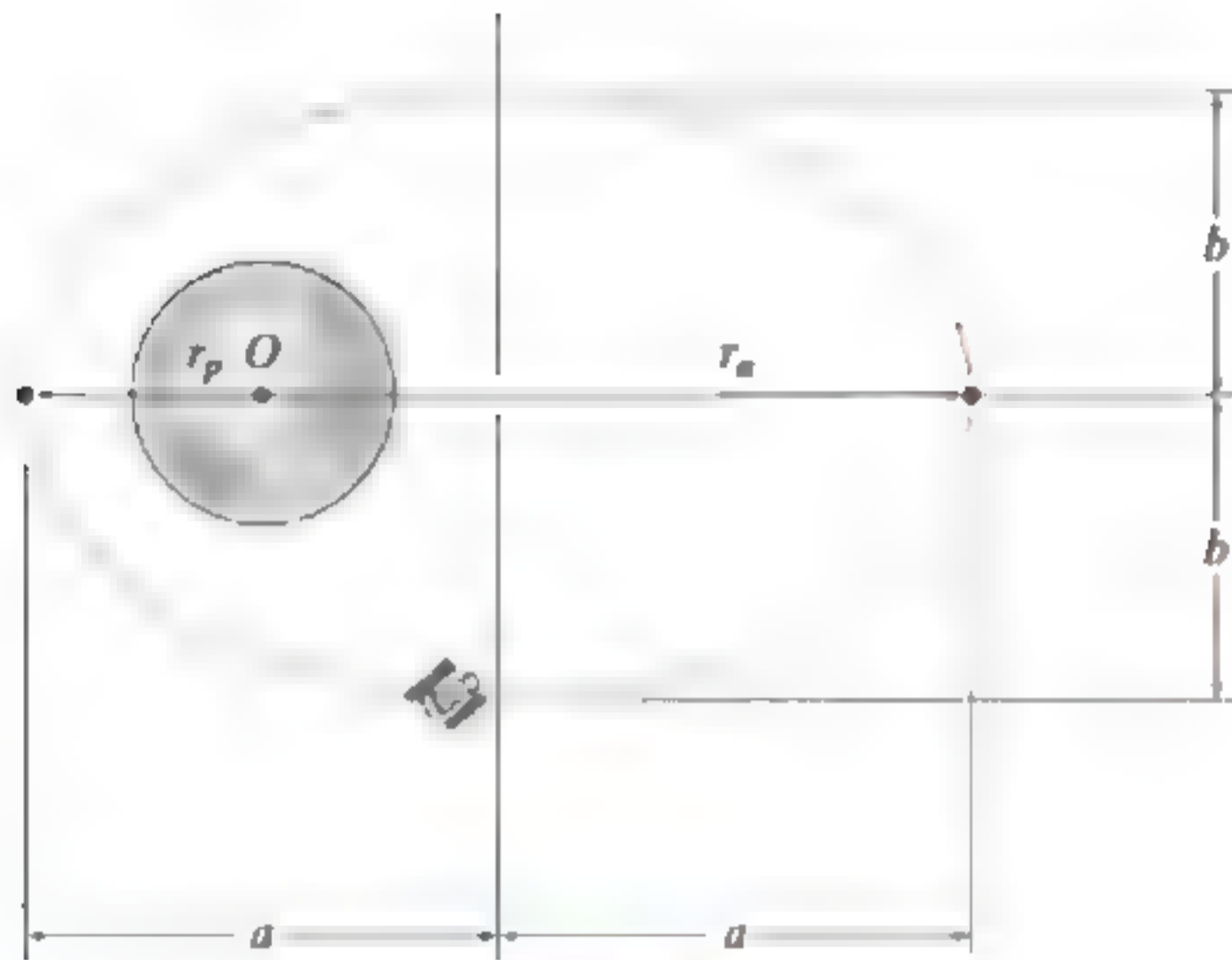


Fig. 13-26

**Observación.** Todas las trayectorias alcanzadas por los planetas y la mayoría de los satélites son elípticas (fig. 13-26). Para la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, la *distancia mínima* de la órbita al centro de la Tierra  $O$  (que se encuentra en uno de los focos de la elipse) es  $r_p$  y se determina con la ecuación 13-22 y  $\theta = 0^\circ$ . Por consiguiente;

$$r_p = r_0 \quad (13-26)$$

Esta distancia mínima se llama *perigeo* de la órbita. El *apogeo* o distancia máxima  $r_a$  se determina con la ecuación 13-22 y  $\theta = 180^\circ$ . Por lo tanto,

$$r_a = \frac{r_0}{(2GM_e/r_0v_0^2) - 1} \quad (13-27)$$

Con referencia a la figura 13-26, la mitad del eje mayor de la elipse es

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (13-28)$$

Por geometría analítica se demuestra que la mitad del eje menor se determina con la ecuación

$$b = \sqrt{r_p r_a} \quad (13-29)$$

\*En realidad, la terminología perigeo y apogeo tiene que ver sólo con órbitas alrededor de la *Tierra*. Si cualquier otro cuerpo celestial se localiza en el foco de una órbita elíptica, las distancias mínimas y máximas se conocen respectivamente como *periapsis* y *apoapsis* de la órbita.

Asimismo, mediante integración directa, el área de una elipse es

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \quad (13-30)$$

La ecuación 13-13 definió la velocidad areolar,  $dA/dt = h/2$ . Al integrar se obtiene  $A = hT/2$ , donde  $T$  es el *periodo* de tiempo requerido para realizar una revolución orbital. Según la ecuación 13-30, el periodo es

$$T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \quad (13-31)$$

Además de predecir la trayectoria orbital de satélites terrestres, la teoría desarrollada en esta sección es válida, hasta una aproximación sorprendentemente cercana, para predecir el movimiento real de los planetas que viajan alrededor del Sol. En este caso, la masa del Sol,  $M_s$ , se debería sustituir por  $M_e$  cuando se utilicen las fórmulas apropiadas.

El hecho de que los planetas sigan órbitas elípticas alrededor del Sol fue descubierto por el astrónomo alemán Johannes Kepler a principios del siglo XVII. Realizó su descubrimiento *antes* de que Newton desarrollara las leyes del movimiento y la ley de la gravitación, y, por lo tanto, en esa época constituyó una demostración importante de la validez de estas leyes. Las leyes de Kepler, desarrolladas después de 20 años de su observación planetaria, se resumen como sigue:

1. Todo planeta viaja en su órbita de tal suerte que la línea que lo une con el centro del Sol barre áreas iguales a intervalos de tiempo iguales, cualquiera que sea la longitud de la línea.
2. La órbita de todo planeta es una elipse con el Sol colocado en uno de sus focos.
3. El cuadrado del periodo de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo del eje mayor de su órbita.

Las ecuaciones 13-13 y 13-22 representan matemáticamente la primera y la segunda leyes, respectivamente. La tercera ley puede comprobarse con la ecuación 13-31 mediante las ecuaciones 13-19, 13-28 y 13-29 (vea el problema 13-117).

## PROBLEMAS

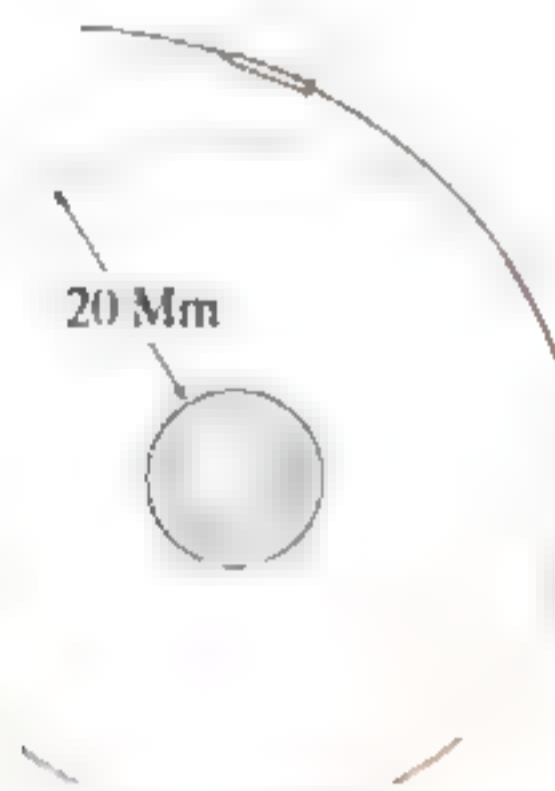
En los siguientes problemas, excepto donde se indique lo contrario, suponga que el radio de la Tierra es de 6378 km, que su masa es de  $5.976 (10^{24})$  kg, que la masa del Sol es de  $1.99 (10^{30})$  kg y que la constante gravitacional es  $G = 66.73 (10^{-12}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ .

**13-113.** La Tierra tiene una órbita con excentricidad de 0.0167 alrededor del Sol. Si se sabe que la distancia mínima de la Tierra al Sol es de  $146(10^6)$  km, encuentre la rapidez a la que la Tierra viaja cuando está a esa distancia. Determine la ecuación en coordenadas polares que describe la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

**13-114.** Un satélite de comunicaciones viaja en una órbita circular sobre la Tierra, de modo que siempre permanece sobre un punto fijo de la superficie terrestre. En consecuencia, su periodo debe ser igual a la rotación de la Tierra, que es aproximadamente de 24 horas. Determine la altitud del satélite  $h$  sobre la superficie terrestre y su rapidez orbital.

**13-115.** La ecuación 13-25 proporciona la rapidez de un satélite lanzado en una órbita circular alrededor de la Tierra. Determine la rapidez de un satélite lanzado paralelo a la superficie terrestre, de modo que viaje en una órbita circular a 800 km de la superficie terrestre.

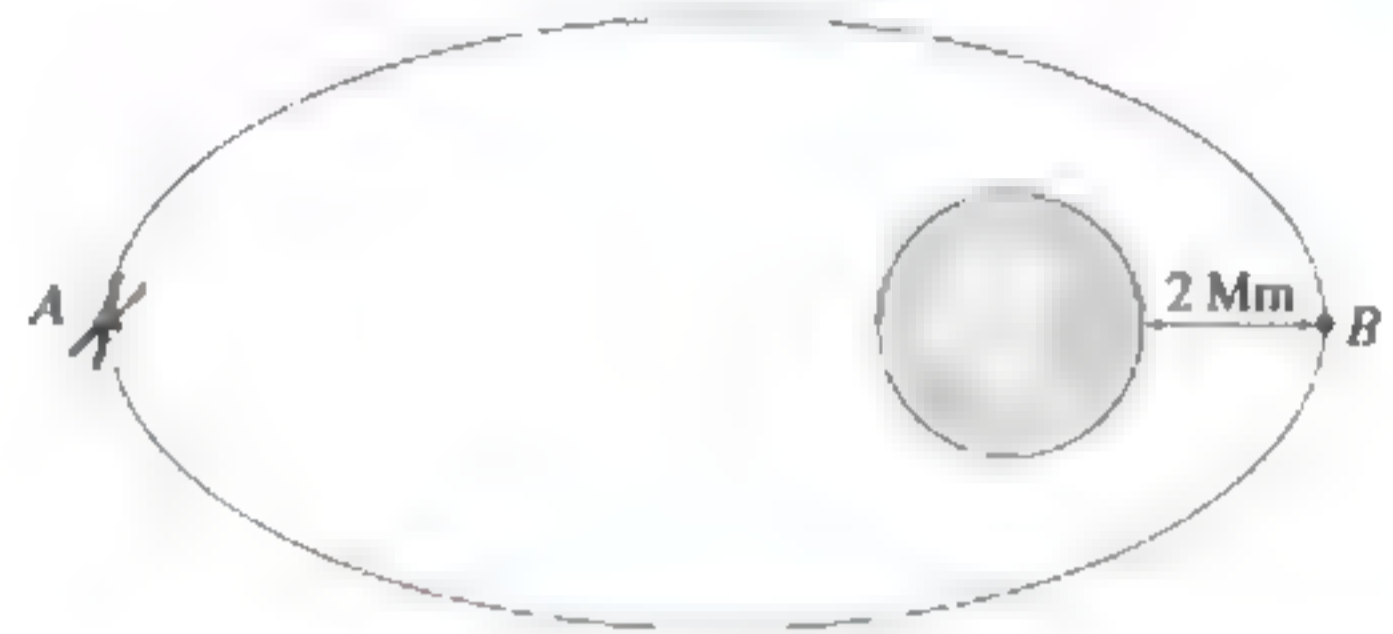
**\*13-116.** El cohete está en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altitud de 20 Mm. Determine el incremento mínimo en la rapidez que debe tener, a fin de escapar del campo gravitacional terrestre.



Prob. 13-116

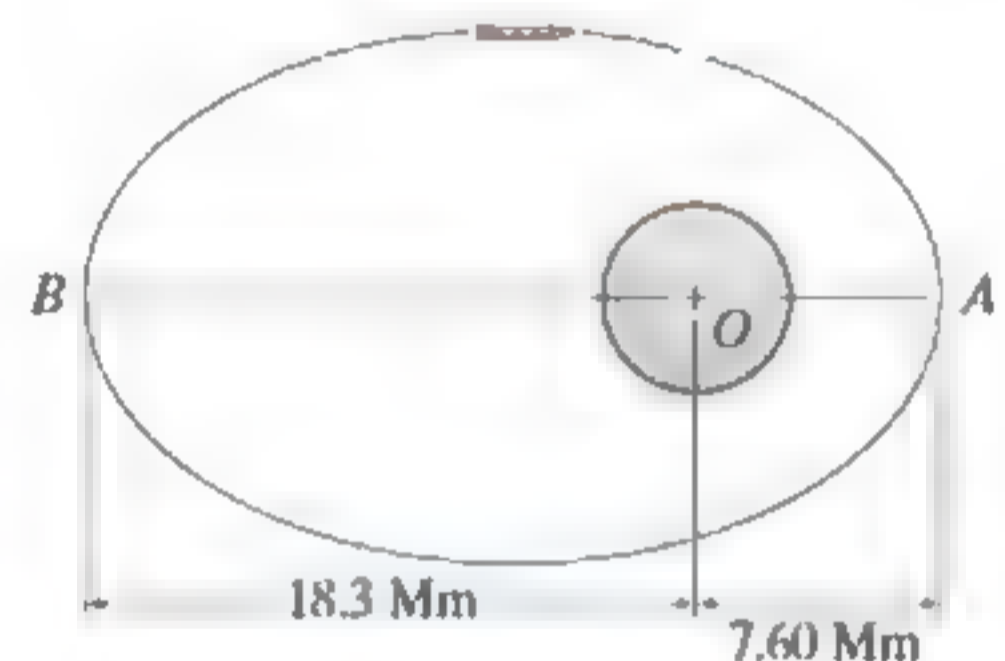
**13-117.** Demuestre la tercera ley de Kepler del movimiento. *Sugerencia:* Use las ecuaciones 13-19, 13-28, 13-29 y 13-31.

**13-118.** El satélite se mueve en una órbita elíptica con una excentricidad  $e = 0.25$ . Determine su rapidez cuando está en su distancia máxima  $A$  y distancia mínima  $B$  de la Tierra.



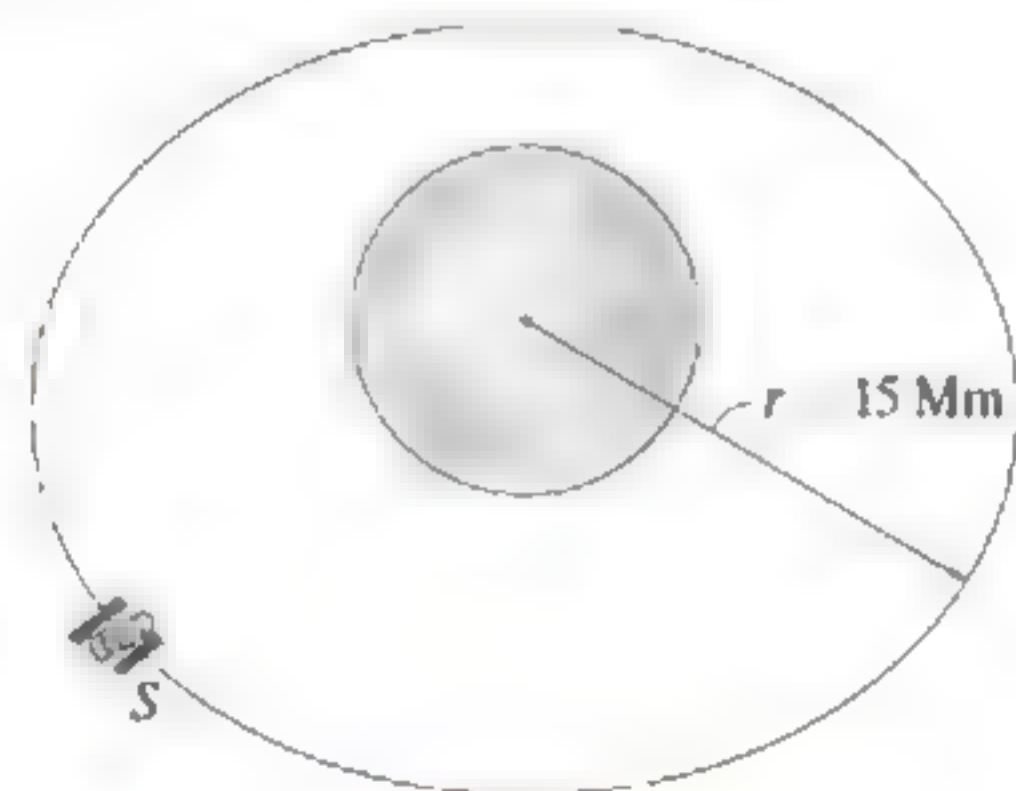
Prob. 13-118

**13-119.** El cohete viaja en vuelo libre a lo largo de la órbita elíptica. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.60 veces la masa de la Tierra. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la rapidez del cohete cuando está en  $A$  y en  $B$ .



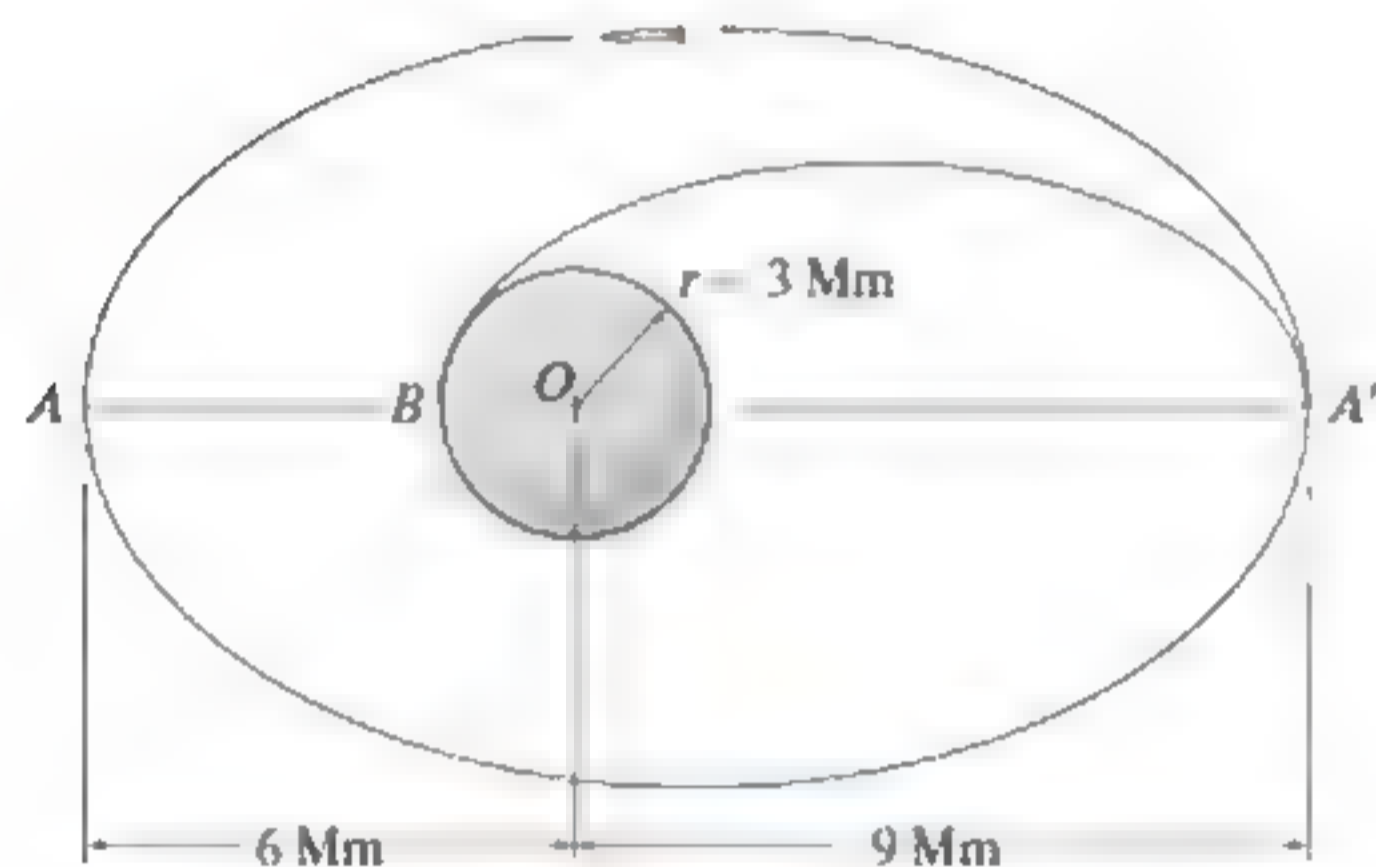
Prob. 13-119

**\*13-120.** Determine la rapidez constante del satélite  $S$ , de modo que viaje en una trayectoria circular alrededor de la Tierra con una órbita de radio  $r = 15$  Mm. *Sugerencia:* Utilice la ecuación 13-1.



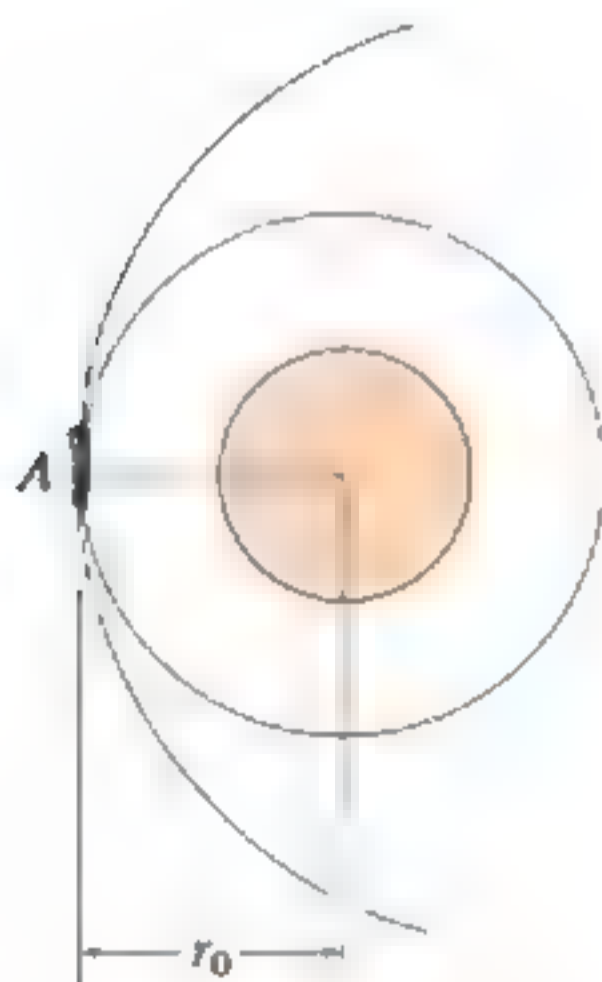
Prob. 13-120

**13-121.** El cohete está en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica  $A'A$ . El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.70 veces la masa de la Tierra. Si el cohete tiene una apoapsis y una periapsis como las mostradas en la figura, determine la rapidez del cohete cuando está en el punto  $A$ .



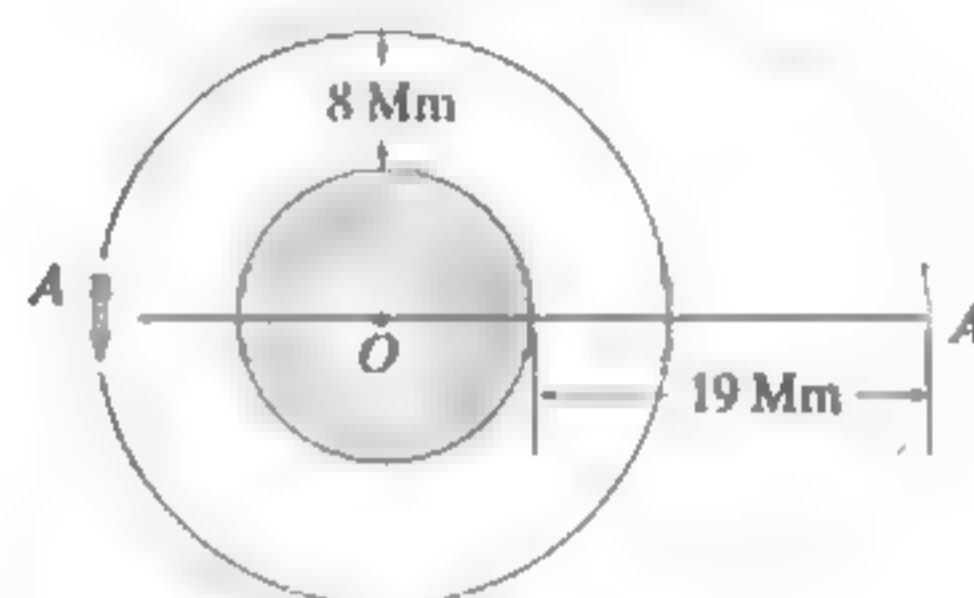
Prob. 13-121

**13-122.** El explorador Viking se aproxima al planeta Marte en una trayectoria parabólica como se indica. Cuando llega al punto  $A$  su velocidad es de 10 Mm/h. Determine  $r_0$  y la velocidad requerida en  $A$  de modo que pueda mantenerse entonces en una órbita circular como se muestra. La masa de Marte es 0.1074 veces la masa de la Tierra.



Prob. 13-122

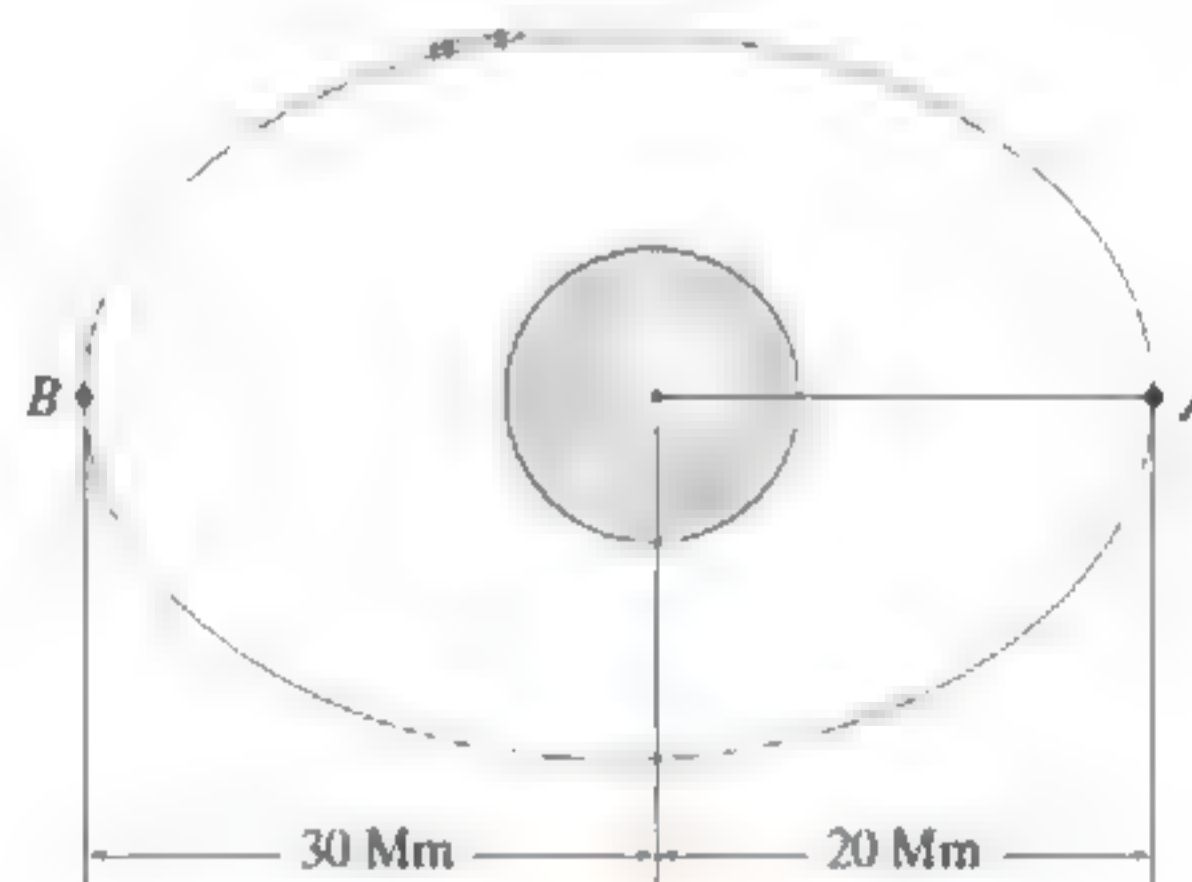
**13-123.** El cohete está inicialmente en un vuelo libre de órbita circular alrededor de la Tierra. Determine la rapidez del cohete en  $A$ . ¿Qué cambio en la rapidez en  $A$  se requiere para que pueda moverse en una órbita elíptica hasta alcanzar el punto  $A'$ ?



Probs. 13-123/124

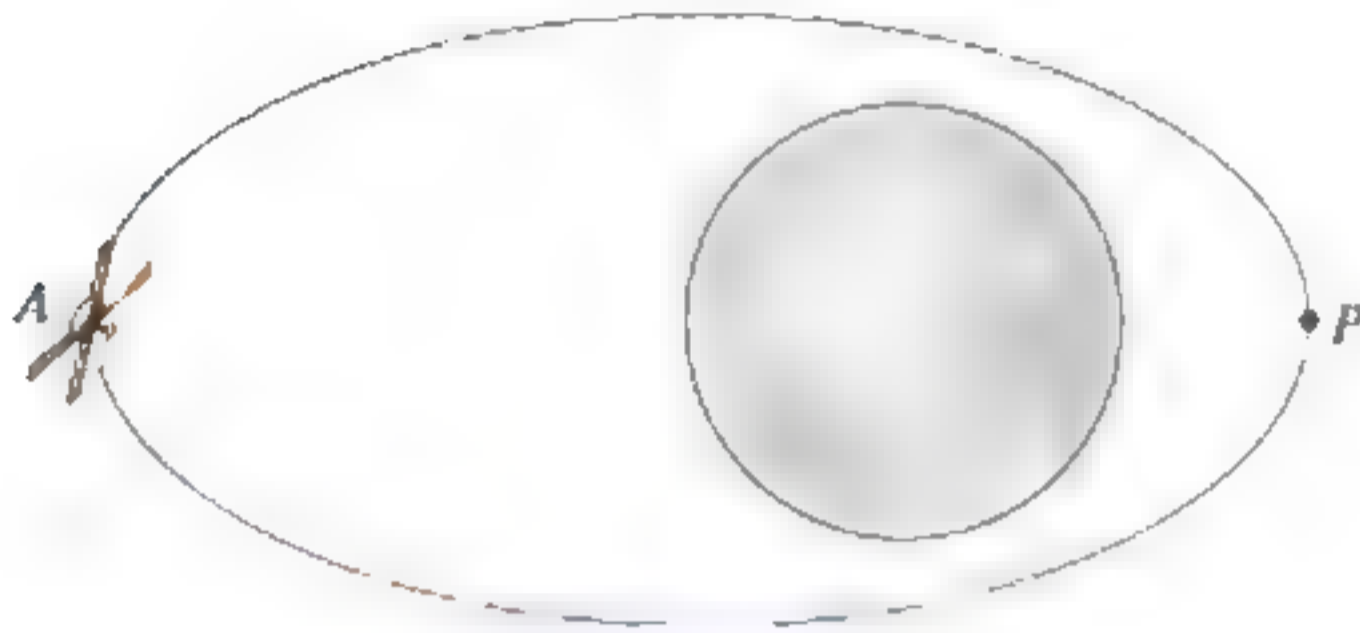
**13-125.** Un satélite se lanza en su apogeo con una velocidad inicial  $v_0 = 2500$  mi/h paralela a la superficie de la Tierra. Determine la altitud requerida (o el intervalo de altitudes requerido) sobre la superficie terrestre para el lanzamiento, si la trayectoria de vuelo libre debe ser (a) circular, (b) parabólica, (c) elíptica, con lanzamiento en el apogeo y (d) hiperbólica. Considere que  $G = 34.4(10^{-9})(\text{lb}\cdot\text{ft}^2)/\text{slug}^2$ ,  $M_e = 409(10^{21})$  slug, el radio de la Tierra  $r_e = 3960$  mi y  $1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft}$ .

**13-126.** El cohete se desplaza alrededor de la Tierra en vuelo libre a lo largo de una órbita elíptica. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la rapidez del cohete cuando está en  $A$  y en  $B$ .



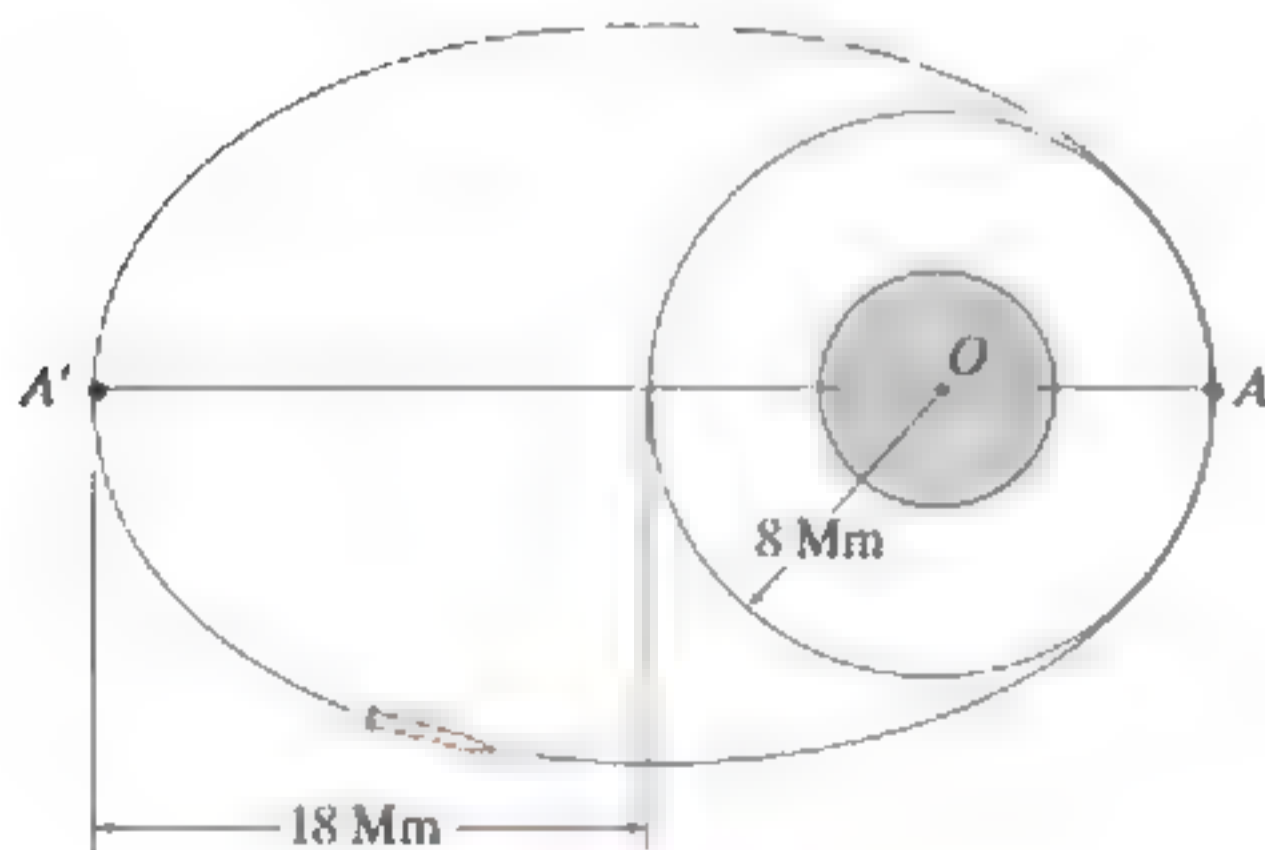
Prob. 13-126

**13-127.** Una trayectoria elíptica de un satélite tiene una excentricidad  $e = 0.130$ . Si tiene una rapidez de 15 Mm/h cuando está en el perigeo,  $P$ , determine su rapidez cuando llega al apogeo,  $A$ . Además, ¿a qué distancia se encuentra con respecto a la superficie de la Tierra cuando está en  $A$ ?



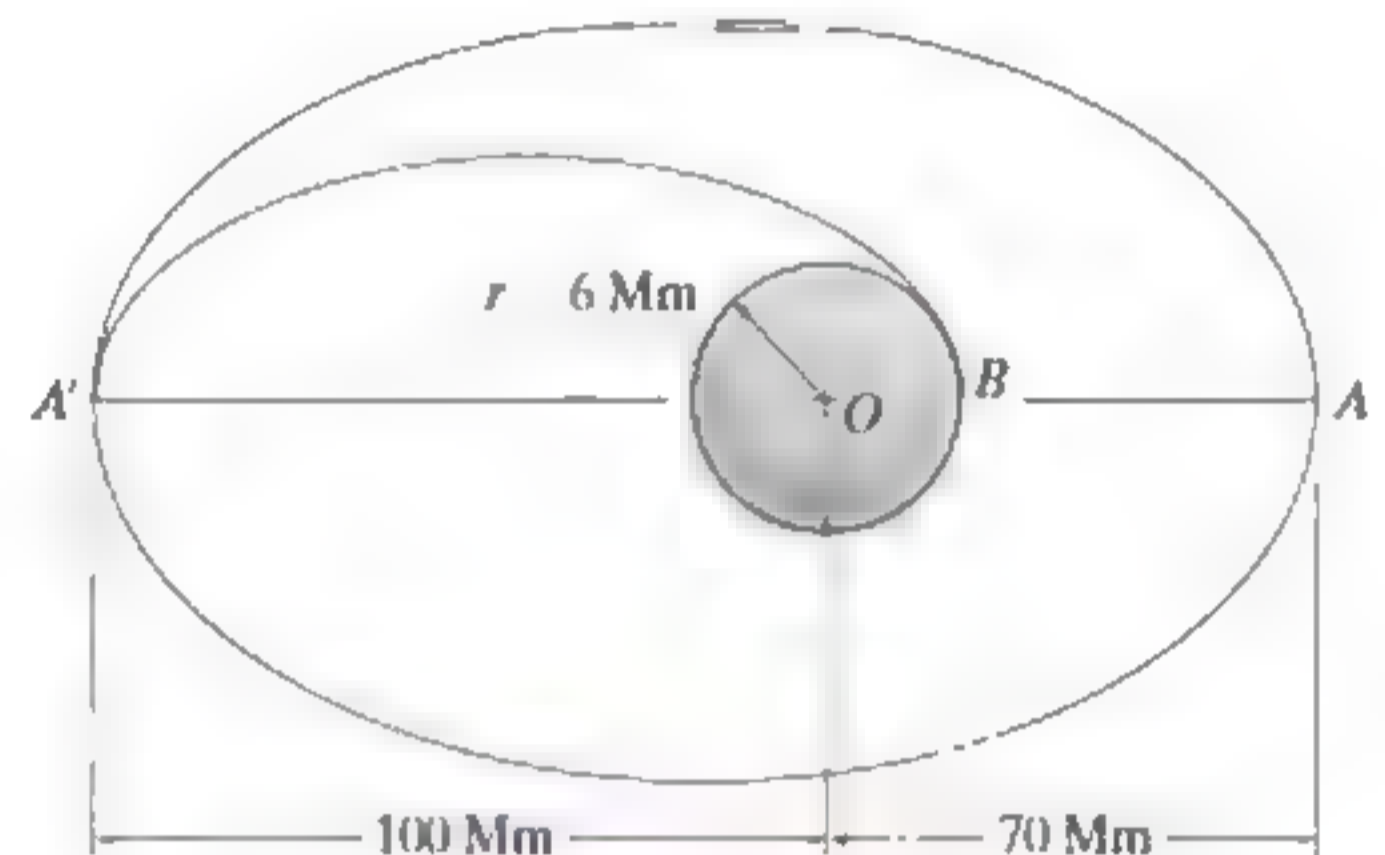
Prob. 13-127

**\*13-128.** Un cohete está en vuelo libre de órbita elíptica alrededor del planeta Venus. Si se sabe que el perigeo y la apoapsis de la órbita son de 8 Mm y 26 Mm, respectivamente, determine (a) la rapidez del cohete en el punto  $A'$ , (b) la rapidez requerida que debe alcanzar en  $A$  justo después de frenar, de modo que experimente un vuelo libre de órbita circular de 8 Mm alrededor de Venus, y (c) los periodos de las órbitas circular y elíptica. La masa de Venus es 0.816 veces la masa de la Tierra.



Prob. 13-128

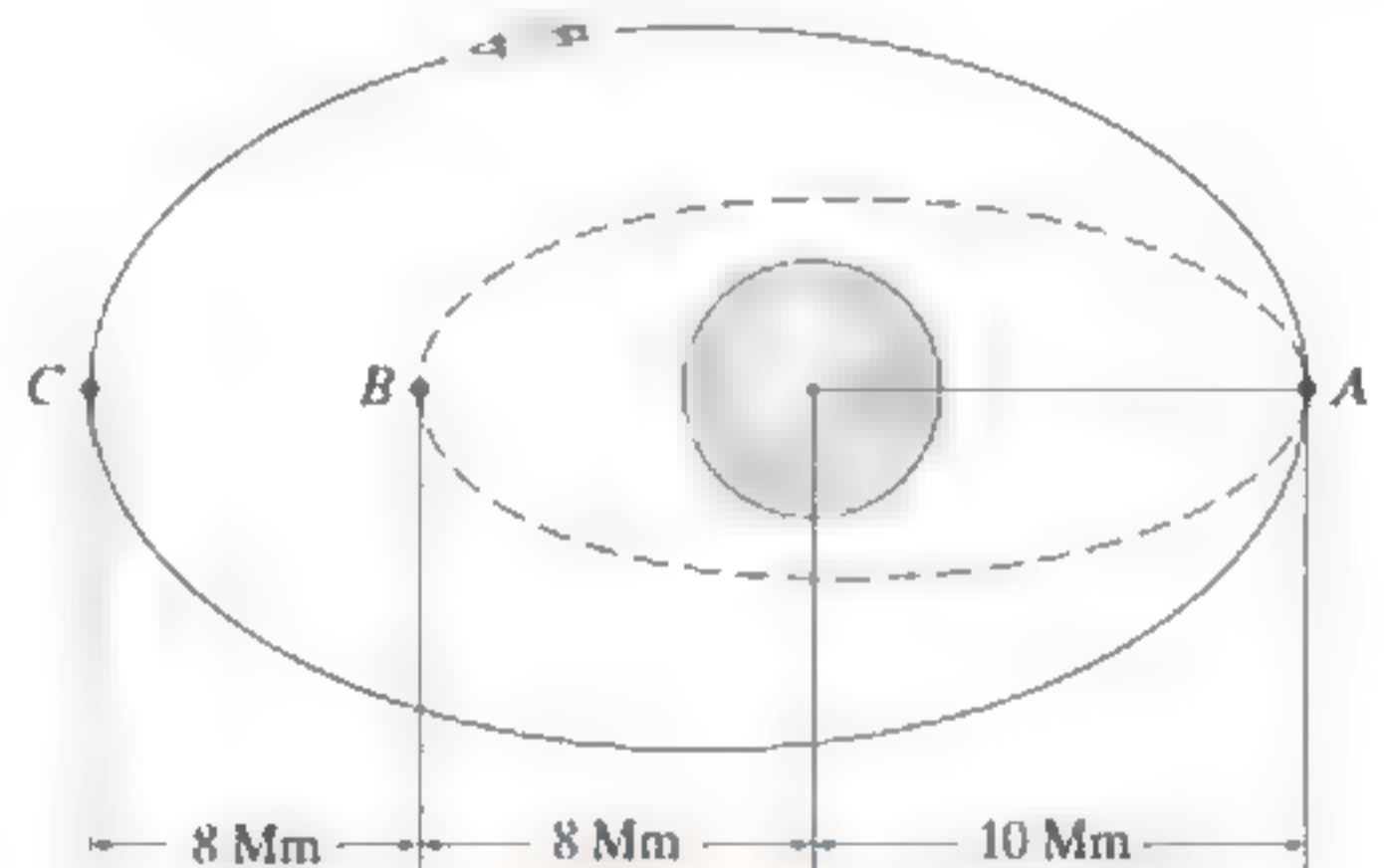
**13-129.** El cohete viaja en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica  $A'A$ . El planeta no tiene atmósfera, y su masa es 0.60 veces la masa de la Tierra. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la velocidad del cohete cuando está en el punto  $A$ .



Probs. 13-129/130

**13-131.** El cohete se desplaza alrededor de la Tierra en vuelo libre a lo largo de una órbita elíptica  $AC$ . Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la velocidad del cohete cuando está en el punto  $A$ .

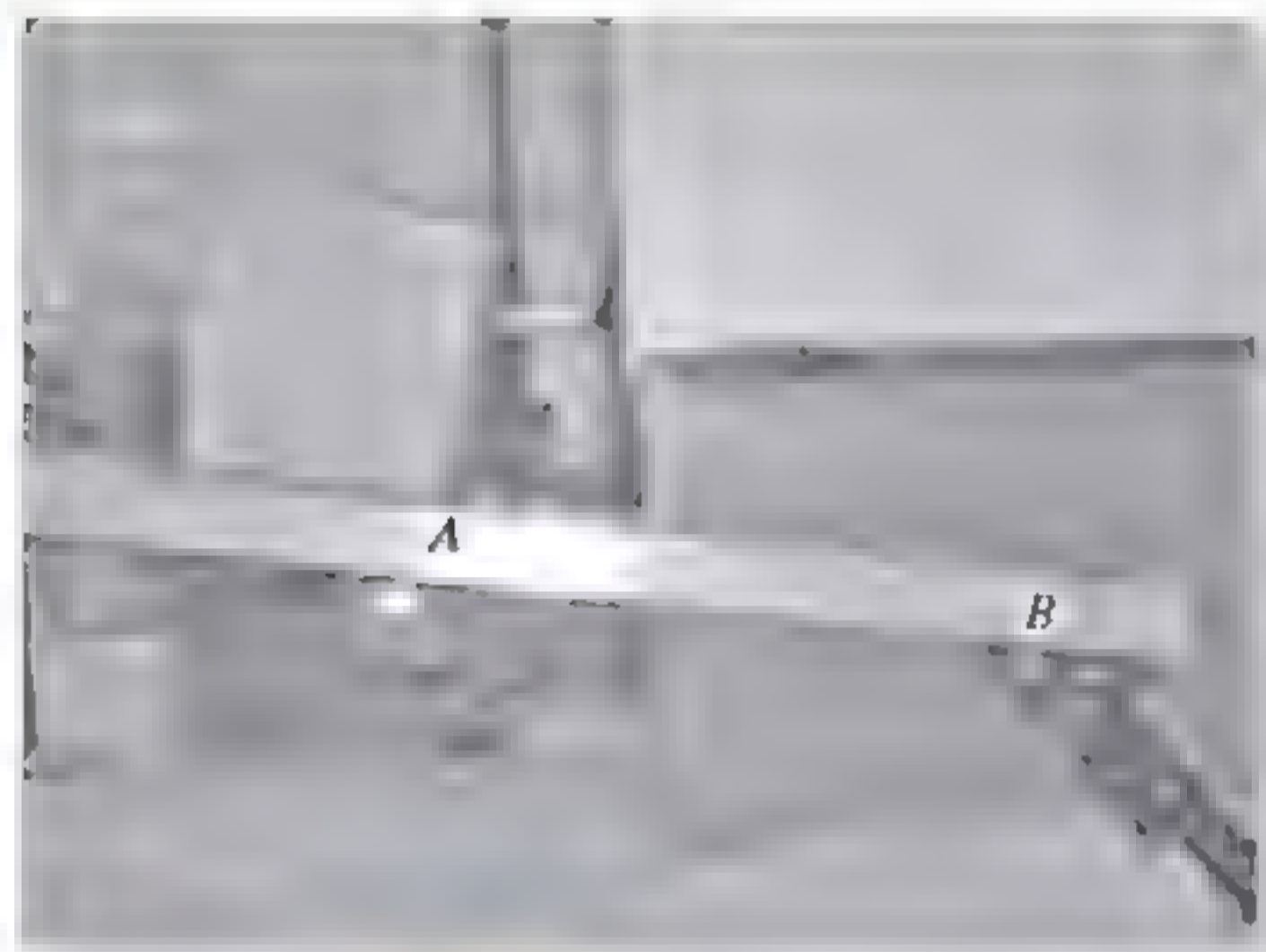
**\*13-132.** El cohete se desplaza alrededor de la Tierra en vuelo libre a lo largo de la órbita elíptica  $AC$ . Determine su cambio en la rapidez cuando llega a  $A$  de modo que viaje a lo largo de la órbita elíptica  $AB$ .



Probs. 13-131/132

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**C13.1.** Si la caja se suelta desde el reposo en  $A$ , use valores numéricos para demostrar cómo estimaría el tiempo que le lleva llegar a  $B$ . Además, haga una lista de las suposiciones hechas en su análisis.



Prob. C13.1 (© R. C. Hibbeler)

**C13.2.** El remolcador tiene una masa conocida y su hélice proporciona un empuje máximo conocido. Cuando el remolcador marcha a toda máquina calcule el tiempo que le lleva alcanzar una velocidad de valor conocido, si partió del reposo. Demuestre cómo podría determinar la masa de la barcaza. Ignore la resistencia del agua en el remolcador. Use valores numéricos para explicar su respuesta.



Prob. C13.2 (© R. C. Hibbeler)

**C13.3.** Determine la rapidez mínima de cada carro  $A$  y  $B$ , de modo que los pasajeros no pierdan el contacto con el asiento mientras los brazos giran a una velocidad angular constante. ¿Cuál es la fuerza normal máxima del asiento en cada pasajero? Use valores numéricos para explicar su respuesta.



Prob. C13.3 (© R. C. Hibbeler)

**C13.4.** Cada carro está conectado en sus extremos por medio de un pasador al aro de la rueda, la cual gira a una rapidez constante. Usando valores numéricos demuestre cómo se determina la fuerza resultante que el asiento ejerce en el pasajero localizado en la parte superior del carro  $A$ . Los pasajeros van sentados hacia el centro de la rueda. Además, haga una lista de las suposiciones hechas en su análisis.

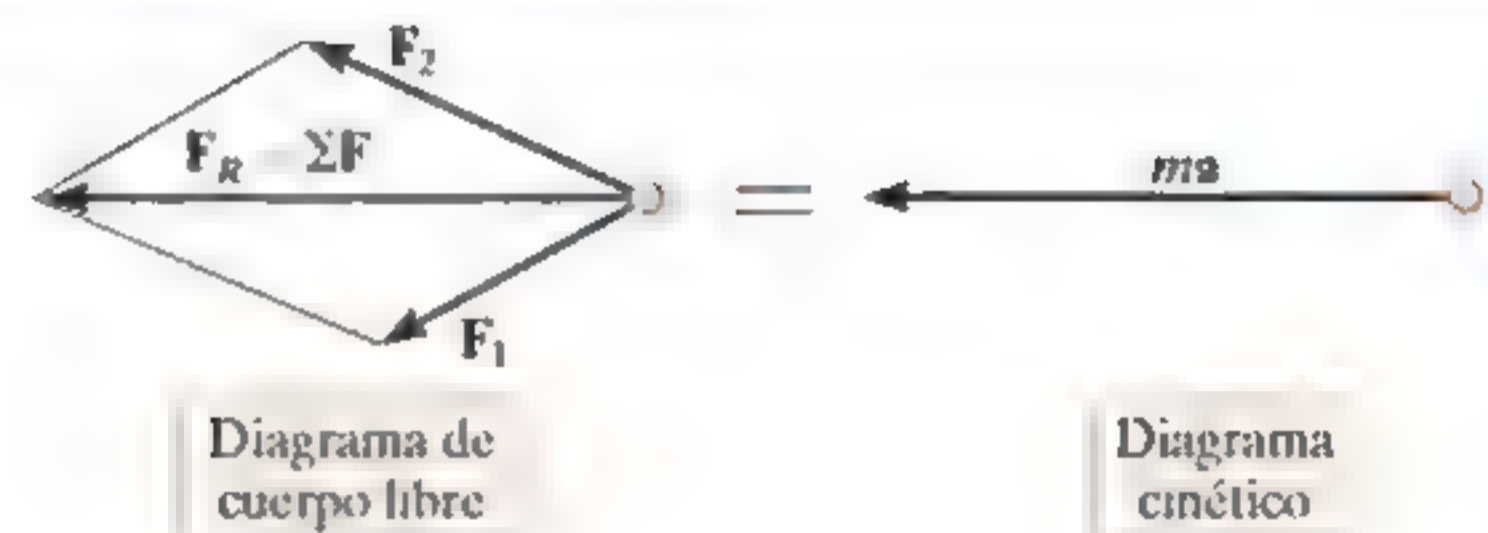


Prob. C13.4 (© R. C. Hibbeler)

## Cinética

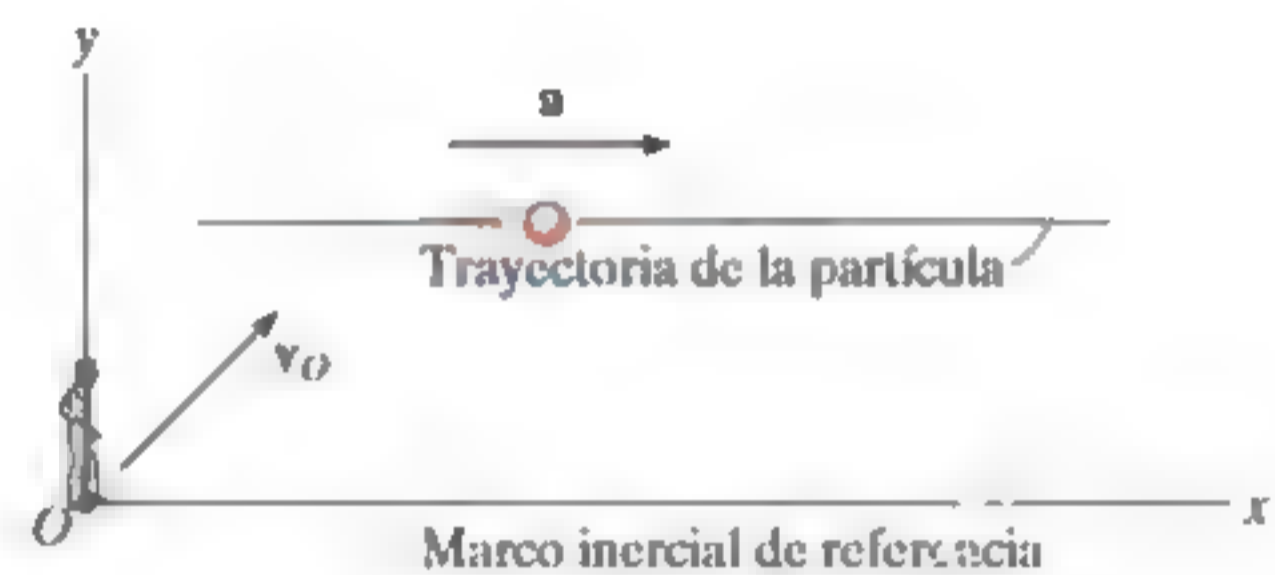
Cinética es el estudio de la relación entre las fuerzas y la aceleración que provocan. Esta relación está basada en la segunda ley de Newton del movimiento, expresada matemáticamente como  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

Antes de aplicar la ecuación de movimiento, es importante trazar primero el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula para tener en cuenta todas las fuerzas que actúan en ella. Gráficamente, este diagrama es igual al *diagrama cinético*, que muestra el resultado de las fuerzas, esto es, el vector  $m\mathbf{a}$ .



## Sistema de coordenadas inercial

Cuando se aplica la ecuación de movimiento, es importante medir la aceleración desde un sistema de coordenadas inercial. Este sistema consta de ejes que no giran, sino que están fijos o se trasladan a una velocidad constante. Varios tipos de sistemas de coordenadas inerciales pueden utilizarse para aplicar la ecuación  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  en su forma de componentes.



Se utilizan ejes rectangulares  $x, y, z$  para describir el movimiento a lo largo de cada uno de los ejes.

$$\Sigma F_x = ma_x, \Sigma F_y = ma_y, \Sigma F_z = ma_z$$

Con frecuencia se utilizan ejes normales, tangenciales y binormales  $n, t, b$ , cuando se conoce la trayectoria de la partícula. Recuerde que  $\mathbf{a}_n$  siempre está dirigida en la dirección  $+n$  e indica el cambio en la dirección de la velocidad. Asimismo recuerde que  $\mathbf{a}_t$  es tangente a la trayectoria e indica el cambio en la magnitud de la velocidad.

$$\Sigma F_t = ma_t, \Sigma F_n = ma_n, \Sigma F_b = 0$$

$$a_t = dv/dt \quad \text{o bien} \quad a_t = v dv/ds$$

$$a_n = v^2/\rho \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{|1 + (dy/dx)^2|^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

Las coordenadas cilíndricas son útiles cuando se especifica el movimiento angular de la línea radial  $r$  o cuando la trayectoria se puede describir de manera conveniente con tales coordenadas.

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

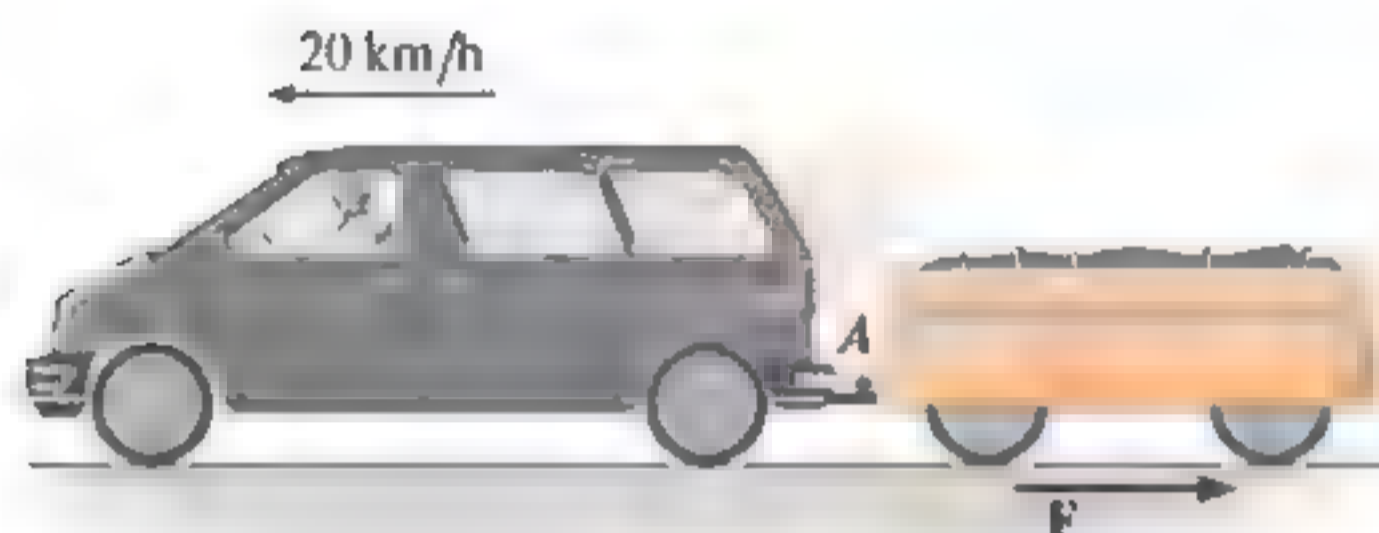
$$\Sigma F_z = m\ddot{z}$$

## Movimiento de fuerza central

Cuando una única fuerza actúa en una partícula, como durante la trayectoria de vuelo libre de un satélite en un campo gravitacional, entonces el movimiento se conoce como movimiento de fuerza central. La órbita depende de la excentricidad  $e$ ; y por consiguiente, la trayectoria puede ser circular, parabólica, elíptica o hiperbólica.

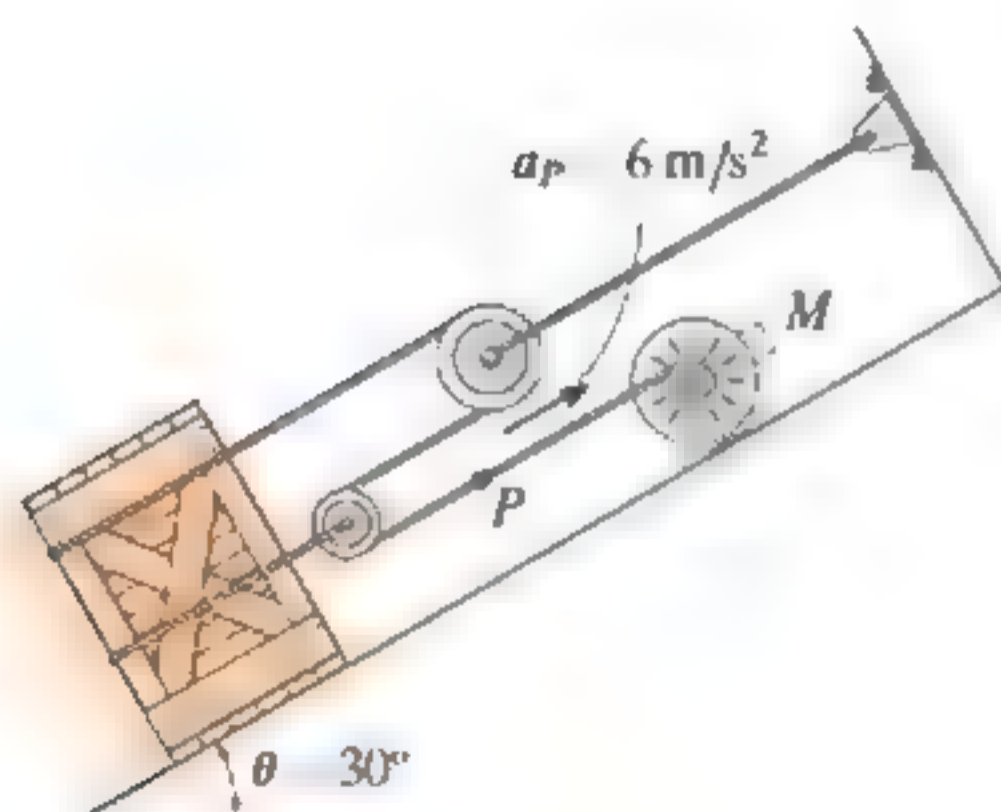
## PROBLEMAS DE REPASO

**R13-1.** La furgoneta viaja a 20 km/h cuando falla el acoplamiento del remolque en *A*. Si la masa del remolque es de 250 kg y recorre 45 m antes de detenerse, determine la fuerza horizontal constante *F* creada por la fricción de rodamiento que hace que el remolque se detenga.



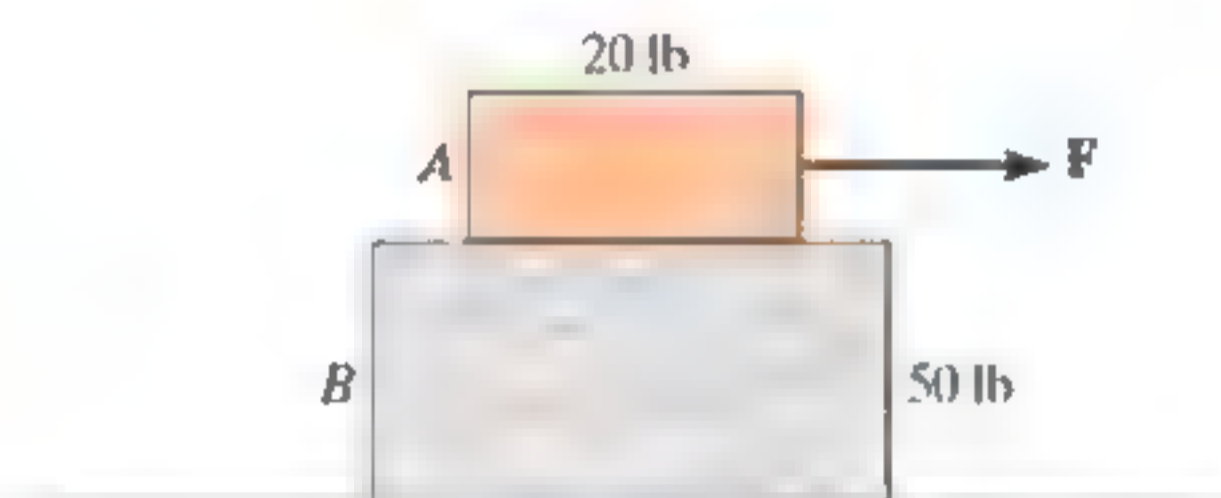
Prob. R13-1

**R13-2.** El motor *M* jala la cuerda a la que está unido con una aceleración  $a_P = 6 \text{ m/s}^2$ . Determine la fuerza de arrastre ejercida por *M* sobre la cuerda para mover hacia arriba el embalaje de 50 kg sobre el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es  $\mu_k = 0.3$ . Desprecie la masa de las poleas y la cuerda.



Prob. R13-2

**R13-3.** El bloque *B* descansa sobre una superficie lisa. Si los coeficientes de fricción entre *A* y *B* son  $\mu_s = 0.4$  y  $\mu_k = 0.3$ , determine la aceleración de cada bloque si  $F = 50 \text{ lb}$ .



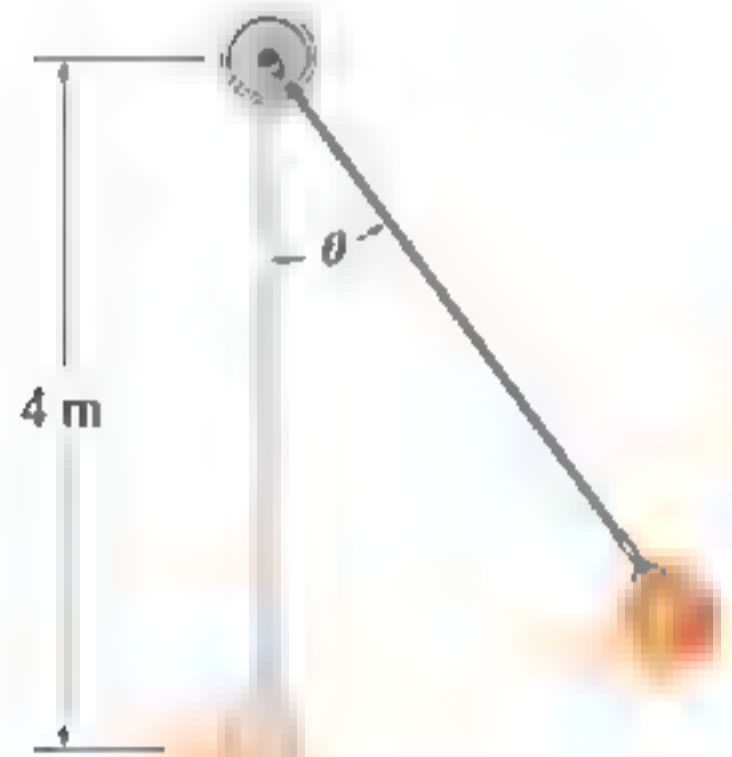
Prob. R13-3

**R13-4.** Si el motor enrolla el cable a razón de  $v = (0.05 s^{3/2}) \text{ m/s}$ , donde *s* se mide en metros, determine la tensión desarrollada en el cable cuando  $s = 10 \text{ m}$ . El embalaje tiene una masa de 20 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el suelo es  $\mu_k = 0.2$ .



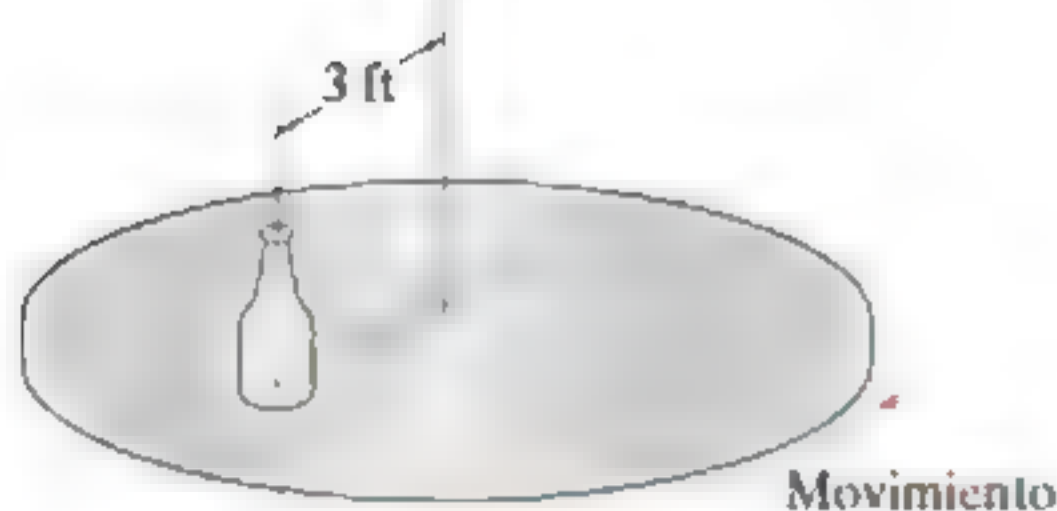
Prob. R13-4

**R13-5.** La bola tiene una masa de 30 kg y una rapidez  $v = 4$  m/s en el instante en que se encuentra en su punto más bajo,  $\theta = 0^\circ$ . Determine la tensión de la cuerda y la razón a la que disminuye la rapidez de la bola en el instante  $\theta = 20^\circ$ . Desprecie el tamaño de la bola.



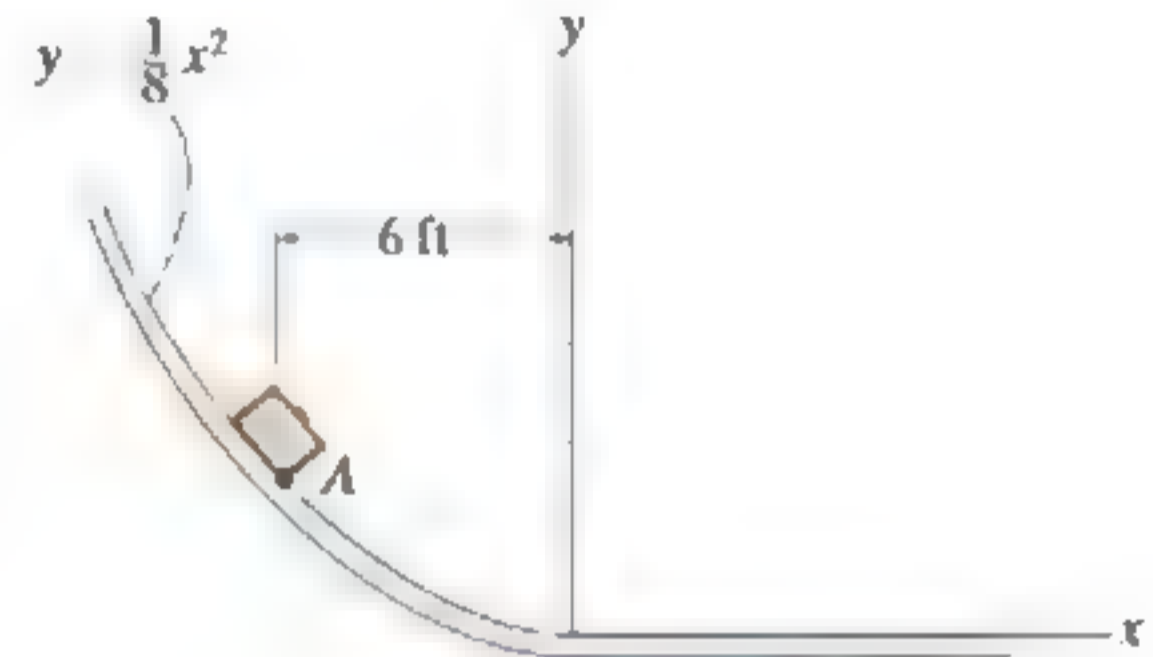
Prob. R13-5

**R13-6.** La botella descansa a una distancia de 3 ft desde el centro de la plataforma horizontal. Si el coeficiente de fricción estática entre la botella y la plataforma es  $\mu_s = 0.3$ , determine la rapidez máxima que puede alcanzar la botella antes de deslizarse. Suponga que el movimiento angular de la plataforma aumenta lentamente.



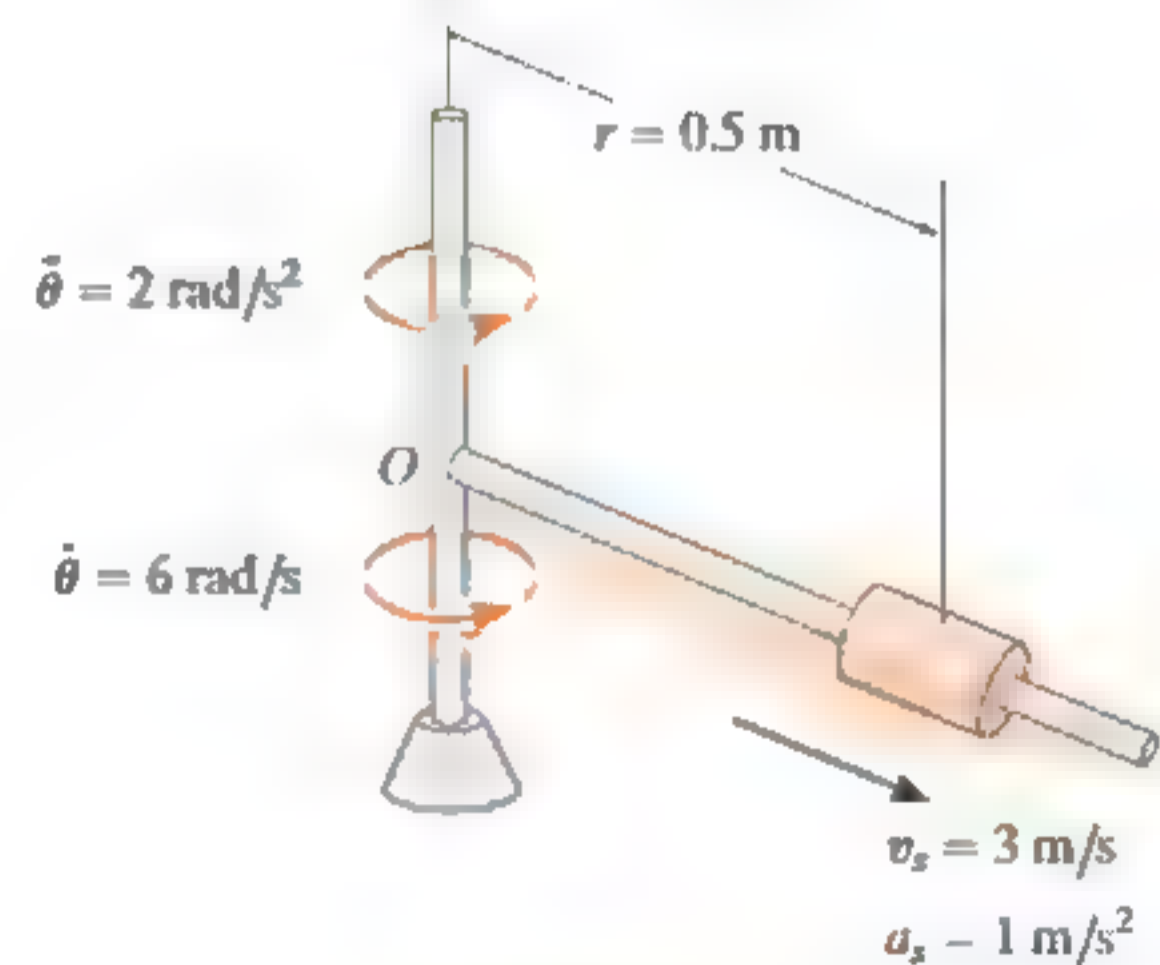
Prob. R13-6

**R13-7.** La maleta de 10 lb se desliza hacia abajo sobre la rampa curva cuyo coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k = 0.2$ . Si en el instante que llega al punto A tiene una rapidez de 5 ft/s, determine la fuerza normal sobre la maleta y la razón a la que aumenta su rapidez.



Prob. R13-7

**R13-8.** El carrito con masa de 4 kg se desliza a lo largo de la varilla giratoria. En el instante mostrado, la velocidad angular de la rotación de la varilla es  $\dot{\theta} = 6$  rad/s y esta rotación aumenta a  $\ddot{\theta} = 2$  rad/s<sup>2</sup>. En este mismo instante, el carrito tiene una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 1 m/s<sup>2</sup>, ambas medidas con respecto a la varilla y dirigidas alejándose del centro O, cuando  $r = 0.5$  m. Determine la fuerza de fricción radial y la fuerza normal, ejercidas por la varilla sobre el carrito en ese instante.



Prob. R13-8

# Capítulo 14



(© Oliver Furrer/Ocean/Corbis)

Conforme la mujer caiga, su energía tendrá que ser absorbida por la cuerda elástica.  
Los principios del trabajo y la energía pueden usarse para predecir el movimiento.

# Cinética de una partícula: trabajo y energía

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio de trabajo y energía, y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Estudiar problemas que implican potencia y eficiencia.
- Presentar el concepto de fuerza conservativa y aplicar el teorema de la conservación de la energía para resolver problemas de cinética.

## 14.1 Trabajo de una fuerza

En este capítulo analizaremos el movimiento de una partícula mediante los conceptos de trabajo y energía. La ecuación resultante servirá para resolver problemas que impliquen fuerza, velocidad y desplazamiento. Pero primero tenemos que definir el trabajo de una fuerza. Específicamente, una fuerza  $\mathbf{F}$  realizará *trabajo* en una partícula sólo cuando ésta sufra un *desplazamiento en la dirección de la fuerza*. Por ejemplo, si la fuerza  $\mathbf{F}$  en la figura 14-1 hace que la partícula se mueva a lo largo de la trayectoria  $s$  de la posición  $\mathbf{r}$  a una nueva posición  $\mathbf{r}'$ , el desplazamiento es entonces  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ . La magnitud de  $d\mathbf{r}$  es  $ds$ , la longitud del segmento diferencial a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre las colas de  $d\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$  es  $\theta$  (fig. 14-1), entonces el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  es una *cantidad escalar* definida por

$$dU = F ds \cos \theta$$

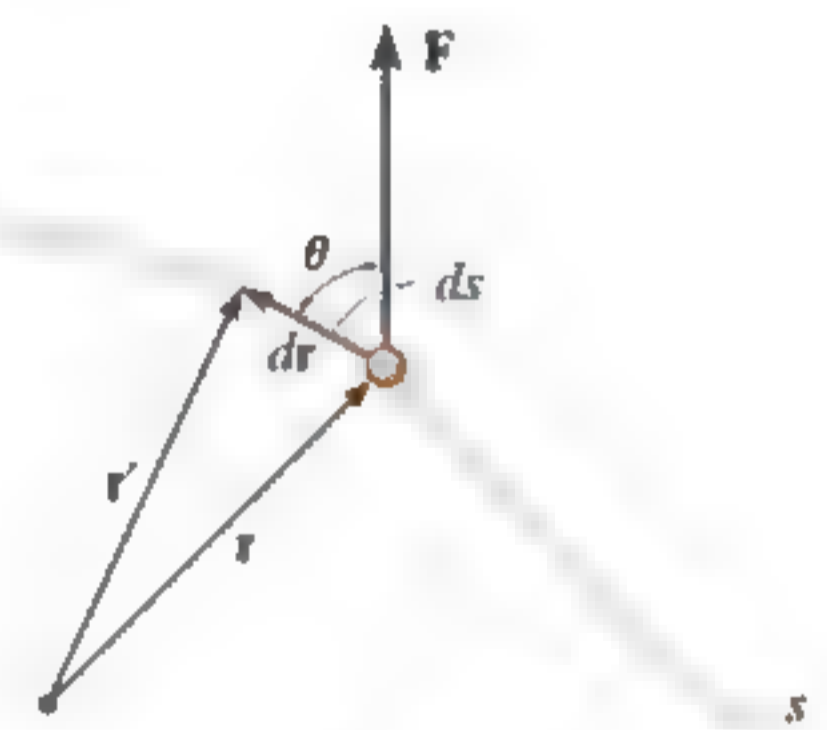


Fig. 14-1

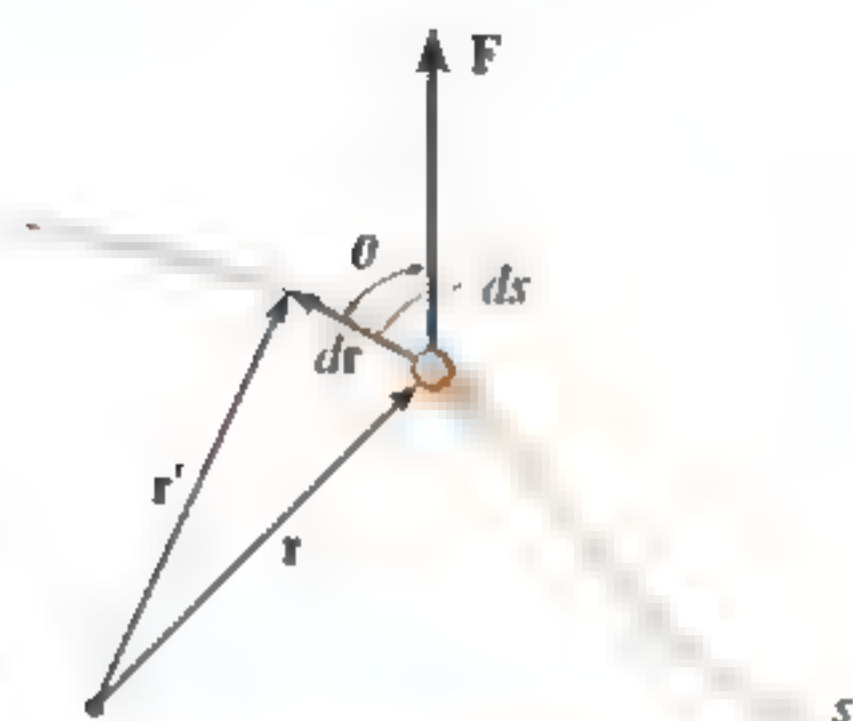


Fig. 14-1 (Reiterada)

Por definición del producto punto (vea la ecuación B-14) esta ecuación también se escribe como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Este resultado puede interpretarse en una de dos maneras: ya sea como el producto de  $F$  y la componente del desplazamiento  $ds \cos \theta$  en la dirección de la fuerza, o como el producto de  $ds$  por la componente de fuerza,  $F \cos \theta$ , en la dirección del desplazamiento. Observe que si  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ , entonces la componente de fuerza y el desplazamiento tienen el *mismo sentido*, de modo que el trabajo es *positivo*; en tanto que si  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ , estos vectores tendrán *sentido opuesto* y, por consiguiente, el trabajo es *negativo*. Asimismo,  $dU = 0$  si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, puesto que  $\cos 90^\circ = 0$ , o si la fuerza se aplica en un *punto sin movimiento*, en cuyo caso el desplazamiento es cero.

La unidad de trabajo en unidades del SI es el joule (J), que es la cantidad de trabajo realizada por una fuerza de un newton, cuando recorre una distancia de un metro en la dirección de la fuerza ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ). En el sistema FPS, el trabajo se mide en unidades libra-pie, que es el trabajo realizado por una fuerza de una libra que actúa a lo largo de una distancia de un pie en la dirección de la fuerza\*.

**Trabajo de una fuerza variable.** Si la partícula en la que actúa una fuerza  $\mathbf{F}$  sufre un desplazamiento finito a lo largo de su trayectoria de  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  o de  $s_1$  a  $s_2$  (fig. 14-2a), el trabajo de la fuerza  $\mathbf{F}$  se determina mediante integración. Siempre que  $\mathbf{F}$  y  $\theta$  puedan expresarse en función de la posición, entonces

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta \, ds \quad (14-1)$$

En ocasiones, esta relación se obtiene por medio de datos experimentales para trazar la gráfica de  $F \cos \theta$  contra  $s$ . Entonces, el área bajo la gráfica limitada por  $s_1$  y  $s_2$  representa el trabajo total (fig. 14-2b).

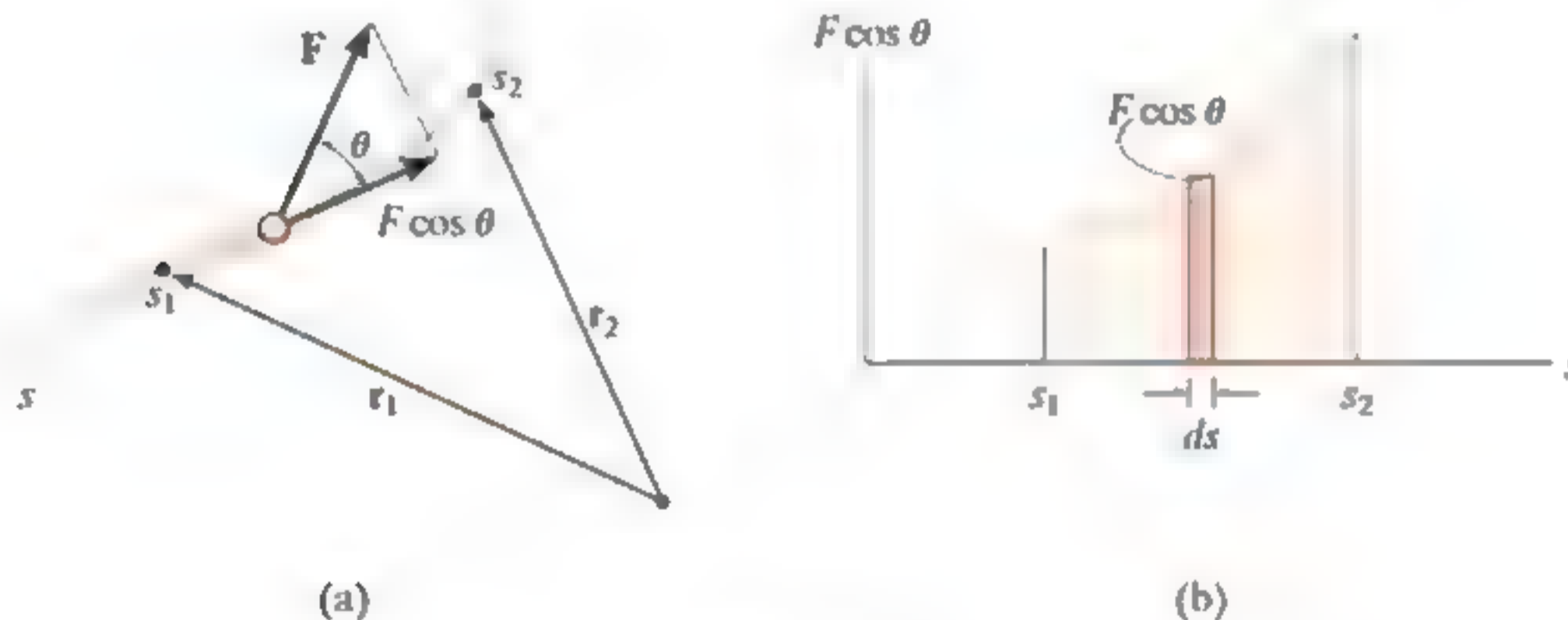


Fig. 14-2

\*Por convención, las unidades del momento de una fuerza o par de torsión se escriben como  $\text{lb} \cdot \text{ft}$ , para distinguirlas de aquellas que significan trabajo,  $\text{ft} \cdot \text{lb}$ .

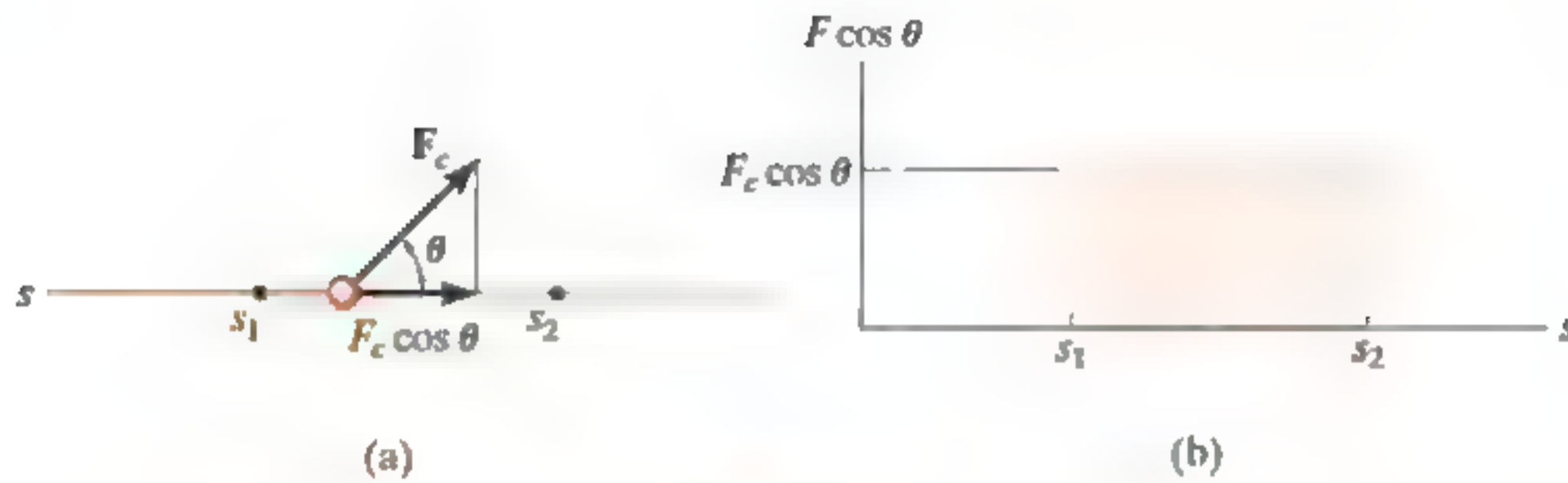


Fig. 14-3

**Trabajo de una fuerza constante.** Considere una partícula que se desplaza a lo largo de la trayectoria  $s$  mostrada en la figura 14-3a. Si la magnitud de la fuerza  $F_c$  es constante y actúa a un ángulo constante  $\theta$  con respecto a la trayectoria rectilínea de una partícula (fig. 14-3a), entonces la componente de  $F_c$  en la dirección del desplazamiento siempre es  $F_c \cos \theta$ . El trabajo realizado por  $F_c$  cuando la partícula se desplaza de  $s_1$  a  $s_2$  se determina con la ecuación 14-1, en cuyo caso

$$U_{1-2} = F_c \cos \theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

o bien,

$$U_{1-2} = F_c \cos \theta (s_2 - s_1) \quad (14-2)$$

Aquí  $F_c$  representa el área del rectángulo en la figura 14-3b.

**Trabajo de un peso.** Considere una partícula de peso  $W$ , el cual se desplaza hacia arriba a lo largo de la trayectoria  $s$  mostrada en la figura 14-4, de la posición  $s_1$  a  $s_2$ . En un punto intermedio, el desplazamiento es  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ . Como  $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$ , al aplicar la ecuación 14-1 tenemos

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_{y_1}^{y_2} -W dy = -W(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

o bien,

$$U_{1-2} = -W \Delta y \quad (14-3)$$

Por lo tanto, el trabajo es independiente de la trayectoria y es igual a la magnitud del peso de la partícula por el desplazamiento vertical. En el caso mostrado en la figura 14-4, el trabajo es *negativo*, puesto que  $W$  actúa hacia abajo y  $\Delta y$  es hacia arriba. Observe, sin embargo, que si la partícula se desplaza *hacia abajo* ( $-\Delta y$ ), el trabajo del peso es *positivo*. ¿Por qué?



La grúa debe realizar trabajo para elevar el peso del tubo. (© R. C. Hibbeler)

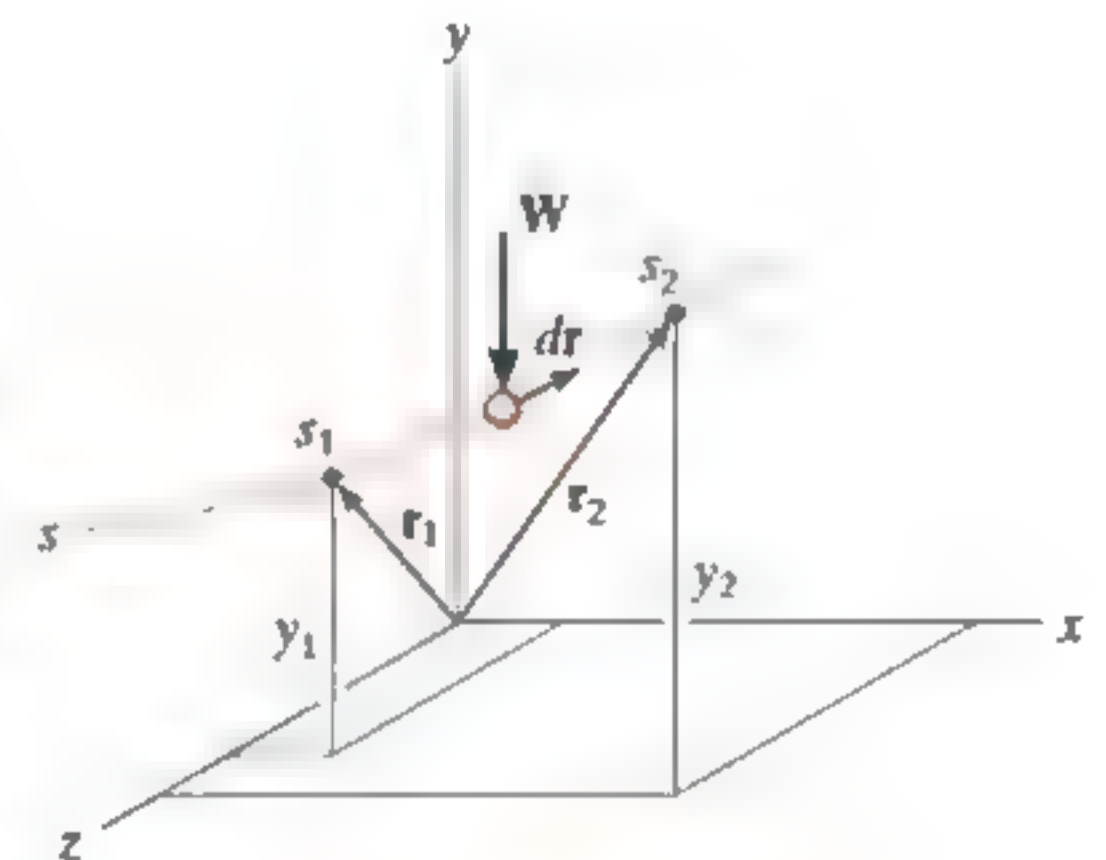


Fig. 14-4

**Trabajo de la fuerza de un resorte.** Si un resorte elástico se alarga una distancia  $ds$  (fig. 14-5a), entonces el trabajo realizado por la fuerza que actúa en la partícula adjunta es  $dU = -F_s ds = -ks ds$ . El trabajo es *negativo* puesto que  $F_s$  actúa en el sentido opuesto a  $ds$ . Si la partícula se desplaza de  $s_1$  a  $s_2$ , el trabajo de  $F_s$  es entonces

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks ds$$

$$U_{1-2} = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) \quad (14-4)$$

Este trabajo representa el área trapezoidal bajo la línea  $F_s = ks$  (fig. 14-5b).

Para no cometer errores con el signo cuando se aplica esta ecuación, basta fijarse en la dirección de la fuerza del resorte que actúa en la partícula y compararla con el sentido del desplazamiento de ésta: si ambos actúan en el *mismo sentido*, el trabajo es *positivo*; si lo hacen en *sentidos opuestos*, el trabajo es *negativo*.

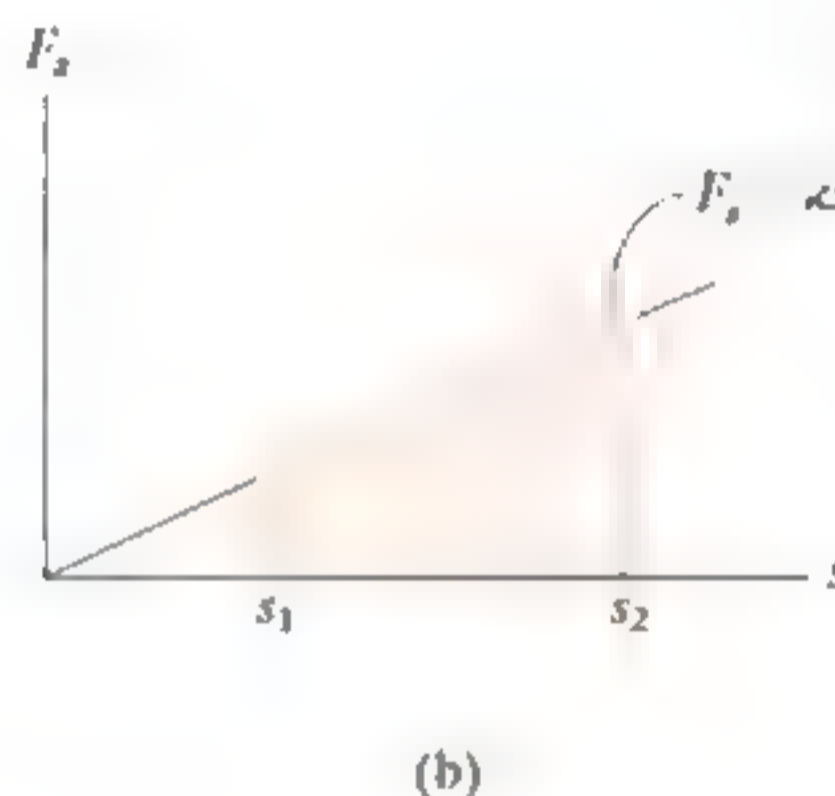
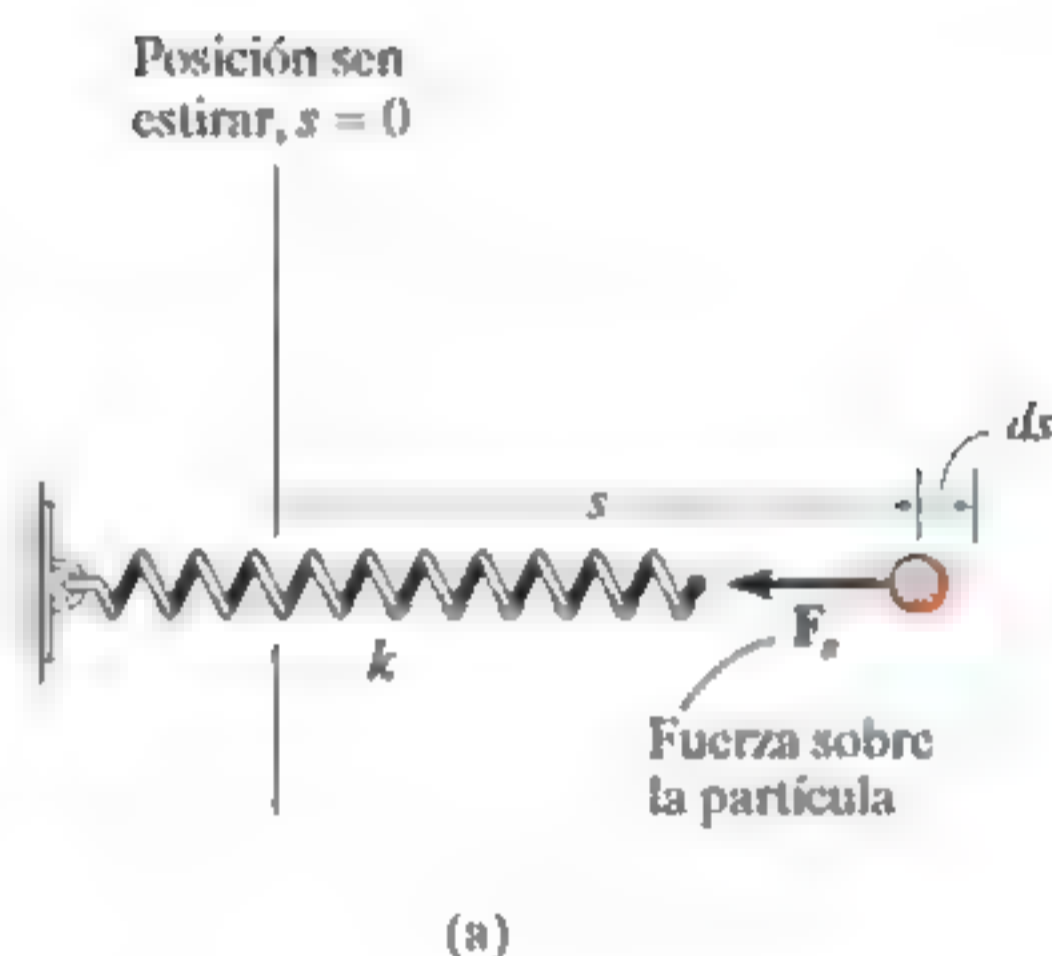
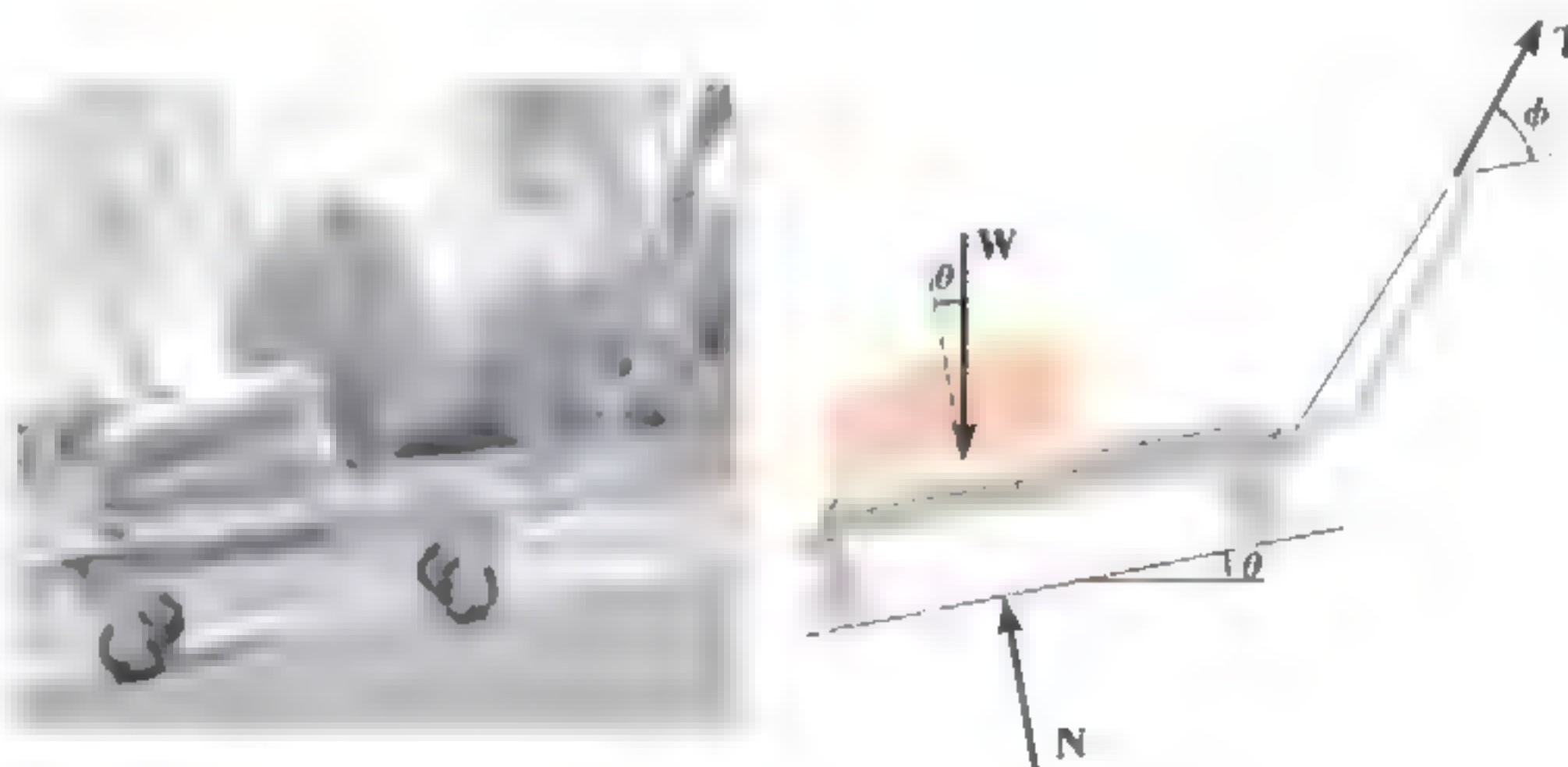


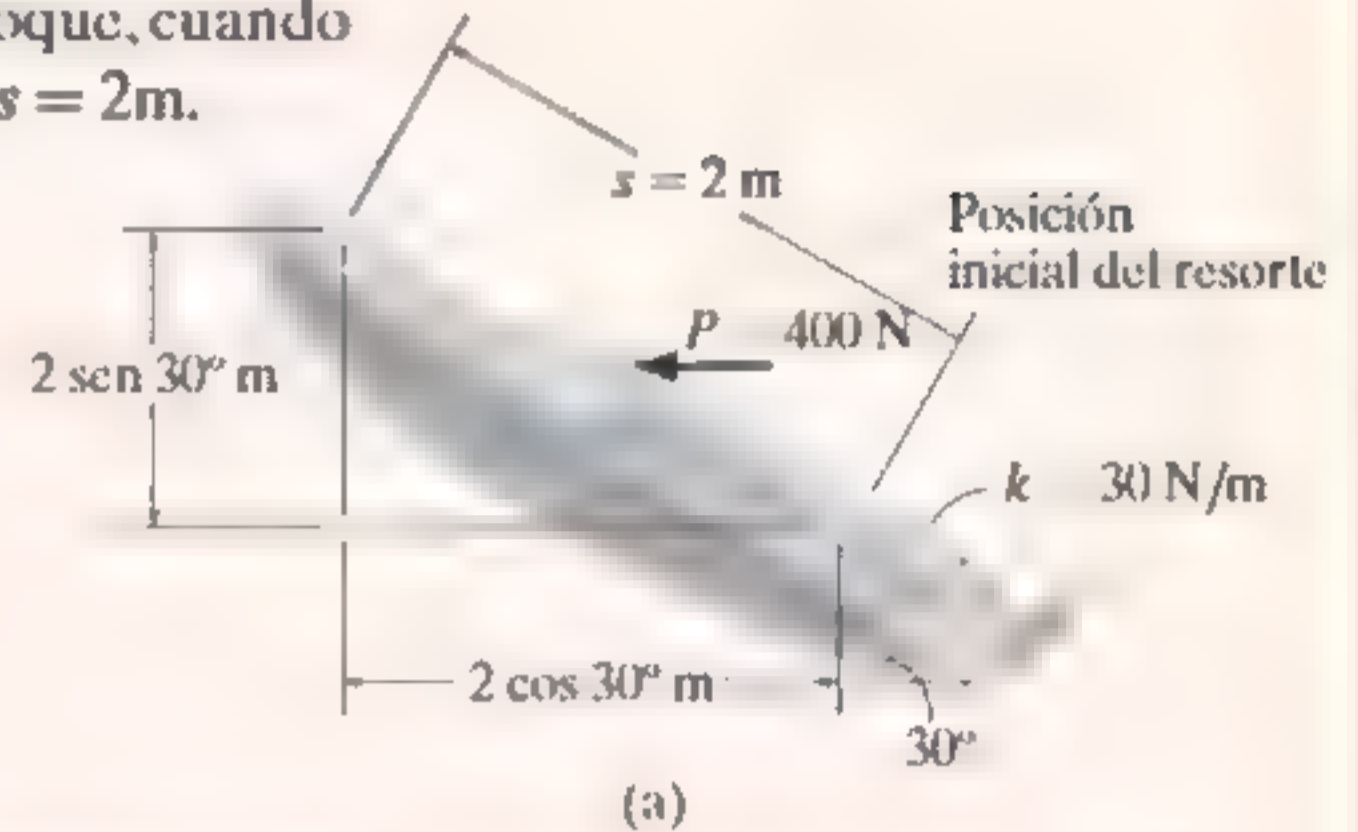
Fig. 14.5

Las fuerzas que actúan en la carretilla, al jalarla cuesta arriba una distancia  $s$ , se muestran en su diagrama de cuerpo libre. La fuerza de remolque constante  $T$  realiza un trabajo positivo  $U_T = (T \cos \phi)s$ , el peso realiza trabajo negativo  $U_W = -(W \sin \theta)s$  y la fuerza normal  $N$  no realiza trabajo, pues no se desplaza a lo largo de su línea de acción. (© R. C. Hibbeler)



## EJEMPLO

El bloque de 10 kg de la figura 14-6a descansa sobre el plano inclinado liso. Si el resorte originalmente está alargado 0.5 m, determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan en el bloque, cuando una fuerza horizontal  $P = 400$  N lo empuja cuesta arriba  $s = 2$  m.



## SOLUCIÓN

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque con todas las fuerzas que actúan en el bloque (fig. 14-6b).

**Fuerza horizontal  $P$ .** Como esta fuerza es *constante*, el trabajo se determina con la ecuación 14-2. El resultado puede calcularse como la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza, es decir,

$$U_P = 400 \text{ N} (2 \text{ m} \cos 30^\circ) = 692.8 \text{ J}$$

o el desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, es decir,

$$U_P = 400 \text{ N} \cos 30^\circ (2 \text{ m}) = 692.8 \text{ J}$$

**Fuerza del resorte  $F_s$ .** En la posición inicial el resorte está alargado  $s_1 = 0.5$  m y en la posición final está alargado  $s_2 = 0.5 \text{ m} + 2 \text{ m} = 2.5$  m. Requerimos que el trabajo sea negativo, ya que la fuerza y el desplazamiento se oponen entre sí. El trabajo de  $F_s$  es, por lo tanto,

$$U_s = -\left[\frac{1}{2}(30 \text{ N/m})(2.5 \text{ m})^2 - \frac{1}{2}(30 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2\right] = -90 \text{ J}$$

**Peso  $W$ .** Como el peso actúa en el sentido opuesto a su desplazamiento vertical, el trabajo es negativo; es decir,

$$U_W = -(98.1 \text{ N}) (2 \text{ m} \sin 30^\circ) = -98.1 \text{ J}$$

Observe que también es posible considerar la componente del peso en la dirección del desplazamiento, es decir,

$$U_W = -(98.1 \sin 30^\circ \text{ N})(2 \text{ m}) = -98.1 \text{ J}$$

**Fuerza normal  $N_B$ .** Esta fuerza *no realiza trabajo*, ya que *siempre es perpendicular al desplazamiento*.

**Trabajo total.** El trabajo de todas las fuerzas cuando el bloque se desplaza 2 m es, por consiguiente,

$$U_T = 692.8 \text{ J} - 90 \text{ J} - 98.1 \text{ J} = 505 \text{ J} \quad \text{Resp.}$$

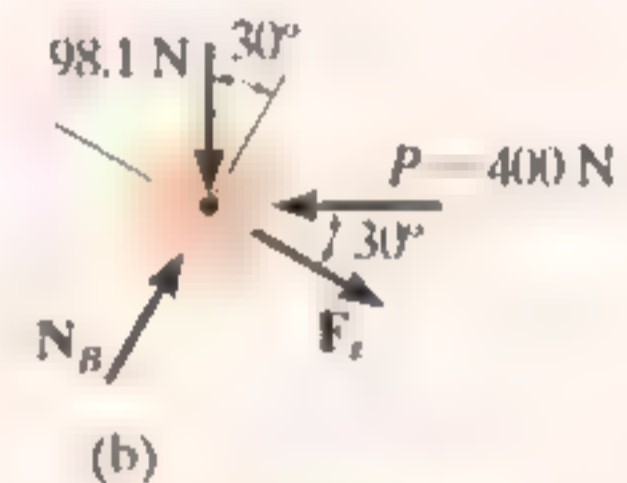


Fig. 14.6

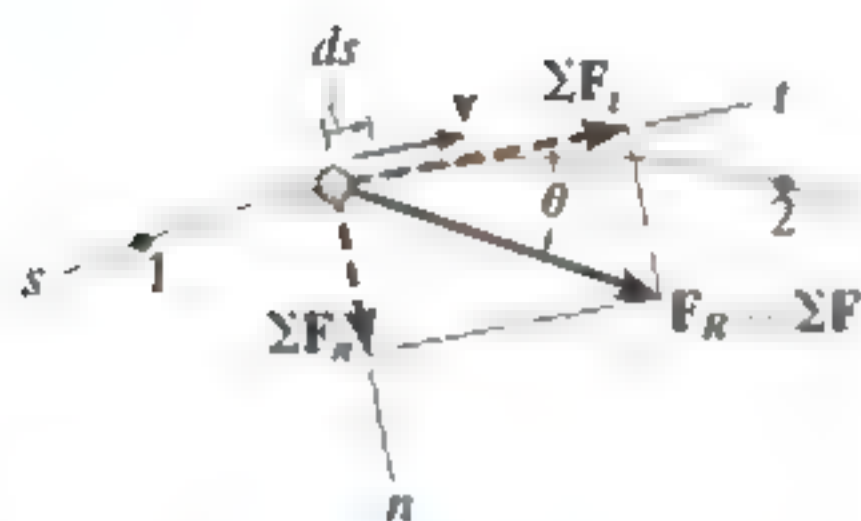


Fig. 14-7

## 14.2 Principio de trabajo y energía

Considere la partícula de la figura 14-7, localizada en la trayectoria definida con respecto a un sistema de coordenadas inercial. Si la partícula tiene una masa  $m$  y se somete a un sistema de fuerzas externas, representado por la fuerza resultante  $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$ , entonces la ecuación de movimiento de la partícula en la dirección tangencial es  $\Sigma F_t = ma_t$ . Si aplicamos la ecuación cinemática  $a_t = v dv/ds$  e integramos ambos lados, y suponemos que inicialmente la partícula tiene una posición  $s = s_1$  y una rapidez  $v = v_1$  y, después,  $s = s_2$  y  $v = v_2$  tenemos

$$\begin{aligned}\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t ds &= \int_{v_1}^{v_2} mv dv \\ \Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\end{aligned}\quad (14-5)$$

En la figura 14-7, observe que  $\Sigma F_t = \Sigma F \cos \theta$  y puesto que la ecuación 14-1 define el trabajo, el resultado final se escribe como

$$\Sigma U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (14-6)$$

Esta ecuación representa el *principio de trabajo y energía* para la partícula. El término del lado izquierdo es la suma del trabajo realizado por *todas* las fuerzas que actúan en la partícula, cuando ésta se mueve del punto 1 al punto 2. Los dos términos del lado derecho, cuya forma es  $T = \frac{1}{2}mv^2$ , definen la *energía cinética* final e inicial, respectivamente. Como el trabajo, la energía cinética es un *escalar* y sus unidades son joules (J) y lb · ft. Sin embargo, a diferencia del trabajo, que puede ser o positivo o negativo, la energía cinética *siempre es positiva*, sin importar la dirección del movimiento de la partícula.

Cuando se aplica la ecuación 14-6, a menudo se expresa como

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2 \quad (14-7)$$

la cual establece que la energía cinética inicial de la partícula, más el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan en ella, cuando se mueve de su posición inicial a su posición final, es igual a la energía cinética final de la partícula.

Como se señaló para la derivación, el principio de trabajo y energía representa una forma integrada de  $\Sigma F_t = ma_t$ , que se obtuvo con la ecuación cinemática  $a_t = v dv/ds$ . Por consiguiente, este principio constituye una *sustitución conveniente* de  $\Sigma F_t = ma_t$  cuando se resuelven problemas cinéticos que implican *fuerza, velocidad y desplazamiento*, puesto que estas cantidades intervienen en la ecuación 14-7. Para su aplicación, se sugiere el siguiente procedimiento.

## Procedimiento para el análisis

### Trabajo (diagrama de cuerpo libre)

- Establezca el sistema de coordenadas inercial y dibuje un diagrama de cuerpo libre de la partícula, donde aparezcan todas las fuerzas que realizan trabajo en la partícula cuando se mueve a lo largo de su trayectoria.

### Principio de trabajo y energía

- Aplique el principio de trabajo y energía,  $T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$ .
- La energía cinética en los puntos inicial y final *siempre es positiva*, ya que involucra la rapidez al cuadrado ( $T = \frac{1}{2}mv^2$ ).
- Una fuerza realiza trabajo sobre una partícula cuando se desplaza en la dirección de la fuerza.
- El trabajo es *positivo* cuando la componente de la fuerza actúa en el *mismo sentido* que su desplazamiento, de lo contrario es negativo.
- Las fuerzas que son funciones del desplazamiento deben integrarse para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva de fuerza-desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de su magnitud por el desplazamiento vertical,  $U_W = \pm Wy$ . Es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte tiene la forma  $U_s = \frac{1}{2}ks^2$ , donde  $k$  es la rigidez del resorte y  $s$  es su alargamiento o compresión.

La aplicación numérica de este procedimiento se ilustra en los ejemplos dados después de la sección 14-3.

Si un automóvil chocara contra estos contenedores de protección, su energía cinética se transformaría en trabajo, lo cual origina que se deformen los contenedores y, hasta cierto grado, el automóvil. Si conocemos la cantidad de energía que puede absorber cada barril, es posible que diseñemos un atenuador de impactos como éste. (© R. C. Hibbeler)



### 14.3 Principio de trabajo y energía para un sistema de partículas

El principio de trabajo y energía puede ampliarse para incluir un sistema de partículas aislado adentro de un espacio cerrado, como se indica en la figura 14-8. Aquí la partícula  $i$ -ésima arbitraria, de masa  $m_i$ , está sometida a una fuerza externa resultante  $\mathbf{F}_i$  y a una fuerza interna resultante  $\mathbf{f}_i$  que todas las demás partículas ejercen en la partícula  $i$ -ésima. Si aplicamos el principio de trabajo y energía a ésta, y a cada una de las demás partículas que componen el sistema, entonces, puesto que el trabajo y la energía son cantidades escalares, las ecuaciones se suman algebraicamente, lo cual da

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 \quad (14-8)$$

En este caso, la energía cinética inicial del sistema, además del trabajo realizado por todas las fuerzas externas e internas que actúan en el sistema, es igual a la energía cinética final del sistema.

Si el sistema representa un *cuerpo rígido en traslación*, o una serie de cuerpos en traslación conectados, entonces todas las partículas de cada cuerpo experimentarán el mismo *desplazamiento*. Por consiguiente, el trabajo de todas las fuerzas internas tendrá lugar en pares colineales iguales pero opuestos y, por ende, se cancelan. Por otro lado, si se supone que el cuerpo *no es rígido*, sus partículas pueden desplazarse a lo largo de *trayectorias diferentes*, y una parte de la energía producida por las interacciones de las fuerzas se disipará y se perderá como calor, o bien, se almacenará en el cuerpo si ocurren deformaciones permanentes. Analizaremos estos efectos brevemente al final de esta sección y en la sección 15.4. A lo largo de este texto, sin embargo, se aplicará el principio de trabajo y energía a problemas donde no se tienen que considerar tales pérdidas de energía.



Sistema de coordenadas inercial

Fig. 14-8

**Trabajo de fricción en superficies ásperas.** A continuación investigaremos una clase especial de problemas que requiere una aplicación cuidadosa de la ecuación 14-8. Estos problemas implican casos en los que un cuerpo se desliza sobre la superficie de otro, cuando hay fricción. Considere, por ejemplo, un bloque que se traslada una distancia  $s$  sobre una superficie áspera, como se muestra en la figura 14-9a. Si la fuerza aplicada  $P$  apenas balancea la fuerza de fricción *resultante*  $\mu_k N$  (fig. 14-9b), entonces, debido al equilibrio, se mantiene una velocidad constante  $v$  y esperaríamos que se aplicara la ecuación 14-8 como sigue:

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \frac{1}{2}mv^2$$

De hecho, esta ecuación se satisface si  $P = \mu_k N$ ; sin embargo, como se sabe por experiencia, el deslizamiento *generará calor*, una forma de energía que parece no considerarse en la ecuación de trabajo-energía. Para explicar esta paradoja y, de esa manera, representar con más precisión la naturaleza de la fricción, en realidad tendríamos que modelar el bloque de modo que las superficies en contacto sean *deformables* (no rígidas)\*. Recuerde que las zonas ásperas en la parte inferior del bloque actúan como “dientes” y, cuando el bloque se desliza, estos dientes *se deforman un poco* y se rompen o vibran al ser jalados por los “dientes” de la superficie de contacto (fig. 14-9c). Por consiguiente, las fuerzas de fricción que actúan en el bloque en estos puntos se desplazan ligeramente a causa de las deformaciones localizadas y, más adelante, las reemplazan otras fuerzas de fricción cuando se forman otros puntos de contacto. En todo momento, la *F resultante* de todas estas fuerzas de fricción, en esencia, permanece constante, es decir,  $\mu_k N$ ; sin embargo, debido a las múltiples *deformaciones localizadas*, el desplazamiento real  $s'$  de  $\mu_k N$  no es el mismo que el desplazamiento  $s$  de la fuerza  $P$  aplicada. En lugar de eso,  $s'$  será *menor* que  $s$  ( $s' < s$ ) y, por consiguiente, el *trabajo externo realizado* por la fuerza de fricción resultante será  $\mu_k Ns'$  y no  $\mu_k Ns$ . La cantidad de trabajo restante,  $\mu_k N(s - s')$ , se manifiesta como un incremento de la *energía interna*, la cual hace en realidad que aumente la temperatura del bloque.

En resumen, entonces, la ecuación 14-8 se aplica a problemas que implican fricción producida por deslizamiento; sin embargo, hay que entender que el trabajo de la fuerza de fricción resultante no está representada por  $\mu_k Ns$ ; en vez de eso, este término representa *tanto* el trabajo externo producido por fricción ( $\mu_k Ns'$ ) *como* el trabajo interno [ $\mu_k N(s - s')$ ], el cual se convierte en varias formas de energía interna, como calor†.

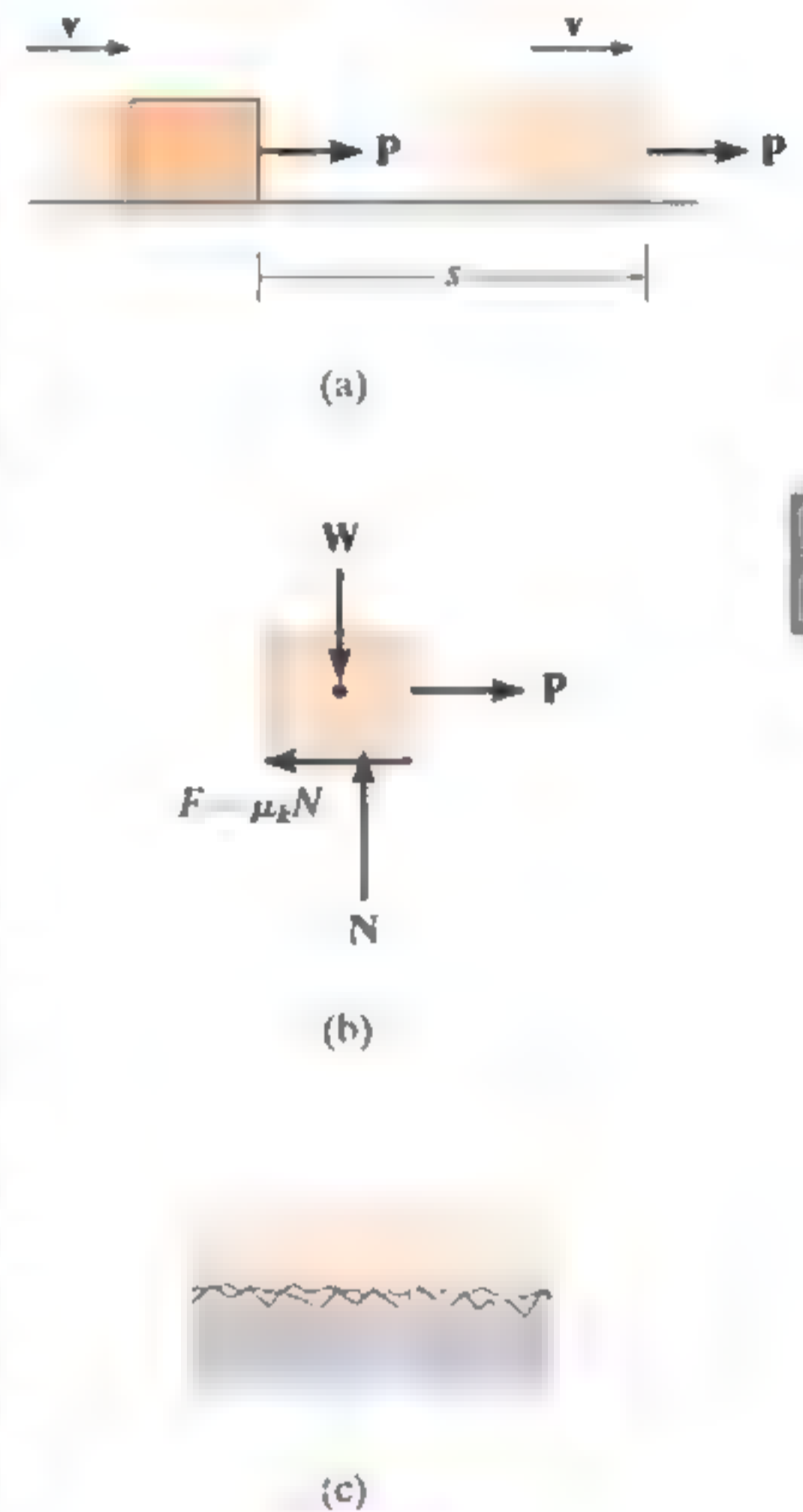


Fig. 14-9

\*Vea el capítulo 8 de *Ingeniería mecánica: Estática*.

†Vea B. A. Sherwood y W. H. Bernard, “Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction”, *Am. J. Phys.* 52, 1001, (1984).

## EJEMPLO

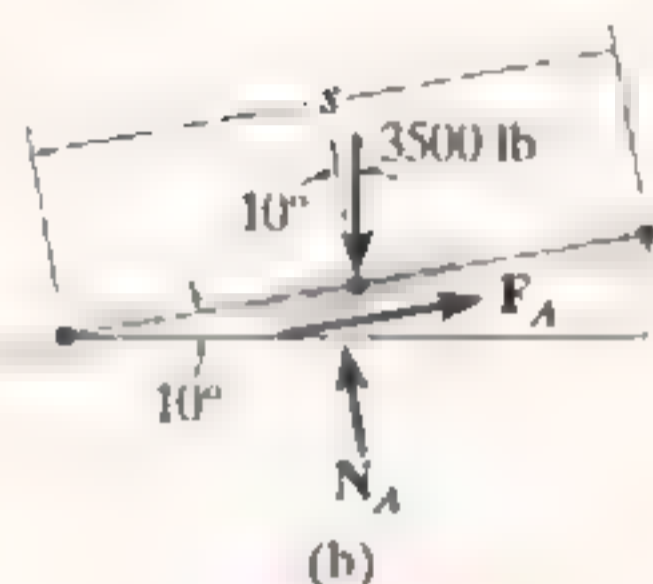
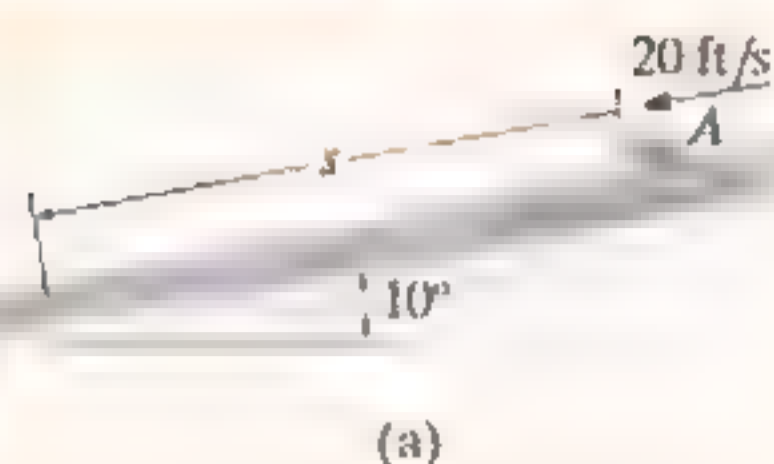


Fig. 14-10

El automóvil de 3500 lb de la figura 14-10a viaja cuesta abajo a una rapidez de 20 ft/s por la carretera inclinada 10°. Si el conductor aplica los frenos y hace que las ruedas se bloqueen, determine qué distancia  $s$  patinan los neumáticos en la carretera. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es  $\mu_k = 0.5$ .

## SOLUCIÓN

Este problema se resuelve por medio del principio de trabajo y energía, pues involucra fuerza, velocidad y desplazamiento.

**Trabajo (diagrama de cuerpo libre).** Como se muestra en la figura 14-10b, la fuerza normal  $N_A$  no realiza trabajo, ya que nunca se desplaza a lo largo de su línea de acción. El peso, 3500 lb, se desplaza  $s$  sen 10° y realiza trabajo positivo. ¿Por qué? La fuerza de fricción  $F_A$  realiza trabajo tanto externo como interno cuando experimenta un desplazamiento  $s$ . Este trabajo es negativo ya que tiene un sentido opuesto al desplazamiento. Aplicamos la ecuación de equilibrio normal a la carretera y tenemos

$$+\nearrow \Sigma F_n = 0; \quad N_A - 3500 \cos 10^\circ \text{ lb} = 0 \quad N_A = 3446.8 \text{ lb}$$

Por lo tanto,

$$F_A = \mu_k N_A = 0.5 (3446.8 \text{ lb}) = 1723.4 \text{ lb}$$

## Principio de trabajo y energía

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (20 \text{ ft/s})^2 + 3500 \text{ lb} (s \sin 10^\circ) - (1723.4 \text{ lb}) s = 0$$

Al despejar  $s$  resulta

$$s = 19.5 \text{ ft} \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Si este problema se resuelve usando la ecuación de movimiento, se requieren *dos pasos*. Primero, según el diagrama de cuerpo libre (fig. 14-10b), la ecuación de movimiento se aplica a lo largo del plano inclinado. De esto resulta

$$+\nearrow \Sigma F_s = ma_s; \quad 3500 \sin 10^\circ \text{ lb} - 1723.4 \text{ lb} = \frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} a$$

$$a = -10.3 \text{ ft/s}^2$$

Segundo, como  $a$  es constante,

$$\begin{aligned} (+\nearrow) \quad v^2 &= v_0^2 + 2a_c(s - s_0); \\ (0)^2 &= (20 \text{ ft/s})^2 + 2(-10.3 \text{ ft/s}^2)(s - 0) \\ s &= 19.5 \text{ ft} \end{aligned}$$

Resp.

## EJEMPLO

Durante un breve tiempo, la grúa de la figura 14-11a levanta la viga de 2.50 Mg con una fuerza  $F = (28 + 3s^2)$  kN. Determine la rapidez de la viga cuando alcanza  $s = 3$  m. Además, ¿cuánto tiempo se requiere para que alcance esta altura a partir del reposo?

## SOLUCIÓN

Podemos resolver una parte del problema con el principio de trabajo y energía, ya que involucra fuerza, velocidad y desplazamiento. Debe utilizarse la cinemática para determinar el tiempo. Observe que cuando  $s = 0$ ,  $F = 28(10^3)$  N  $>$   $W = 2.50(10^3)(9.81)$  N, por lo que habrá movimiento.

**Trabajo (diagrama de cuerpo libre).** Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (fig. 14-11b), la fuerza  $F$  realiza trabajo positivo, que se determina mediante integración, ya que esta fuerza es variable. Asimismo, el peso es constante y realizará trabajo negativo, ya que el desplazamiento es hacia arriba.

## Principio de trabajo y energía

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3) ds - (2.50)(10^3)(9.81)s &= \frac{1}{2}(2.50)(10^3)v^2 \\ 28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24.525(10^3)s &= 1.25(10^3)v^2 \\ v &= (2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

Cuando  $s = 3$  m,

$$v = 5.47 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

**Cinemática.** Como podemos expresar la velocidad en función del desplazamiento, el tiempo se determina con  $v = ds/dt$ . En este caso,

$$\begin{aligned} (2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} &= \frac{ds}{dt} \\ t &= \int_0^3 \frac{ds}{(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

La integración se realiza numéricamente con una calculadora de bolsillo. El resultado es

$$t = 1.79 \text{ s} \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** La aceleración de la viga se determina al integrar la ecuación (1) por medio de  $v dv = a ds$ , o bien, más directamente al aplicar la ecuación de movimiento  $\Sigma F = ma$ .



(a)



(b)

Fig. 14-11

© R. C. Hibbeler

## EJEMPLO 14.1

La masa de la plataforma  $P$  de la figura 14-12a es despreciable y está atada por abajo, de modo que las cuerdas de 0.4 m de largo mantienen 0.6 m comprimido un resorte de 1 m de largo, cuando *no hay nada* sobre la plataforma. Si se coloca un bloque de 2 kg sobre la plataforma y se libera del reposo, después de que la plataforma se empuja hacia abajo 0.1 m (fig. 14-12b), determine la altura máxima  $h$  que el bloque se eleva en el aire, medida desde el suelo.

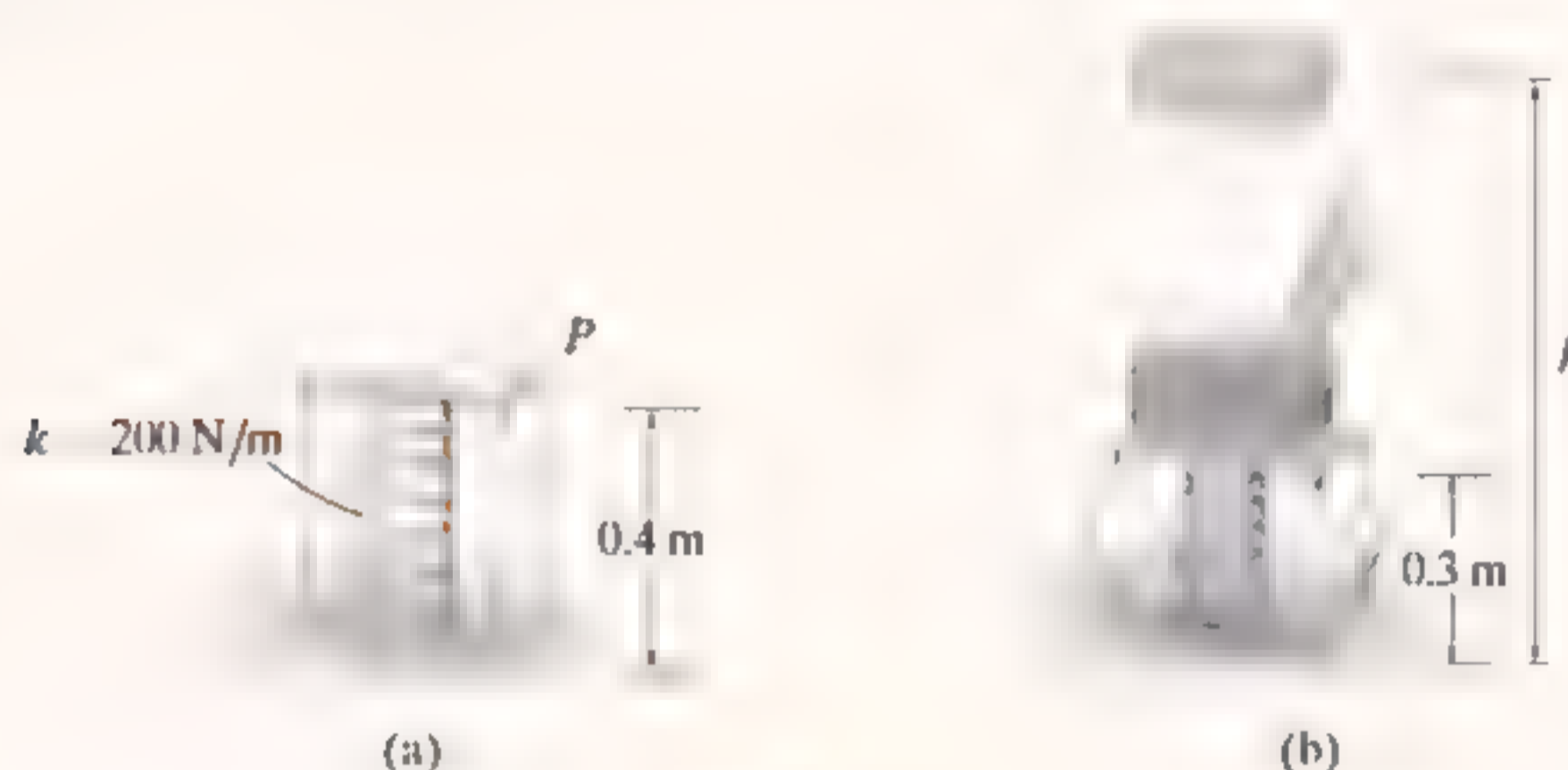
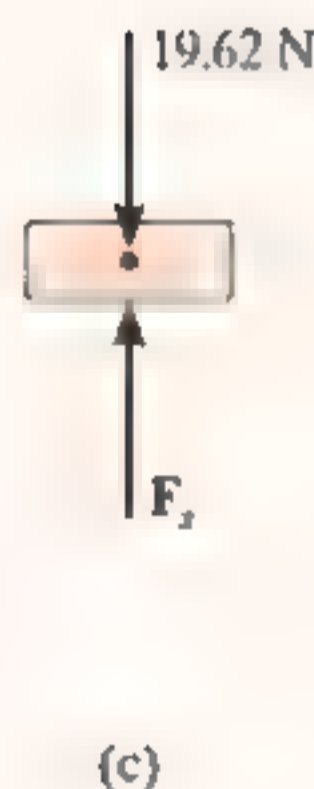


Fig. 14-12

## SOLUCIÓN

**Trabajo y Energía.** Como el bloque se suelta del reposo y, después, alcanza su altura máxima, las velocidades inicial y final son cero. El diagrama de cuerpo libre del bloque cuando aún está en contacto con la plataforma se muestra en la figura 14-12c. Observe que el peso realiza trabajo negativo y la fuerza del resorte trabajo positivo. ¿Por qué? En particular, la *compresión inicial* en el resorte es  $s_1 = 0.6 \text{ m} + 0.1 \text{ m} = 0.7 \text{ m}$ . Debido a las cuerdas, la *compresión final* del resorte es  $s_2 = 0.6 \text{ m}$  (después de que el bloque sale de la plataforma). La cara inferior del bloque se eleva desde una altura de  $(0.4 \text{ m} - 0.1 \text{ m}) = 0.3 \text{ m}$  hasta una altura final  $h$ .

## Principio de trabajo y energía



(c)

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left\{ -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) - W\Delta y \right\} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Observe que aquí  $s_1 = 0.7 \text{ m} > s_2 = 0.6 \text{ m}$  y, por lo tanto, el trabajo del resorte determinado con la ecuación 14-4 será positivo, una vez que se realizan los cálculos. Por lo tanto,

$$0 + \left\{ -\left[\frac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.6 \text{ m})^2 - \frac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.7 \text{ m})^2\right] - (19.62 \text{ N})(h - (0.3 \text{ m})) \right\} = 0$$

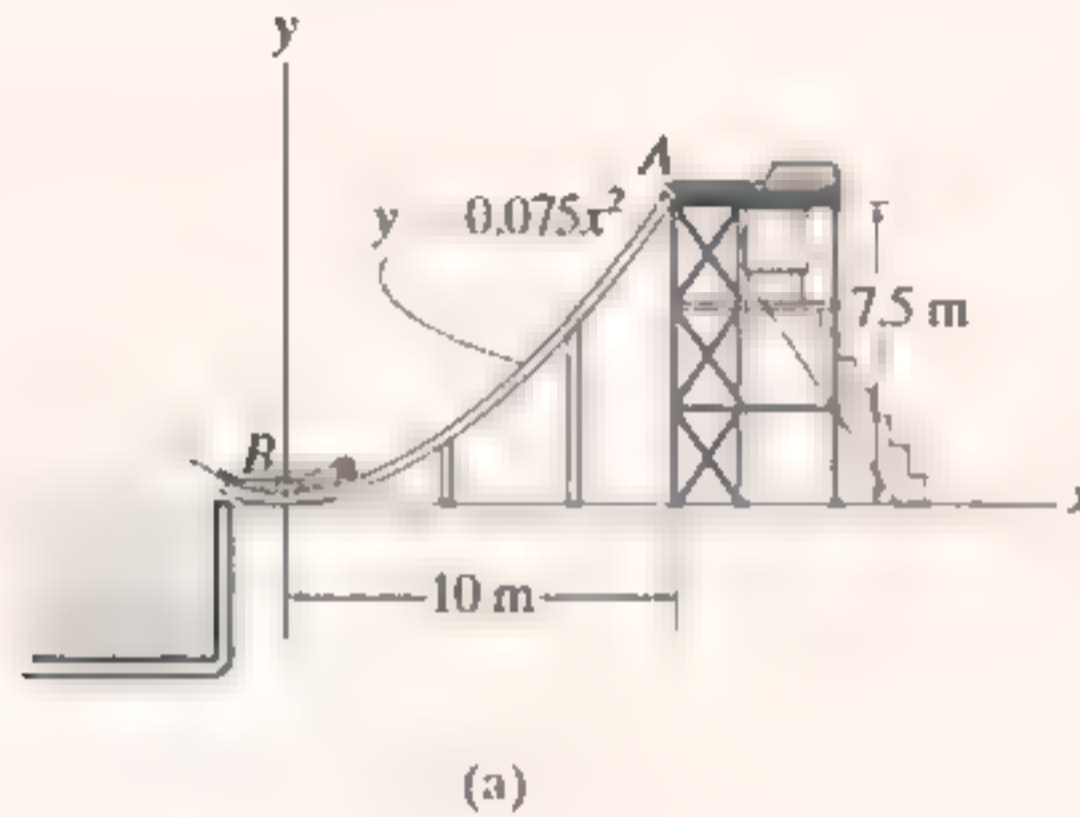
Al resolver se obtiene

$$h = 0.963 \text{ m}$$

*Resp.*

## EJEMPLO

El niño de 40 kg en la figura 14-13a se desliza cuesta abajo del tobogán acuático. Si parte del reposo en  $A$ , determine su rapidez cuando llega a  $B$  y la reacción normal que el tobogán ejerce sobre él en esta posición.



## SOLUCIÓN

Como se indica en el diagrama de cuerpo libre (fig. 14-13b), dos fuerzas actúan en el niño al descender por el tobogán. Observe que la fuerza normal no realiza trabajo.

## Principio de trabajo y energía

$$T_A + \sum U_{A-B} = T_B$$

$$0 + (40)(9.81 \text{ N})(7.5 \text{ m}) = \frac{1}{2}(40 \text{ kg})v_B^2$$

$$v_B = 12.13 \text{ m/s} = 12.1 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

**Ecuación de movimiento.** Al referirnos al diagrama de cuerpo libre cuando el niño está en  $B$  (fig. 14-13c), la reacción normal  $N_B$  se obtiene ahora al aplicar la ecuación de movimiento a lo largo del eje  $n$ . Aquí, el radio de curvatura de la trayectoria es

$$\rho_B = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = \frac{\left[1 + (0.15x)^2\right]^{3/2}}{|0.15|} \bigg|_{x=0} = 6.667 \text{ m}$$

Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum F_n = ma_n; \quad N_B - 40(9.81) \text{ N} = 40 \text{ kg} \left( \frac{(12.13 \text{ m/s})^2}{6.667 \text{ m}} \right)$$

$$N_B = 1275.3 \text{ N} = 1.28 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

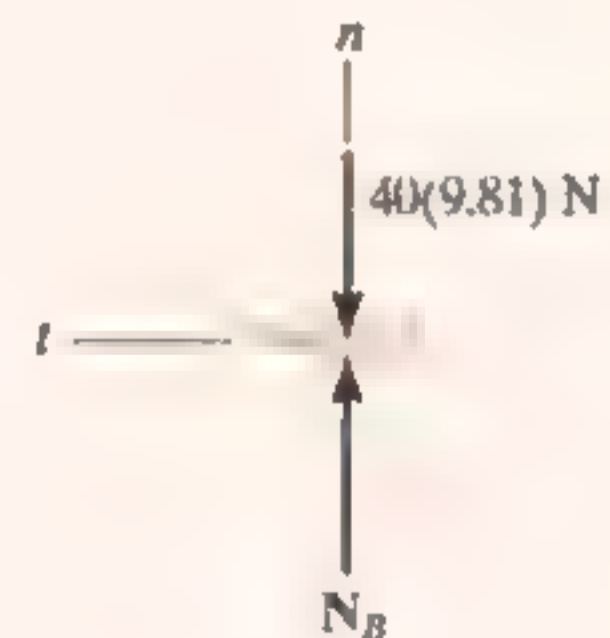
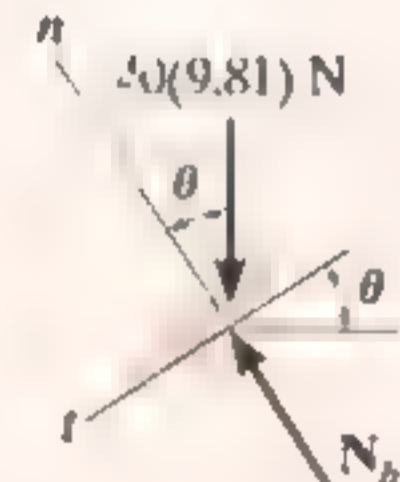


Fig. 14-13

## EJEMPLO

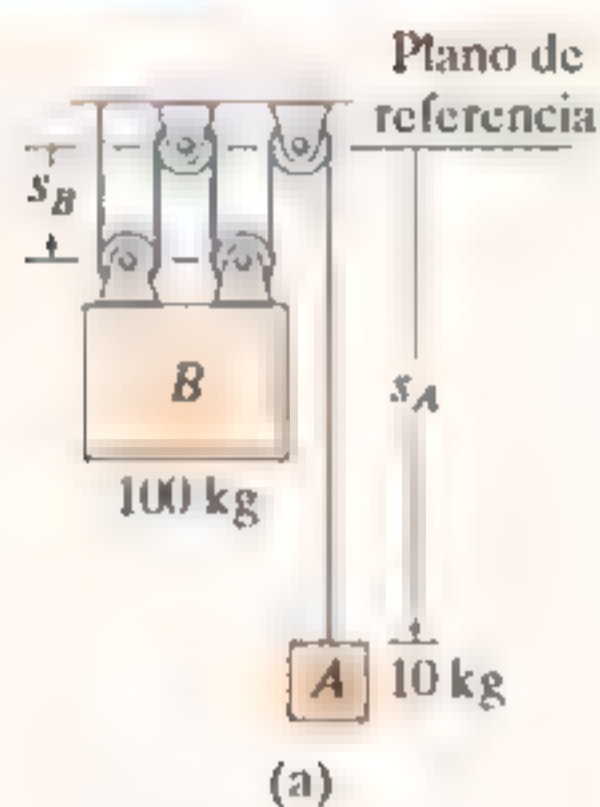


Fig. 14-14

La masa de los bloques *A* y *B* que se muestran en la figura 14-14a es de 10 kg y 100 kg, respectivamente. Determine la distancia que *B* se desplaza cuando se suelta desde el reposo, hasta el punto donde su rapidez es de 2 m/s.

**SOLUCIÓN**

Este problema se resuelve si se consideran los bloques por separado y se aplica el principio de trabajo y energía a cada bloque. Sin embargo, el trabajo de la tensión (desconocida) del cable se elimina si los bloques *A* y *B* se consideran como un *solo sistema*.

**Trabajo (diagrama de cuerpo libre).** Como se ilustra en el diagrama de cuerpo libre del sistema (fig. 14-14b), la fuerza del cable *T* y las reacciones *R*<sub>1</sub> y *R*<sub>2</sub> *no realizan trabajo*, ya que estas fuerzas representan las reacciones en los soportes y, por consiguiente, no se mueven mientras se desplazan los bloques. Los dos pesos realizan trabajo positivo, si suponemos que ambos se mueven hacia abajo en el sentido positivo de *s*<sub>A</sub> y *s*<sub>B</sub>.

**Principio de trabajo y energía.** Si tenemos en cuenta que los bloques se sueltan del reposo, entonces

$$\begin{aligned} \Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} &= \Sigma T_2 \\ \left\{ \frac{1}{2} m_A (v_A)_1^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B)_1^2 \right\} + \{ W_A \Delta s_A + W_B \Delta s_B \} &= \\ &= \left\{ \frac{1}{2} m_A (v_A)_2^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B)_2^2 \right\} \\ \{ 0 + 0 \} + \{ 98.1 \text{ N} (\Delta s_A) + 981 \text{ N} (\Delta s_B) \} &= \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (10 \text{ kg}) (v_A)_2^2 + \frac{1}{2} (100 \text{ kg}) (2 \text{ m/s})^2 \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

**Cinemática.** Al usar los métodos de la cinemática analizados en la sección 12.9, en la figura 14-14a se observa que la longitud total *l* de todos los segmentos verticales del cable pueden expresarse en función de las coordenadas de posición *s*<sub>A</sub> y *s*<sub>B</sub> como

$$s_A + 4s_B = l$$

Por consiguiente, un cambio de posición resulta en la ecuación de desplazamiento

$$\begin{aligned} \Delta s_A + 4 \Delta s_B &= 0 \\ \Delta s_A &= -4 \Delta s_B \end{aligned}$$

Aquí vemos que un desplazamiento hacia abajo de un bloque produce un desplazamiento hacia arriba del otro bloque. Observe que  $\Delta s_A$  y  $\Delta s_B$  deben tener la *misma* convención de signos en las ecuaciones 1 y 2. Al considerar las derivadas con respecto al tiempo, se obtiene

$$v_A = -4v_B = -4(2 \text{ m/s}) = -8 \text{ m/s} \quad (2)$$

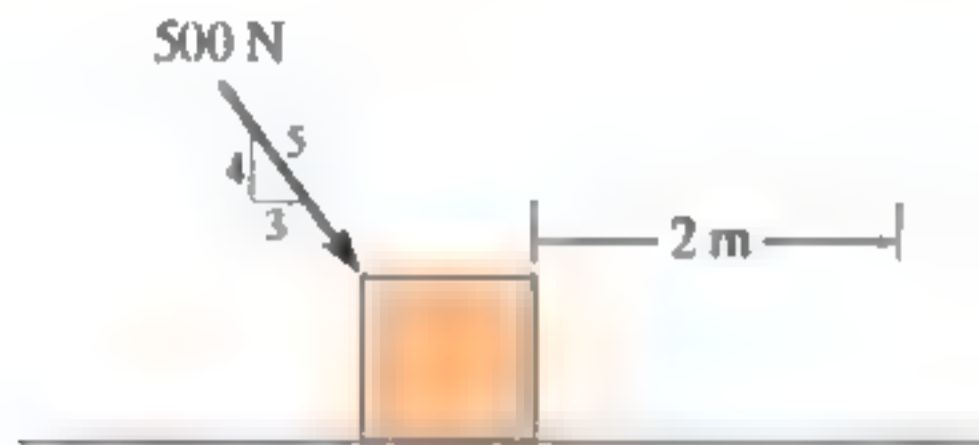
Al conservar el signo negativo en la ecuación 2 y sustituirlo en la ecuación 1 resulta

$$\Delta s_B = 0.883 \text{ m} \downarrow$$

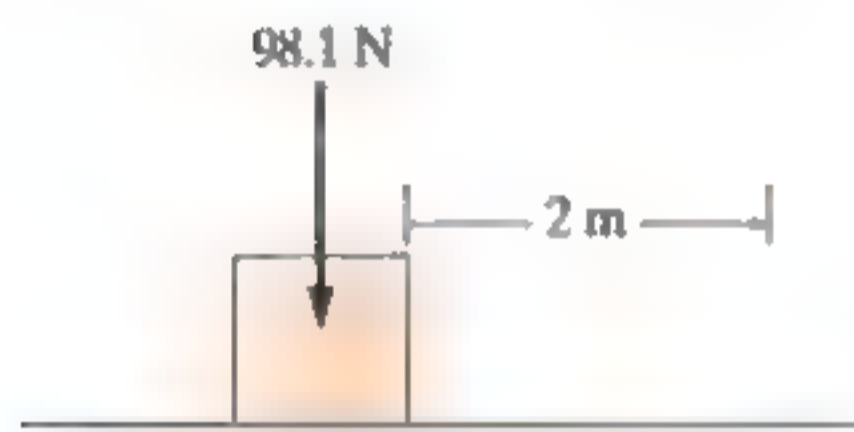
*Resp.*

## PROBLEMAS PRELIMINARES

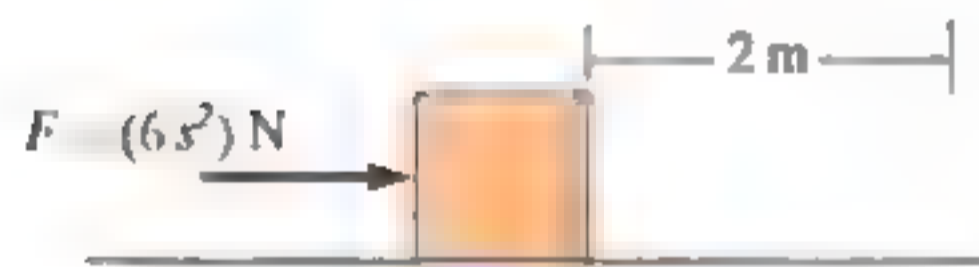
**P14-1.** Determine el trabajo de la fuerza cuando ésta se desplaza 2 m.



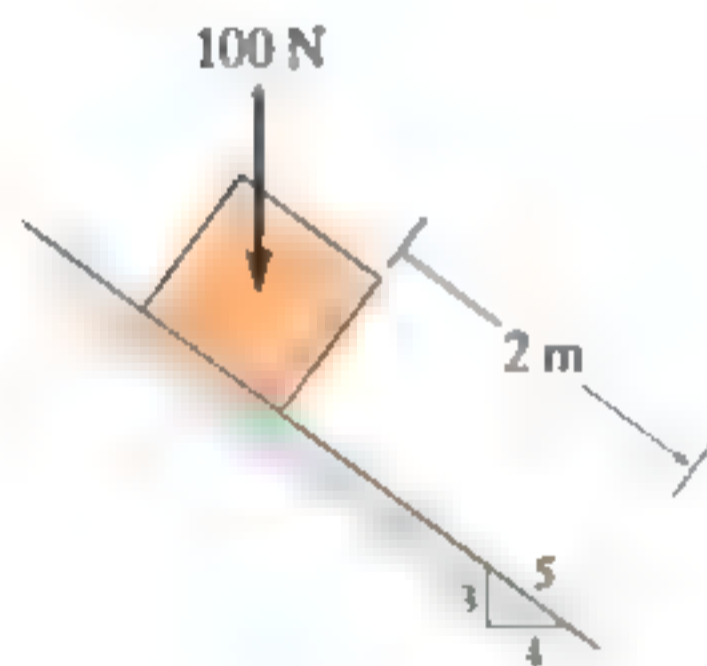
(a)



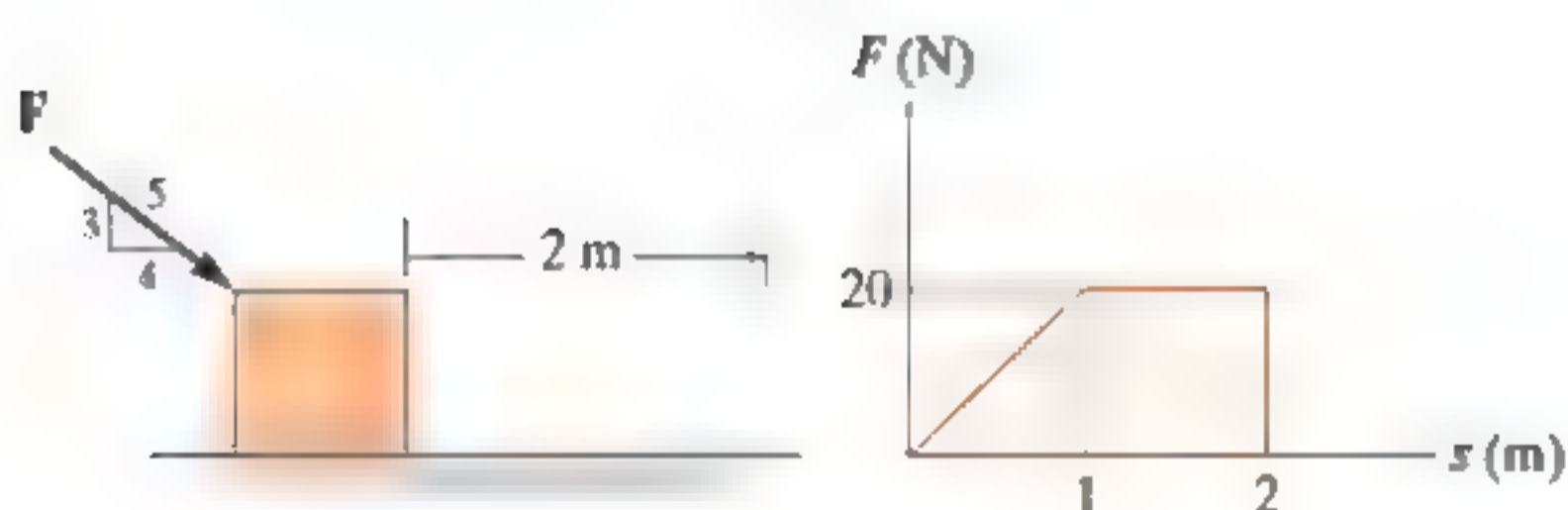
(b)



(c)



(d)

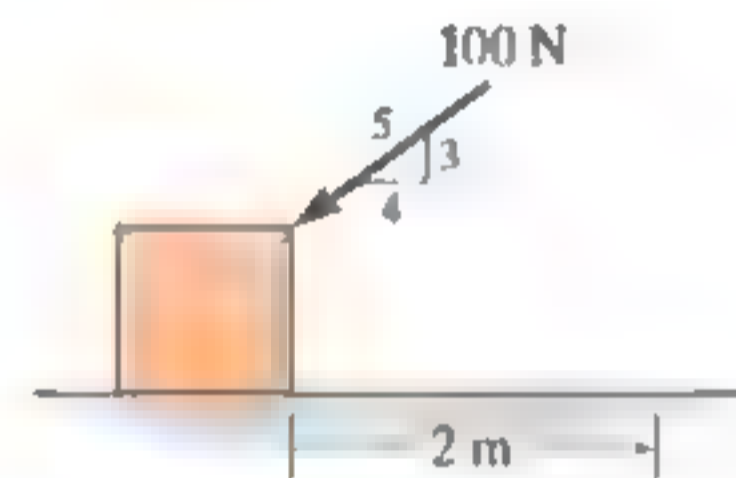


(e)



En un inicio, el resorte está comprimido 3 m.

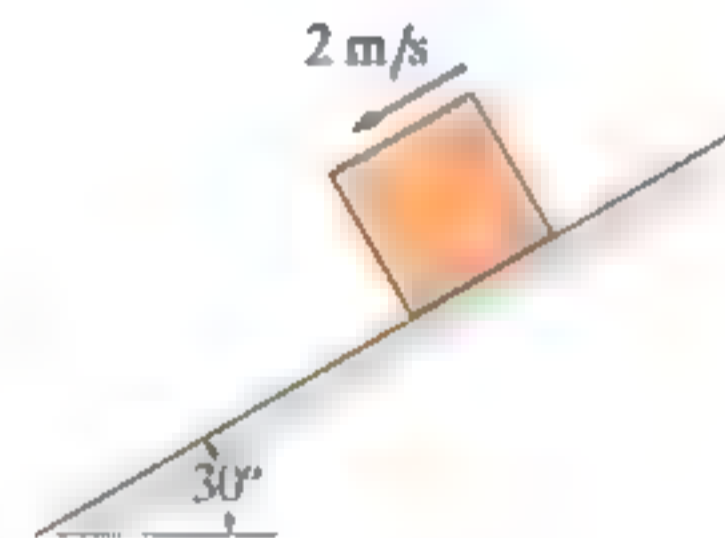
(f)



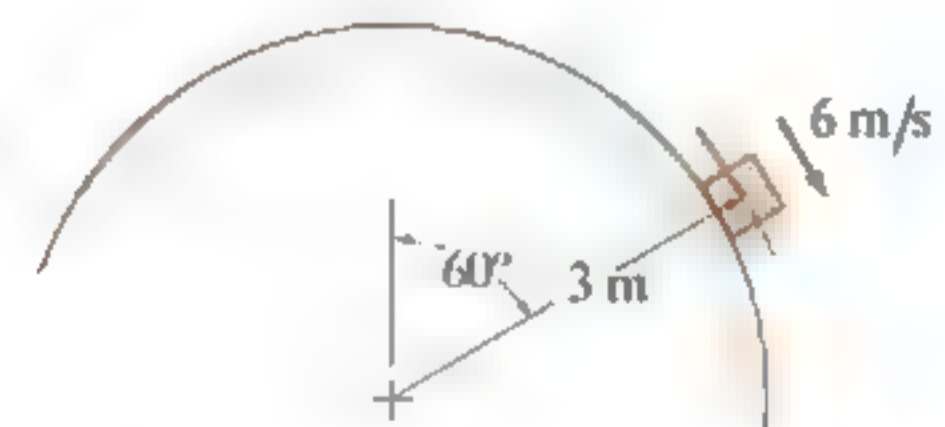
(g)

**Prob. P14-1**

**P14-2.** Determine la energía cinética del bloque de 10 kg.



(a)



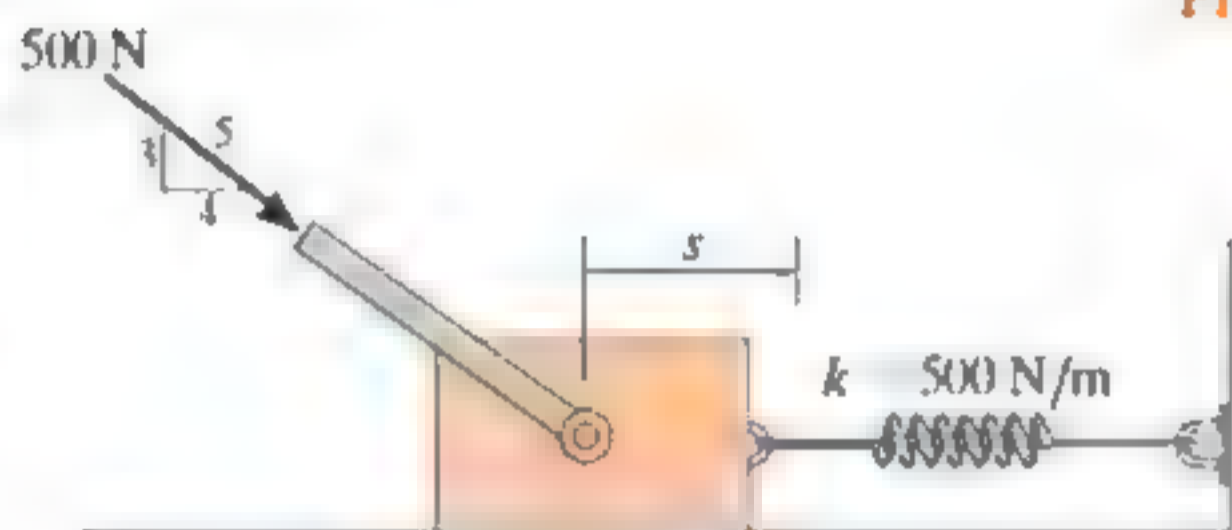
(b)

**Prob. P14-2**

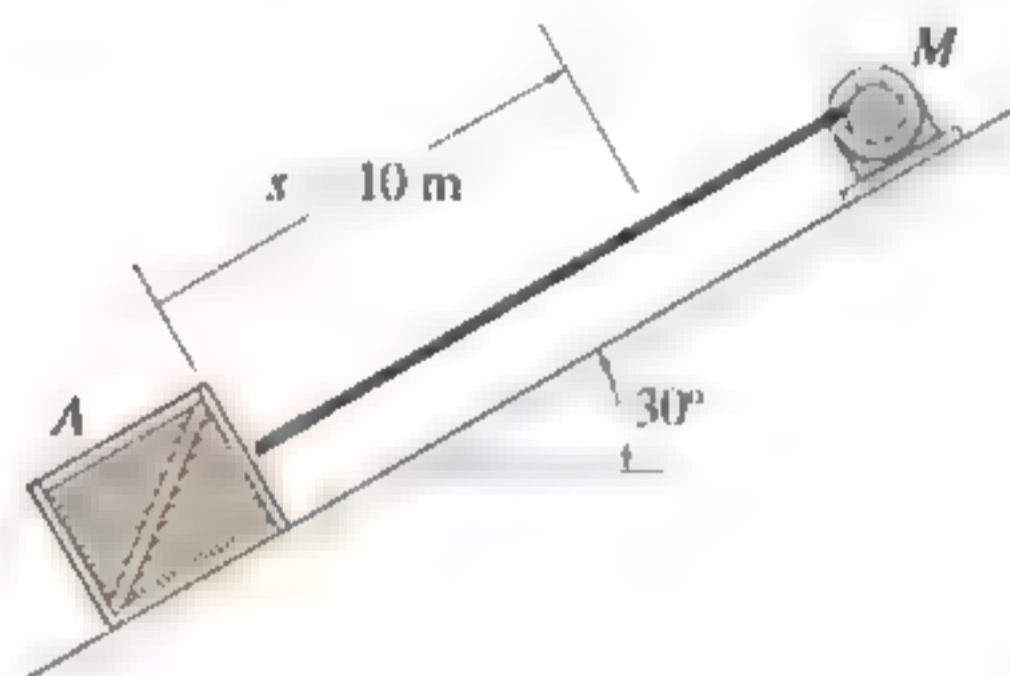
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F14-1.** El resorte se coloca entre la pared y el bloque de 10 kg. Si éste se somete a una fuerza  $F = 500$  N, determine su velocidad cuando  $s = 0.5$  m. Cuando  $s = 0$ , el bloque está en reposo y el resorte no está comprimido. La superficie de contacto es lisa.

Prob. F14-1

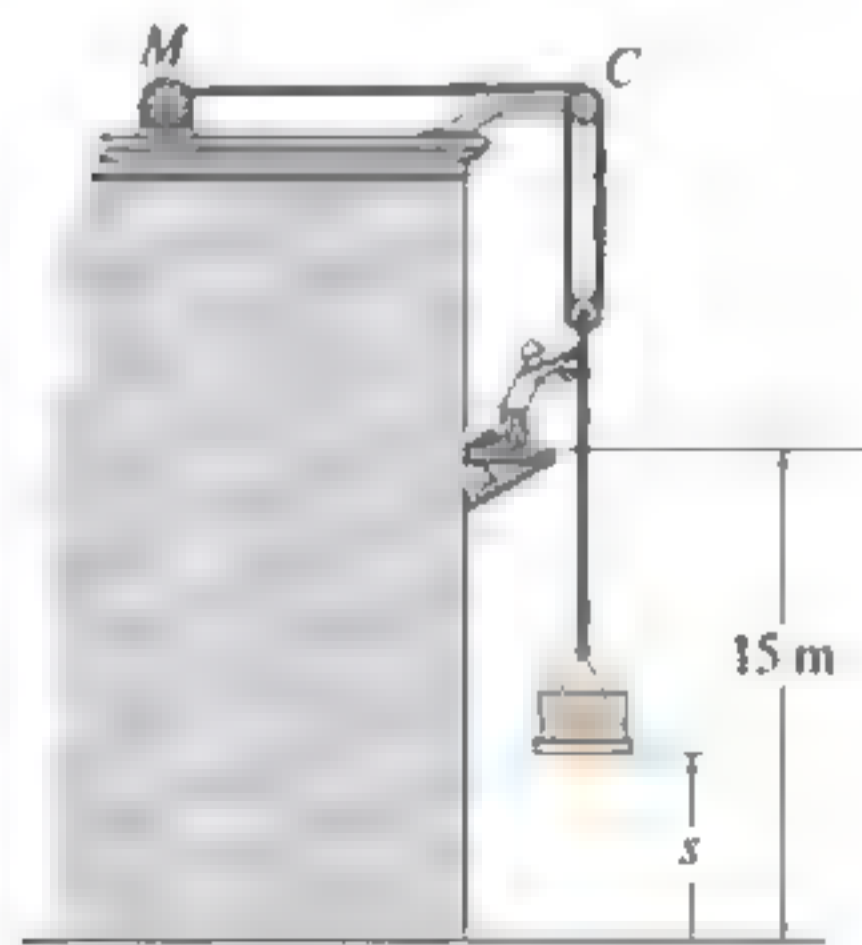


**F14-2.** Si el motor ejerce una fuerza constante de 300 N en el cable, determine la rapidez del embalaje de 20 kg cuando recorre  $s = 10$  m hacia arriba del plano, a partir del reposo. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es  $\mu_k = 0.3$ .



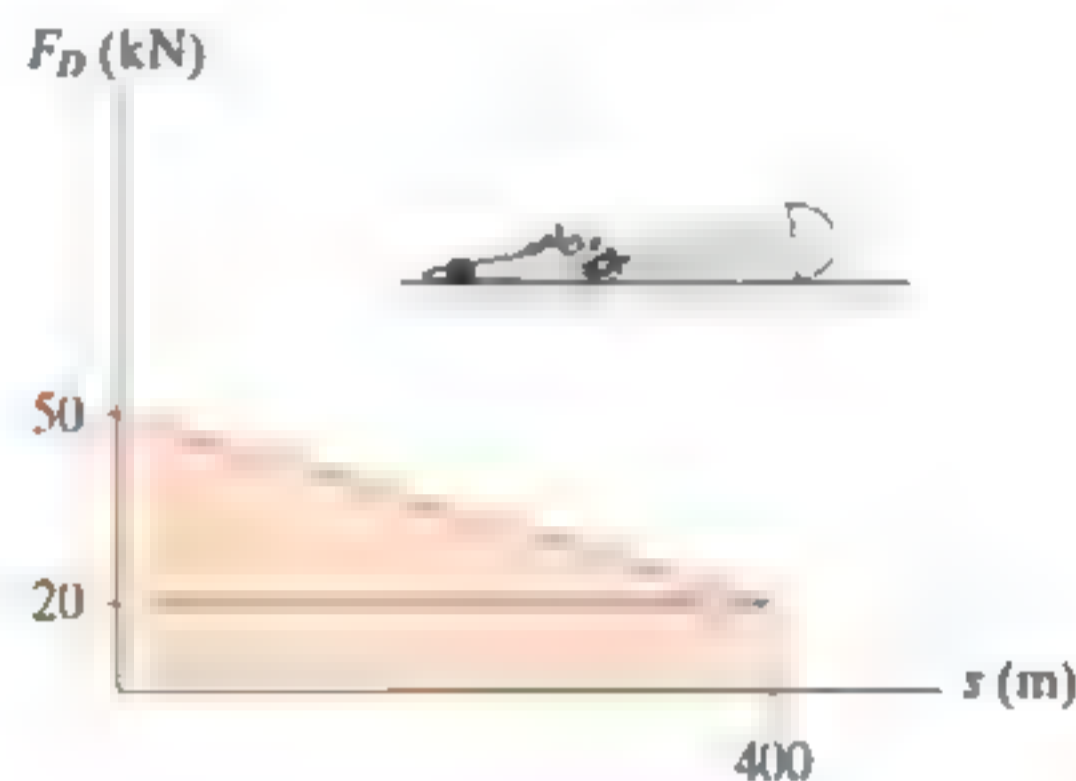
Prob. F14-2

**F14-3.** Si el motor ejerce una fuerza  $F = (600 + 2s^2)$  N en el cable, determine la rapidez del embalaje de 100 kg cuando se eleva a  $s = 15$  m. Inicialmente el embalaje está en reposo en el suelo.



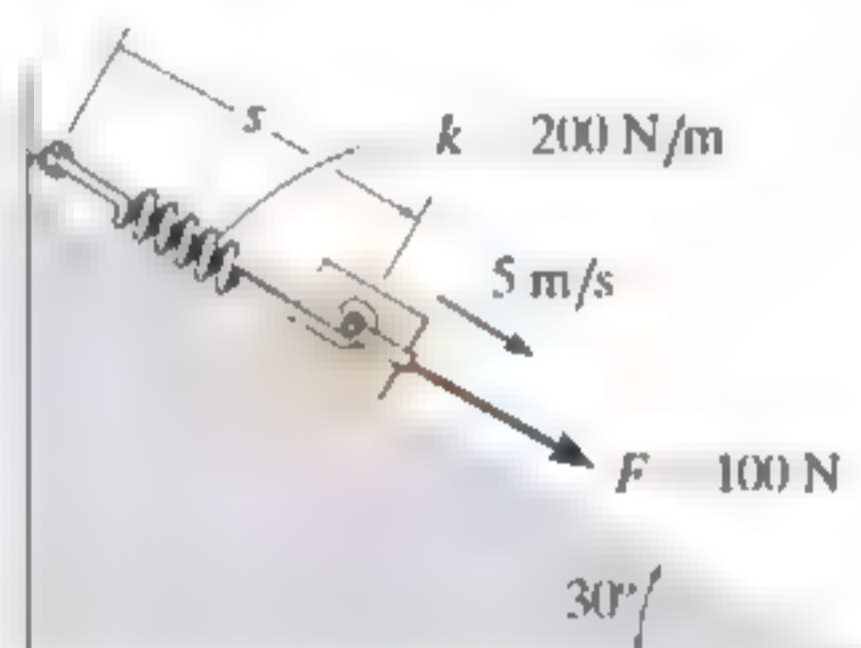
Prob. F14-3

**F14-4.** El *dragster* de 1.8 Mg se desplaza a 125 m/s cuando el motor se apaga y el paracaídas se abre. Si la fuerza de frenado del paracaídas puede representarse de forma aproximada con la gráfica, determine la rapidez del *dragster* cuando haya recorrido 400 m.



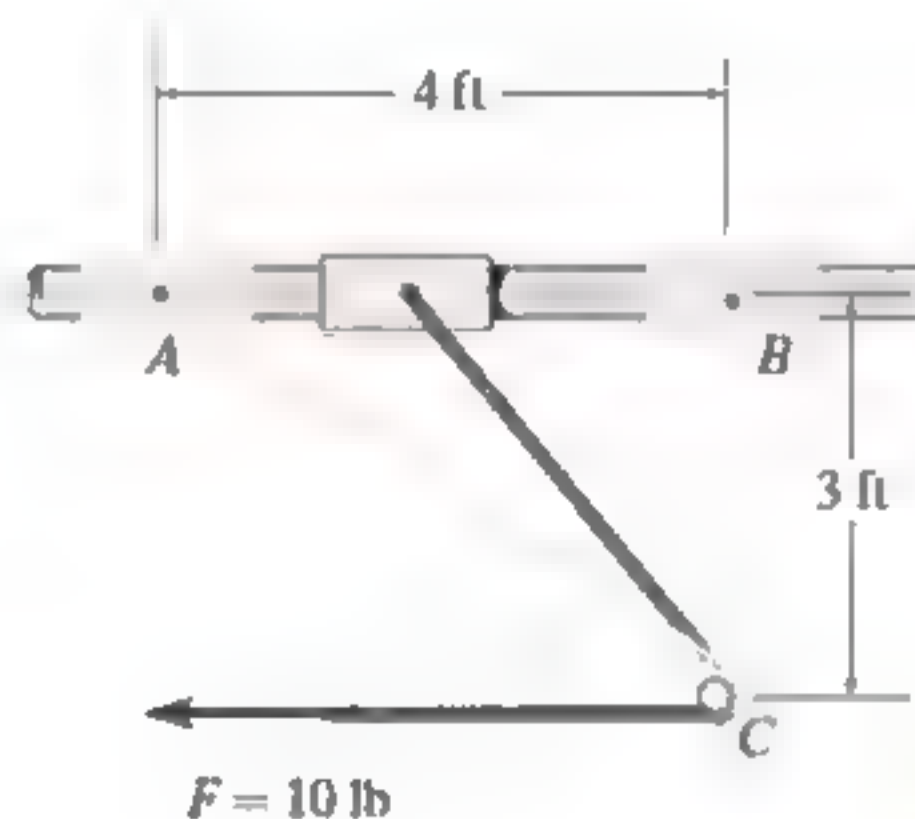
Prob. F14-4

**F14-5.** Cuando  $s = 0.6$  m, el resorte no está comprimido y la rapidez del bloque de 10 kg es de 5 m/s hacia abajo del plano liso. Determine la distancia  $s$  cuando el bloque se detiene.



Prob. F14-5

**F14-6.** Al collarín de 5 lb lo jala una cuerda que pasa alrededor de un pequeño perno ubicado en C. Si la cuerda se somete a una fuerza constante  $F = 10$  lb y el collarín está en reposo cuando está en A, determine su rapidez cuando llega a B. Ignore la fricción.



Prob. F14-6

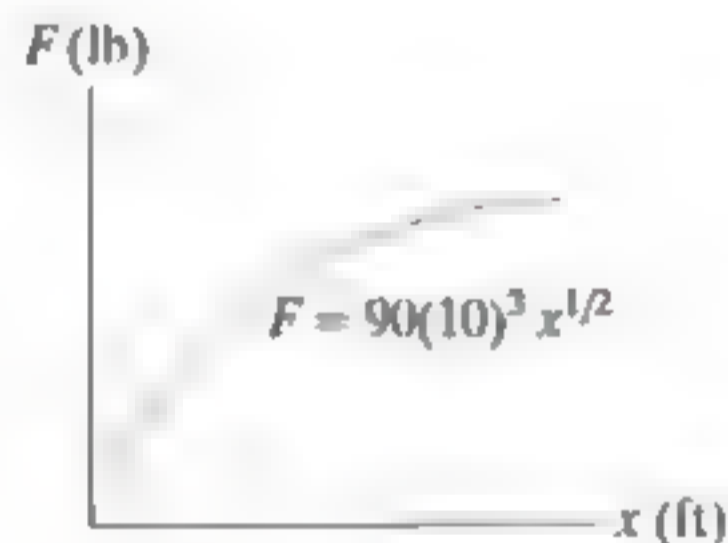
## PROBLEMAS

**14-1.** El embalaje de 20 kg se somete a una fuerza que tiene una dirección constante y una magnitud  $F = 100$  N. Cuando  $s = 15$  m, el embalaje se mueve hacia la derecha con una rapidez de 8 m/s. Determine su rapidez cuando  $s = 25$  m. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el suelo es  $\mu_k = 0.25$ .



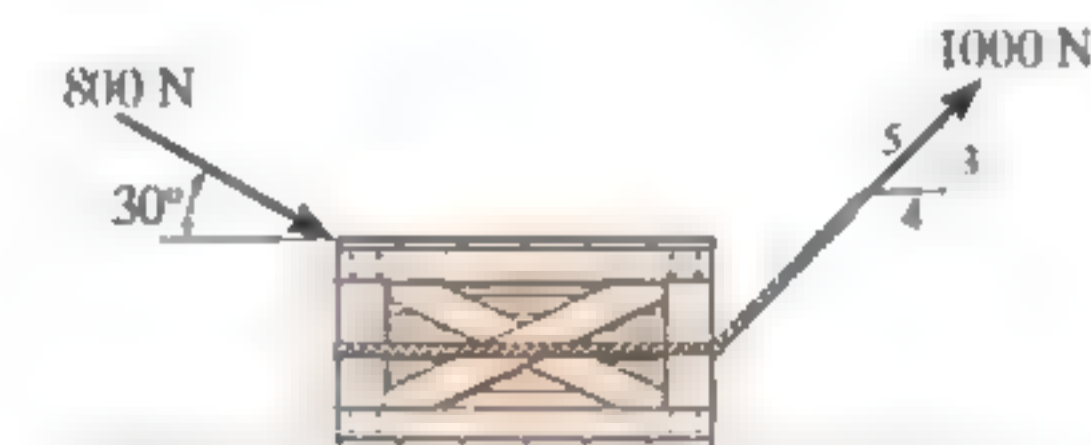
Prob. 14-1

**14-2.** Como protección, se coloca la barrera de barriles enfrente de la columna de un puente. Si la relación entre la fuerza y la deflexión de la barrera es  $F = (90(10^3)x^{1/2})$  lb, donde  $x$  está en ft, determine la penetración máxima del automóvil en la barrera. El auto tiene un peso de 4000 libras y se desplaza con una rapidez de 75 ft/s justo antes de llegar a la barrera.



Prob. 14-2

**14-3.** El embalaje, que tiene una masa de 100 kg, se somete a la acción de las dos fuerzas. Si está originalmente en reposo, determine la distancia que se desliza con el propósito de alcanzar una rapidez de 6 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y la superficie es  $\mu_k = 0.2$ .



Prob. 14-3

**\*14-4.** El embalaje de 100 kg se somete a las fuerzas mostradas. Si está originalmente en reposo, determine la distancia que se desliza para alcanzar una rapidez de  $v = 8$  m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y la superficie es  $\mu_k = 0.2$ .



Prob. 14-4

**14-5.** Determine la altura  $h$  requerida para la montaña rusa, de modo que cuando el carro está esencialmente en reposo en la cresta de la colina  $A$  alcance una rapidez de 100 km/h cuando llegue a la parte inferior  $B$ . Además, ¿cuál debe ser el radio mínimo de curvatura  $\rho$  para la pista en  $B$ , de modo que los pasajeros no experimenten una fuerza normal mayor que  $4mg = (39.24m)$  N? Desprecie el tamaño del carro y del pasajero.



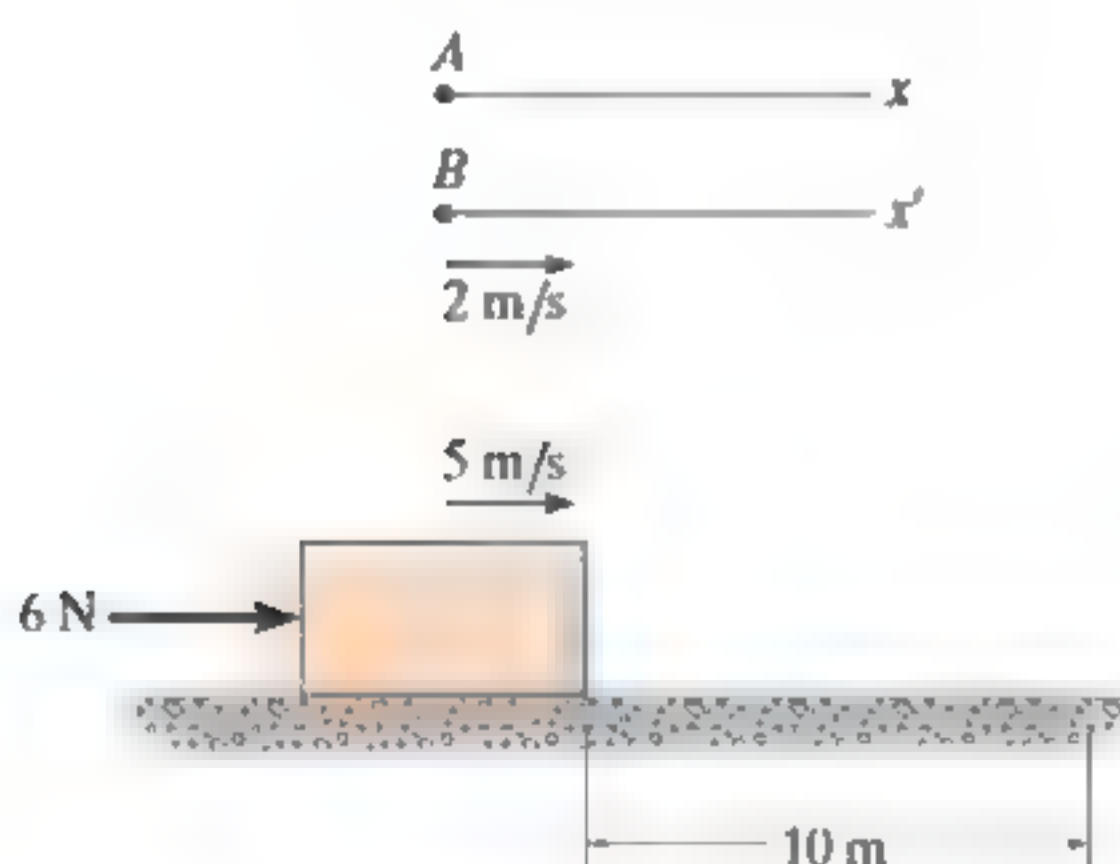
Prob. 14-5

**14.6.** Cuando el conductor aplica los frenos de un camión ligero que viaja a 40 km/h, patina 3 m antes de detenerse. ¿Hasta dónde llegará el deslizamiento del camión, si viaja a 80 km/h cuando se aplican los frenos?



Prob. 14.6

**14.7.** Según lo indicado en la deducción del principio del trabajo y la energía, el principio es válido para los observadores en *cualquier* sistema de referencia inercial. Demuestre que esto es así, considerando el bloque de 10 kg que descansa sobre la superficie lisa y se somete a una fuerza horizontal de 6 N. Si el observador A está en un marco fijo  $x$ , determine la rapidez final del bloque si tiene una rapidez inicial de 5 m/s y viaja 10 m, ambos dirigidos hacia la derecha y medidos desde el marco fijo. Compare el resultado con el obtenido por un observador B, que está unido al eje  $x'$  y se mueve a una velocidad constante de 2 m/s en relación con A. *Sugerencia:* La distancia que recorre el bloque tendrá que ser calculada primero para el observador B, antes de aplicar el principio de trabajo y energía.



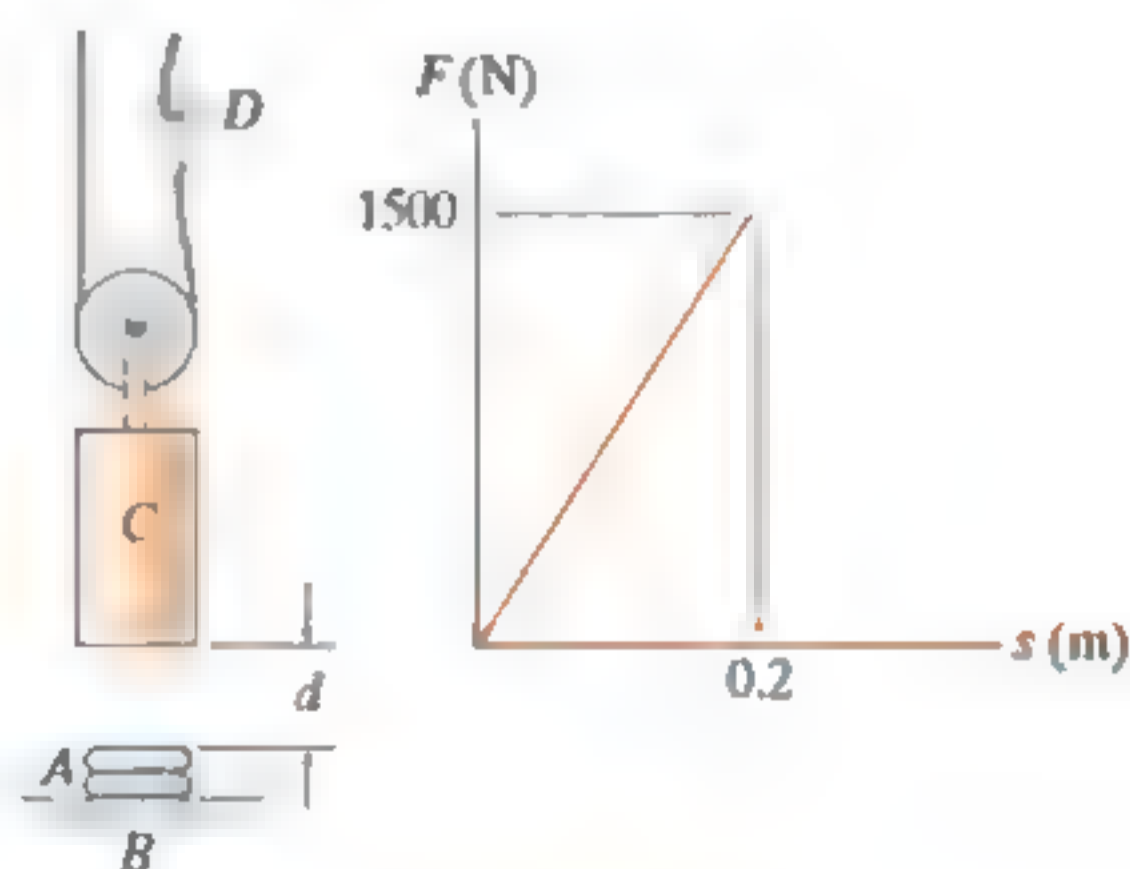
Prob. 14.7

**\*14.8.** Una fuerza de  $F = 250$  N se aplica al extremo en B. Determine la rapidez del bloque de 10 kg cuando se haya movido 1.5 m, partiendo del reposo.



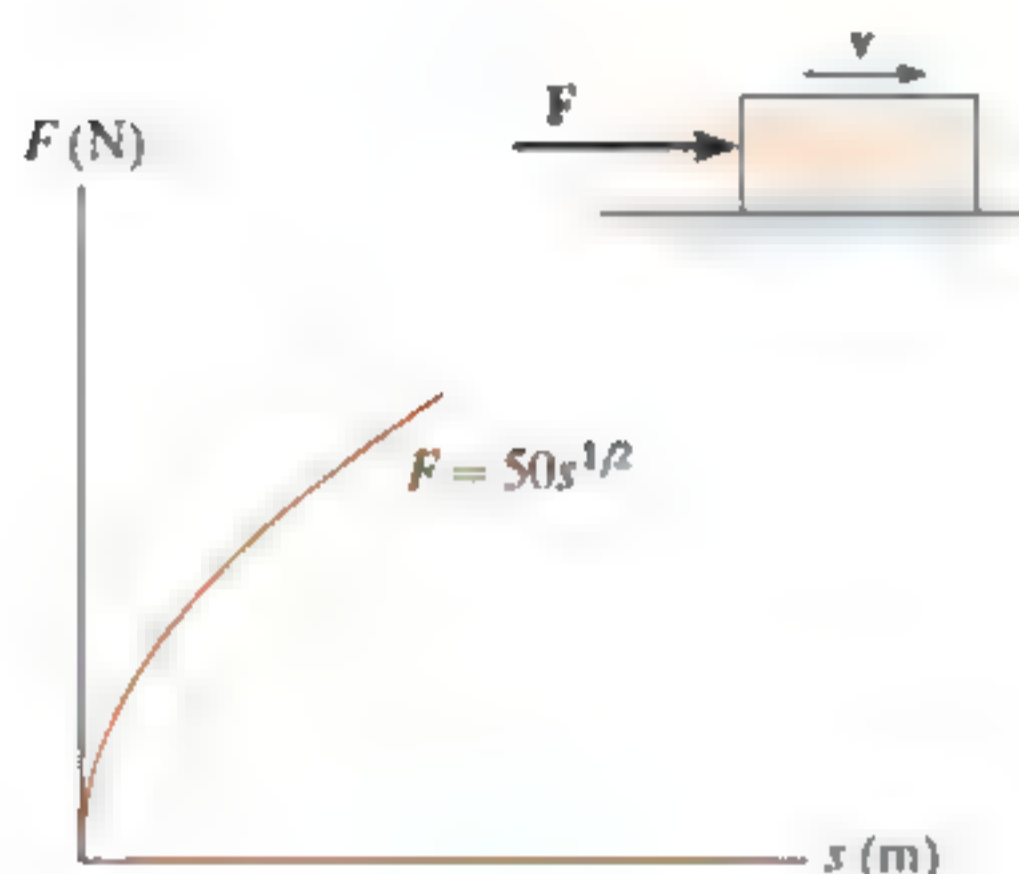
Prob. 14.8

**14.9.** La "cámara de aire" A se utiliza para proteger el soporte B y para, en el caso de una falla de la banda en D, prevenir el daño al peso C sostenido por la banda transportadora en tensión. La fuerza desarrollada por la cámara de aire en función de su deflexión se muestra en la gráfica. Si el bloque tiene una masa de 20 kg y se suspende a una altura  $d = 0.4$  m por encima de la parte superior de la cámara, determine la deformación máxima de la cámara, en caso de que la banda transportadora falle. Desprecie la masa de la polea y la banda.



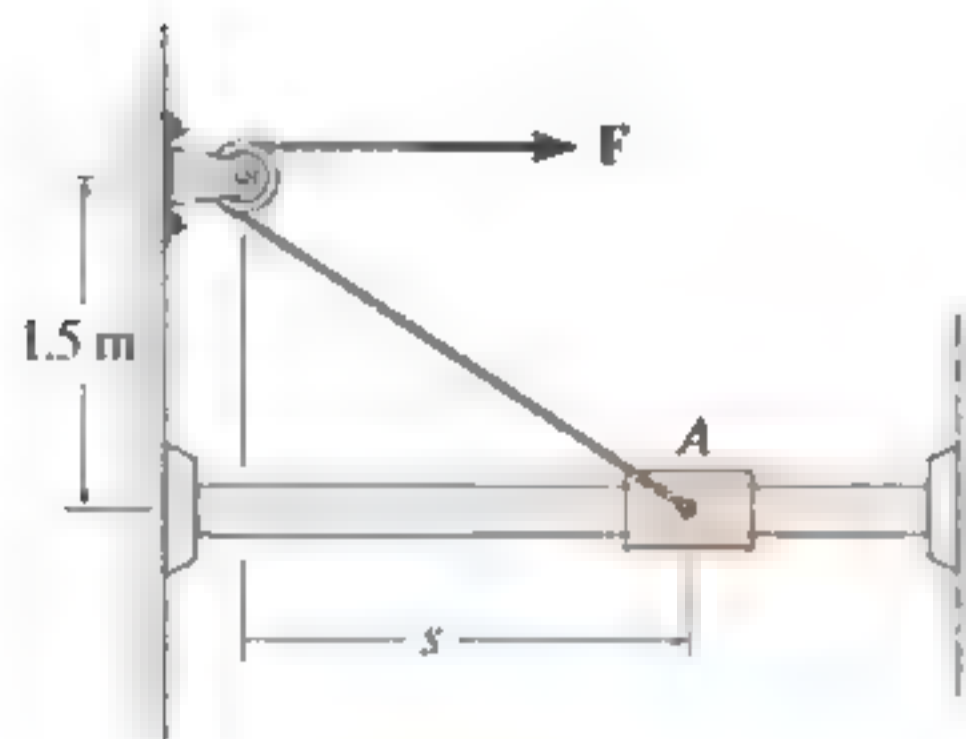
Prob. 14.9

**14-10.** La magnitud de la fuerza  $F$  que actúa en una dirección constante sobre el bloque de 20 kg varía con la posición  $s$  de éste. Determine qué tanto se desliza el bloque antes de que su velocidad sea de 15 m/s. Cuando  $s = 0$  el bloque se está moviendo a la derecha a  $v = 6$  m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es  $\mu_k = 0.3$ .



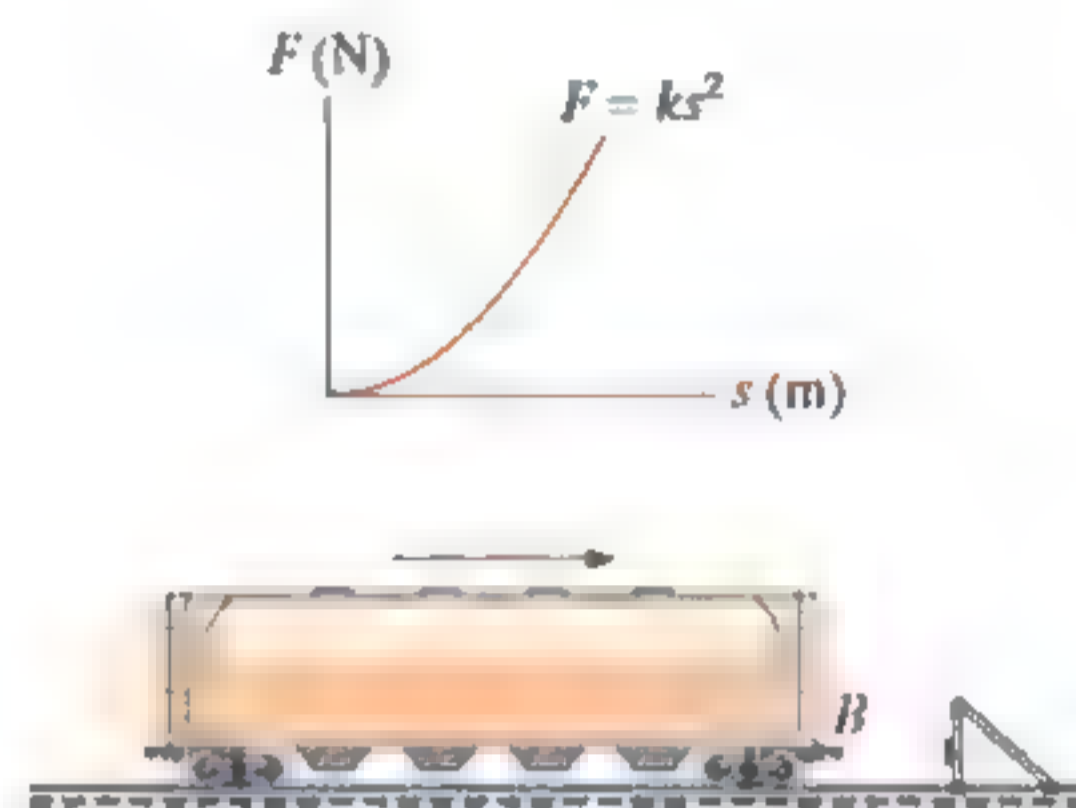
Prob. 14-10

**14-11.** Se aplica la fuerza de  $F = 50$  N a la cuerda cuando  $s = 2$  m. Si el collarín de 6 kg está originalmente en reposo, determine su velocidad en  $s = 0$ . Desprecie la fricción.



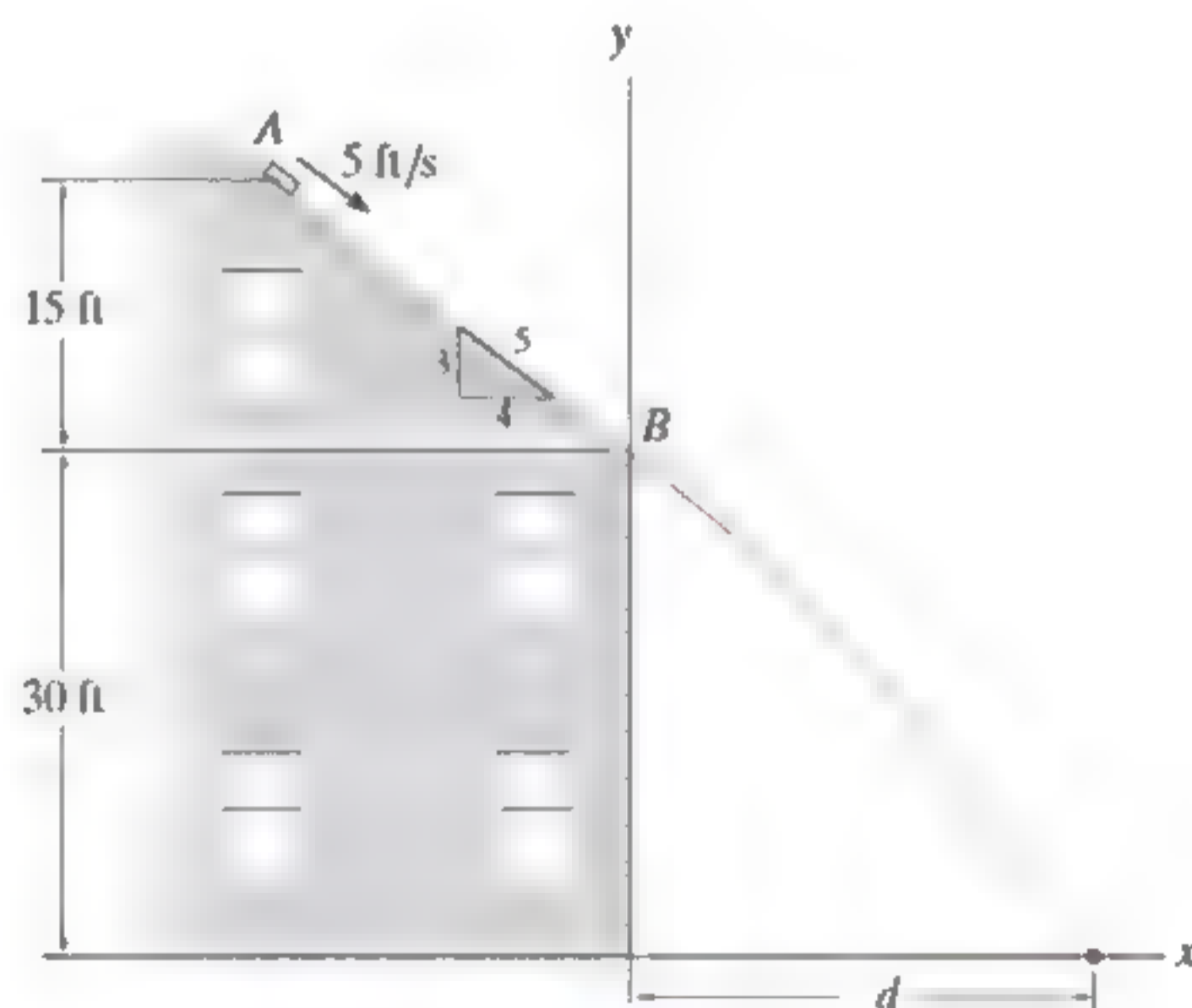
Prob. 14-11

**\*14-12.** Las consideraciones de diseño para el atenuador de impactos  $B$  del vagón de tren de 5 Mg requieren el uso de un resorte no lineal, cuyas características de carga-deflexión se muestran en la gráfica. Seleccione el valor adecuado de  $k$  tal que la deflexión máxima del resorte esté limitada a 0.2 m cuando el vagón, que viaja a 4 m/s, golpea el tope rígido. Desprecie la masa de las ruedas del vagón.



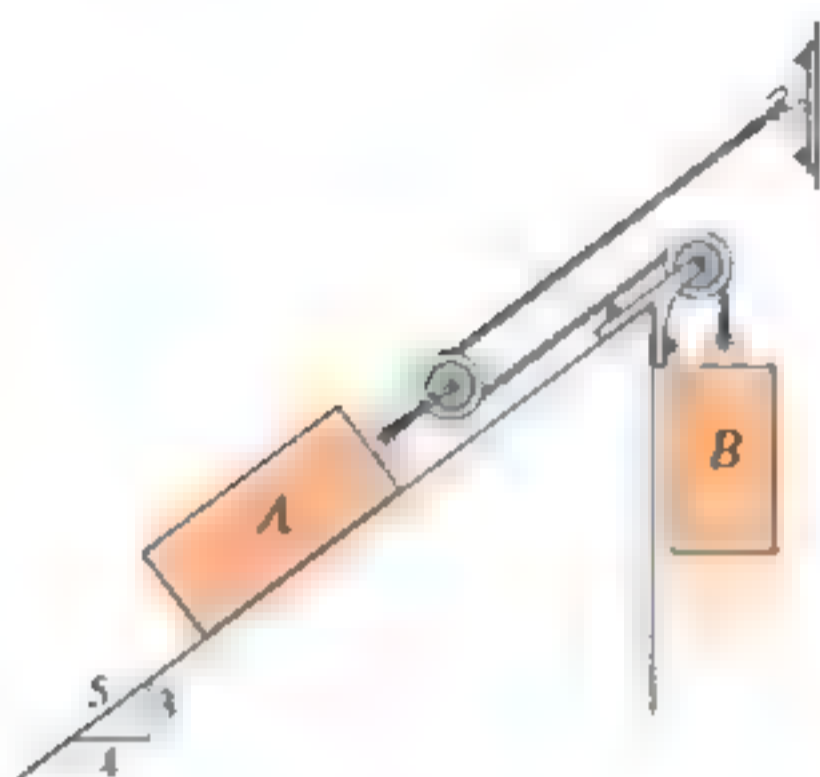
Prob. 14-12

**14-13.** El ladrillo de 2 lb se desliza hacia abajo sobre un techo liso, de modo que cuando está en  $A$  tiene una velocidad de 5 ft/s. Determine la rapidez del ladrillo justo antes de que abandone la superficie en  $B$ , la distancia  $d$  desde la pared hasta el punto donde golpea el suelo y la rapidez con la que lo hace.



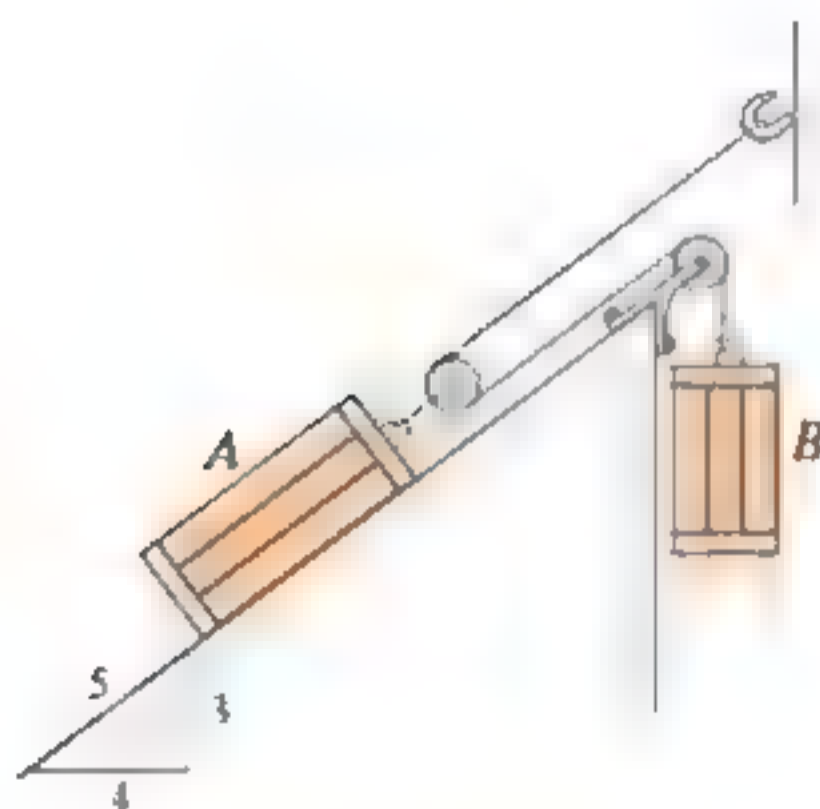
Prob. 14-13

**14-14.** El bloque  $A$  tiene un peso de 60 lb y el bloque  $B$  de 10 lb. Determine la rapidez del bloque  $A$  después de que recorre 5 ft hacia abajo sobre el plano, si parte del reposo. Desprecie la fricción y la masa de la cuerda y las poleas.



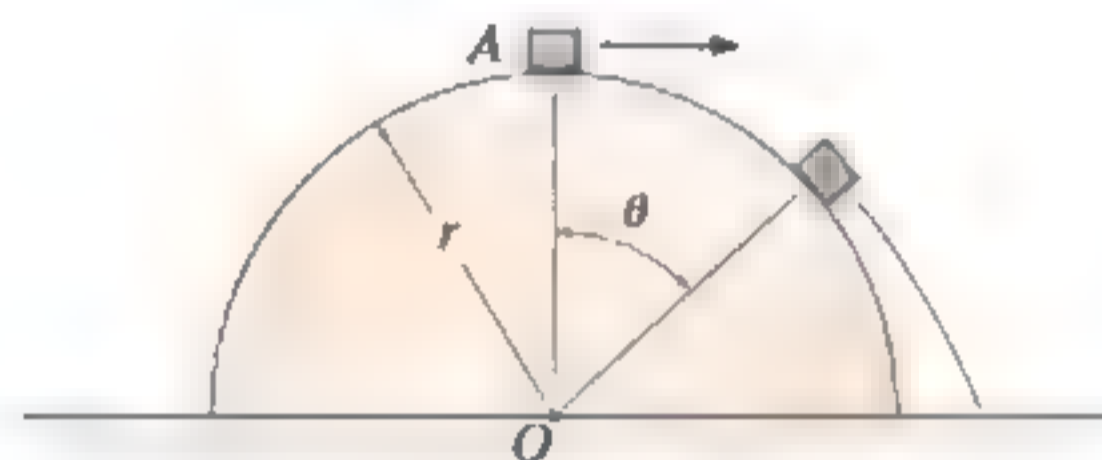
Prob. 14-14

**14-15.** Los dos bloques  $A$  y  $B$  tienen pesos  $W_A = 60$  lb y  $W_B = 10$  lb, respectivamente. El coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque  $A$  es  $\mu_k = 0.2$ . Determine la rapidez de  $A$  después de que recorre 3 ft hacia abajo sobre el plano, partiendo del reposo. No tome en cuenta la masa de la cuerda y las poleas.



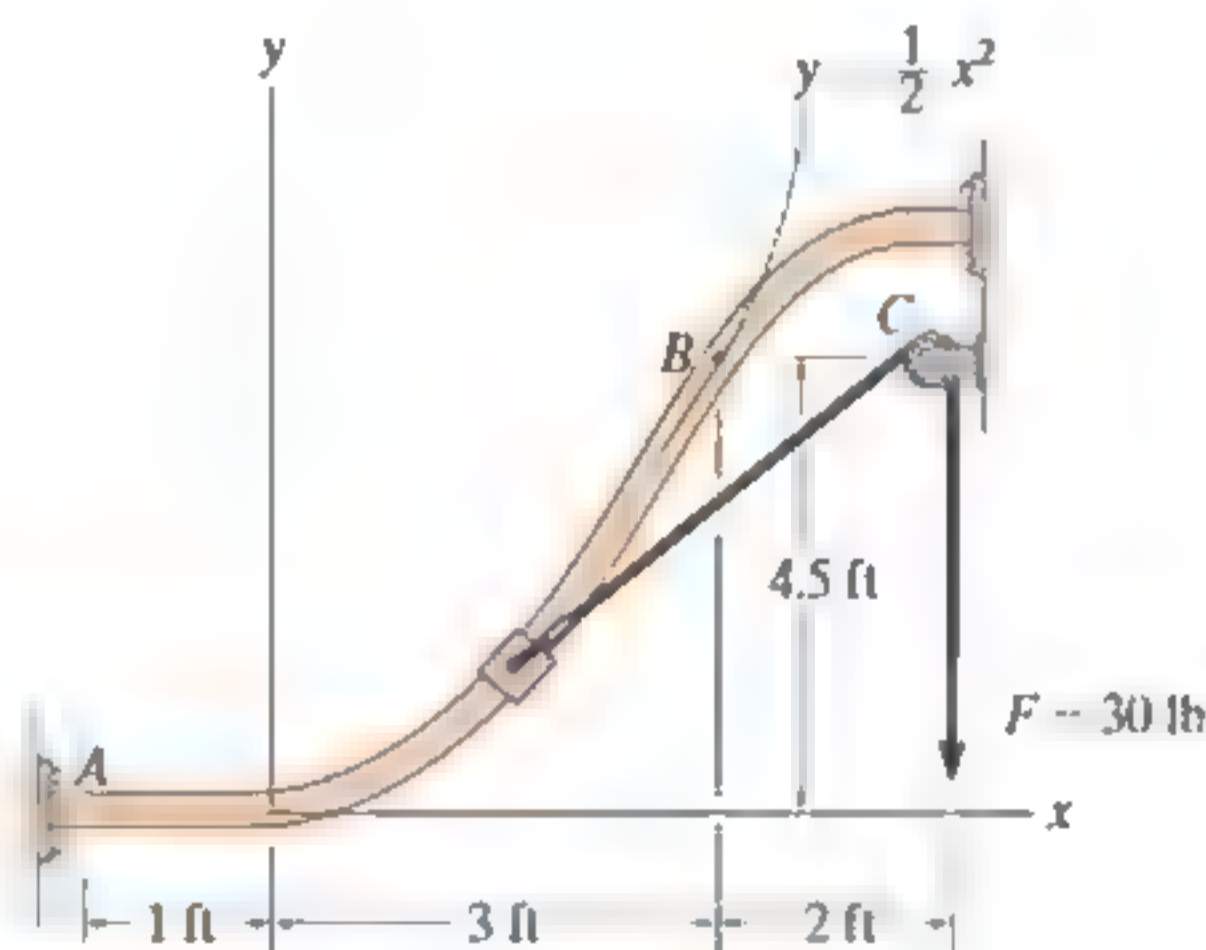
Prob. 14-15

**\*14-16.** A una pequeña caja de masa  $m$  se le da una rapidez de  $v = \sqrt{4gr}$  en la parte superior del semicilindro liso. Determine el ángulo  $\theta$  al que la caja sale del semicilindro.



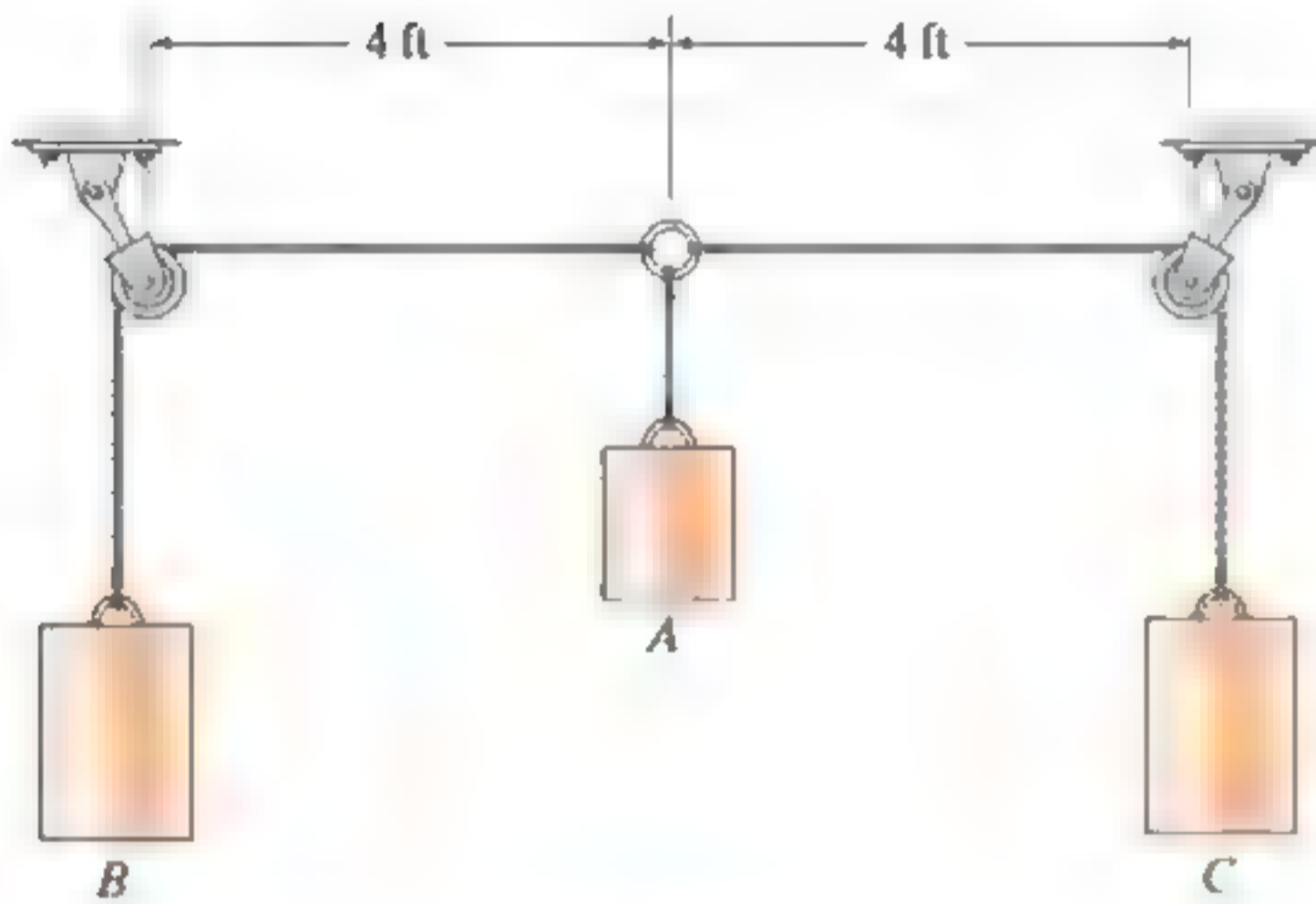
Prob. 14-16

**14-17.** Si la cuerda se somete a una fuerza constante de  $F = 30$  lb y el collarín liso de 10 lb parte del reposo en  $A$ , determine su rapidez cuando pasa por el punto  $B$ . Desprecie el tamaño de la polea  $C$ .



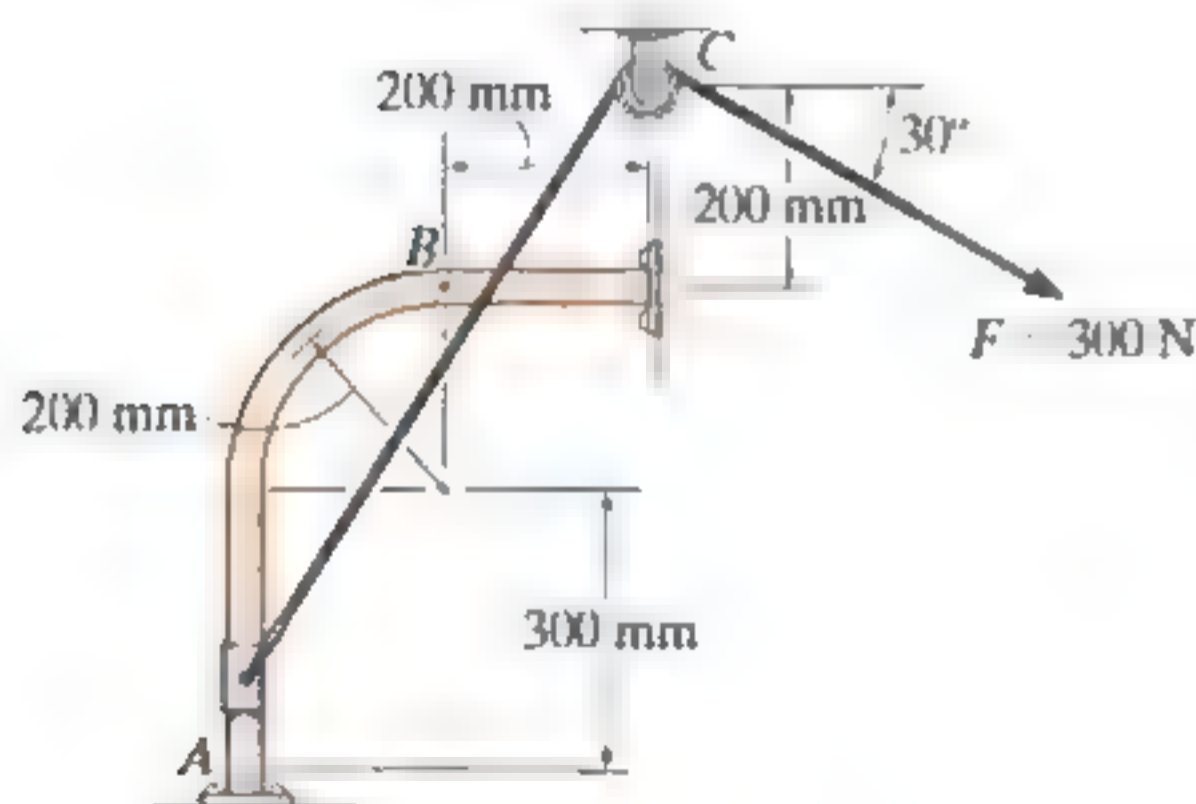
Prob. 14-17

**14-18.** Cuando el bloque  $A$  de 12-lb se libera desde el reposo, levanta las dos pesas  $B$  y  $C$  de 15 lb. Determine la distancia máxima que caerá  $A$  antes de que su movimiento se detenga momentáneamente. Desprecie el peso de la cuerda y el tamaño de las poleas.



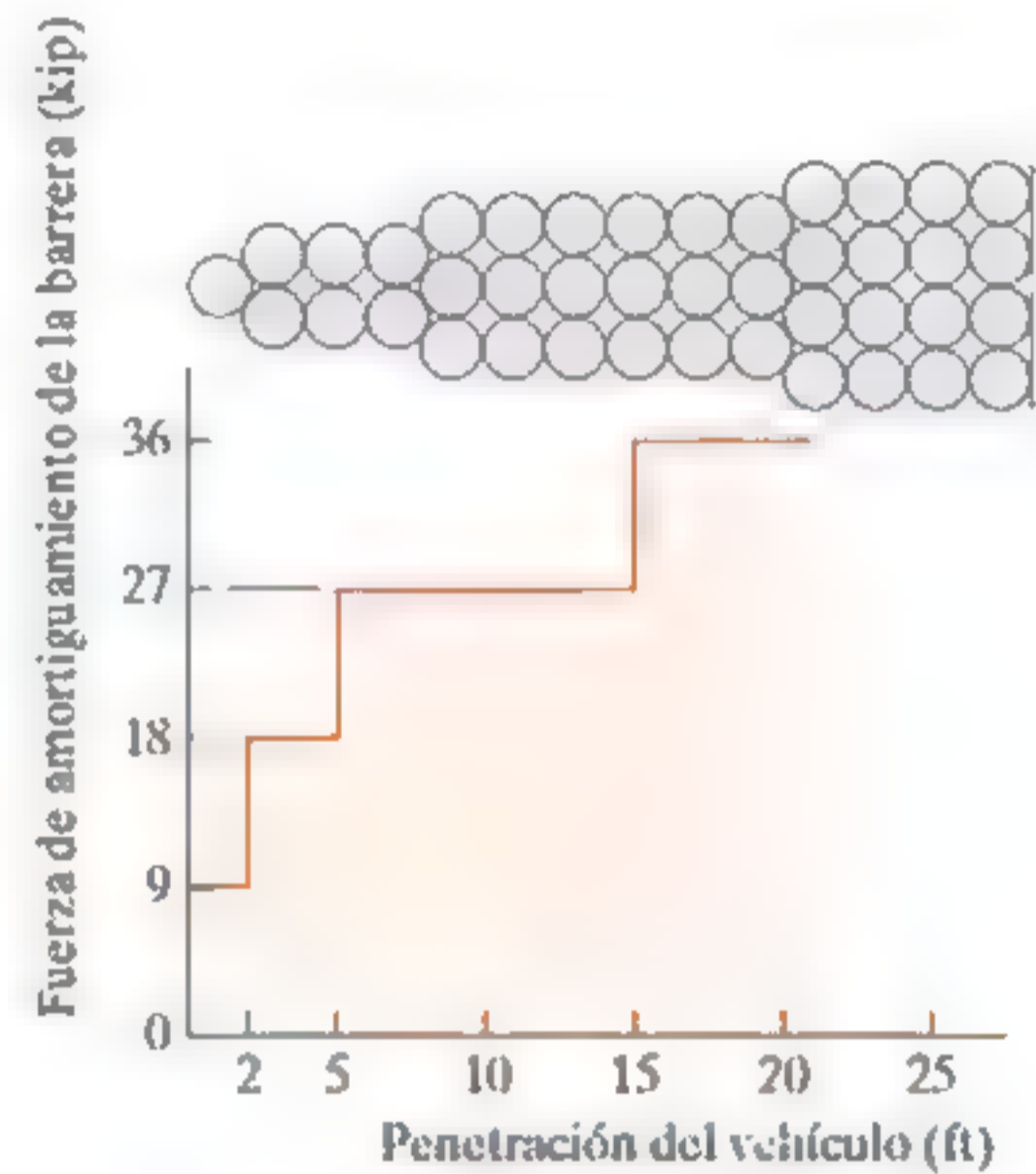
Prob. 14-18

**14-19.** Si la cuerda está sometida a una fuerza constante de  $F = 300$  N y el collarín liso de 15 kg parte del reposo en  $A$ , determine la velocidad del collarín cuando llega al punto  $B$ . Desprecie el tamaño de la polea.



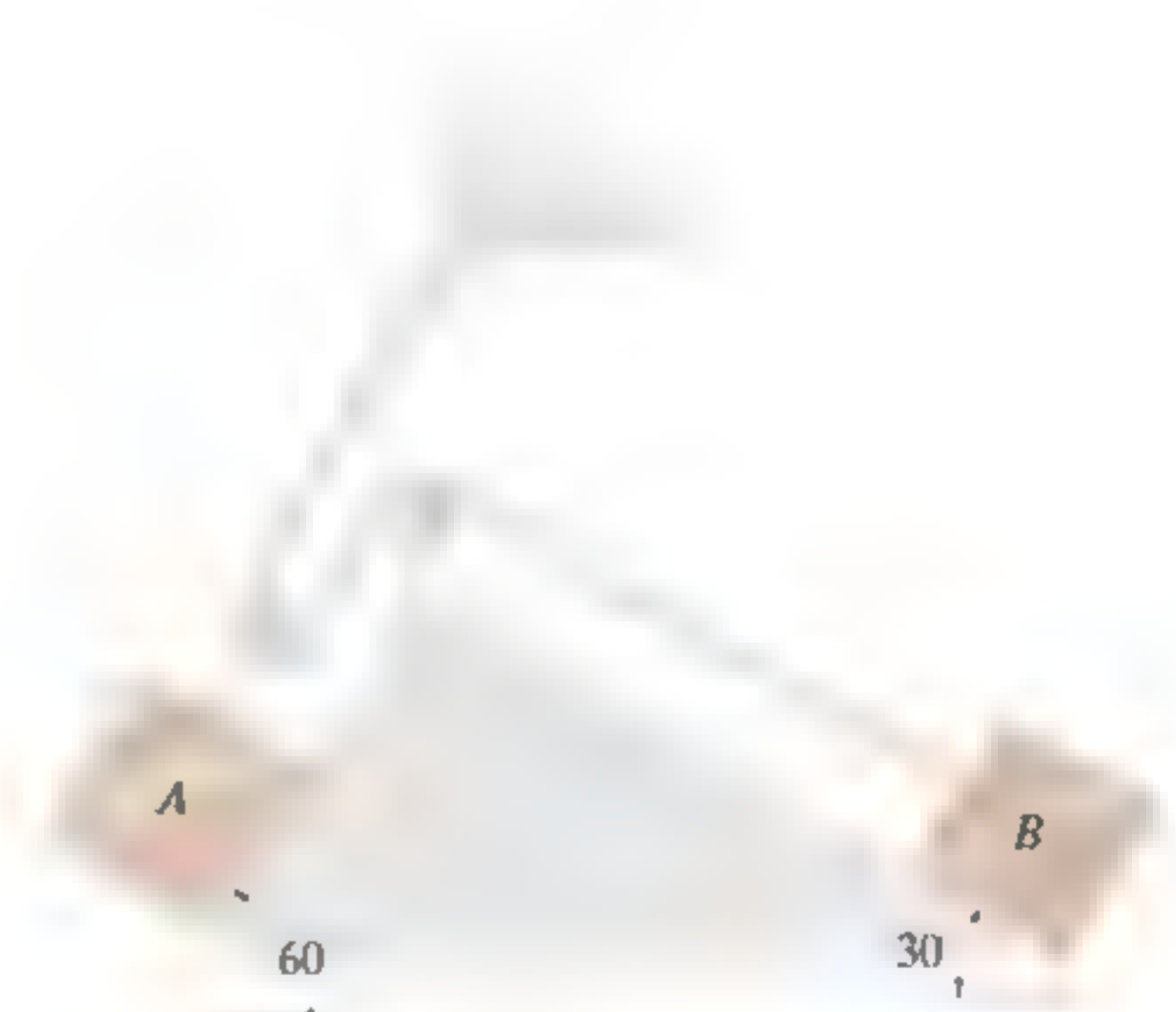
Prob. 14-19

**\*14-20.** El amortiguador de choques para la barrera de una carretera consta de una serie de barriles llenos con un material que absorbe los impactos. La fuerza de amortiguación se mide en términos de la penetración de los vehículos en la barrera. Determine la distancia que penetrará un auto con un peso de 4000 lb en la barrera, si está viajando inicialmente a 55 ft/s cuando golpea el primer barril.



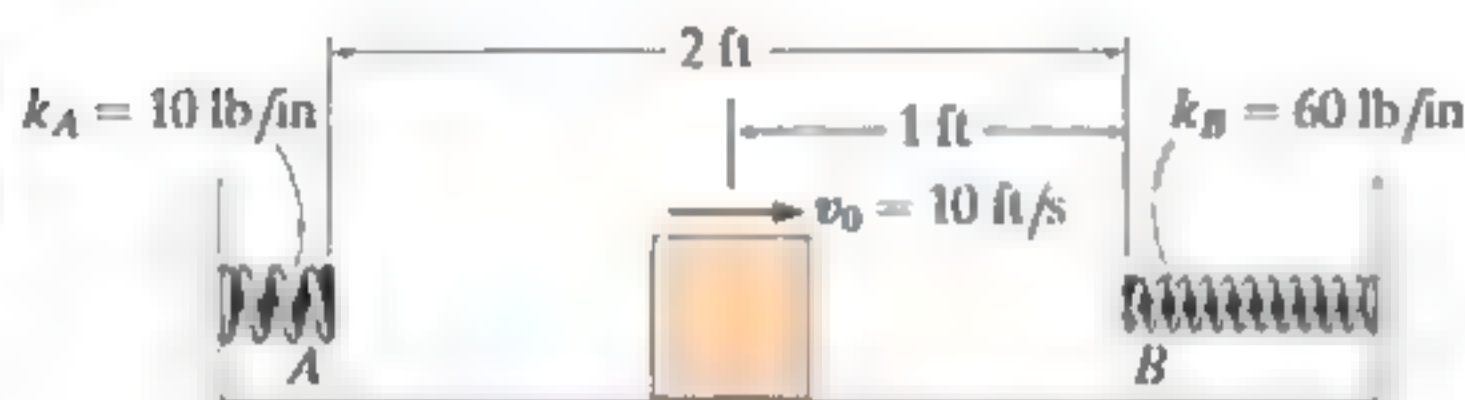
Prob. 14-20

**14-21.** Determine la velocidad del bloque  $A$  de 60 lb, si los dos bloques se liberan desde el reposo y el bloque  $B$  de 40 lb se mueve 2 ft hacia arriba sobre el plano. El coeficiente de fricción cinética entre ambos bloques y los planos inclinados es  $\mu_k = 0.10$ .



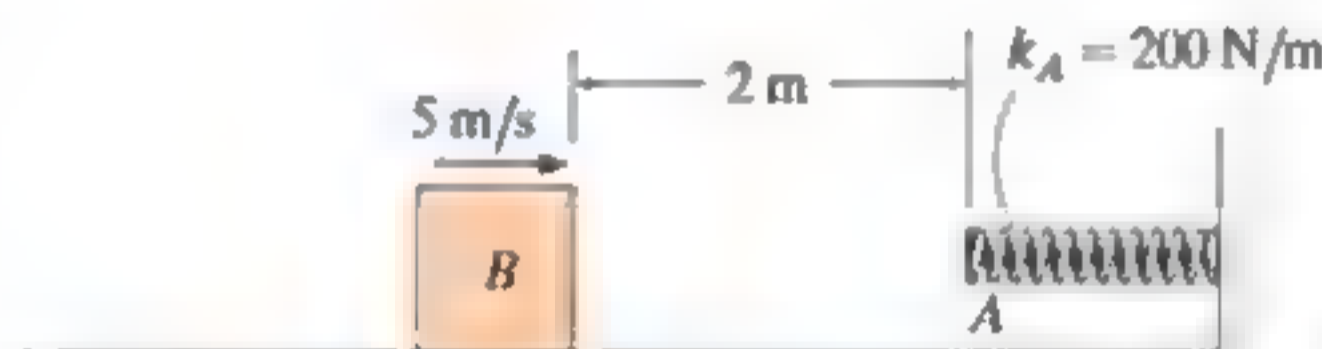
Prob. 14-21

**14-22.** El bloque de 25 lb tiene una rapidez inicial de  $v_0 = 10$  ft/s cuando está a medio camino entre los resortes  $A$  y  $B$ . Después de golpear el resorte  $B$ , rebota y se desliza a través del plano horizontal hacia el resorte  $A$ , y así sucesivamente. Si el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es  $\mu_k = 0.4$ , determine la distancia total recorrida por el bloque antes de llegar al reposo.



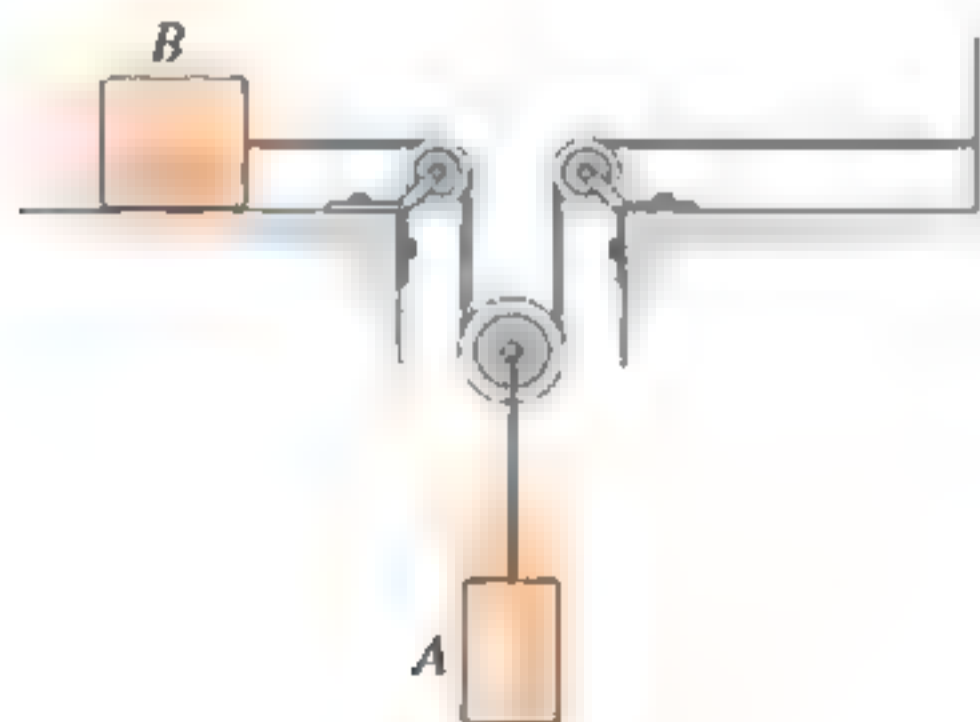
Prob. 14-22

**14-23.** El bloque de 8 kg se mueve con una rapidez inicial de 5 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es  $\mu_k = 0.25$ , determine la compresión en el resorte, cuando el bloque se detiene momentáneamente.



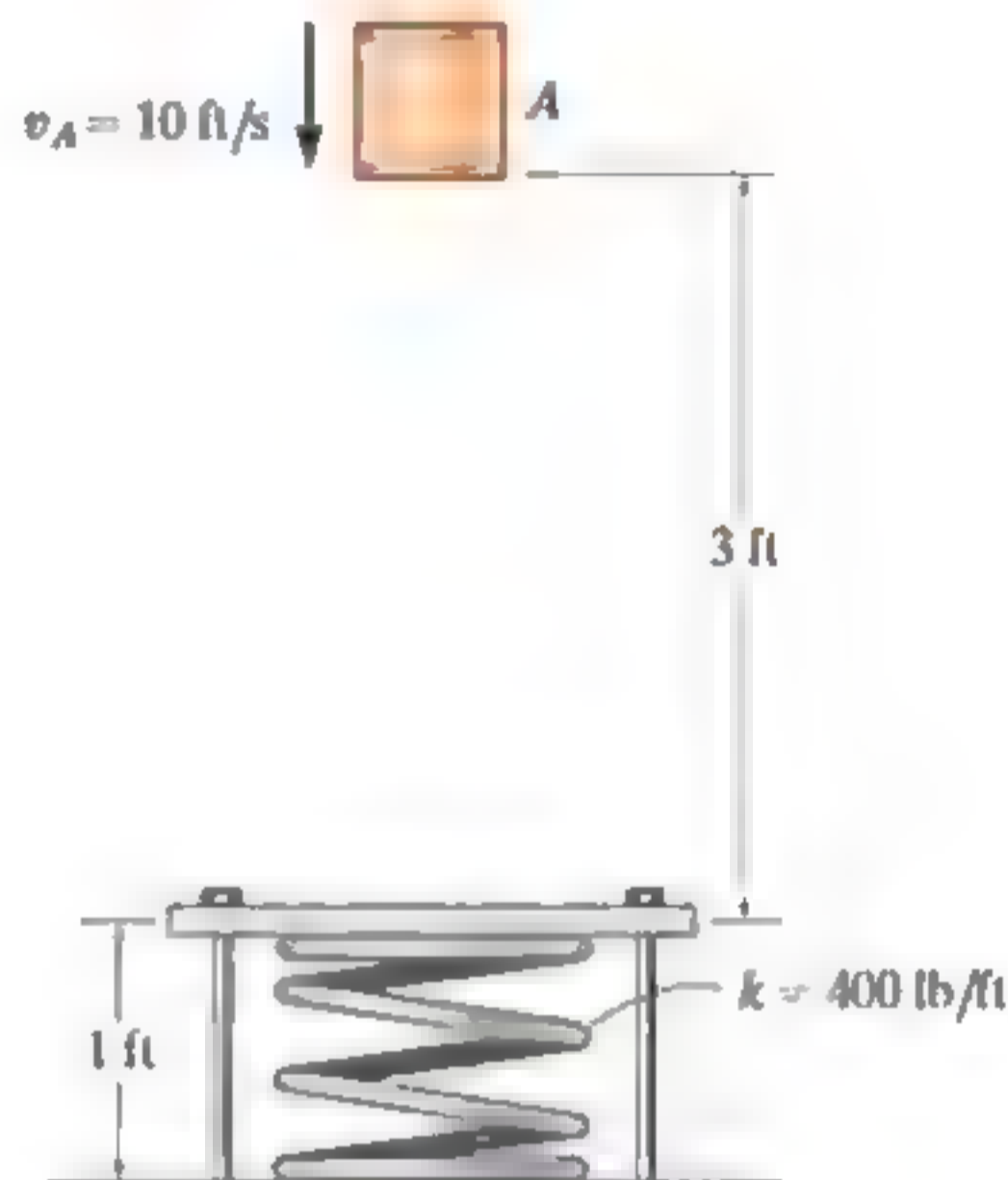
Prob. 14-23

**14-24.** En un instante dado, el bloque  $A$  de 10 lb se mueve hacia abajo con una rapidez de 6 ft/s. Determine su rapidez 2 s después. El bloque  $B$  tiene un peso de 4 lb y el coeficiente de fricción cinética entre éste y el plano horizontal es  $\mu_k = 0.2$ . Desprecie la masa de la cuerda y las poleas.



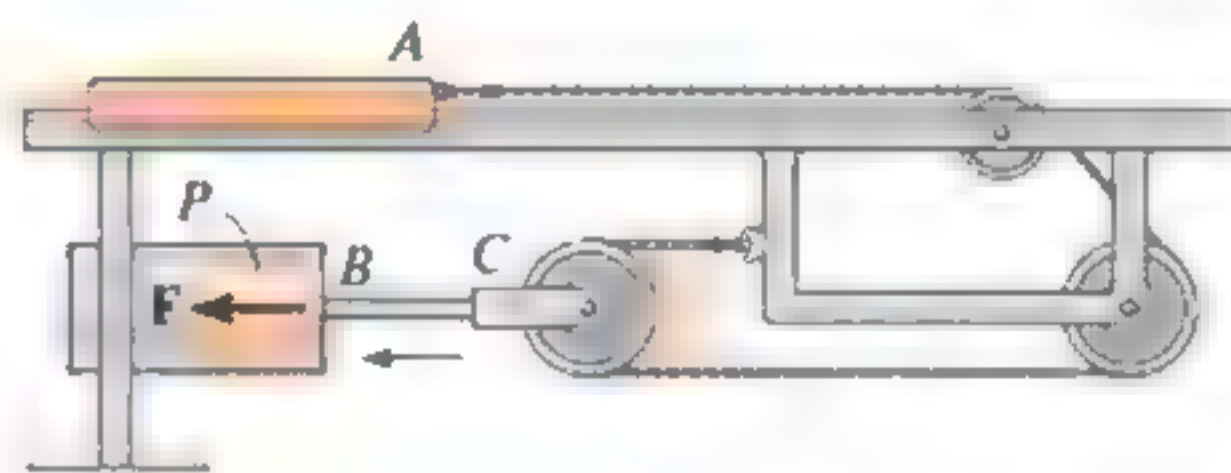
Prob. 14-24

**14-25.** El cilindro de 5 lb cae desde  $A$  con una rapidez  $v_A = 10$  ft/s sobre la plataforma. Determine el desplazamiento máximo de la plataforma, causado por la colisión. El resorte tiene una longitud sin estirar de 1.75 ft y se mantiene inicialmente en compresión, mediante los cables de 1 ft de longitud unidos a la plataforma. Desprecie la masa de la plataforma y del resorte, y cualquier pérdida de energía durante la colisión.



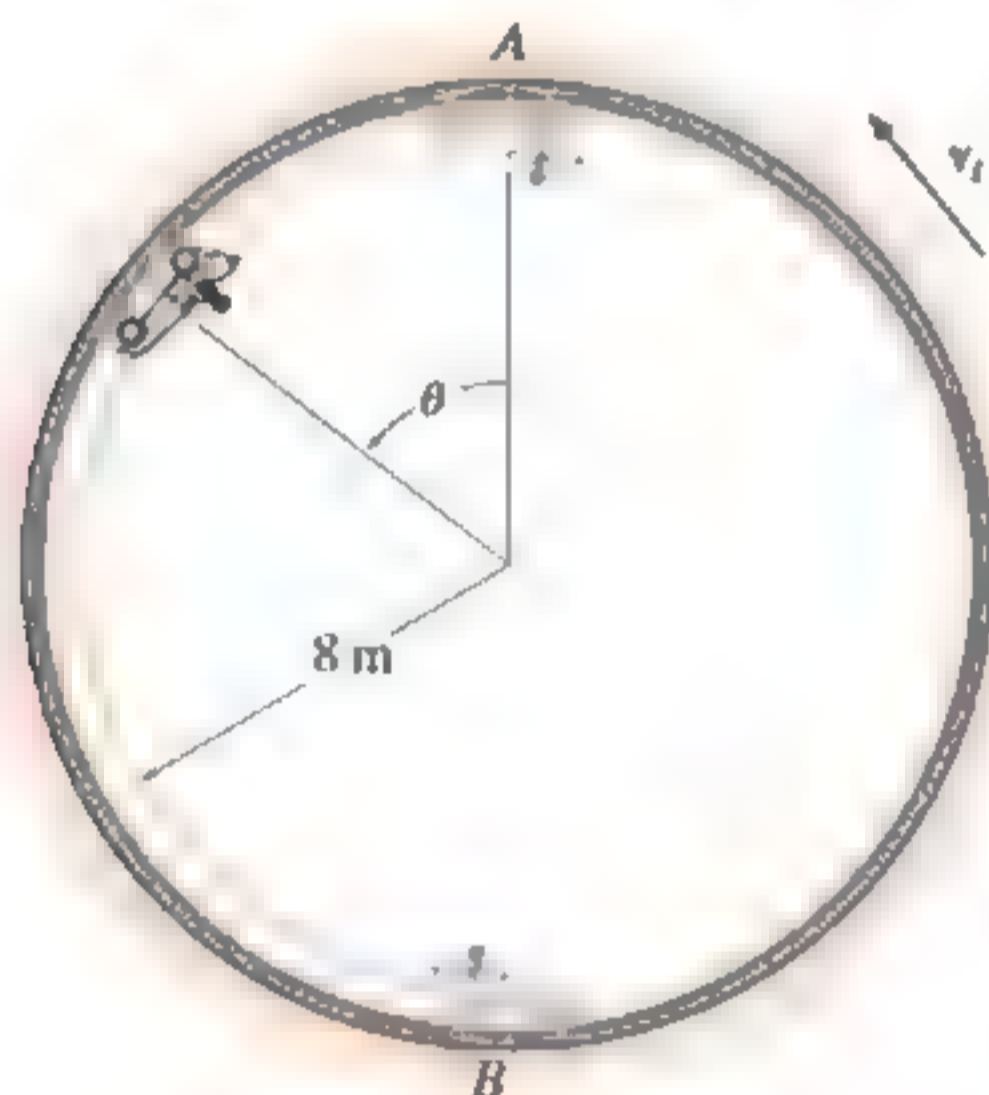
Prob. 14-25

**14-26.** El mecanismo de catapulta se utiliza para propulsar el deslizador  $A$  de 10 kg hacia la derecha a lo largo del riel liso. La acción propulsora se obtiene al jalar rápidamente la polea unida a la varilla  $BC$  hacia la izquierda por medio de un pistón  $P$ . Si el pistón aplica una fuerza constante  $F = 20$  kN a la varilla  $BC$ , de modo que la mueve 0.2 m, determine la rapidez alcanzada por el deslizador si éste se encuentra originalmente en reposo. Desprecie la masa de las poleas, el cable, el pistón y la varilla  $BC$ .



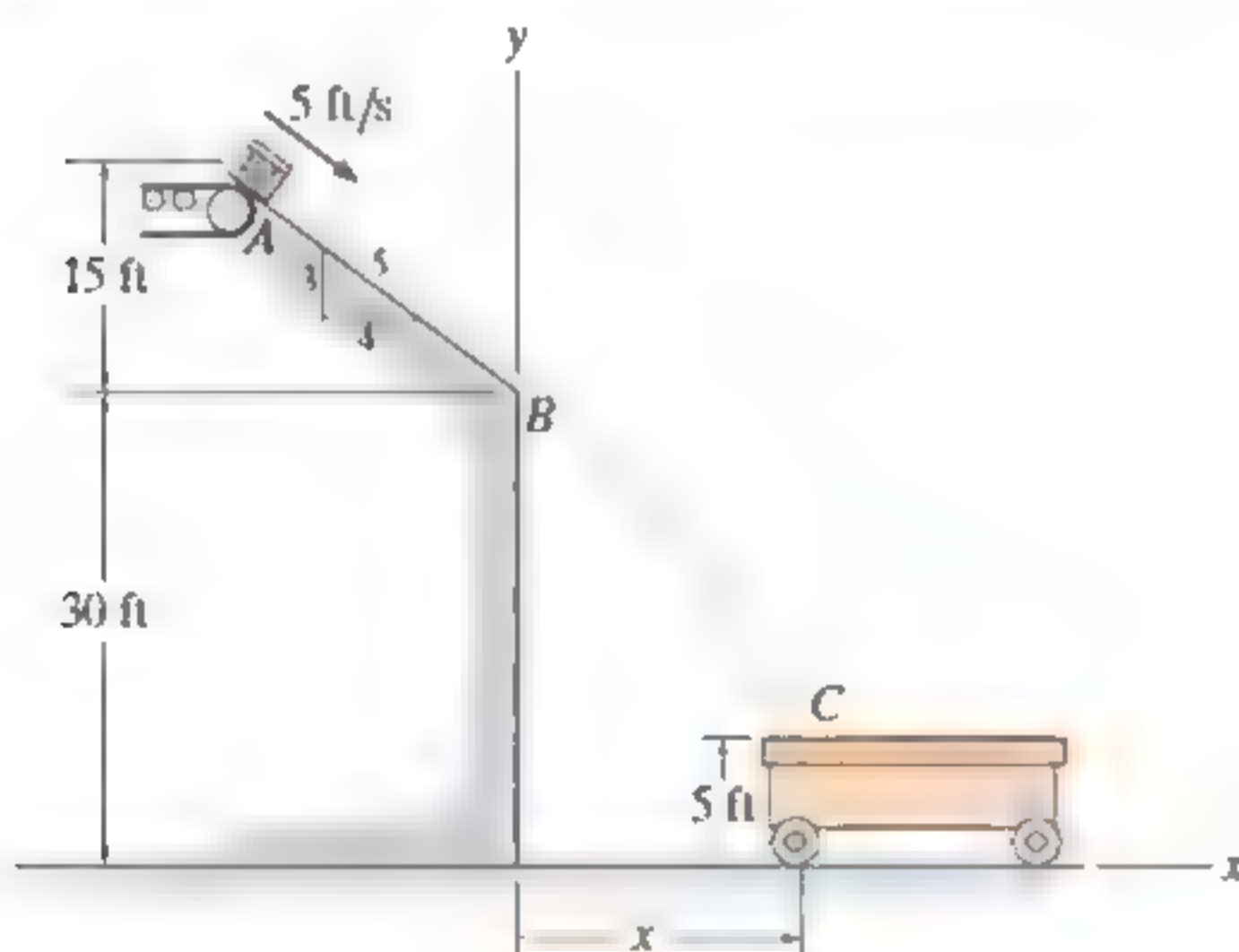
Prob. 14-26

**14-27.** El “auto volador” es una atracción en un parque de diversiones, que consiste en un automóvil con neumáticos que ruedan a lo largo de una pista montada en el interior de un tambor giratorio. Por diseño, el automóvil no puede caerse de la pista; sin embargo, el movimiento del auto se desarrolla al aplicar los frenos, con lo que el auto se adhiere a la pista y permite que se mueva con una rapidez constante,  $v_i = 3$  m/s. Si el conductor aplica el freno cuando va de  $B$  a  $A$  y, luego, lo libera en la parte superior del tambor,  $A$ , de manera que el auto se desplaza libremente hacia abajo a lo largo de la pista hasta  $B$  ( $\theta = \pi$  rad), determine la rapidez del automóvil en  $B$  y la reacción normal que ejerce el tambor sobre el auto en  $B$ . Desprecie la fricción durante el movimiento de  $A$  a  $B$ . El conductor y el automóvil tienen una masa total de 250 kg, y el centro de masa del auto y el conductor se mueve a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de 8 m.



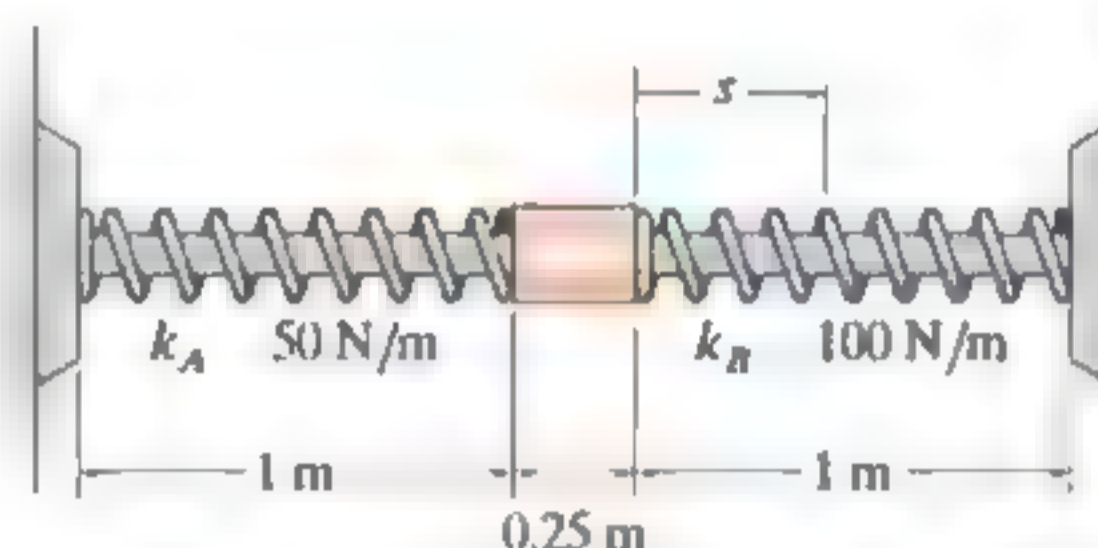
Prob. 14-27

**\*14-28.** La caja de 10 lb cae por la banda transportadora a 5 ft/s. Si el coeficiente de fricción cinética a lo largo de  $AB$  es  $\mu_k = 0.2$ , determine la distancia  $x$  a la que cae la caja en el carro.



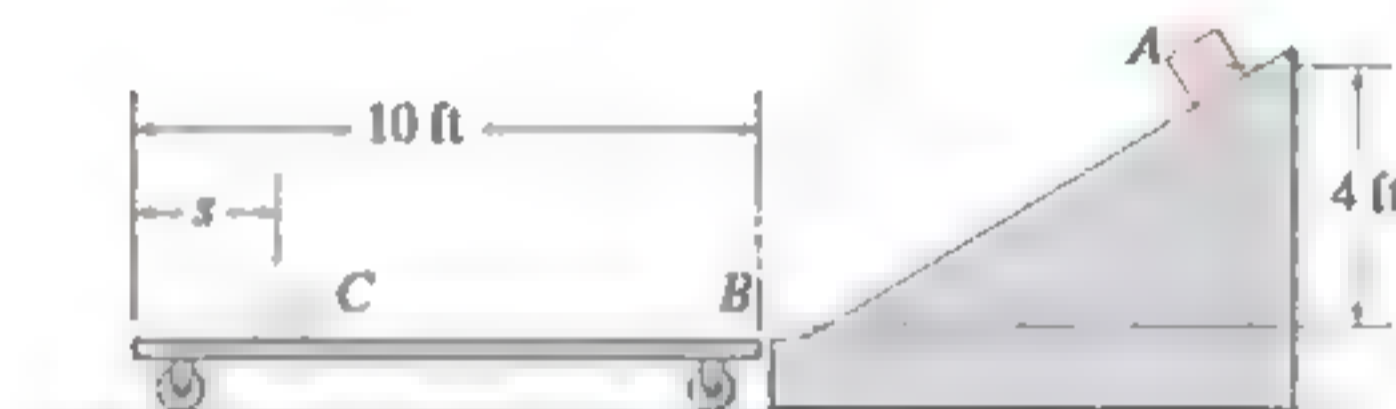
Prob. 14-28

**14-29.** El collarín tiene una masa de 20 kg y se desliza a lo largo de la varilla lisa. Hay dos resortes que están unidos al collarín y a los extremos de la varilla, como se indica en la figura. Si cada resorte tiene una longitud no comprimida de 1 m y el collarín tiene una rapidez de 2 m/s cuando  $s = 0$ , determine la compresión máxima de cada resorte debido al movimiento oscilante (de vaivén) del collarín.



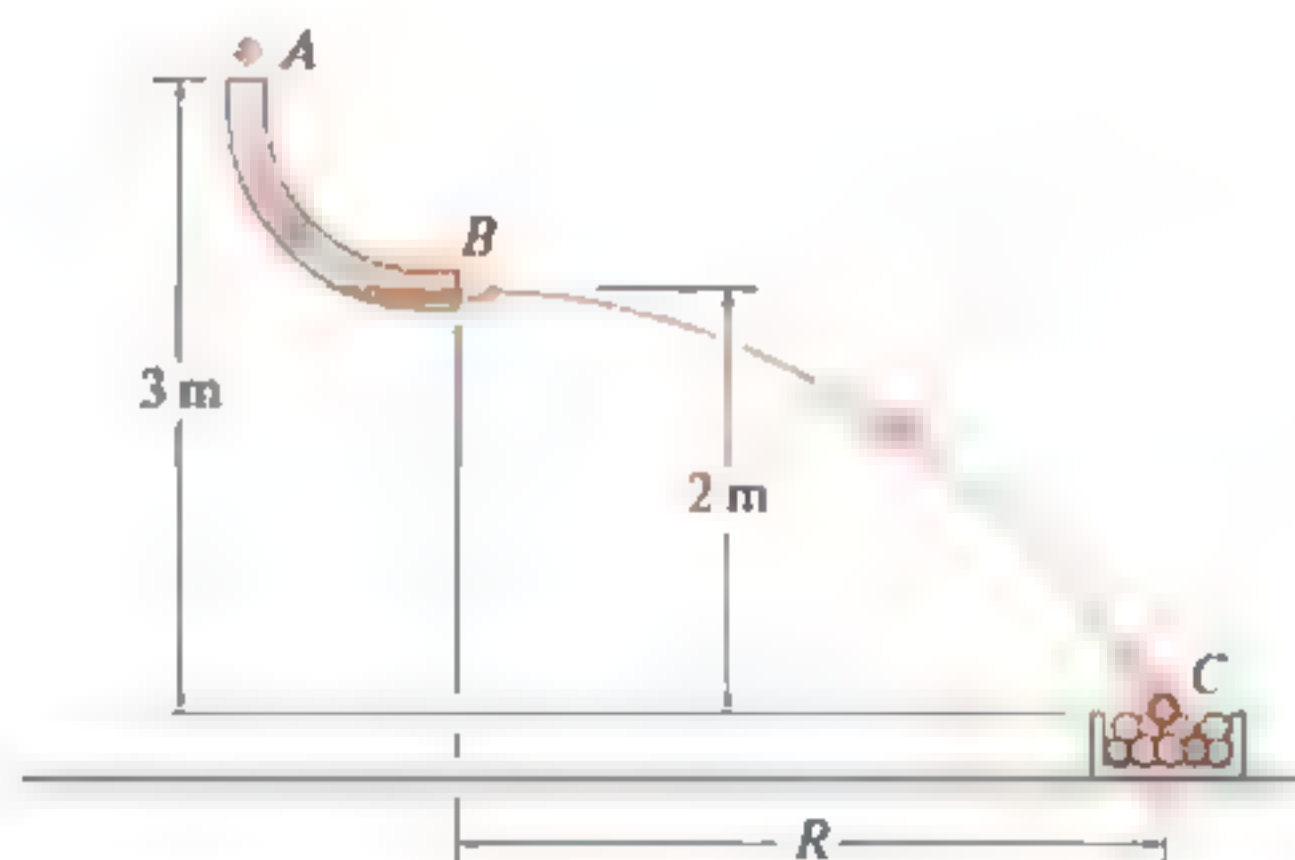
Prob. 14-29

**14-30.** La caja  $A$  de 30 lb se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo a lo largo de la rampa lisa y sobre la superficie de un carro. Si el carro *no puede moverse*, determine la distancia  $s$ , medida desde el extremo del carro, a donde se detiene la caja. El coeficiente de fricción cinética entre el carro y la caja es  $\mu_k = 0.6$ .



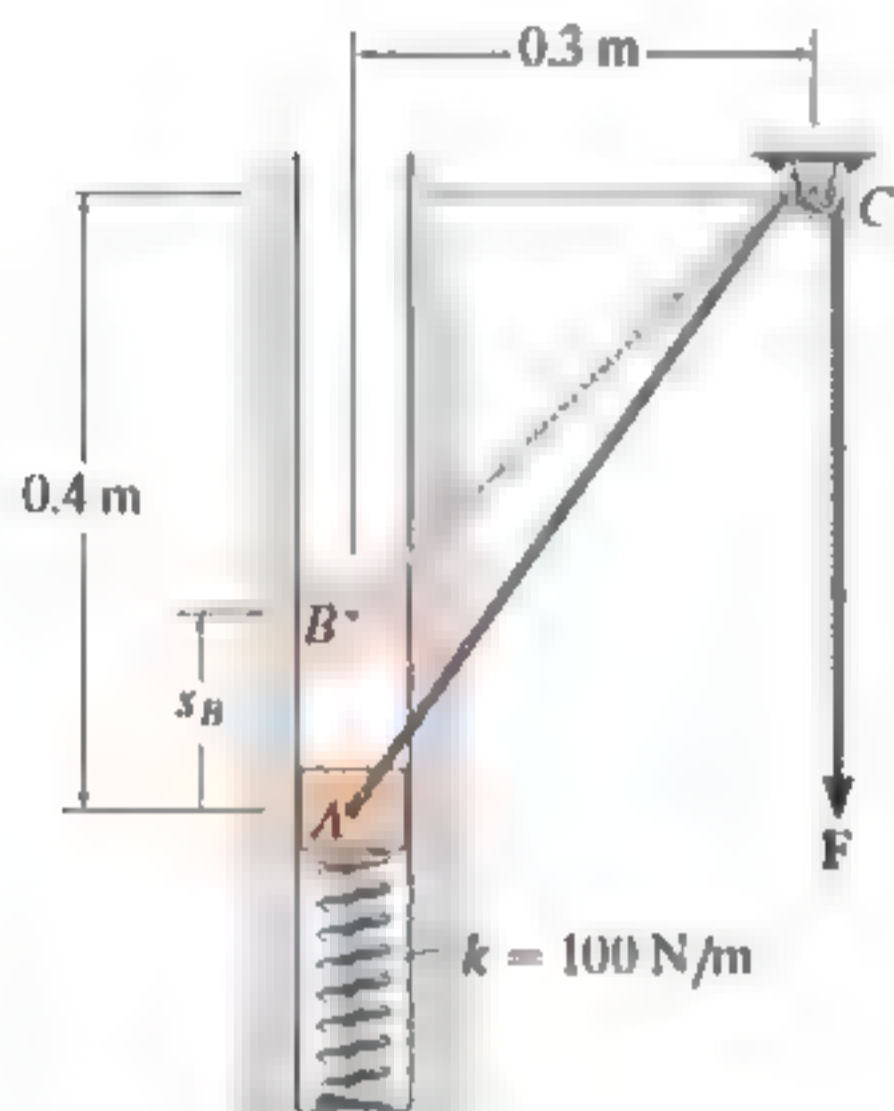
Prob. 14-30

**14-31.** Las canicas, que tienen una masa de 5 g cada una, se dejan caer desde el reposo en  $A$ , a través del tubo de vidrio liso, y se acumulan en la lata en  $C$ . Determine la colocación  $R$  de la lata medida desde el extremo del tubo y la rapidez a la que las canicas caen en la lata. Desprecie el tamaño de la lata.



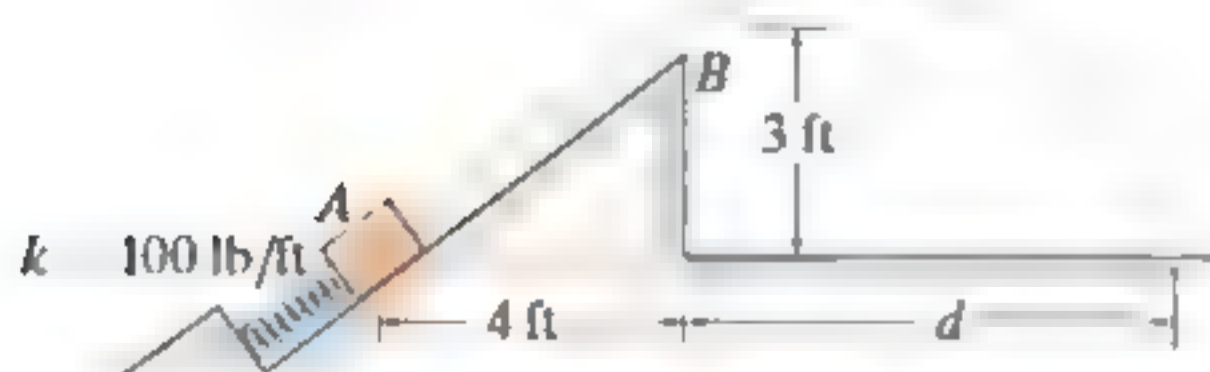
Prob. 14-31

**\*14-32.** El bloque tiene una masa de 0.8 kg y se mueve dentro de la ranura vertical lisa. Si parte del reposo cuando el resorte al que está *unido* se encuentra en la posición sin estirar en *A*, determine la fuerza vertical *F* constante que debe aplicarse a la cuerda, de modo que el bloque alcance una rapidez  $v_B = 2.5$  m/s cuando llega a *B*;  $s_B = 0.15$  m. Desprecie el tamaño y la masa de la polea. *Sugerencia:* El trabajo de *F* se puede determinar calculando la diferencia  $\Delta l$  en las longitudes de cuerda *AC* y *BC* y utilizando  $U_F = F \Delta l$ .



Prob. 14-32

**14-33.** El bloque de 10 lb presiona el resorte de manera que lo comprime 2 ft cuando está en *A*. Si el plano es liso, determine la distancia *d*, medida desde la pared, a la que el bloque golpea el suelo. Desprecie el tamaño del bloque.



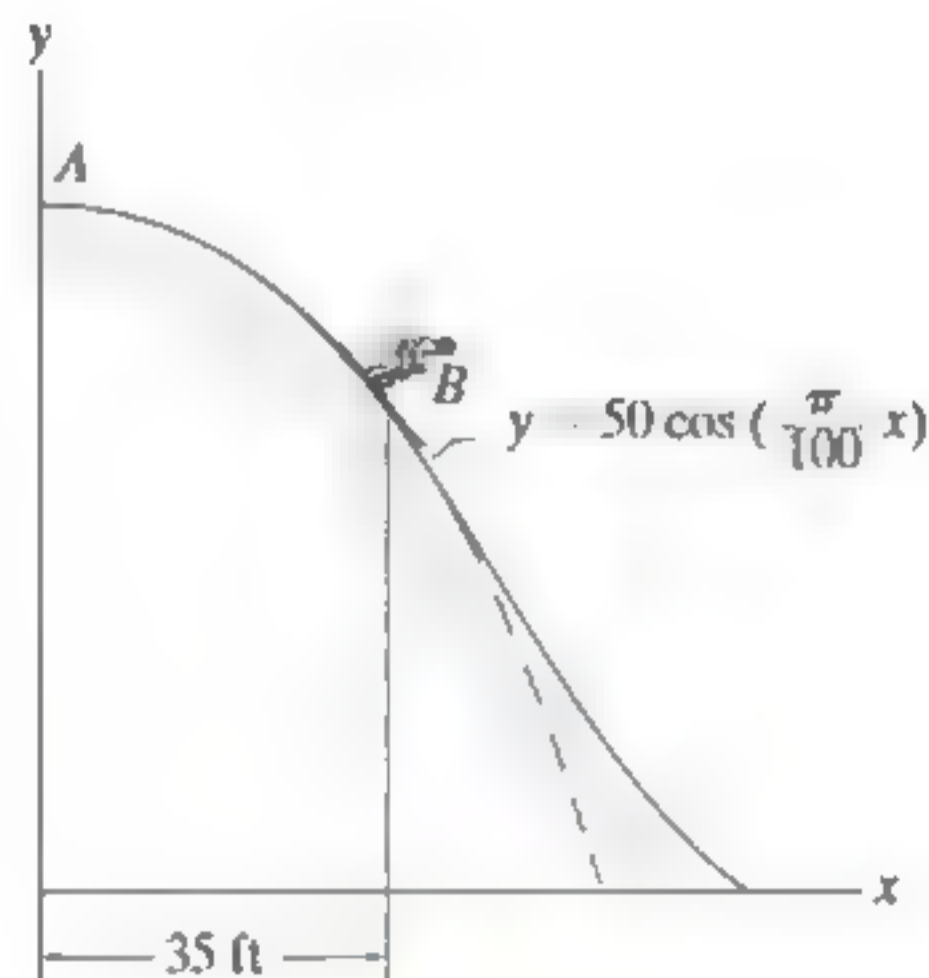
Prob. 14-33

**14-34.** El parachoques de resorte se utiliza para detener el movimiento del bloque de 4 lb, el cual se desliza hacia el parachoques a  $v = 9$  ft/s. Como se muestra, el resorte está confinado entre la placa *P* y la pared mediante cables, de manera que su longitud es de 1.5 ft. Si la rigidez del resorte es  $k = 50$  lb/ft, determine su longitud sin estirar requerida para que la placa no se desplace más de 0.2 ft, después de que el bloque choca contra ella. Desprecie la fricción, la masa de la placa y el resorte, así como la pérdida de energía entre la placa y el bloque durante la colisión.



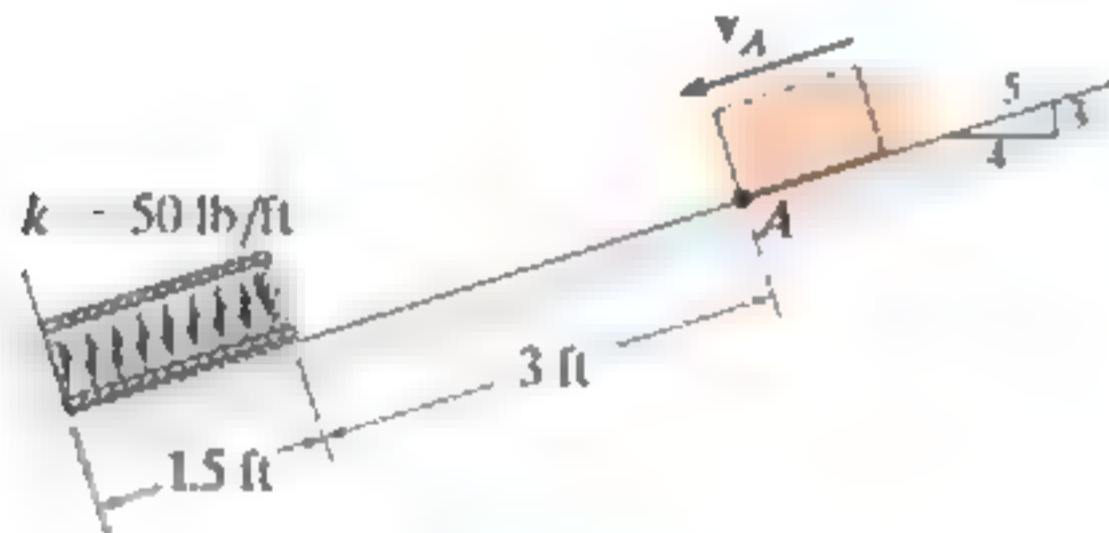
Prob. 14-34

**14-35.** Cuando el esquiador de 150 lb está en el punto *A*, tiene una rapidez de 5 ft/s. Determine su rapidez cuando alcanza el punto *B* sobre la pendiente lisa. En esta distancia, la pendiente sigue la curva coseno que se ilustra en la figura. Además, ¿cuál es la fuerza normal sobre los esquís en *B* y la razón a la que aumenta la rapidez del esquiador? Desprecie la fricción y la resistencia del aire.



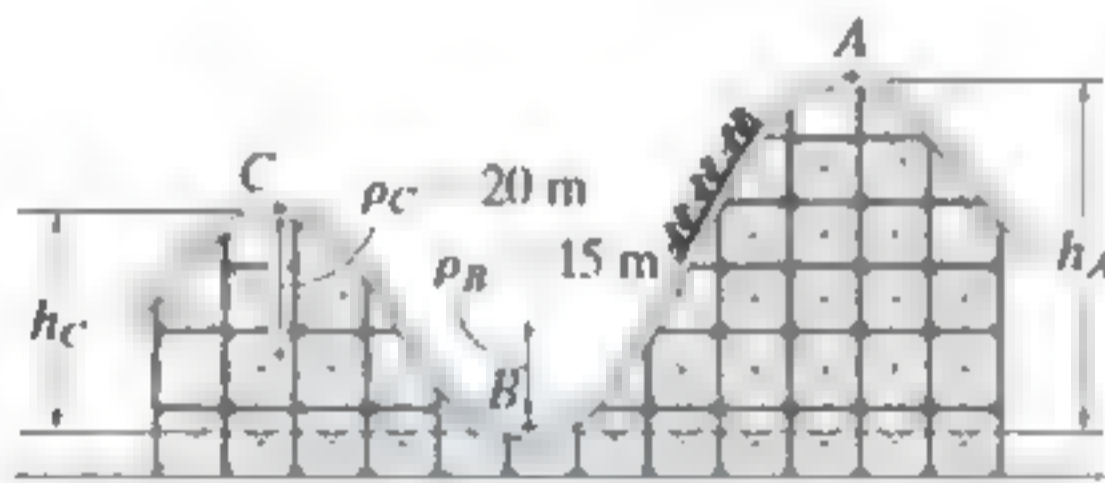
Prob. 14-35

**\*14-36.** El resorte tiene una rigidez  $k = 50 \text{ lb/ft}$  y una longitud sin estirar de 2 ft. Como se muestra, está confinado entre la placa y la pared mediante cables, de modo que su longitud es de 1.5 ft. Al bloque de 4 lb se le da una rapidez  $v_A$  cuando está en A, y se desliza hacia abajo sobre la pendiente, cuyo coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k = 0.2$ . Si golpea la placa y la empuja 0.25 ft hacia adelante antes de parar, determine su rapidez en A. Desprecie la masa de la placa y el resorte.



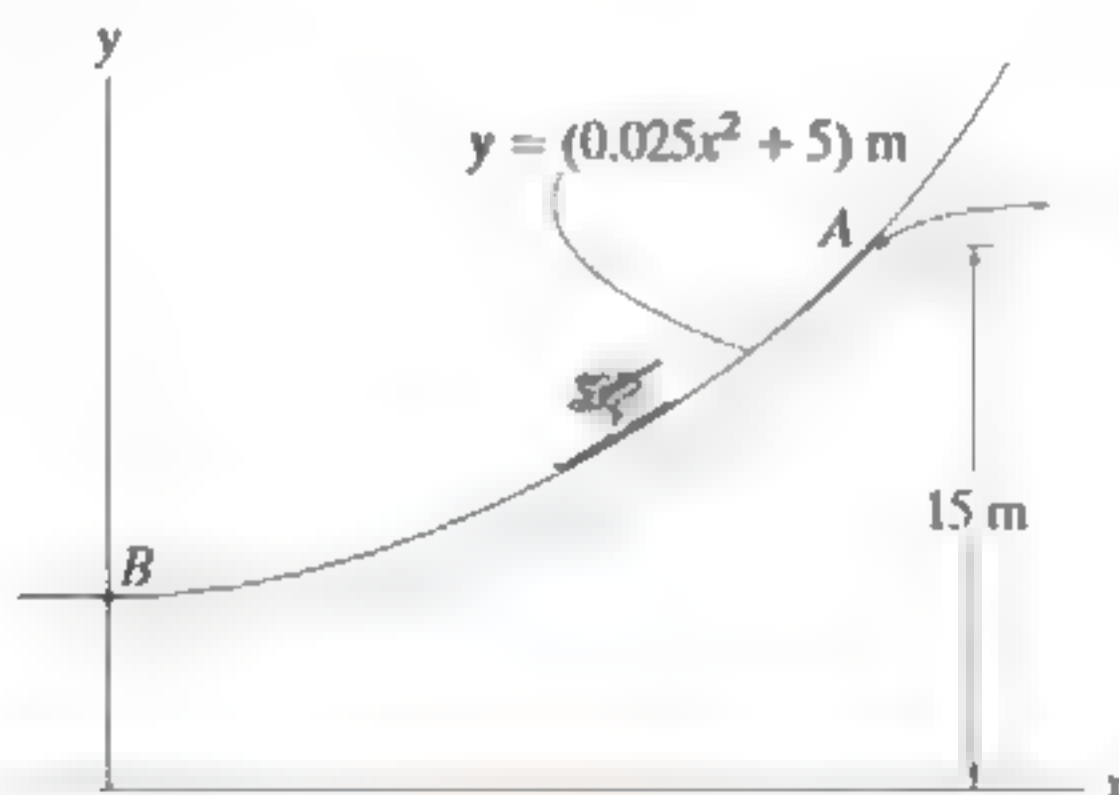
Prob. 14-36

**14-37.** Si la pista debe diseñarse para que los pasajeros de la montaña rusa no experimenten una fuerza normal igual a cero o más de 4 veces su peso, determine las alturas límite  $h_A$  y  $h_C$  para que esto no suceda. La montaña rusa parte desde el reposo en la posición A. Desprecie la fricción.



Prob. 14-37

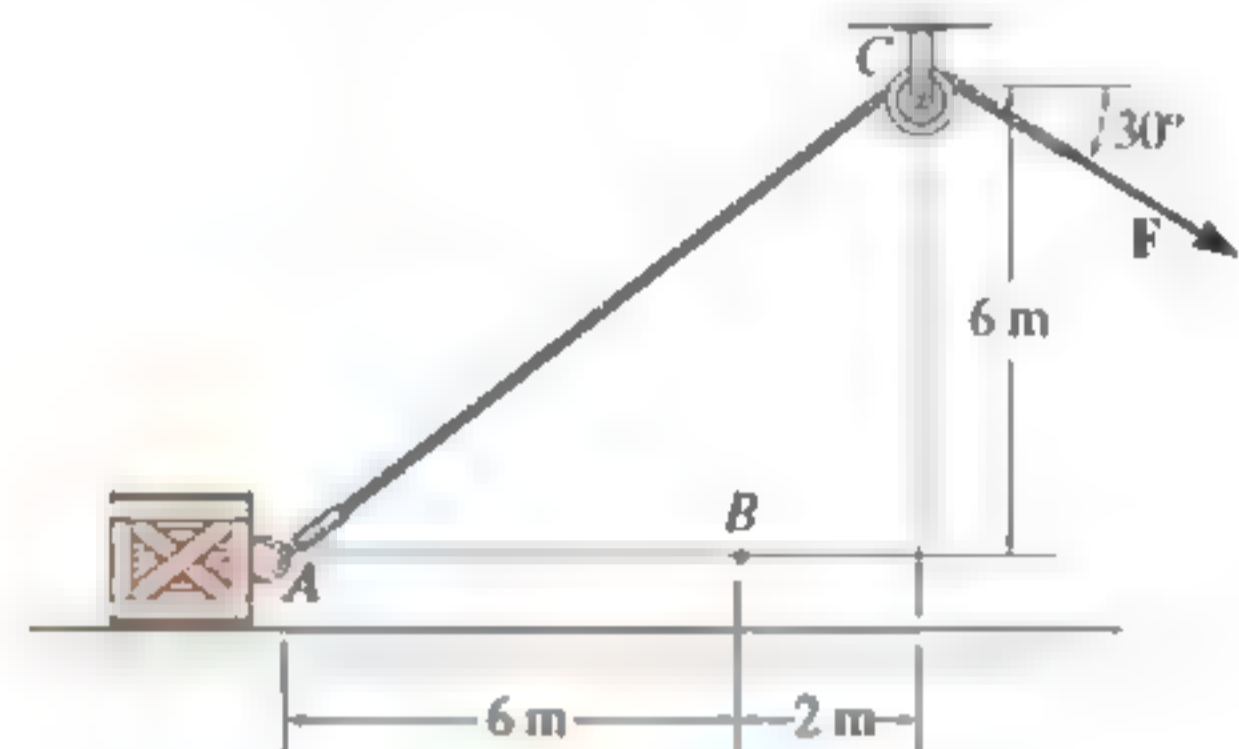
**14-38.** Si el esquiador de 60 kg pasa por el punto A con una rapidez de 5 m/s, determine su rapidez cuando alcanza el punto B. Además, encuentre la fuerza normal ejercida sobre él por la pendiente en este punto. Desprecie la fricción.



Prob. 14-38

**14-39.** Si el embalaje de 75 kg parte desde el reposo en A, determine su rapidez cuando alcanza el punto B. El cable está sometido a una fuerza constante de  $F = 300 \text{ N}$ . Desprecie la fricción y el tamaño de la polea.

**\*14-40.** Si el embalaje de 75 kg parte desde el reposo en A, y su rapidez es de 6 m/s cuando pasa por el punto B, determine la fuerza F constante ejercida sobre el cable. Desprecie la fricción y el tamaño de la polea.



Probs. 14-39/40

**14-41.** Un bloque de 2 lb descansa sobre la superficie semicilíndrica lisa. Una cuerda elástica que tiene una rigidez  $k = 2 \text{ lb/ft}$  está unida al bloque en B y a la base del semicilindro en el punto C. Si el bloque se libera desde el reposo en A ( $\theta = 0^\circ$ ), determine la longitud sin estirar de la cuerda, de modo que el bloque comience a desprenderse del semicilindro en el instante  $\theta = 45^\circ$ . Desprecie el tamaño del bloque.



Prob. 14-41

## 14.4 Potencia y eficiencia

**Ejemplo 14.4** El término “potencia” constituye una base útil para seleccionar el tipo de motor o máquina requerido para realizar cierta cantidad de trabajo en un tiempo dado. Se pueden tener dos bombas, por ejemplo, y cada una de éstas es capaz de vaciar un depósito, si se le da tiempo suficiente; sin embargo, si se elige la bomba de mayor potencia completará la tarea más rápido.

Por consiguiente, la *potencia* generada por una máquina o un motor que realiza cierta cantidad de trabajo  $dU$  dentro del intervalo de tiempo  $dt$  es

$$P = \frac{dU}{dt} \quad (14-9)$$

Si el trabajo  $dU$  se expresa como  $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , entonces

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

o bien,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (14-10)$$

De ahí que la potencia sea un *escalar*, donde en esta fórmula  $\mathbf{v}$  representa la velocidad de la partícula en la cual actúa la fuerza  $\mathbf{F}$ .

Las unidades básicas de potencia utilizadas en el SI y el sistema FPS son el watt (W) y el caballo de fuerza (hp), respectivamente. Estas unidades se definen como

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

Para la conversión entre los dos sistemas de unidades,  $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$ .

**Ejemplo 14.5** La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la razón entre la salida de potencia útil producida por la máquina y la entrada de potencia suministrada a la máquina. Por lo tanto,

$$\epsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (14-11)$$

La potencia de salida de esta locomotora se deriva de la fuerza de fricción propulsora desarrollada en sus ruedas. Ésta es la fuerza que vence la resistencia a la fricción de los vagones remolcados y es capaz de llevar el peso del tren cuesta arriba. (© R. C. Hibbeler)

Si la energía suministrada a la máquina ocurre durante el *mismo intervalo de tiempo* en el cual es extraída, entonces la eficiencia también se expresa en función de la relación

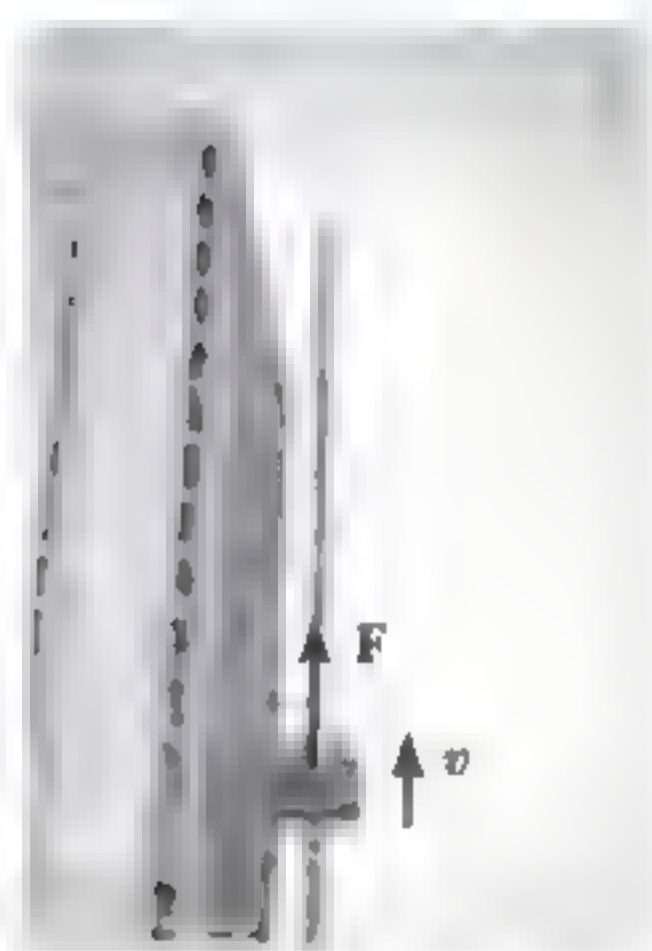
$$\epsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (14-12)$$

Como las máquinas se componen de una serie de piezas móviles, siempre se desarrollarán fuerzas de fricción dentro de ellas y, por consiguiente, se requiere energía extra o potencia adicional para vencer tales fuerzas. Por lo tanto, la potencia de salida será menor que la potencia de entrada, de ahí que la *eficiencia de una máquina siempre es menor que 1*.

La potencia suministrada a un cuerpo se determina mediante el siguiente procedimiento.

### Procedimiento para el análisis

- Primero determine la fuerza externa  $\mathbf{F}$  que actúa en el cuerpo y que origina el movimiento. Esta fuerza casi siempre la genera una máquina o un motor que se coloca dentro o fuera del cuerpo.
- Si el cuerpo está acelerado, podría requerirse dibujar su diagrama de cuerpo libre y aplicar la ecuación de movimiento ( $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) para determinar  $\mathbf{F}$ .
- Una vez que se determina  $\mathbf{F}$  y la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula donde se aplica  $\mathbf{F}$ , la potencia se determina al multiplicar la magnitud de la fuerza por la componente de velocidad que actúa en la dirección de  $\mathbf{F}$  (es decir,  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta$ ).
- En algunos problemas, la potencia se determina calculando el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  por unidad de tiempo ( $P_{\text{prom}} = \Delta U / \Delta t$ ).



Los requerimientos de potencia de este ascensor dependen de la fuerza vertical  $\mathbf{F}$  que actúa en él y que hace que se desplace hacia arriba. Si la velocidad del elevador es  $\mathbf{v}$ , entonces la potencia de salida es  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ .  
(© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

El hombre que aparece en la figura 14-15a empuja el embalaje de 50 kg con una fuerza  $F = 150$  N. Determine la potencia suministrada por el hombre cuando  $t = 4$  s. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y el embalaje es  $\mu_k = 0.2$ . En un principio, el embalaje está en reposo.

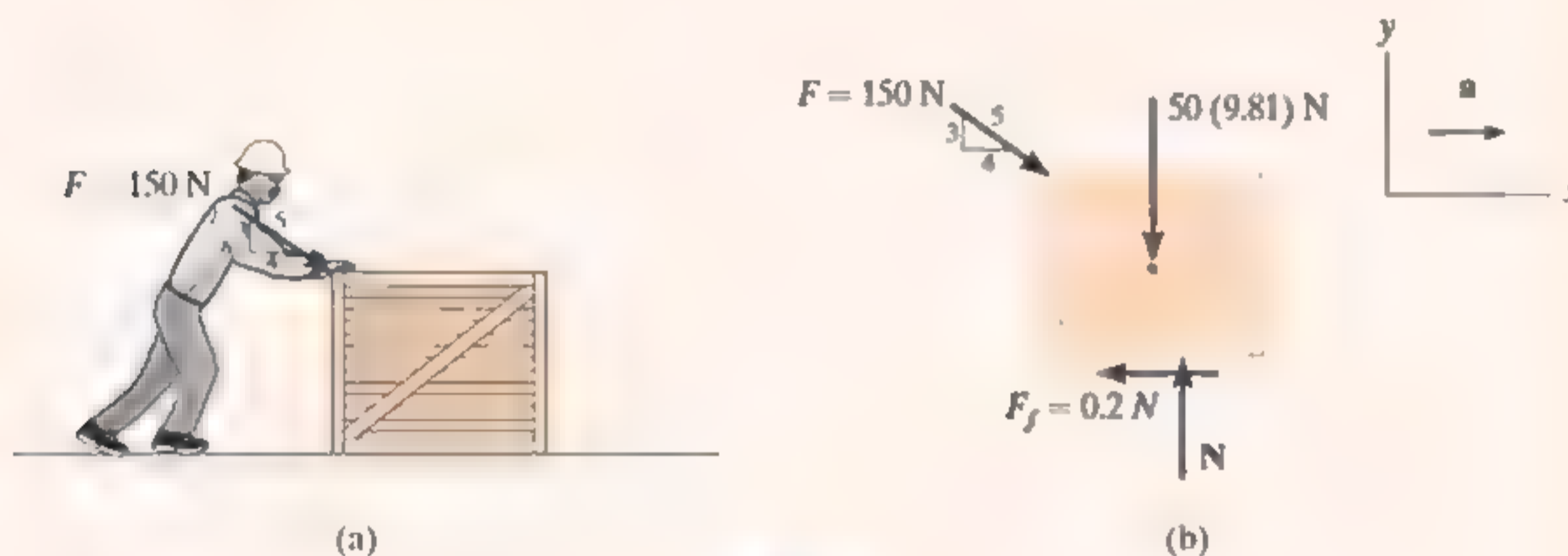


Fig. 14-15

## SOLUCIÓN

Para determinar la potencia desarrollada por el hombre, primero debe calcularse la velocidad del embalaje producida por la fuerza de 150 N. El diagrama de cuerpo libre del embalaje se muestra en la figura 14-15b. Al aplicar la ecuación de movimiento,

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N - \left(\frac{3}{5}\right)150 \text{ N} - 50(9.81) \text{ N} = 0$$

$$N = 580.5 \text{ N}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad \left(\frac{4}{5}\right)150 \text{ N} - 0.2(580.5 \text{ N}) = (50 \text{ kg})a$$

$$a = 0.078 \text{ m/s}^2$$

Por consiguiente, la velocidad del embalaje cuando  $t = 4$  s es

$$(\rightarrow) \quad v = v_0 + a_c t$$

$$v = 0 + (0.078 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s}) = 0.312 \text{ m/s}$$

La potencia suministrada al embalaje por el hombre, cuando  $t = 4$  s es, por consiguiente,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v = \left(\frac{4}{5}\right)(150 \text{ N})(0.312 \text{ m/s})$$

$$= 37.4 \text{ W}$$

## EJEMPLO

El motor  $M$  del malacate en la figura 14-16a levanta el embalaje  $C$  de 75 lb, de modo que la aceleración del punto  $P$  es de  $4 \text{ ft/s}^2$ . Determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante en que la velocidad de  $P$  es de  $2 \text{ ft/s}$ . Ignore la masa de la polea y el cable y considere  $e = 0.85$ .

## SOLUCIÓN

Para determinar la potencia de salida del motor, primero es necesario determinar la tensión en el cable, ya que el motor genera esta fuerza. A partir del diagrama de cuerpo libre (fig. 14-16b), tenemos

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad -2T + 75 \text{ lb} = \frac{75 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} a_c \quad (1)$$

La aceleración del embalaje puede calcularse por medio de la cinemática para relacionarla con la aceleración conocida del punto  $P$  (fig. 14-16a). Con los métodos del movimiento dependiente absoluto, las coordenadas  $s_C$  y  $s_P$  pueden relacionarse con una parte constante de la longitud del cable  $l$ , la cual cambia en las direcciones vertical y horizontal. Tenemos  $2s_C + s_P = l$ . Al tomar la segunda derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, resulta

$$2a_C = -a_P \quad (2)$$

Como  $a_P = +4 \text{ ft/s}^2$ , entonces  $a_C = -(4 \text{ ft/s}^2)/2 = -2 \text{ ft/s}^2$ . ¿Qué indica el signo negativo? Al sustituir este resultado en la ecuación 1, y *conservando* el signo negativo, ya que la aceleración *tanto* en la ecuación 1 *como* en la ecuación 2 se consideró positiva hacia abajo, tenemos

$$\begin{aligned} -2T + 75 \text{ lb} &= \left( \frac{75 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (-2 \text{ ft/s}^2) \\ T &= 39.83 \text{ lb} \end{aligned}$$

La potencia de salida, medida en caballos de fuerza, requerida para jalar el cable a razón de  $2 \text{ ft/s}$  es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (39.83 \text{ lb})(2 \text{ ft/s}) [1 \text{ hp}/(550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s})] \\ &= 0.1448 \text{ hp} \end{aligned}$$

Esta *potencia de salida* requiere que el motor proporcione una *potencia de entrada* de

$$\begin{aligned} \text{potencia de entrada} &= \frac{1}{e} (\text{potencia de salida}) \\ &= \frac{1}{0.85} (0.1448 \text{ hp}) = 0.170 \text{ hp} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

**NOTA:** Como la velocidad del embalaje cambia constantemente, el requerimiento de potencia es *instantáneo*.

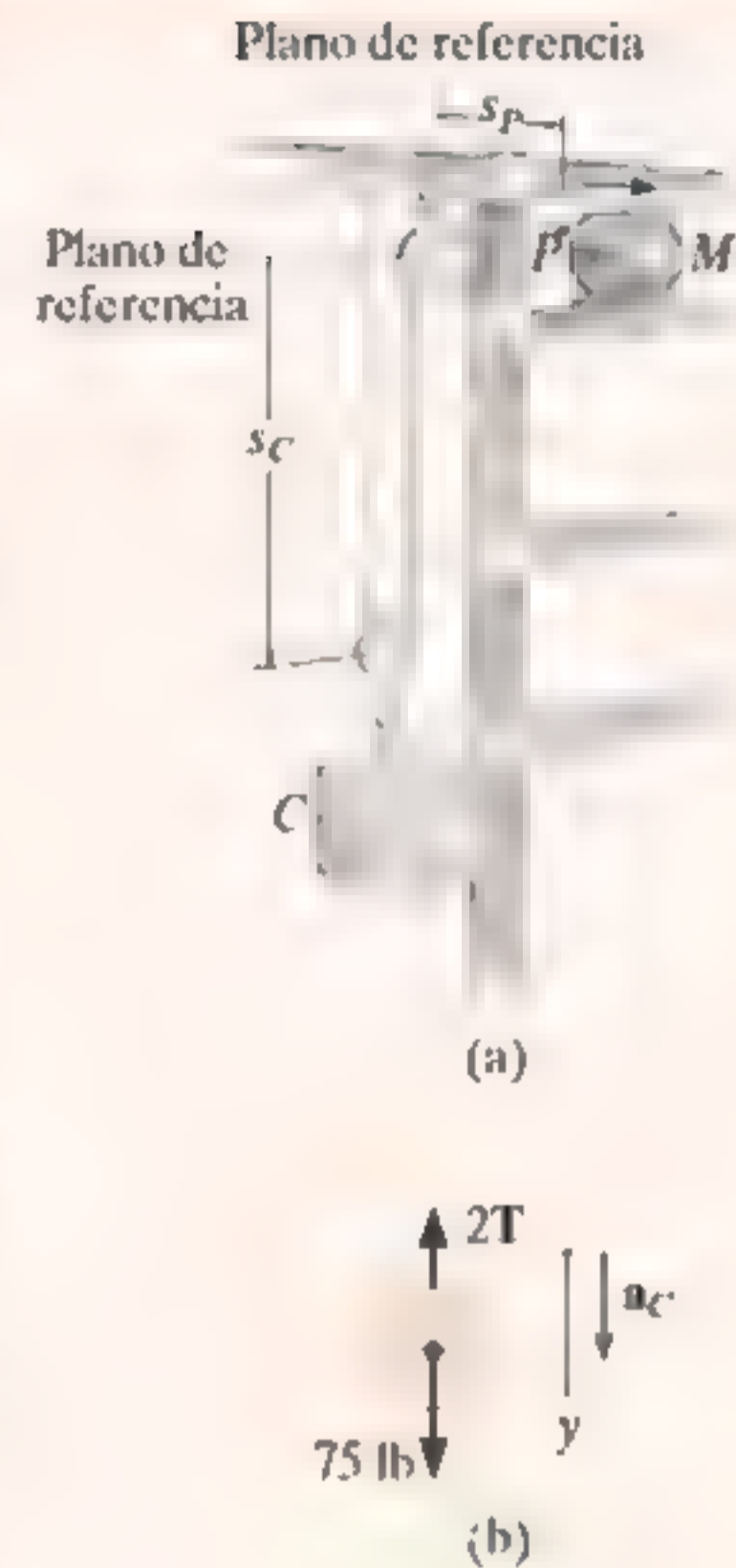
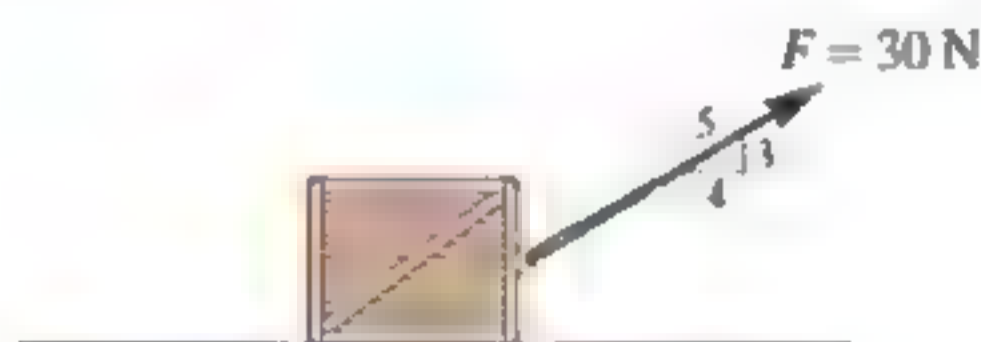


Fig. 14-16

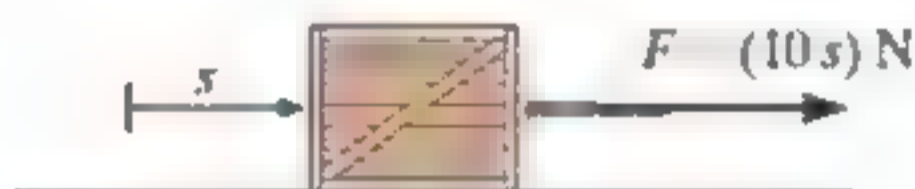
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F14-7.** Si la superficie de contacto entre el bloque de 20 kg y el suelo es lisa, determine la potencia de la fuerza  $F$  cuando  $t = 4$  s. En un principio, el bloque está en reposo.



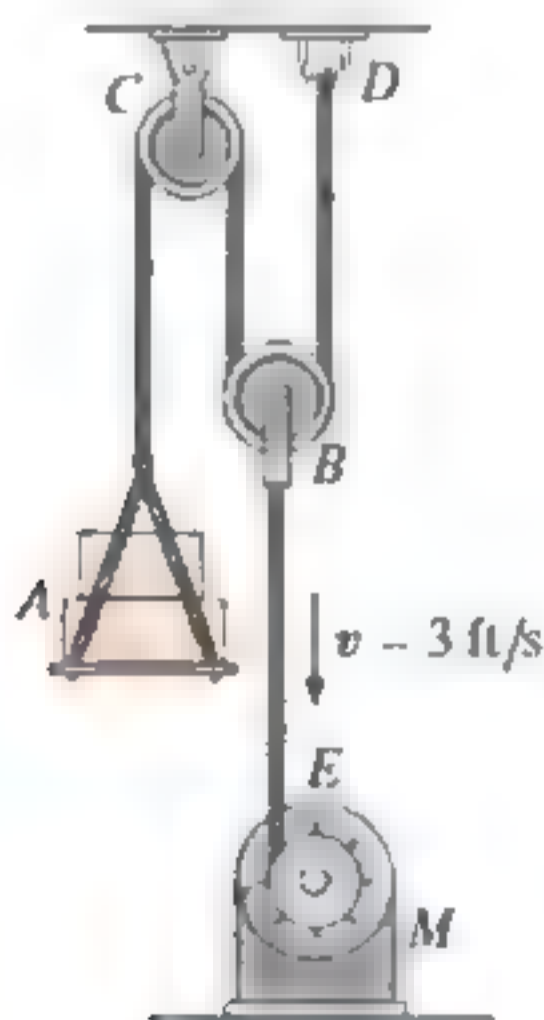
Prob. F14-7

**F14-8.** Si  $F = (10s)$  N, donde  $s$  está en metros y la superficie de contacto entre el bloque y el suelo es lisa, determine la potencia de la fuerza  $F$ , cuando  $s = 5$  m. Cuando  $s = 0$ , el bloque de 20 kg se mueve a  $v = 1$  m/s.



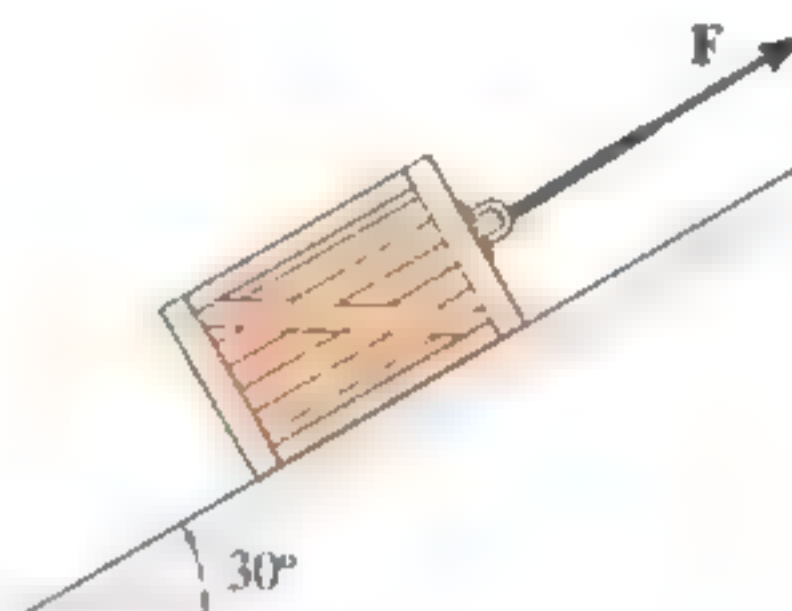
Prob. F14-8

**F14-9.** Si el motor enrolla el cable a una rapidez constante de  $v = 3$  ft/s, determine la potencia suministrada al motor. La carga pesa 100 lb y la eficiencia del motor es  $\epsilon = 0.8$ . Ignore la masa de las poleas.



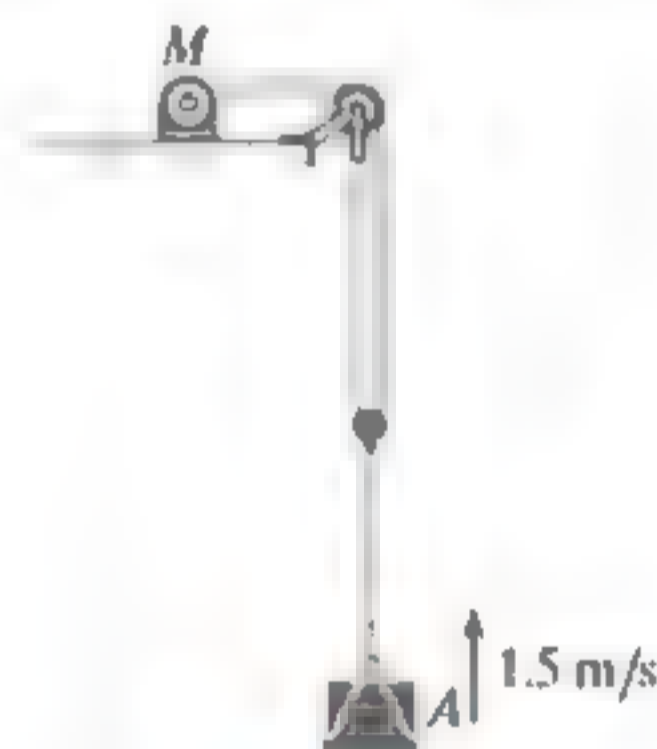
Prob. F14-9

**F14-10.** El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 20 kg y el plano inclinado es  $\mu_k = 0.2$ . Si el bloque se mueve hacia arriba del plano inclinado a velocidad constante  $v = 5$  m/s, determine la potencia de la fuerza  $F$ .



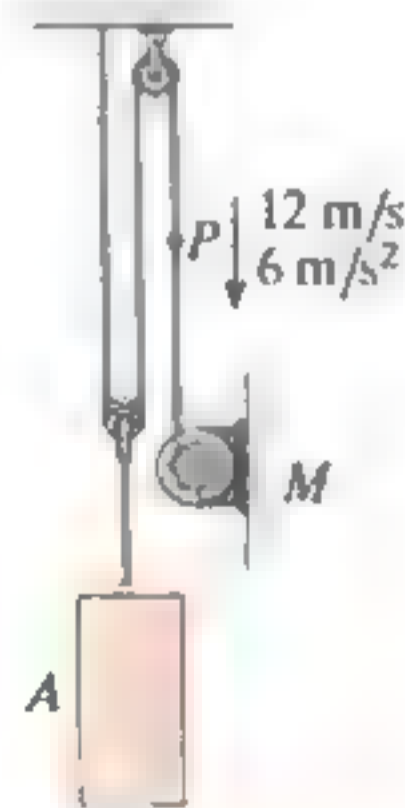
Prob. F14-10

**F14-11.** Si el motor  $M$  eleva la carga  $A$  de 50 kg a una velocidad constante de 1.5 m/s, determine la potencia de entrada del motor, el cual opera con una eficiencia  $\epsilon = 0.8$ .



Prob. F14-11

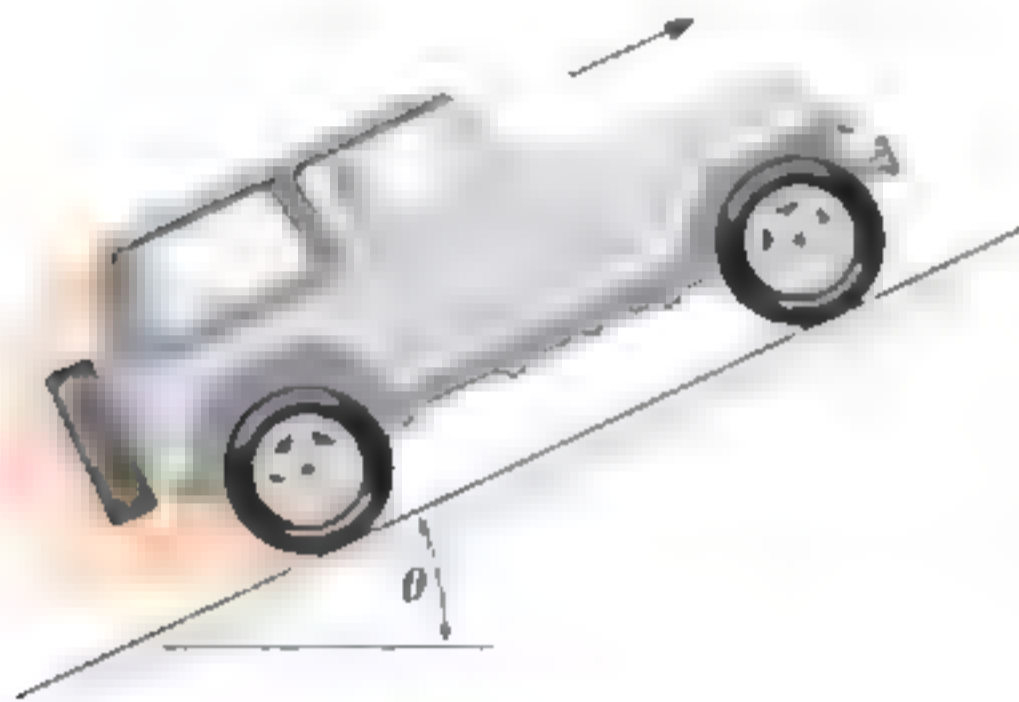
**F14-12.** En el instante mostrado, el punto  $P$  en el cable tiene una velocidad  $v_P = 12$  m/s, la cual se incrementa a razón de  $a_P = 6$  m/s<sup>2</sup>. Determine la potencia de entrada del motor  $M$  en este instante, si opera con una eficiencia  $\epsilon = 0.8$ . La masa del bloque  $A$  es de 50 kg.



Prob. F14-12

## PROBLEMAS

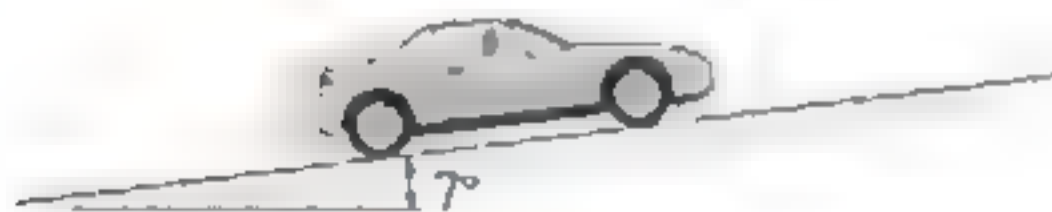
**14-42.** El jeep tiene un peso de 2500 lb y un motor que le transmite una potencia de 100 hp a *todas* las ruedas. Si se supone que las ruedas no se deslizan sobre el terreno, determine el ángulo  $\theta$  de la mayor inclinación que el jeep puede escalar a una rapidez constante  $v = 30$  ft/s.



Prob. 14-42

**14-43.** Determine la potencia de entrada necesaria para que un motor eleve 300 libras a una rapidez constante de 5 ft/s. La eficiencia del motor es  $\epsilon = 0.65$ .

**\*14-44.** Un automóvil que tiene una masa de 2 Mg se desplaza hacia arriba sobre una pendiente de  $7^\circ$  a una rapidez constante de  $v = 100$  km/h. Si la fricción mecánica y la resistencia del viento se pueden despreciar, determine la potencia desarrollada por el motor, si el automóvil tiene una eficiencia  $\epsilon = 0.65$ .



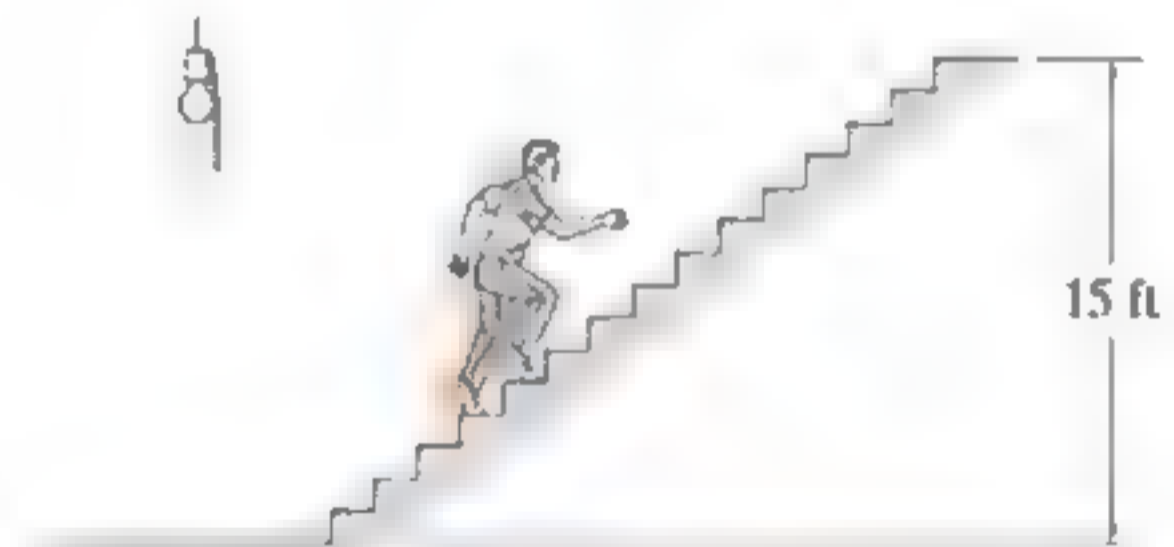
Prob. 14-44

**14-45.** La Milkin Aircraft Co. fabrica un motor turbo-reactor que se instala en un avión que pesa 13000 lb. Si el motor desarrolla un empuje constante de 5200 lb, determine la potencia de salida del avión cuando está a punto de despegar con una rapidez de 600 mi/h.

**14-46.** Para ejemplificar la pérdida de energía en un automóvil, considere un auto que tiene un peso de 5000 lb y se desplaza a 35 mi/h. Si el automóvil se detiene, determine cuánto tiempo debe estar encendida una bombilla de luz de 100 W para gastar la misma cantidad de energía. (1 mi = 5280 ft.)

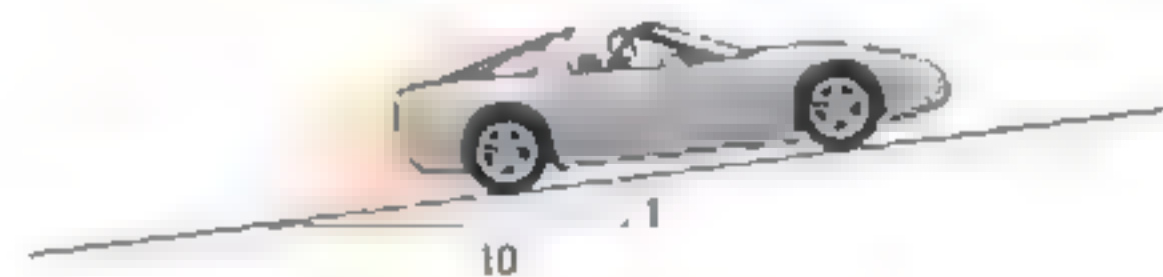
**14-47.** Los escalones de una escalera eléctrica se mueven con una rapidez constante de 0.6 m/s. Si los escalones tienen 125 mm de altura y 250 mm de longitud, determine la potencia del motor necesaria para levantar una masa promedio de 150 kg por escalón. Hay 32 escalones.

**\*14-48.** El hombre que tiene un peso de 150 lb es capaz de correr y alcanzar 15 pies de altura subiendo por las escaleras en 4 s. Determine la potencia generada. ¿Cuánto tiempo debe estar encendida una bombilla de luz de 100 W para gastar la misma cantidad de energía? *Conclusión:* ¡Por favor, apague las luces cuando no las utilice!



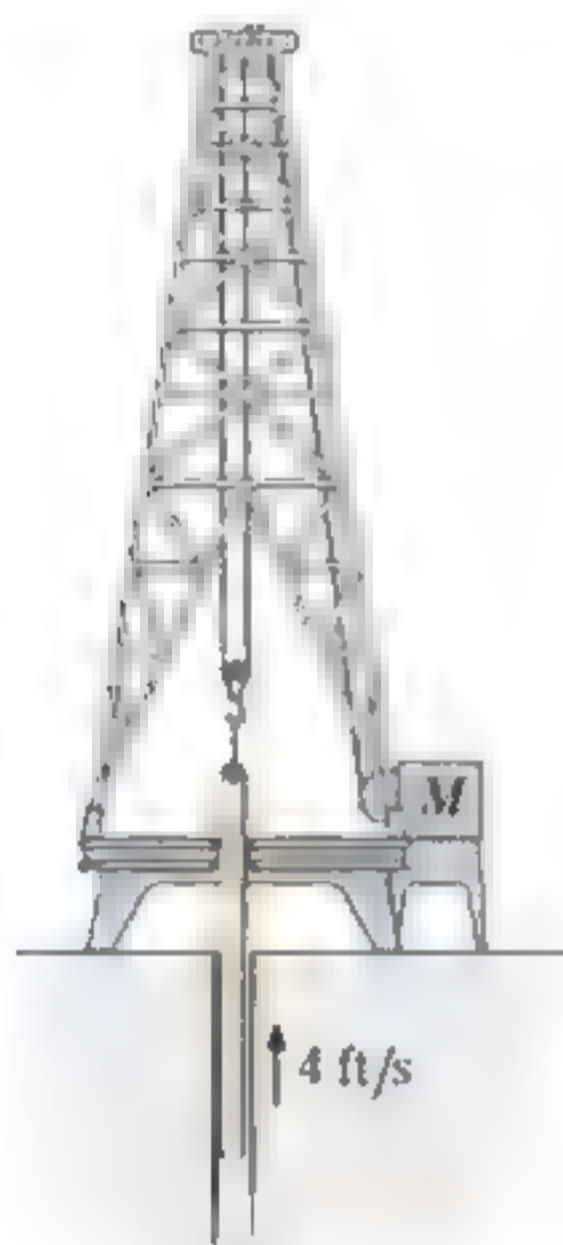
Prob. 14-48

**14-49.** El automóvil de 2 Mg aumenta su rapidez uniformemente desde el reposo hasta 25 m/s en 30 s por la carretera inclinada. Determine la potencia máxima que debe suministrar el motor, el cual funciona con una eficiencia de  $\epsilon = 0.8$ . Además, encuentre la potencia promedio suministrada por el motor.



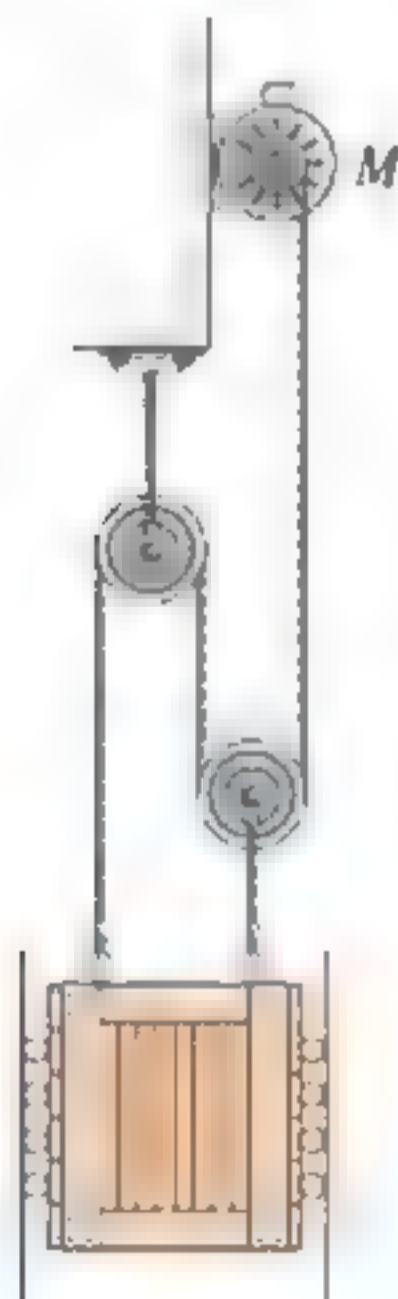
Prob. 14-49

**14-50.** Determine la potencia de salida del motor de extracción  $M$  que se requiere para levantar la tubería de perforación de 600 lb con una rapidez constante de 4 ft/s. El cable está sujeto a la parte superior de la plataforma petrolera, se enrolla alrededor de la polea inferior, luego alrededor de la polea superior y, en seguida, en el motor.



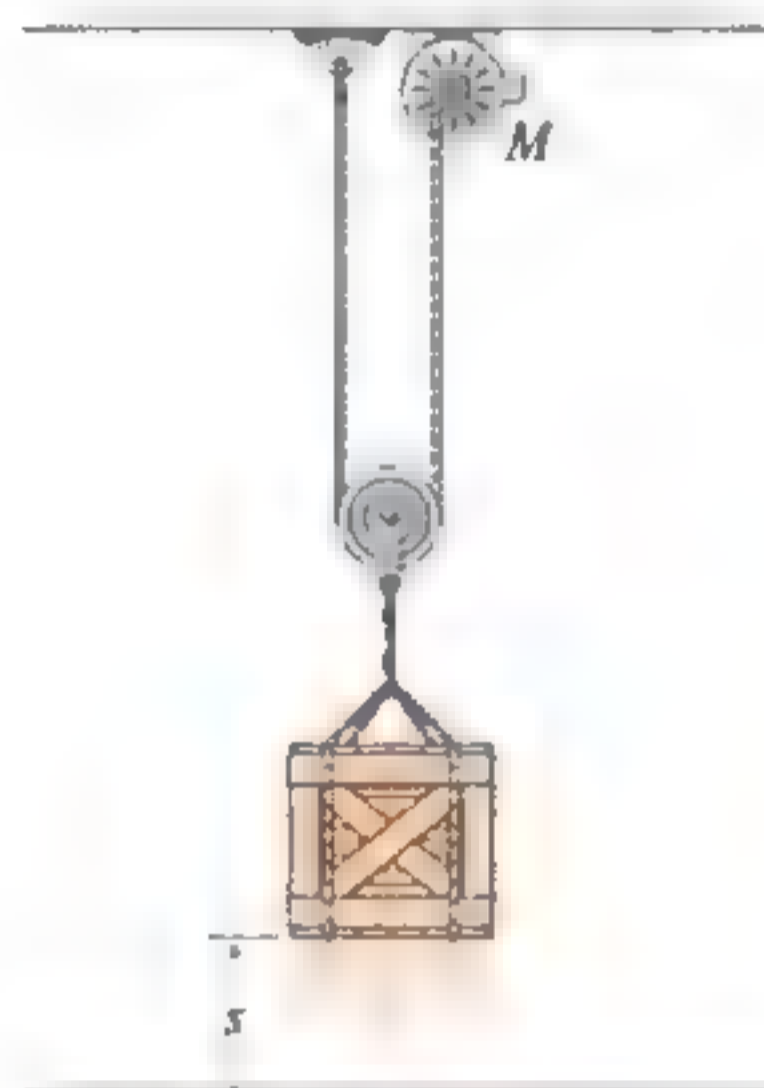
Prob. 14-50

**14-51.** El elevador de 1000 lb es izado mediante el sistema de poleas y el motor  $M$ . Si el motor ejerce una fuerza constante de 500 lb sobre el cable, determine la potencia que se debe suministrar al motor en el instante en que la carga ha sido elevada hasta  $s = 15$  ft partiendo del reposo. El motor tiene una eficiencia de  $e = 0.65$ .



Prob. 14-51

**\*14-52.** Al embalaje de 50 lb se le da una rapidez de 10 ft/s en  $t = 4$  s partiendo del reposo. Si la aceleración es constante, determine la potencia que debe suministrarse al motor cuando  $t = 2$  s. El motor tiene una eficiencia  $e = 0.65$ . Desprecie la masa de la polea y el cable.



Prob. 14-52

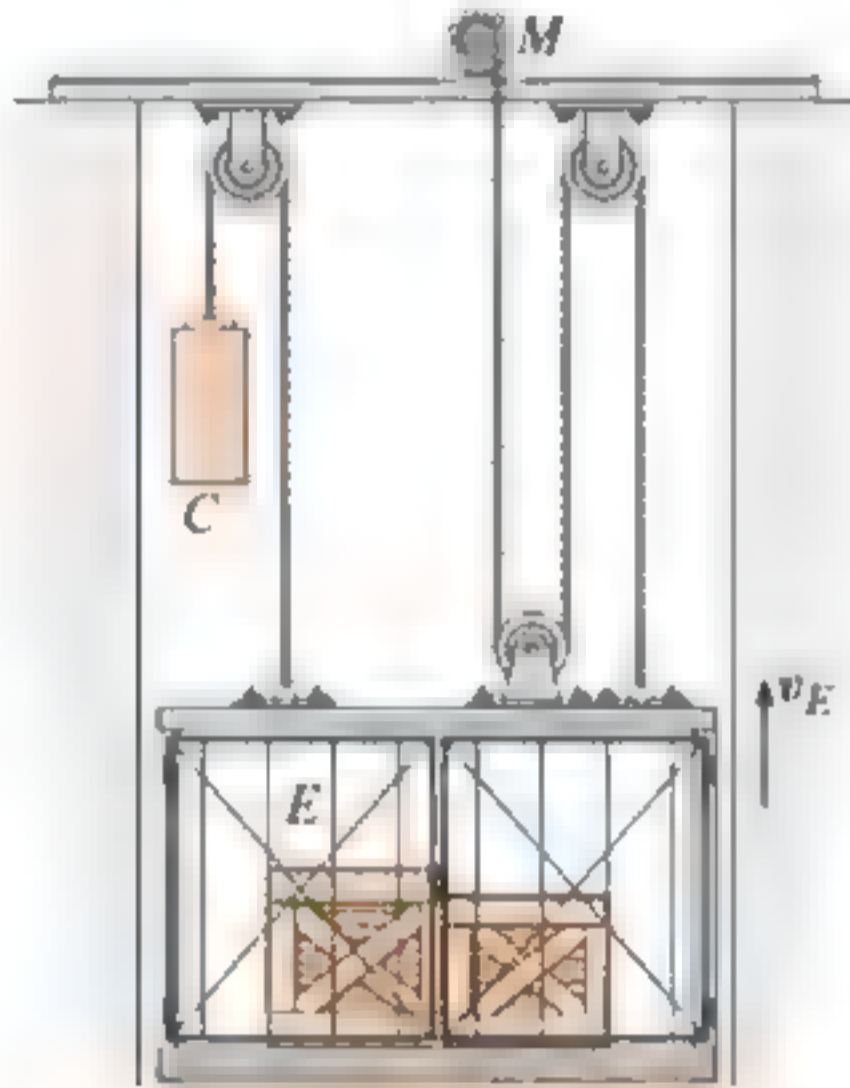
**14-53.** El auto deportivo tiene una masa de 2.3 Mg y, cuando viaja a 28 m/s, el conductor lo acelera a  $5 \text{ m/s}^2$ . Si la resistencia de arrastre sobre el auto debida al viento es  $F_D = (0.3v^2) \text{ N}$ , donde  $v$  es la velocidad en m/s, determine la potencia suministrada al motor en este instante. El motor tiene una eficiencia de funcionamiento de  $e = 0.68$ .

**14-54.** El auto deportivo tiene una masa de 2.3 Mg y acelera a  $6 \text{ m/s}^2$ , partiendo desde el reposo. Si la resistencia de arrastre sobre el auto debida al viento es  $F_D = (10v) \text{ N}$ , donde  $v$  es la velocidad en m/s, determine la potencia suministrada al motor cuando  $t = 5$  s. El motor tiene una eficiencia de funcionamiento de  $e = 0.68$ .



Probs. 14-53/54

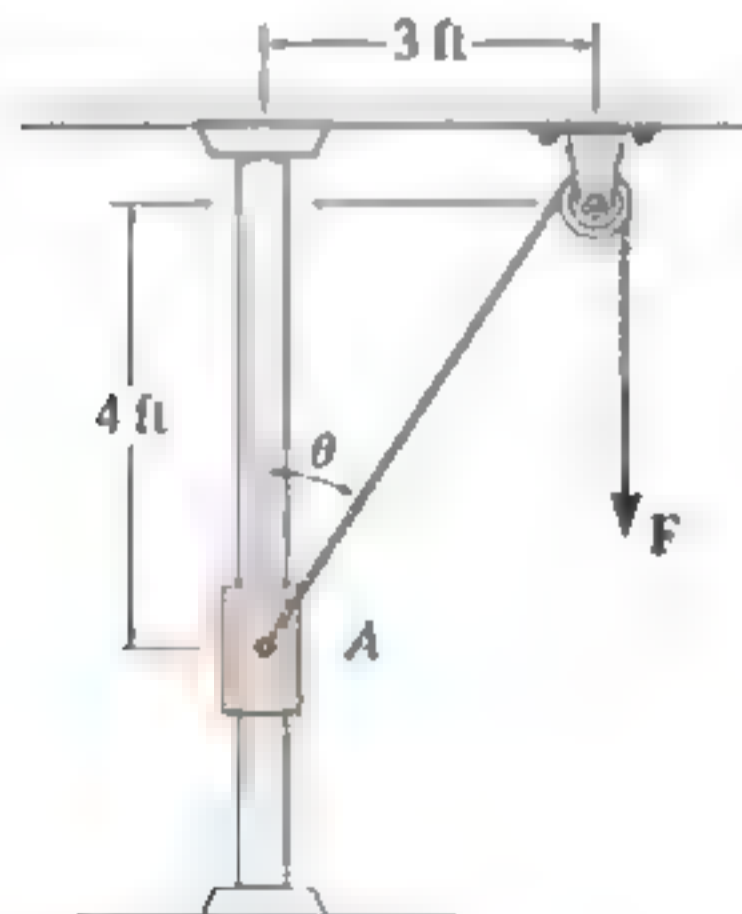
**14-55.** El elevador  $E$  y su carga tienen una masa total de 400 kg. El izamiento se realiza con el motor  $M$  y el bloque  $C$  de 60 kg. Si el motor tiene una eficiencia de  $e = 0.6$ , determine la potencia que se debe suministrar al motor cuando el ascensor es izado con una rapidez constante de  $v_E = 4 \text{ m/s}$ .



Prob. 14-55

**\*14-56.** El collarín de 10 lb parte del reposo en  $A$  y se eleva al aplicar sobre la cuerda una fuerza vertical constante de  $F = 25 \text{ lb}$ . Si la varilla es lisa, determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante  $\theta = 60^\circ$ .

**14-57.** El collarín de 10 lb parte del reposo en  $A$  y se eleva con una rapidez constante de  $2 \text{ ft/s}$  a lo largo de la varilla lisa. Determine la potencia desarrollada por la fuerza  $F$  en el instante mostrado.



Prob. 14-57

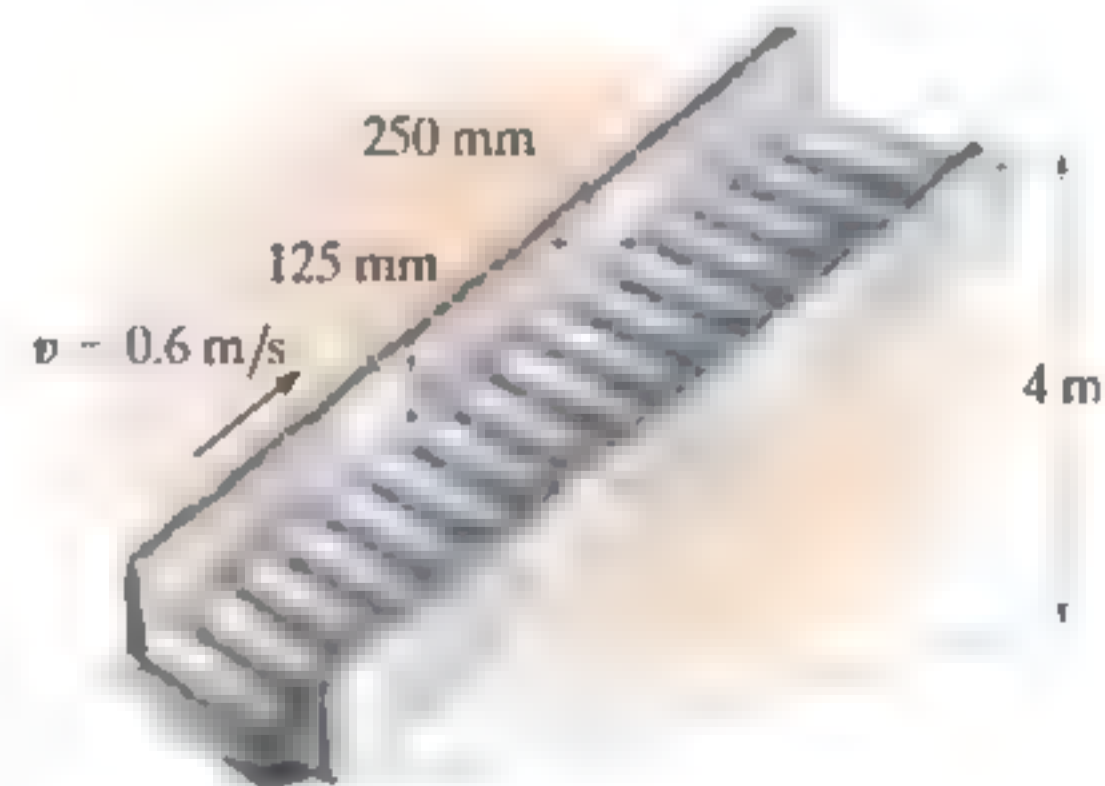
**14-58.** El bloque de 50 lb descansa sobre la superficie áspera cuyo coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k = 0.2$ . Una fuerza  $F = (40 + s^2) \text{ lb}$ , donde  $s$  está en ft, actúa sobre el bloque en la dirección indicada. Si el resorte está originalmente sin estirar ( $s = 0$ ) y el bloque está en reposo, determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante en que el bloque se ha movido  $s = 1.5 \text{ ft}$ .



Prob. 14-58

**14-59.** Los escalones de la escalera eléctrica se mueven con una rapidez constante de  $0.6 \text{ m/s}$ . Si los escalones tienen 125 mm de altura y 250 mm de longitud, determine la potencia necesaria de un motor para levantar una masa promedio de 150 kg por escalón. Hay 32 escalones.

**\*14-60.** Si la escalera eléctrica del problema 14-46 no se mueve, determine la rapidez constante a la que un hombre, que tiene una masa de 80 kg, debe subir por los escalones para generar 100 W de potencia—la misma cantidad que se requiere para alimentar una bombilla de luz estándar.



Prob. 14-59 (a)

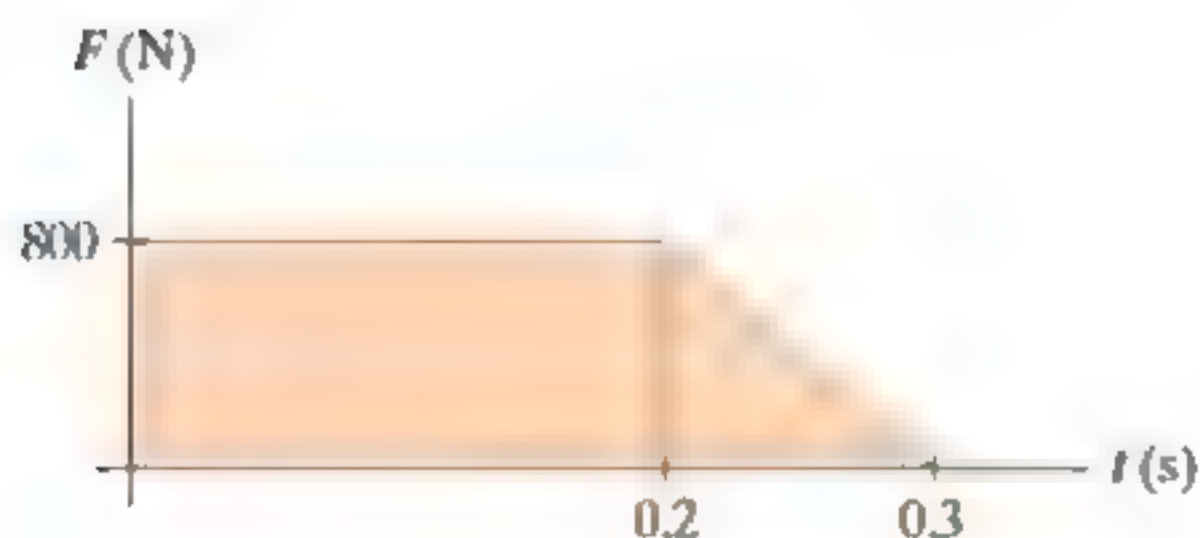
**14-61.** Si el chorro de propulsión del *dragster* suministra un empuje constante de  $T = 20$  kN, determine la potencia generada por el chorro como una función del tiempo. Desprecie la resistencia de arrastre y la resistencia al rodamiento, así como la pérdida de combustible. El *dragster* tiene una masa de 1 Mg y parte del reposo.



Prob. 14-61

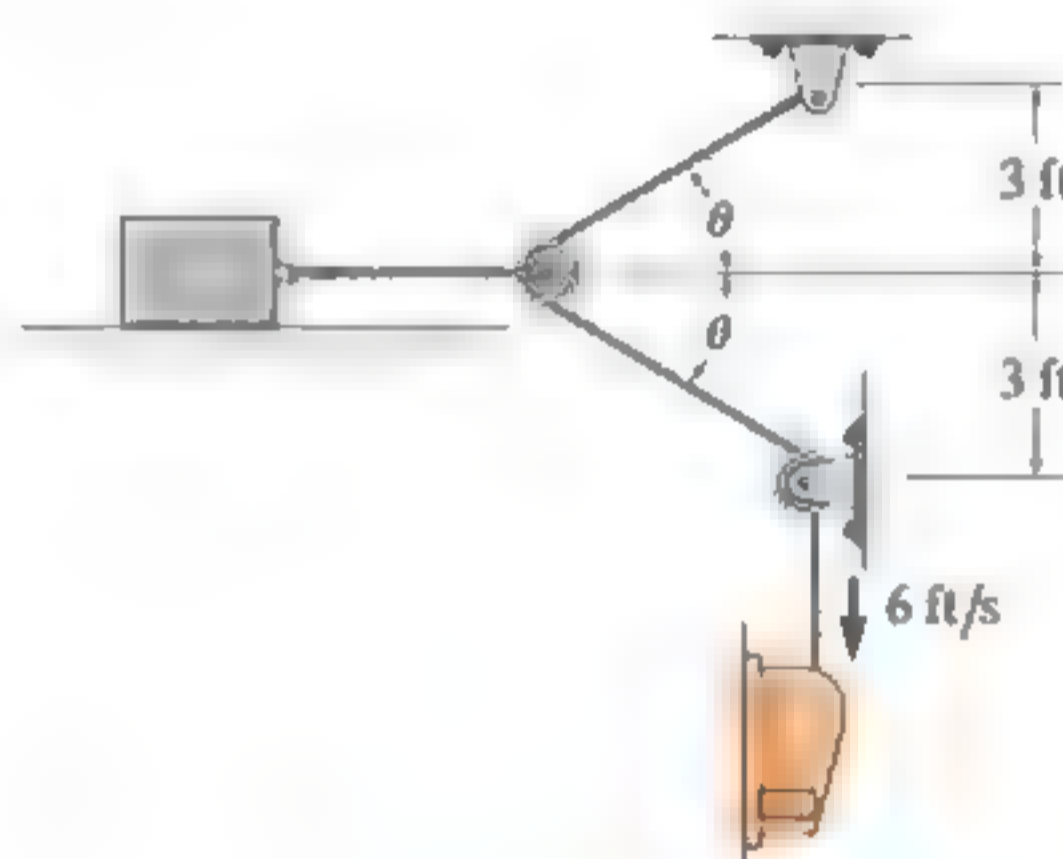
**14-62.** Un atleta empuja contra una máquina de ejercicios con una fuerza que varía con el tiempo, como se muestra en la primera gráfica. Asimismo, la velocidad del brazo del atleta que actúa en la misma dirección que la fuerza varía con el tiempo, de la manera ilustrada en la segunda gráfica. Determine la potencia aplicada en función del tiempo y el trabajo realizado en  $t = 0.3$  s.

**14-63.** Un atleta empuja contra una máquina de ejercicios con una fuerza que varía con el tiempo, como se muestra en la primera gráfica. Además, la velocidad del brazo del atleta que actúa en la misma dirección que la fuerza varía con el tiempo, de la manera indicada en la segunda gráfica. Determine la potencia máxima desarrollada durante el periodo de tiempo de 0.3 segundos.



Probs. 14-62/63

**\*14-64.** El bloque tiene un peso de 80 lb y descansa sobre el piso cuyo  $\mu_k = 0.4$ . Si el motor enrolla el cable a razón constante de 6 ft/s, determine la potencia de salida del motor en el instante  $\theta = 30^\circ$ . Desprecie la masa del cable y las poleas.



Prob. 14-64

**14-65.** El bloque tiene una masa de 150 kg y descansa sobre una superficie cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son  $\mu_s = 0.5$  y  $\mu_k = 0.4$ , respectivamente. Si una fuerza  $F = (60 t^2)$  N, donde  $t$  se da en segundos, se aplica sobre el cable, determine la potencia desarrollada por la fuerza cuando  $t = 5$  s. *Sugerencia:* Primero determine el tiempo necesario para que la fuerza cause movimiento.



Prob. 14-65

## 14.5 Fuerzas conservativas y energía potencial

**Definición 14-1.** Si el trabajo de una fuerza es *independiente de la trayectoria* y depende sólo de las posiciones inicial y final de la trayectoria, entonces podemos clasificarla como una *fuerza conservativa*. Ejemplos de fuerzas conservativas son el peso de una partícula y la fuerza desarrollada por un resorte. El trabajo realizado por el peso depende sólo del *desplazamiento vertical* del peso y el trabajo realizado por la fuerza de un resorte depende sólo del *alargamiento* o la *compresión* del resorte.

En contraste con una fuerza conservativa, considere la fuerza de fricción ejercida en un objeto que se desliza por una superficie fija. El trabajo realizado por la fuerza de fricción *depende de la trayectoria* —cuanto más larga sea la trayectoria, mayor será el trabajo. Por consiguiente, las *fuerzas de fricción no son conservativas*. El trabajo se disipa del cuerpo en forma de calor.

**Definición 14-2.** La energía se define como la capacidad de realizar trabajo. Por ejemplo, si una partícula originalmente está en reposo, entonces el principio de trabajo y energía establece que  $\sum U_{1 \rightarrow 2} = T_2$ . Expresado de otra manera, la energía cinética es igual al trabajo que debe realizarse en la partícula para llevarla del estado de reposo al estado de rapidez  $v$ . Por lo tanto, la *energía cinética* es una medida de la *capacidad de la partícula de realizar trabajo*, la cual está asociada con el *movimiento* de la partícula. Cuando la energía proviene de la *posición* de la partícula, medida con respecto a un plano de referencia fijo, se llama *energía potencial*. Entonces, la *energía potencial* es una medida de la cantidad de trabajo que una fuerza conservativa realizará cuando se mueve de una posición dada al plano de referencia. En mecánica, es importante la energía potencial creada por la gravedad (peso) o un resorte elástico.

**Energía potencial gravitacional.** Si una partícula se encuentra a una distancia  $y$  *por encima* de un plano de referencia arbitrariamente seleccionado, como se muestra en la figura 14-17, el peso de la partícula  $W$  tiene una *energía potencial gravitacional* positiva,  $V_g$ , ya que  $W$  tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando la partícula regresa al plano de referencia. Asimismo, si la partícula se encuentra a una distancia  $y$  *por debajo* del plano de referencia  $V_g$  es negativa, puesto que el peso realiza trabajo negativo cuando la partícula regresa al plano de referencia. En el plano de referencia  $V_g = 0$ .

En general, si  $y$  es *positiva hacia arriba*, la energía potencial gravitacional de la partícula de peso  $W$  es\*

$$V_g = Wy \quad (14-13)$$

\*Aquí se supone que el peso es *constante*. Esta suposición es adecuada para diferencias pequeñas de elevación  $\Delta y$ . Sin embargo, si el cambio de elevación es significativo, debe tomarse en cuenta la variación del peso con la elevación (vea el prob. 14-82).

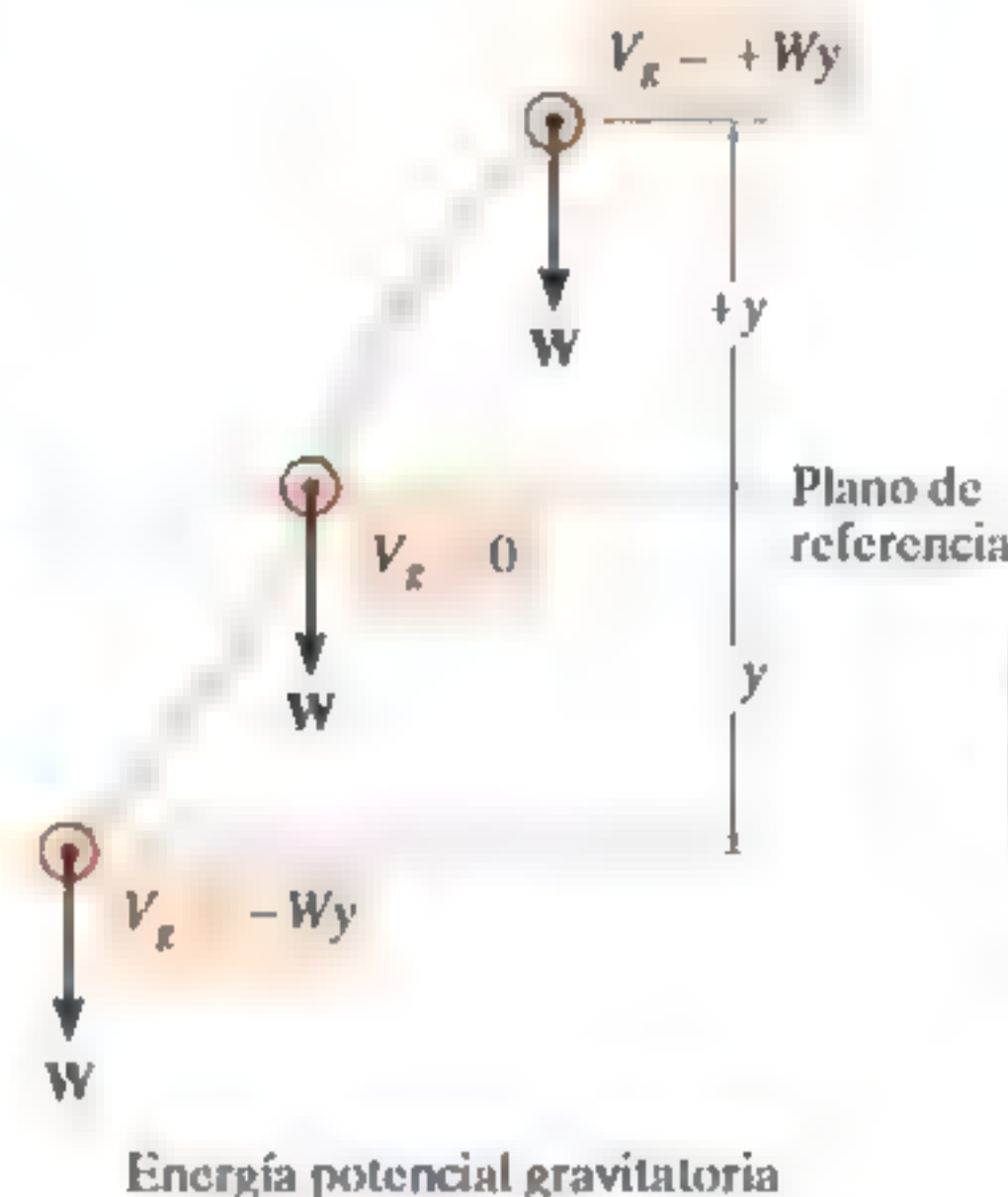


Fig. 14-17



La energía potencial gravitacional de este peso se incrementa a medida que se va elevando. (© R. C. Hibbeler)

**Energía potencial elástica** Cuando un resorte elástico se alarga o comprime una distancia  $s$ , a partir de su posición sin estirar, en el resorte puede almacenarse energía potencial elástica  $V_e$ . Esta energía es

$$V_e = +\frac{1}{2}ks^2 \quad (14-14)$$

Aquí  $V_e$  siempre es positiva ya que, en la posición deformada, la fuerza del resorte tiene la capacidad o el “potencial” de realizar siempre trabajo en la partícula, cuando el resorte regresa a su posición sin estirar (fig. 14-18).

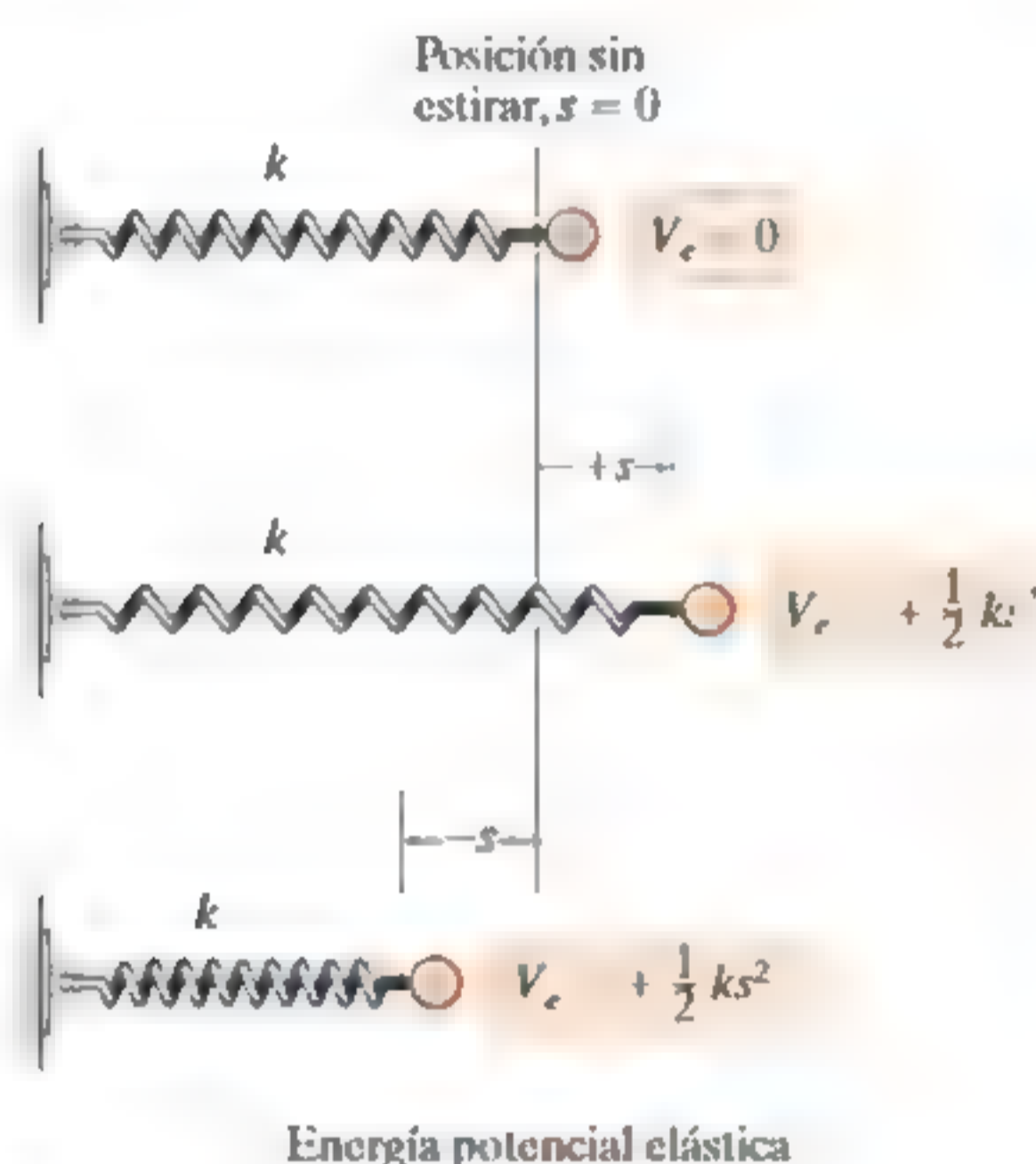
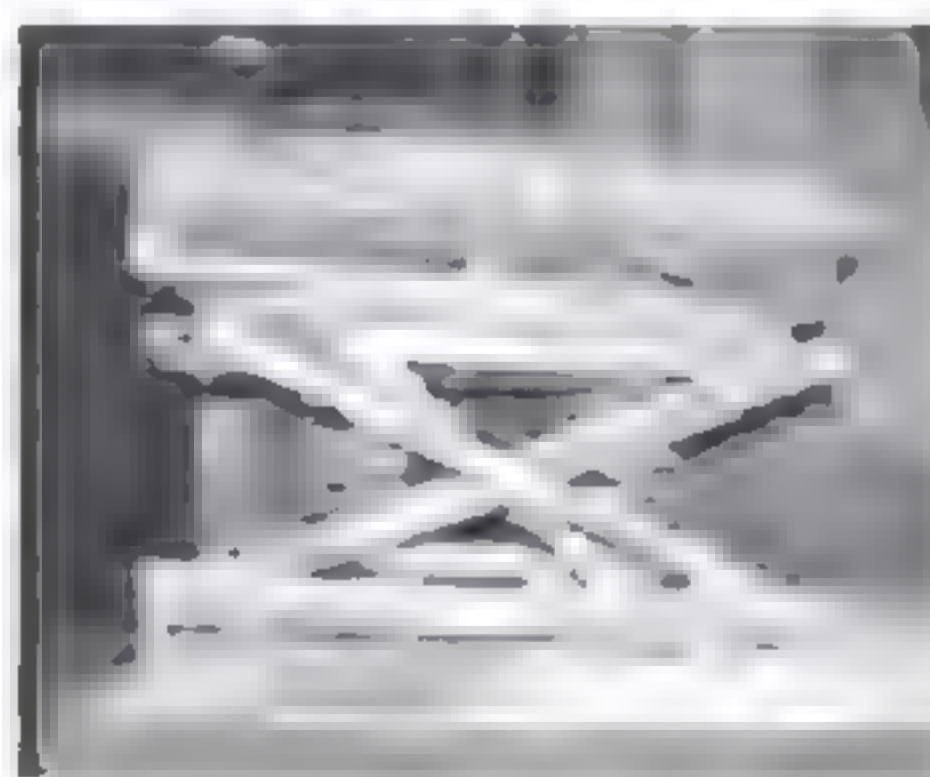


Fig. 14-18

El peso de los sacos colocados sobre esta plataforma produce energía potencial que se almacena en los resortes del soporte. A medida que se quita cada saco, la plataforma se eleva un poco, ya que una parte de la energía potencial en los resortes se transformará en un incremento de la energía potencial gravitacional de los sacos restantes. Este dispositivo es útil para quitar los sacos sin inclinarse para descargarlos. (© R. C. Hibbeler)



**Función potencial.** En el caso general, si una partícula se somete tanto a fuerzas gravitacionales como elásticas, la energía potencial de la partícula se expresa como una *función potencial*, la cual es la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \quad (14-15)$$

La medición de  $V$  depende de la ubicación de la partícula con respecto a un plano de referencia, seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 14-13 y 14-14.

La *diferencia* de esta función mide el trabajo realizado por una fuerza conservativa al mover una partícula de un punto a otro, es decir,

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 \quad (14-16)$$

Por ejemplo, la función potencial de una partícula de peso  $W$  suspendida de un resorte puede expresarse en función de su posición,  $s$ , medida con respecto a un plano de referencia situado en la longitud sin estirar del resorte (fig. 14-19). Tenemos

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Ws + \frac{1}{2}ks^2 \end{aligned}$$

Si la partícula se mueve de  $s_1$  a una posición más baja  $s_2$ , entonces al aplicar la ecuación 14-16 se observa que el trabajo de  $W$  y  $F_s$  es

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= V_1 - V_2 = (-Ws_1 + \frac{1}{2}ks_1^2) - (-Ws_2 + \frac{1}{2}ks_2^2) \\ &= W(s_2 - s_1) - (\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2) \end{aligned}$$

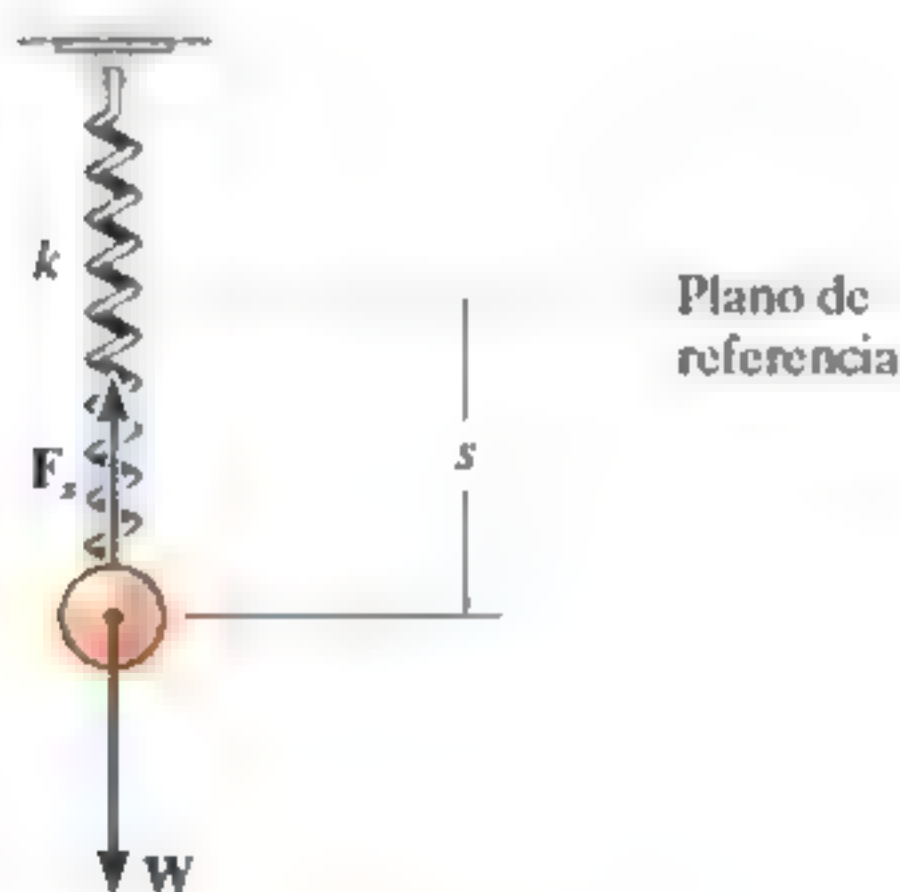


Fig. 14-19

Cuando el desplazamiento a lo largo de la trayectoria es infinitesimal, es decir, del punto  $(x, y, z)$  al punto  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , la ecuación 14-16 se escribe como

$$\begin{aligned} dU &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= -dV(x, y, z) \end{aligned} \quad (14-17)$$

Si representamos tanto la fuerza como su desplazamiento como vectores cartesianos, entonces el trabajo también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 14-17 y expresar la diferencial  $dV(x, y, z)$  en función de sus derivadas parciales se tiene

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

Como los cambios de  $x, y$  y  $z$  son independientes entre sí, esta ecuación se satisface siempre que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (14-18)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}\right) V \end{aligned}$$

o bien,

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (14-19)$$

donde  $\nabla$  (nabla) representa el operador vectorial

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \mathbf{k}.$$

La ecuación 14-19 relaciona una fuerza  $\mathbf{F}$  con su función potencial  $V$  por lo que constituye un criterio matemático para comprobar que  $\mathbf{F}$  es conservativa. Por ejemplo, la función potencial gravitacional de un peso situado a una distancia  $y$  por encima de un plano de referencia es  $V_g = Wy$ . Para comprobar que  $W$  es conservativo, es necesario demostrar que satisface la ecuación 14-18 (o la 14-19), en cuyo caso

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}(Wy) = -W$$

El signo negativo indica que  $W$  actúa hacia abajo, opuesto a la distancia  $y$  positiva, la cual se mide hacia arriba.

## 14.6 Conservación de la energía

Cuando en una partícula actúa un sistema *tanto* de fuerzas conservativas *como* no conservativas, la parte del trabajo realizado por las *fuerzas conservativas* puede escribirse en función de la diferencia de sus energías potenciales mediante la ecuación 14-16, es decir,  $(\sum U_{1-2})_{\text{cons}} = V_1 - V_2$ . Por consiguiente, el principio de trabajo y energía se escribe como

$$T_1 + V_1 + (\sum U_{1-2})_{\text{no cons}} = T_2 + V_2 \quad (14-20)$$

Aquí  $(\sum U_{1-2})_{\text{no cons}}$  representa el trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan en la partícula. Si *sólo las fuerzas conservativas* realizan trabajo, entonces tenemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (14-21)$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la energía mecánica*, o simplemente como la *conservación de la energía*, y expresa que durante el movimiento la suma de las energías potencial y cinética de la partícula permanece *constante*. Para que esto ocurra, la energía cinética debe transformarse en energía potencial, y viceversa. Por ejemplo, si se deja caer una bola de peso  $W$  desde una altura  $h$  sobre el suelo (plano de referencia) (fig. 14-20), su energía potencial es máxima antes de dejarla caer, momento en el cual su energía cinética es cero. La energía mecánica total de la bola en su posición inicial es, por lo tanto,

$$E = T_1 + V_1 = 0 + Wh = Wh$$

Cuando la bola ha caído una distancia  $h/2$ , su rapidez se determina con  $v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$ , de la cual resulta  $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$ . La energía de la bola a la mitad de la altura, por consiguiente, es

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} (\sqrt{gh})^2 + W\left(\frac{h}{2}\right) = Wh$$

Exactamente antes de que la bola choque contra el suelo, su energía potencial es cero y su rapidez es  $v = \sqrt{2gh}$ . Aquí, de nuevo, la energía total de la bola es

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} (\sqrt{2gh})^2 + 0 = Wh$$

Observe que cuando la bola entra en contacto con el suelo, se deforma ligeramente y, siempre que el suelo sea suficientemente duro, la bola rebotará en la superficie y alcanzará una nueva altura  $h'$ , la cual será *menor* que la altura  $h$  desde la cual se soltó por primera vez. Si ignoramos la fricción del aire, la diferencia de altura explica la pérdida de energía,  $E_1 = W(h - h')$ , la cual ocurre durante la colisión. Porciones de esta pérdida ocasiona ruido, una deformación localizada en la bola y en el suelo, y calor.

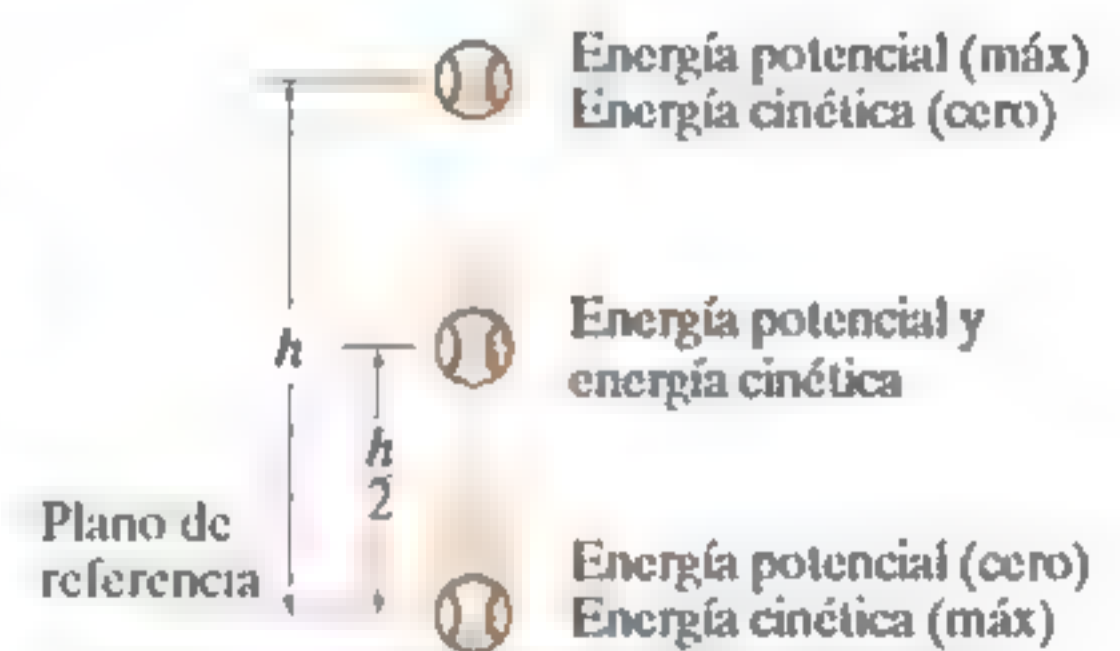


Fig. 14-20

**Sistema de partículas.** Si un sistema de partículas se *somete sólo a fuerzas conservativas*, entonces puede escribirse una ecuación similar a la ecuación 14-21 para las partículas. Al aplicar las ideas del planteamiento anterior, la ecuación 14-8 ( $\sum T_1 + \sum U_{12} = \sum T_2$ ) se escribe como

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2 \quad (14-22)$$

Aquí, la suma de las energías cinética y potencial iniciales del sistema es igual a la suma de las energías cinética y potencial finales del sistema. En otras palabras,  $\sum T + \sum V = \text{const.}$

### Procedimiento para el análisis

La ecuación de la conservación de la energía puede utilizarse para resolver problemas que implican *velocidad, desplazamiento y sistemas de fuerzas conservativas*. En general, es *más fácil de aplicar* que el principio de trabajo y energía, ya que esta ecuación requiere especificar las energía cinética y potencial de la partícula en tan sólo *dos puntos* a lo largo de la trayectoria, en vez de determinar el trabajo cuando la partícula experimenta un *desplazamiento*. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

#### Energía potencial

- Dibuje dos diagramas que muestren la partícula localizada en sus puntos inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si la partícula se somete a un desplazamiento vertical, establezca el plano de referencia horizontal fijo, con respecto al cual se va a medir la energía potencial gravitacional  $V_g$  de la partícula.
- Los datos relacionados con la elevación y de la partícula con respecto al plano de referencia, y con el alargamiento o compresión  $s$  de cualesquiera resortes conectado a ésta, pueden determinarse por la geometría asociada con los dos diagramas.
- Recuerde que  $V_g = Wy$ , donde  $y$  es positiva hacia arriba del plano de referencia y negativa hacia abajo del plano de referencia; asimismo para un resorte,  $V_e = \frac{1}{2}ks^2$ , la cual es *positiva siempre*.

#### Conservación de la energía

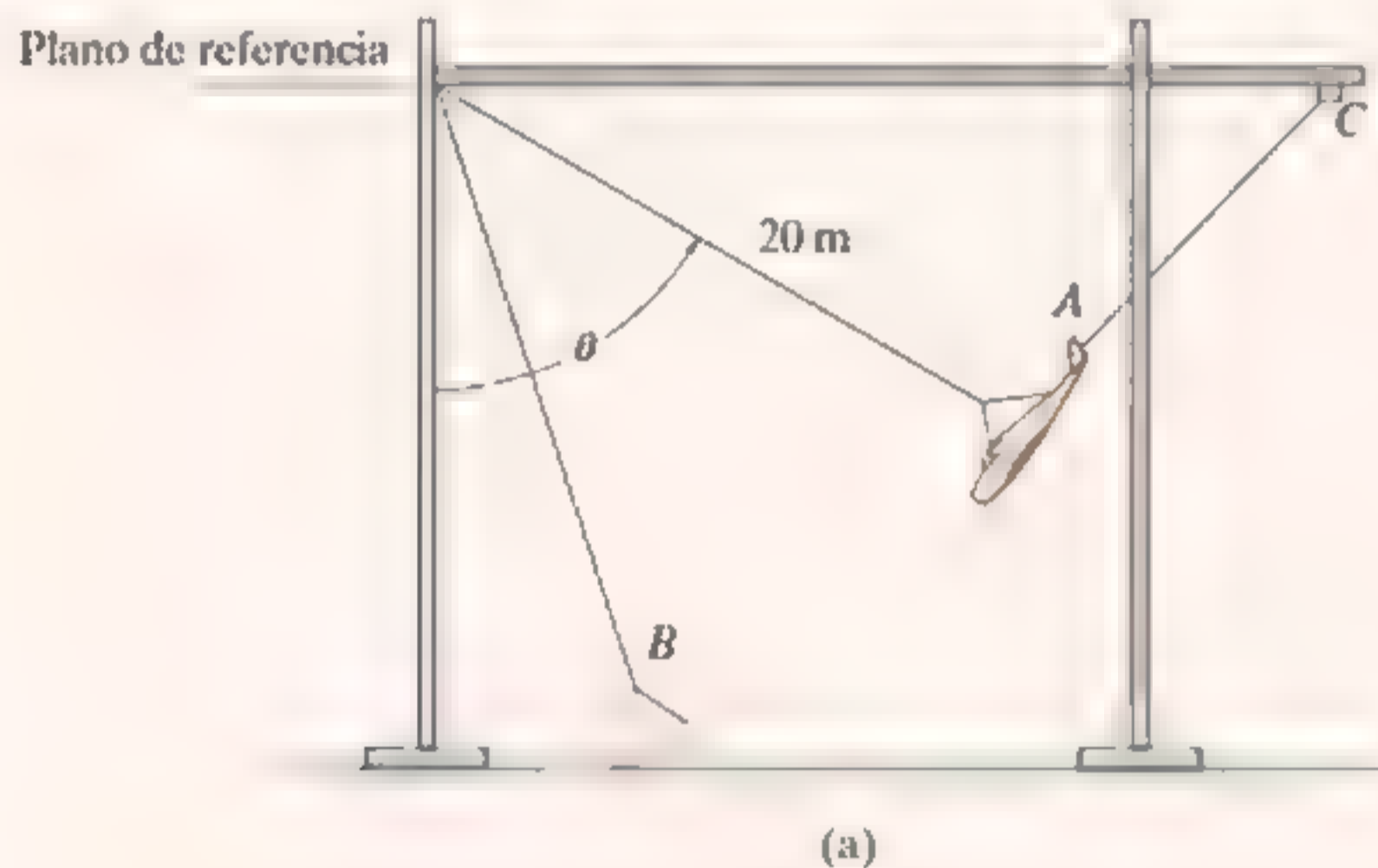
- Aplique la ecuación  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ .
- Cuando determine la energía cinética,  $T = \frac{1}{2}mv^2$ , recuerde que la rapidez  $v$  de la partícula debe medirse con respecto a un marco de referencia inercial.

## EJEMPLO

La estructura de armadura mostrada en la fotografía se utiliza para probar la respuesta de un avión al impactarse. Como se muestra en la figura 14-21a, el avión, cuya masa es de 8 Mg, es izado hacia atrás hasta que  $\theta = 60^\circ$  y, luego, se suelta el cable  $AC$  cuando el avión está en reposo. Determine la rapidez del avión justo antes de impactarse en el suelo,  $\theta = 15^\circ$ . Además, ¿cuál es la tensión máxima desarrollada en el cable de soporte durante el movimiento? Ignore el tamaño del avión y el efecto de sustentación originado por las alas durante el movimiento.



(© R. C. Hibbeler)



## SOLUCIÓN

Como la fuerza del cable *no realiza* trabajo en el avión, éste debe obtenerse con la ecuación de movimiento. En primer lugar, sin embargo, hay que determinar la rapidez del avión en  $B$ .

**Por conveniencia**, el plano de referencia se estableció en el parte superior de la estructura de armadura (fig. 14-21a).

## Conservación de la energía

$$\begin{aligned}
 T_A + V_A &= T_B + V_B \\
 0 - 8000 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2)(20 \cos 60^\circ \text{ m}) &= \\
 \frac{1}{2}(8000 \text{ kg})v_B^2 - 8000 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2)(20 \cos 15^\circ \text{ m}) &= \\
 v_B &= 13.52 \text{ m/s} = 13.5 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

**Ecuación de movimiento.** De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre, cuando el avión está en  $B$  (fig. 14-21b), tenemos

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \quad \Sigma F_n &= ma_n \\
 T - (8000(9.81) \text{ N}) \cos 15^\circ &= (8000 \text{ kg}) \frac{(13.52 \text{ m/s})^2}{20 \text{ m}} \\
 T &= 149 \text{ kN} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

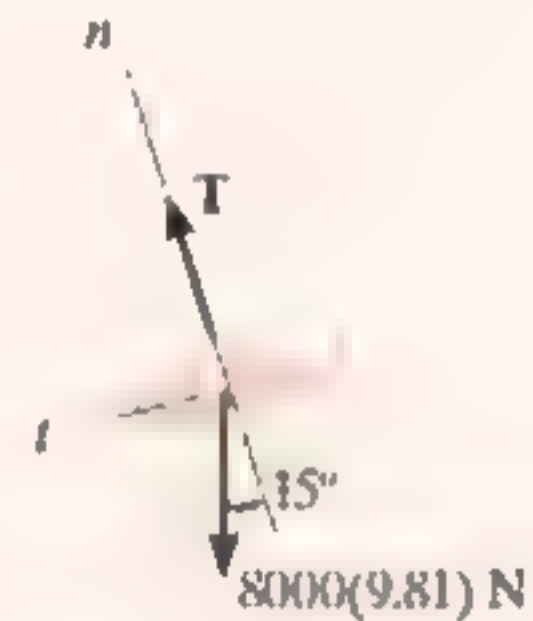
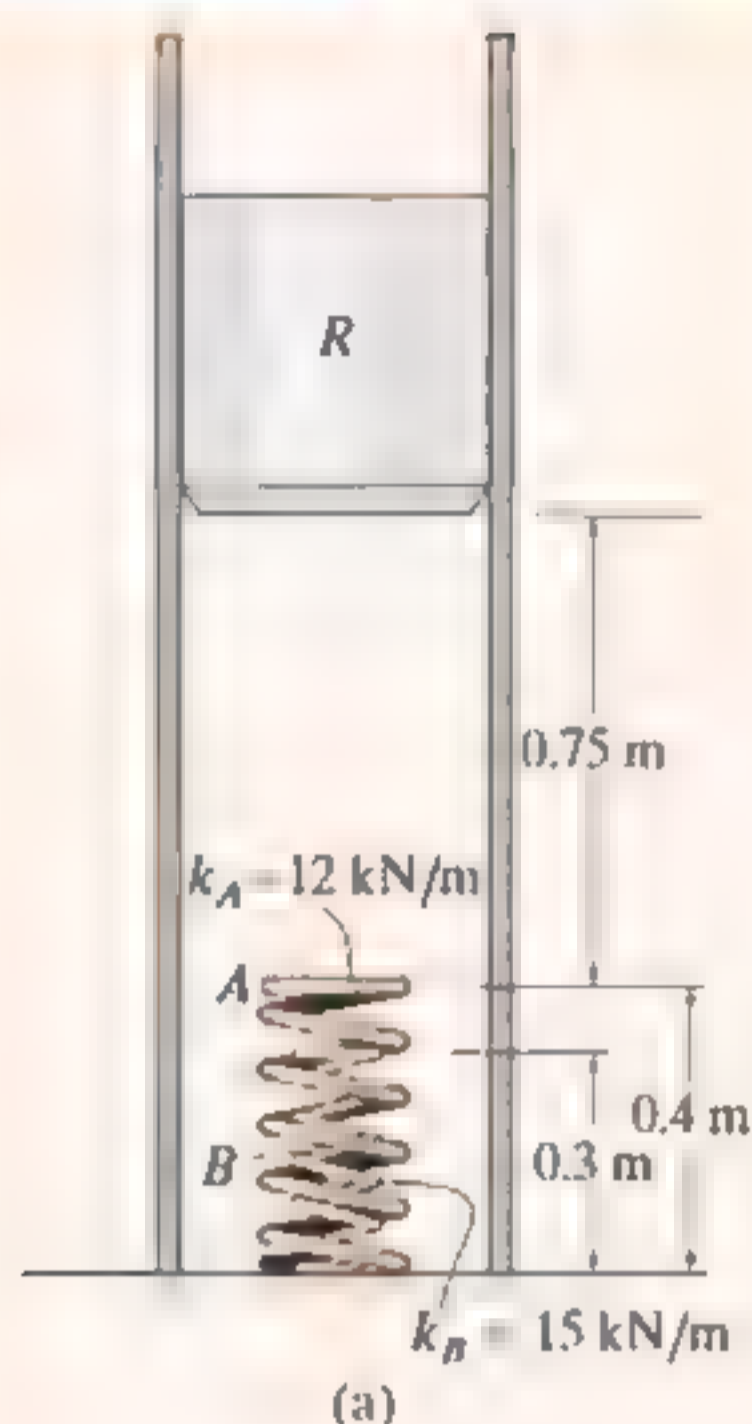


Fig. 14-21

## EJEMPLO 14.11



El martinete  $R$  mostrado en la figura 14-22a tiene una masa de 100 kg y se suelta del reposo a 0.75 m de la parte superior de un resorte  $A$ , que tiene una rigidez de  $k_A = 12 \text{ kN/m}$ . Si un segundo resorte  $B$ , cuya rigidez es de  $k_B = 15 \text{ kN/m}$ , se “coloca dentro del otro” en  $A$ , determine el desplazamiento máximo de  $A$  necesario para detener el movimiento descendente del martinete. La longitud sin estirar de cada resorte se indica en la figura. Ignore la masa de los resortes.

## SOLUCIÓN

**Supondremos** que el martinete comprime *ambos* resortes en el instante en que se detiene. El plano de referencia está localizado a través del centro de gravedad del martinete en su posición inicial (fig. 14-22b). Cuando la energía cinética se reduce a cero ( $v_2 = 0$ ),  $A$  se comprime una distancia  $s_A$  y  $B$  se comprime  $s_B = s_A - 0.1 \text{ m}$ .

## Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 + \left\{ \frac{1}{2} k_A s_A^2 + \frac{1}{2} k_B (s_A - 0.1)^2 - Wh \right\}$$

$$0 + 0 = 0 + \left\{ \frac{1}{2} (12\,000 \text{ N/m}) s_A^2 + \frac{1}{2} (15\,000 \text{ N/m}) (s_A - 0.1 \text{ m})^2 - 981 \text{ N} (0.75 \text{ m} + s_A) \right\}$$

Al reordenar los términos,

$$13\,500 s_A^2 - 2481 s_A - 660.75 = 0$$

Si utilizamos la fórmula cuadrática y despejamos la raíz positiva, tenemos

$$s_A = 0.331 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

Como  $s_B = 0.331 \text{ m} - 0.1 \text{ m} = 0.231 \text{ m}$ , la cual es positiva, es correcta la suposición de que *ambos* resortes están comprimidos por el martinete.

**NOTA:** La segunda raíz,  $s_A = -0.148 \text{ m}$ , no representa la situación física. Como  $s$  positiva se mide hacia abajo, el signo negativo indica que el resorte  $A$  tendría que “extenderse” en una cantidad de 0.148 m para detener el martinete.

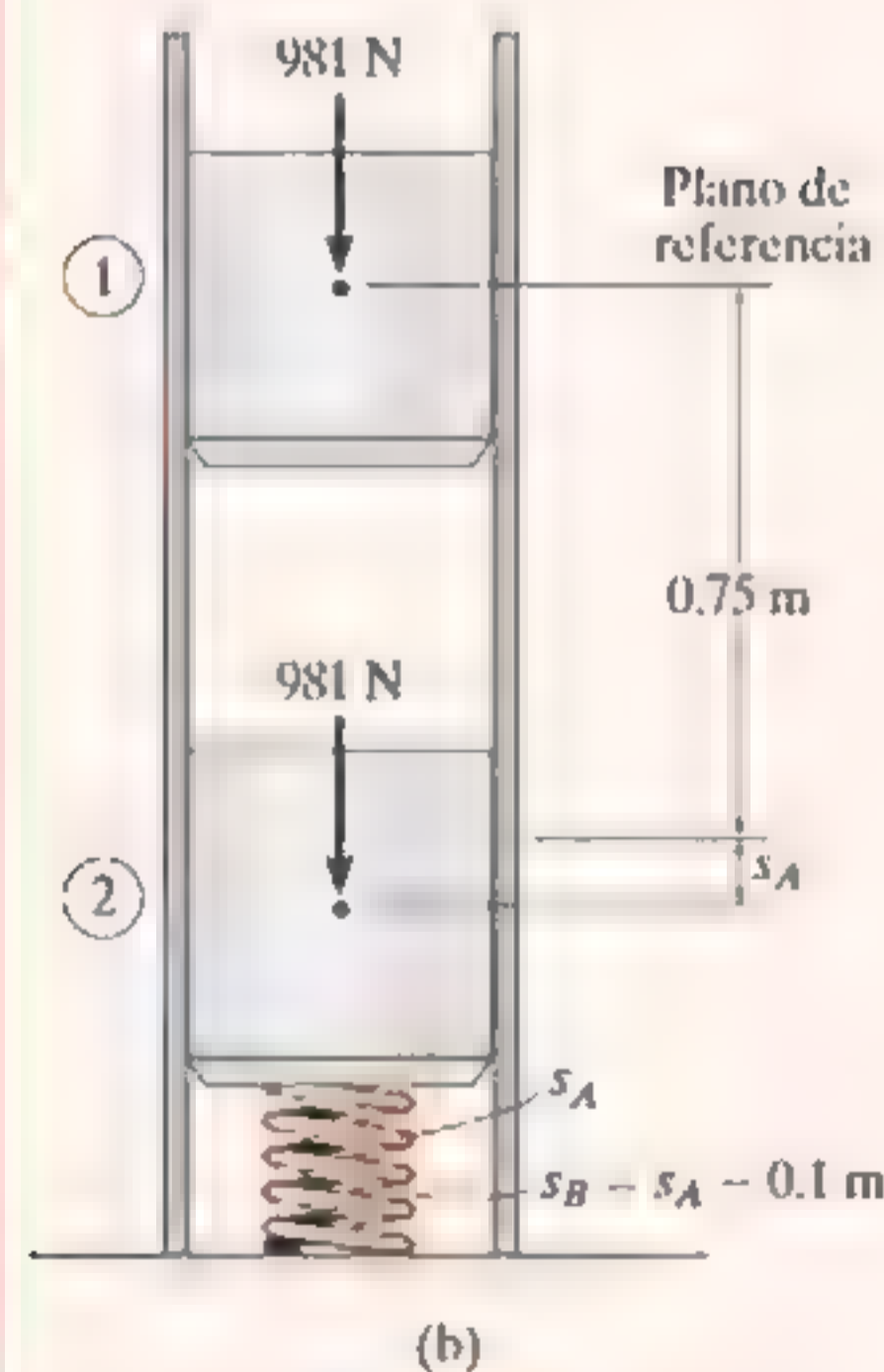


Fig. 14-22

## EJEMPLO

En el poste vertical se inserta un collarín liso de 2 kg, como se muestra en la figura 14-23a. Si el resorte no está alargado cuando el collarín está en la posición  $A$ , determine la rapidez a la cual se mueve cuando  $y = 1$  m, si (a) se suelta del reposo en  $A$  y (b) se suelta en  $A$  con una velocidad *hacia arriba*  $v_A = 2$  m/s.

## SOLUCIÓN

**Parte (a) Energía potencial.** Por conveniencia, el plano de referencia se sitúa a lo largo de una línea horizontal que pasa por  $A$  y  $B$  (fig. 14-23b). Cuando el collarín está en  $C$ , la energía potencial gravitacional es  $-(mg)y$ , puesto que el collarín está *debajo* del plano de referencia y la energía potencial elástica es  $\frac{1}{2}ks_{CB}^2$ . En este caso,  $s_{CB} = 0.5$  m, la cual representa el *estiramiento* del resorte como se indica en la figura.

## Conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \left\{ \frac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy \right\}$$

$$0 + 0 = \left\{ \frac{1}{2}(2 \text{ kg})v_C^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2}(3 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2 - 2(9.81) \text{ N}(1 \text{ m}) \right\}$$

$$v_C = 4.39 \text{ m/s} \downarrow$$

Este problema también puede resolverse con la ecuación de movimiento o el principio de trabajo y energía. Observe que para *ambos* métodos deben tomarse en cuenta la variación de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte (vea el ejemplo 13.4). Aquí, sin embargo, la solución anterior es claramente ventajosa, ya que los cálculos dependen *sólo* de los datos calculados en los puntos inicial y final de la trayectoria.

**Parte (b) Conservación de la energía.** Si  $v_A = 2$  m/s, al utilizar los datos de la figura 14-23b, tenemos

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

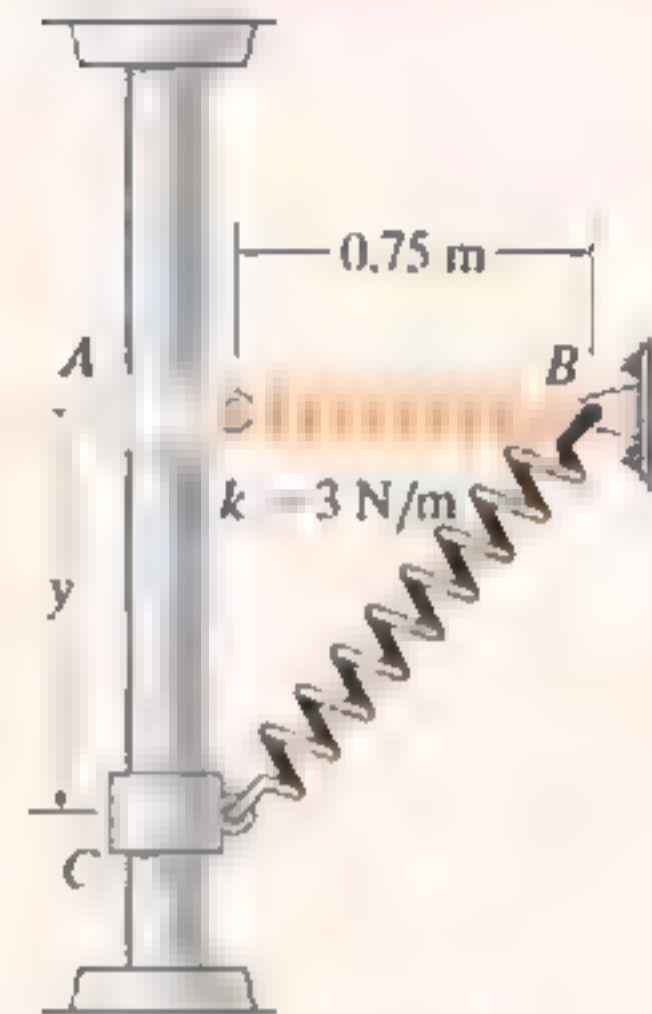
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \left\{ \frac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy \right\}$$

$$\frac{1}{2}(2 \text{ kg})(2 \text{ m/s})^2 + 0 = \frac{1}{2}(2 \text{ kg})v_C^2 + \left\{ \frac{1}{2}(3 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2 - 2(9.81) \text{ N}(1 \text{ m}) \right\}$$

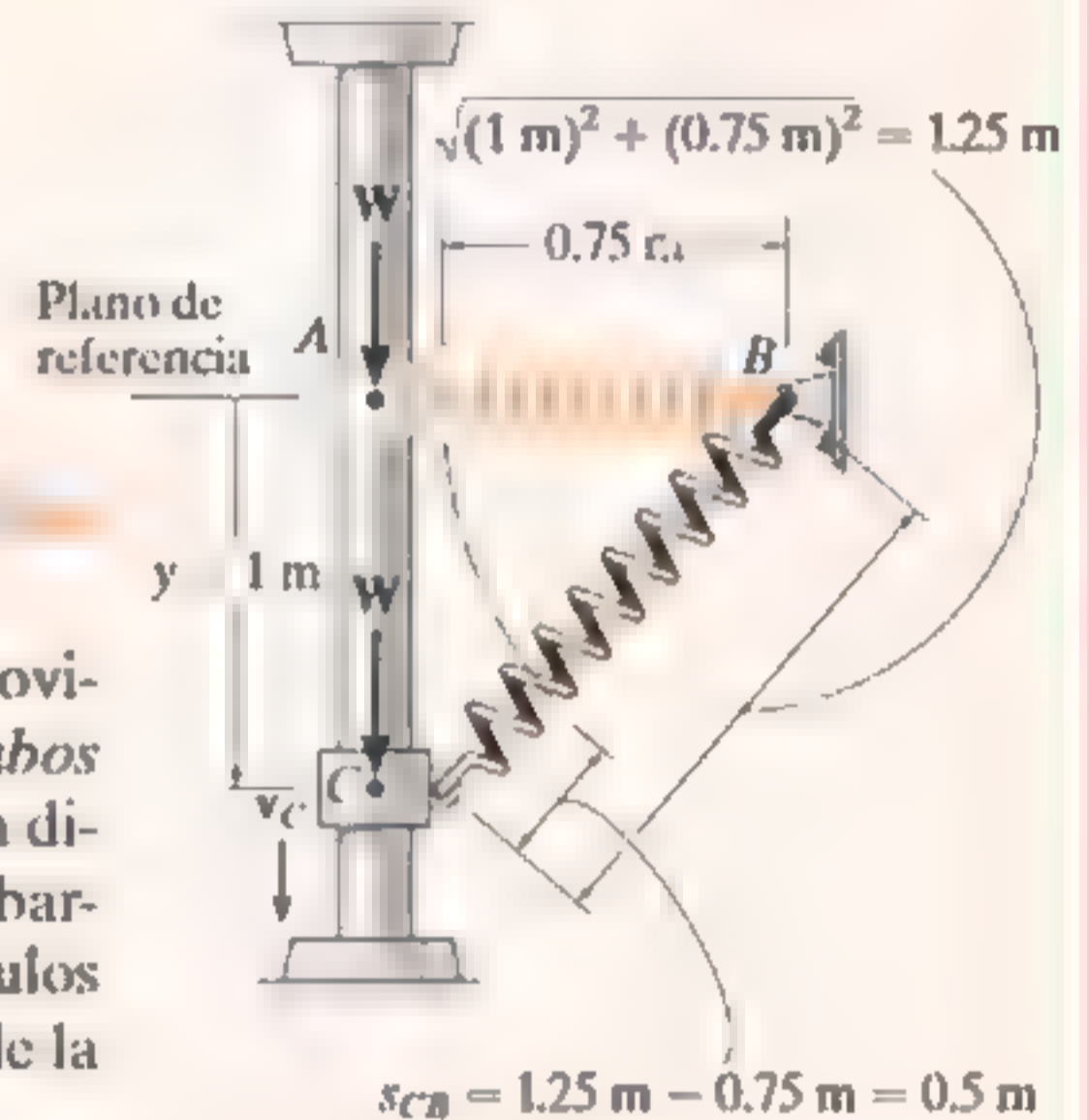
$$v_C = 4.82 \text{ m/s} \downarrow$$

*Resp.*

**NOTA:** La energía cinética del collarín depende sólo de la *magnitud* de la velocidad y, por consiguiente, no importa si el collarín sube o baja a 2 m/s cuando se suelta en  $A$ .



(a)

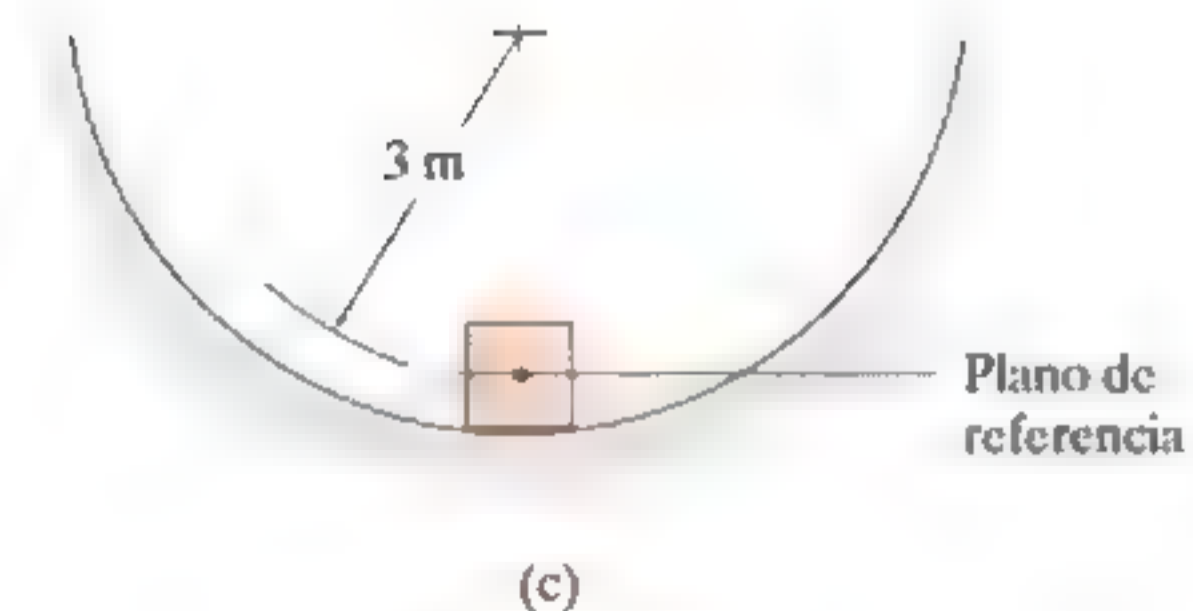
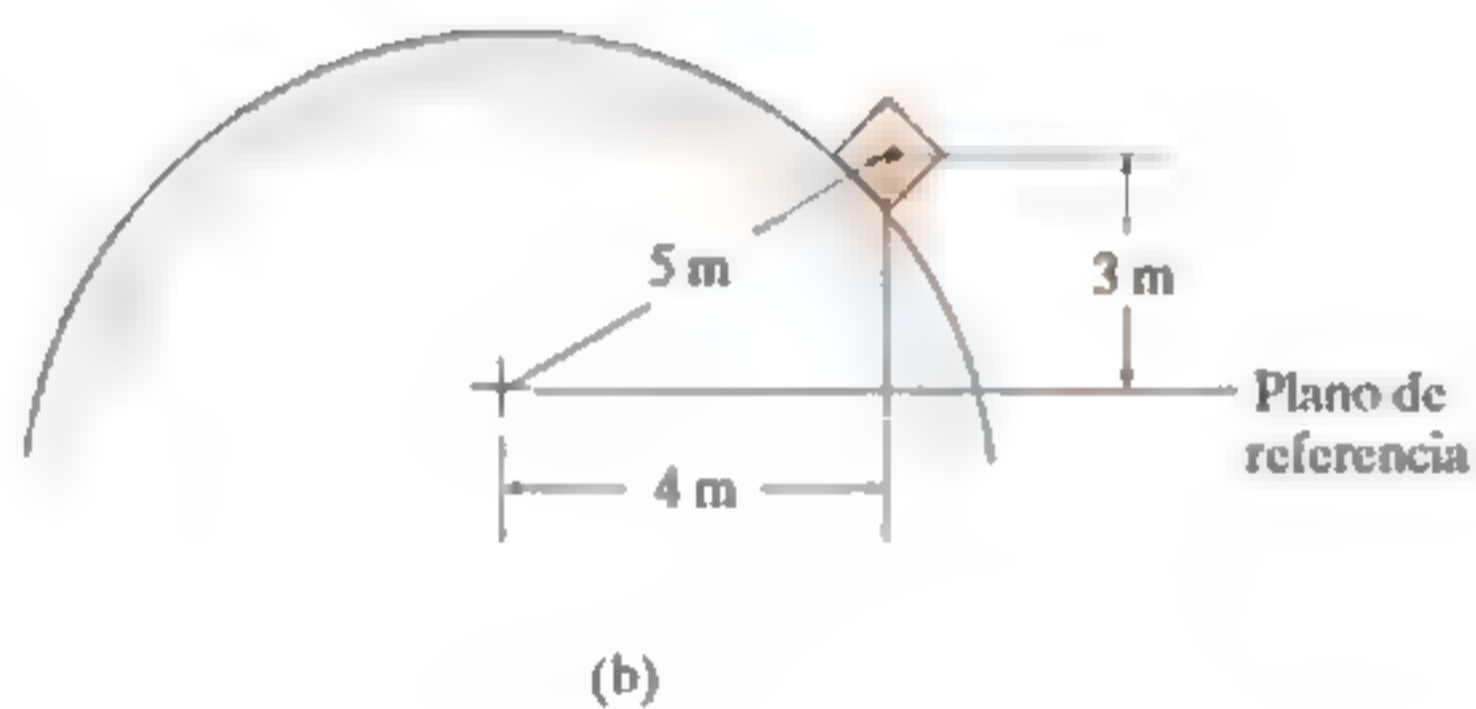
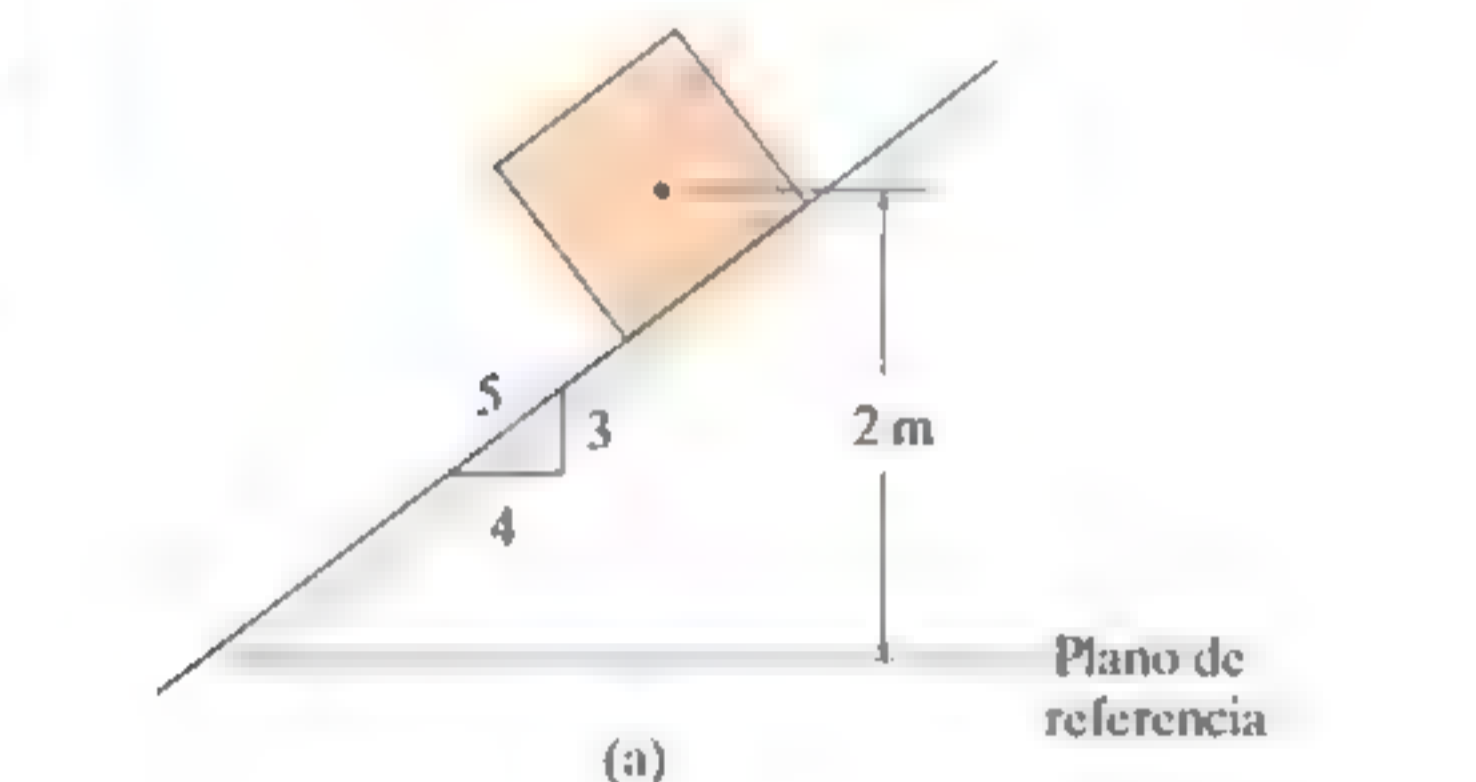


(b)

Fig. 14-23

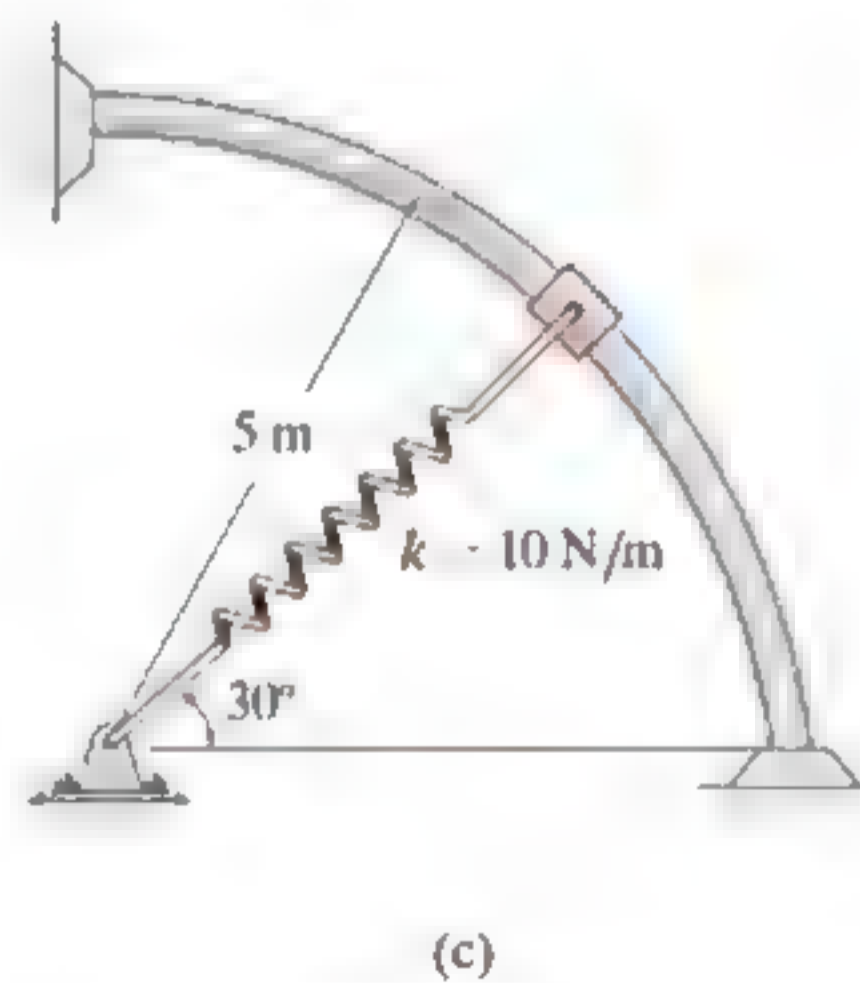
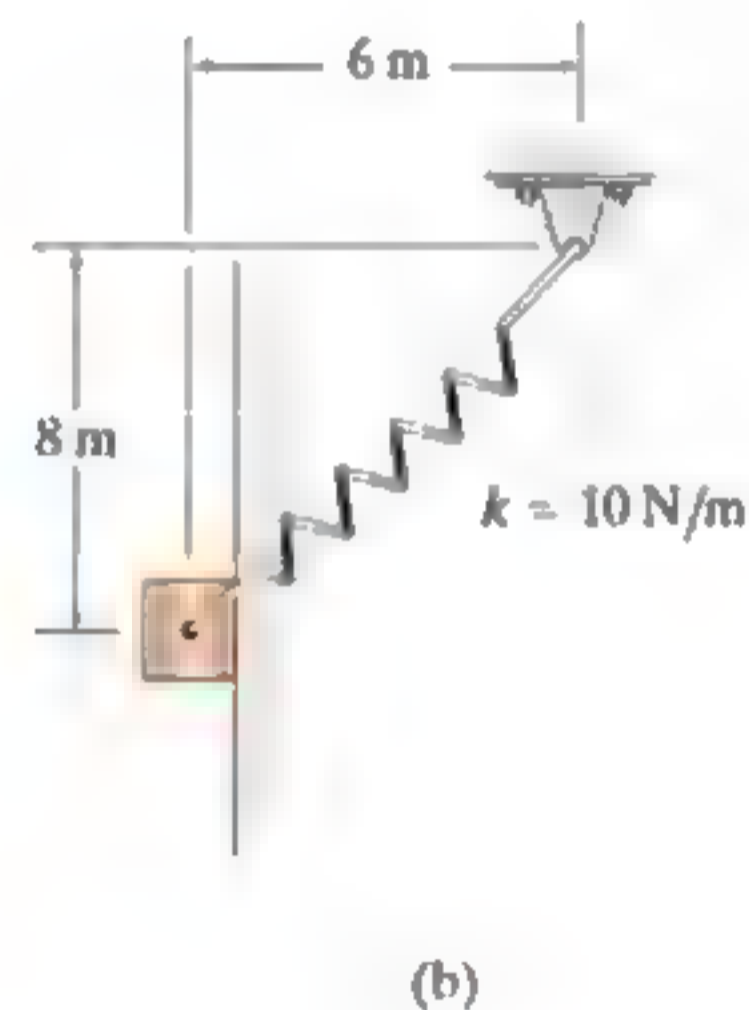
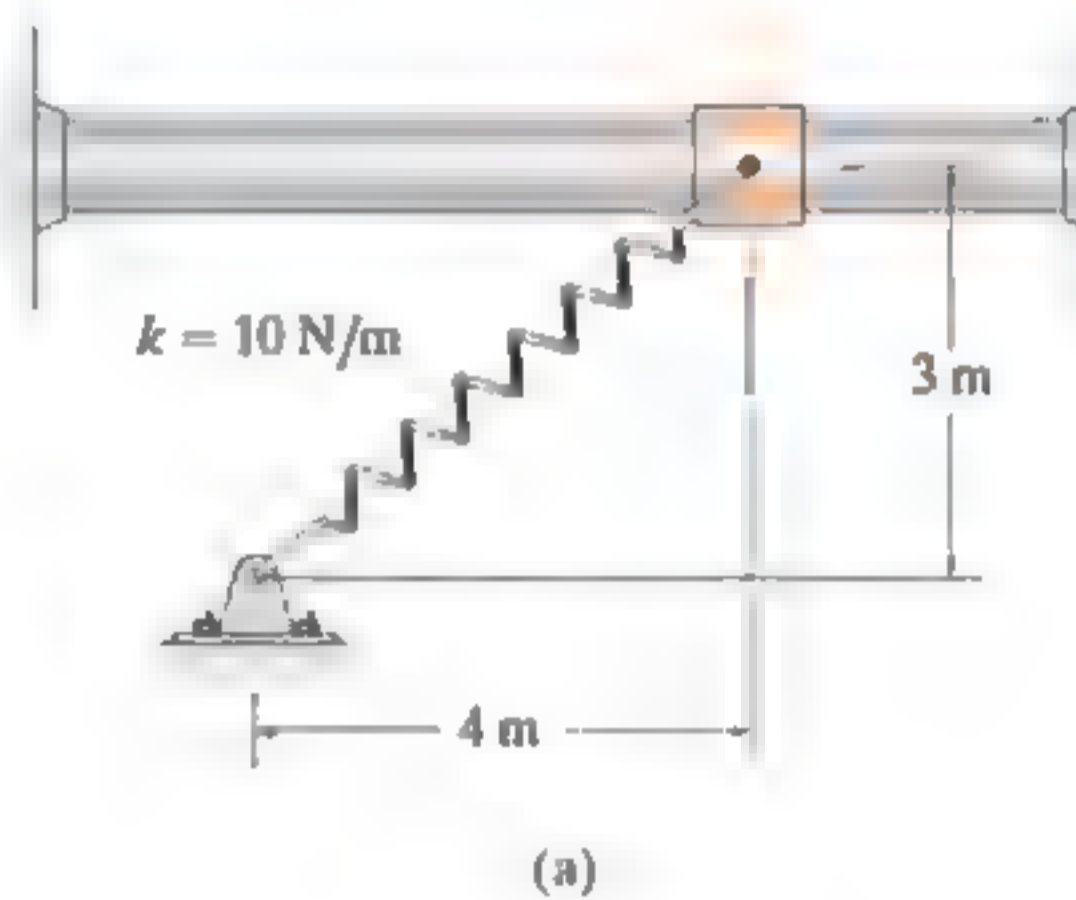
## PROBLEMAS PRELIMINARES

**P14-3.** Determine la energía potencial del bloque que tiene un peso de 100 N.



Prob. P14-3

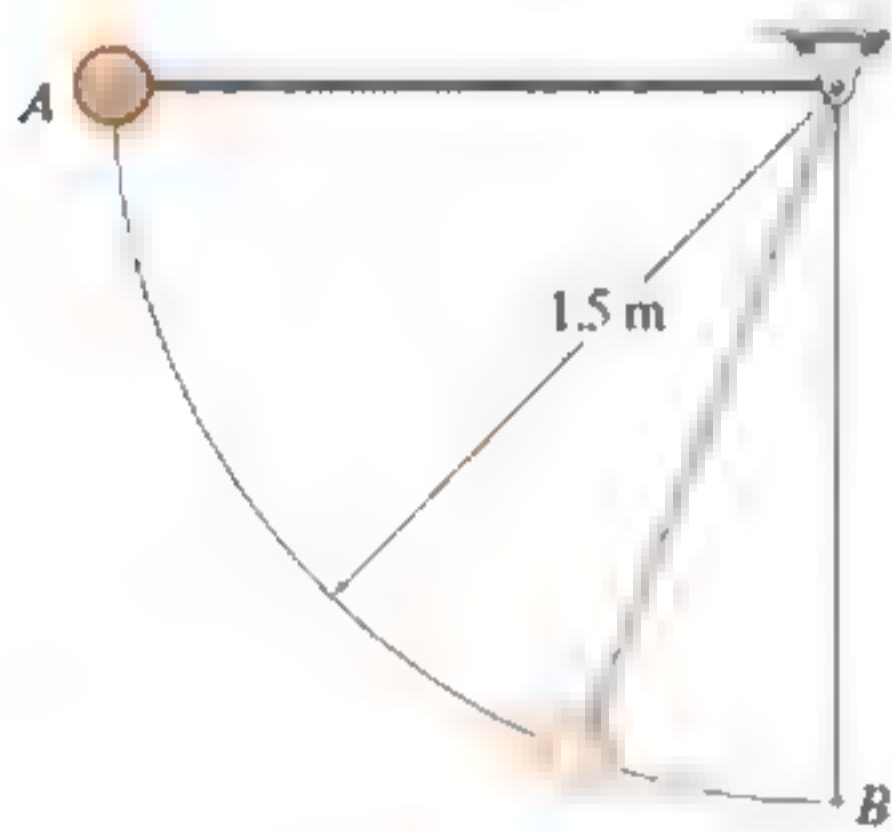
**P14-4.** Determine la energía potencial en el resorte que tiene una longitud sin estirar de 4 m.



Prob. P14-4

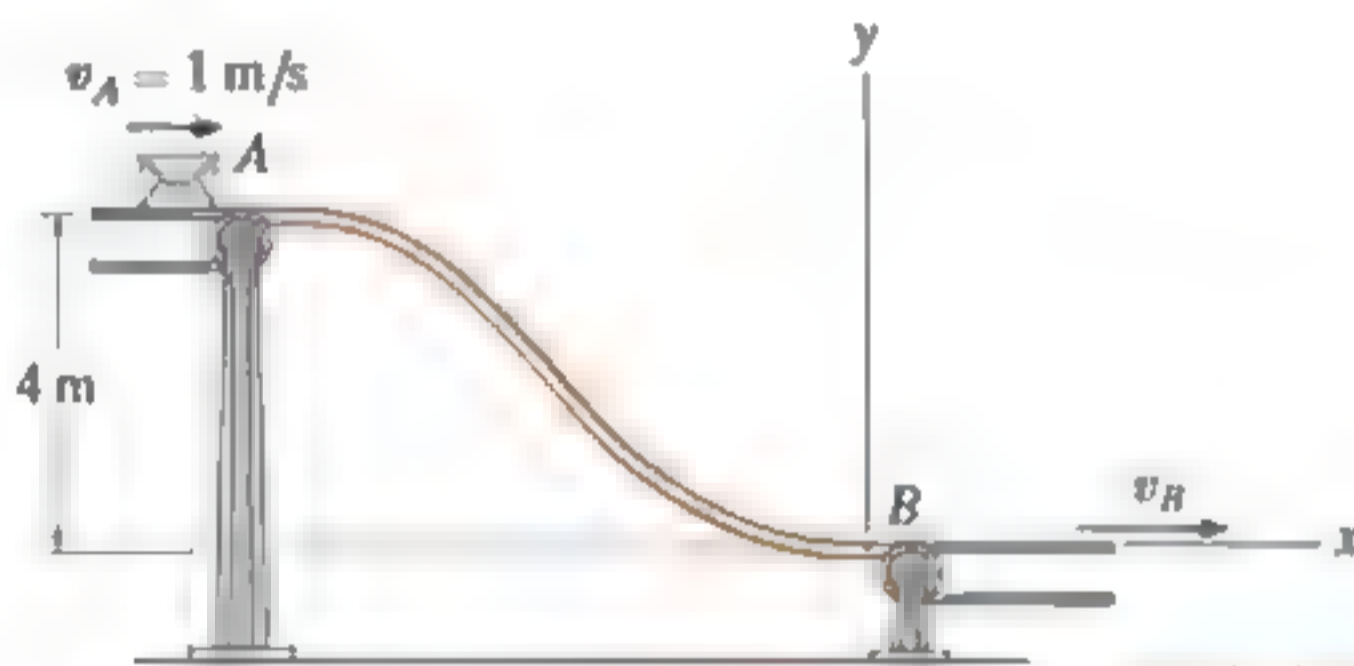
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F14-13.** La bola del péndulo de 2 kg se suelta del reposo cuando está en *A*. Determine la rapidez de la bola y la tensión en la cuerda cuando pasa por su posición más baja *B*.



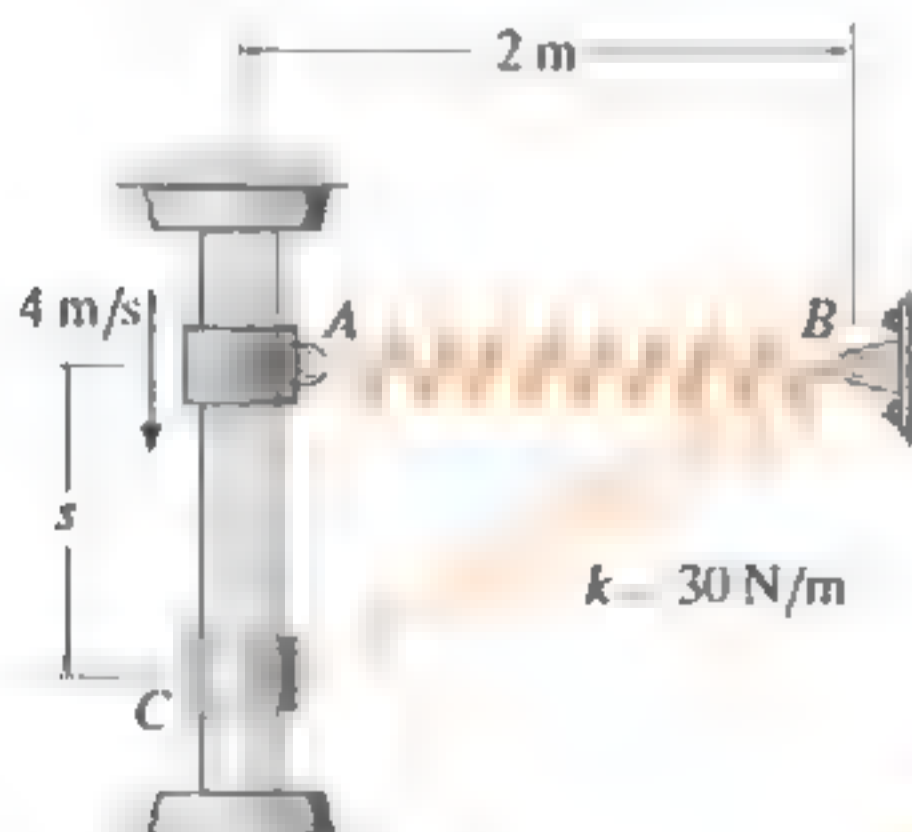
Prob. F14-13

**F14-14.** El paquete de 2 kg deja la banda transportadora en *A* con una rapidez de  $v_A = 1$  m/s y se desliza hacia abajo de la rampa lisa. Determine la rapidez requerida de la banda transportadora en *B*, de modo que el paquete sea entregado sin que resbale en la banda. Además, determine la reacción normal que la rampa en la parte curva ejerce en el paquete en *B*, si  $\rho_B = 2$  m.



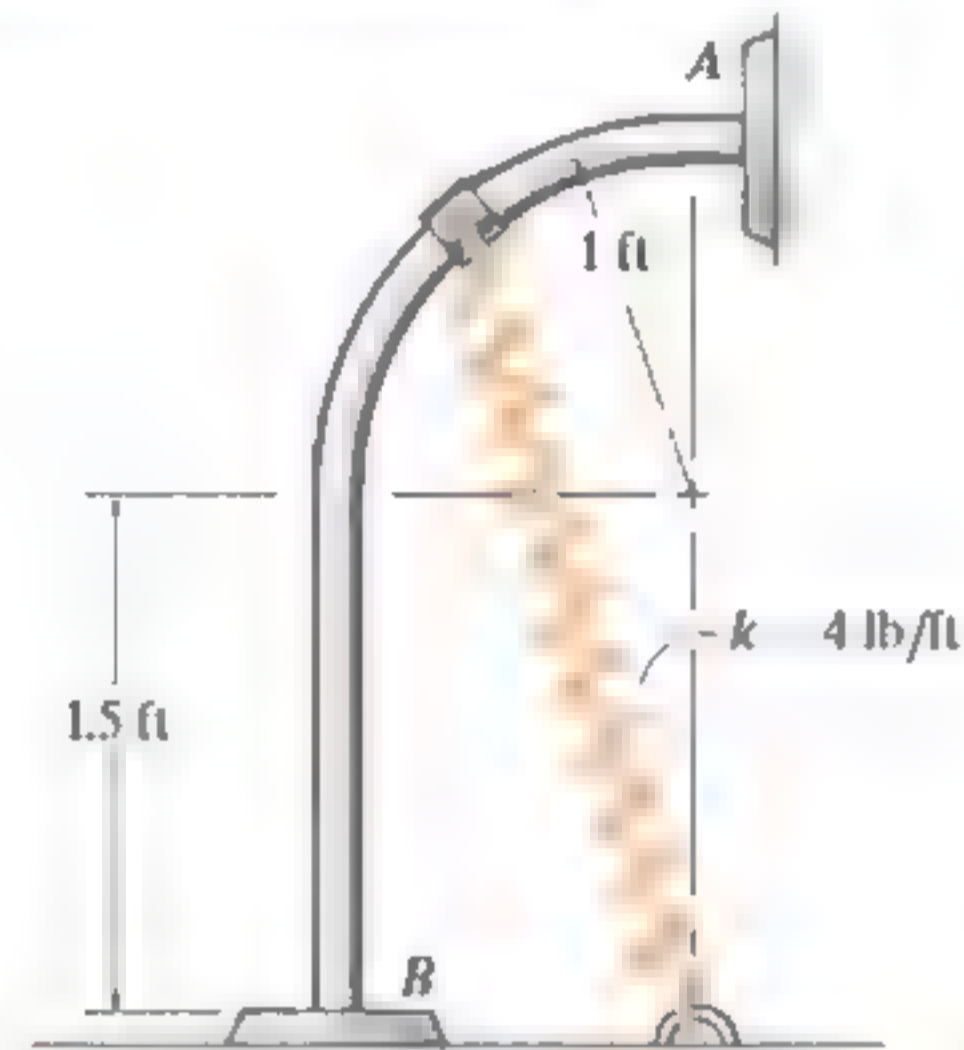
Prob. F14-14

**F14-15.** Al collarín de 2 kg se le imprime una velocidad de 4 m/s hacia abajo, cuando está en *A*. Si la longitud sin estirar del resorte es de 1 m y su rigidez es  $k = 30$  N/m, determine la rapidez del collarín en  $s = 1$  m.



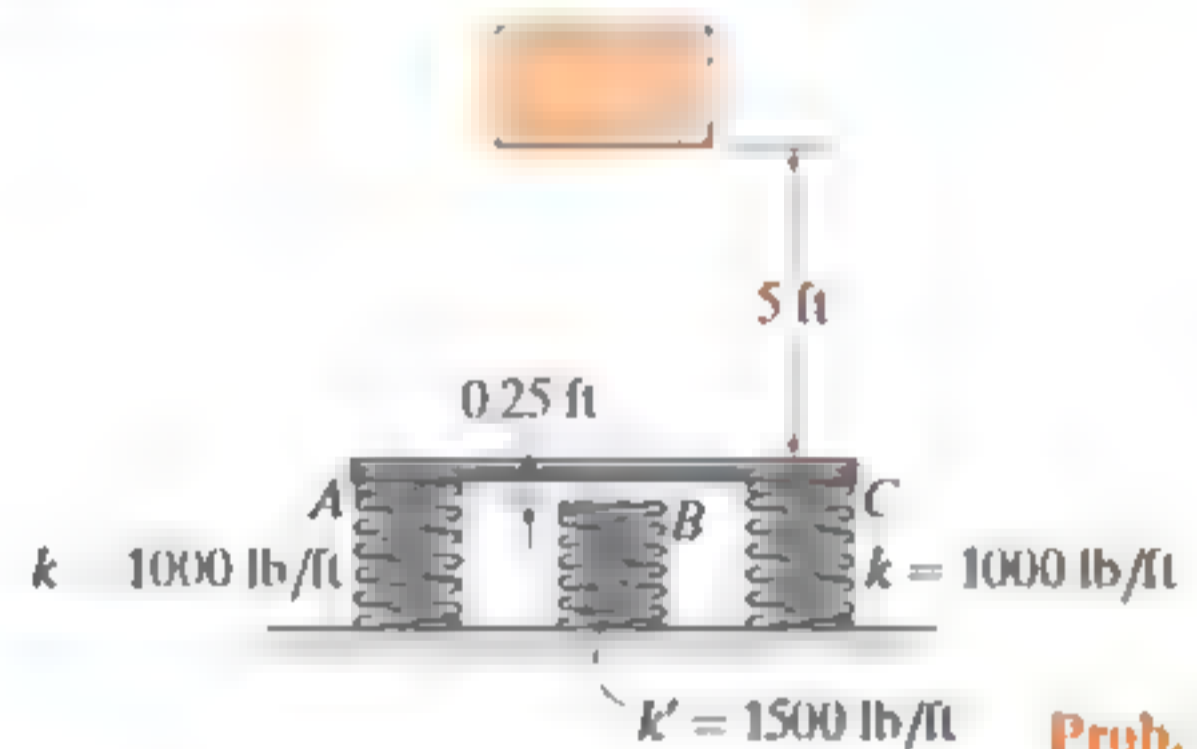
Prob. F14-15

**F14-16.** El collarín de 5 lb se suelta del reposo en *A* y se desliza a lo largo de la guía libre de fricción. Determine la rapidez del collarín cuando choca contra el tope *B*. La longitud sin estirar del resorte es de 0.5 ft.



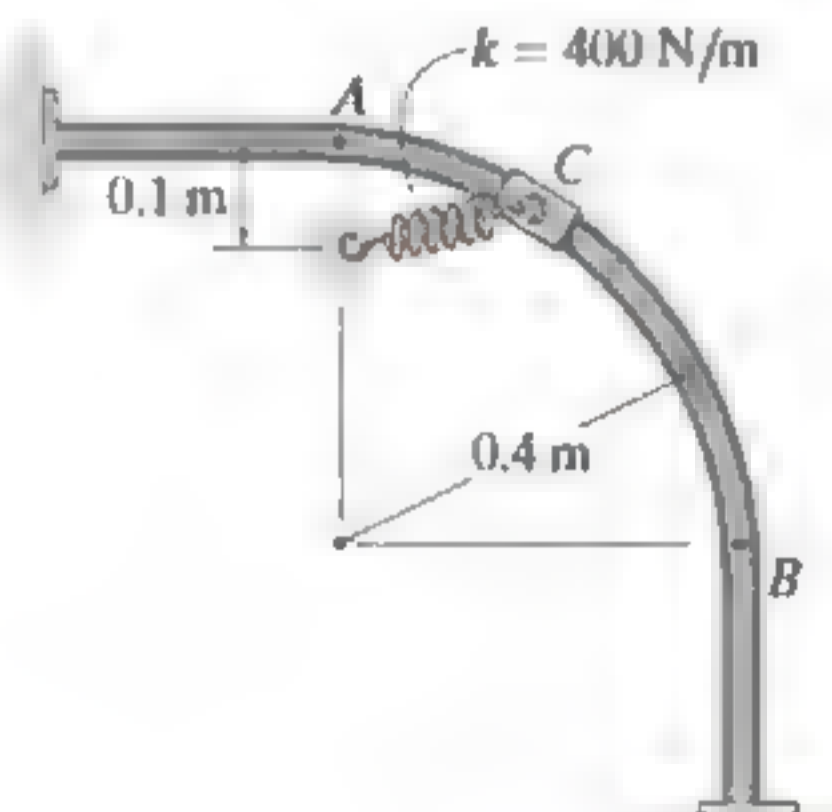
Prob. F14-16

**F14-17.** El bloque de 75 lb se suelta del reposo a 5 ft arriba de la placa. Determine la compresión de cada resorte, cuando el bloque se detiene momentáneamente después de golpear la placa. Ignore la masa de la placa. En un principio los resortes no están estirados.



Prob. F14-17

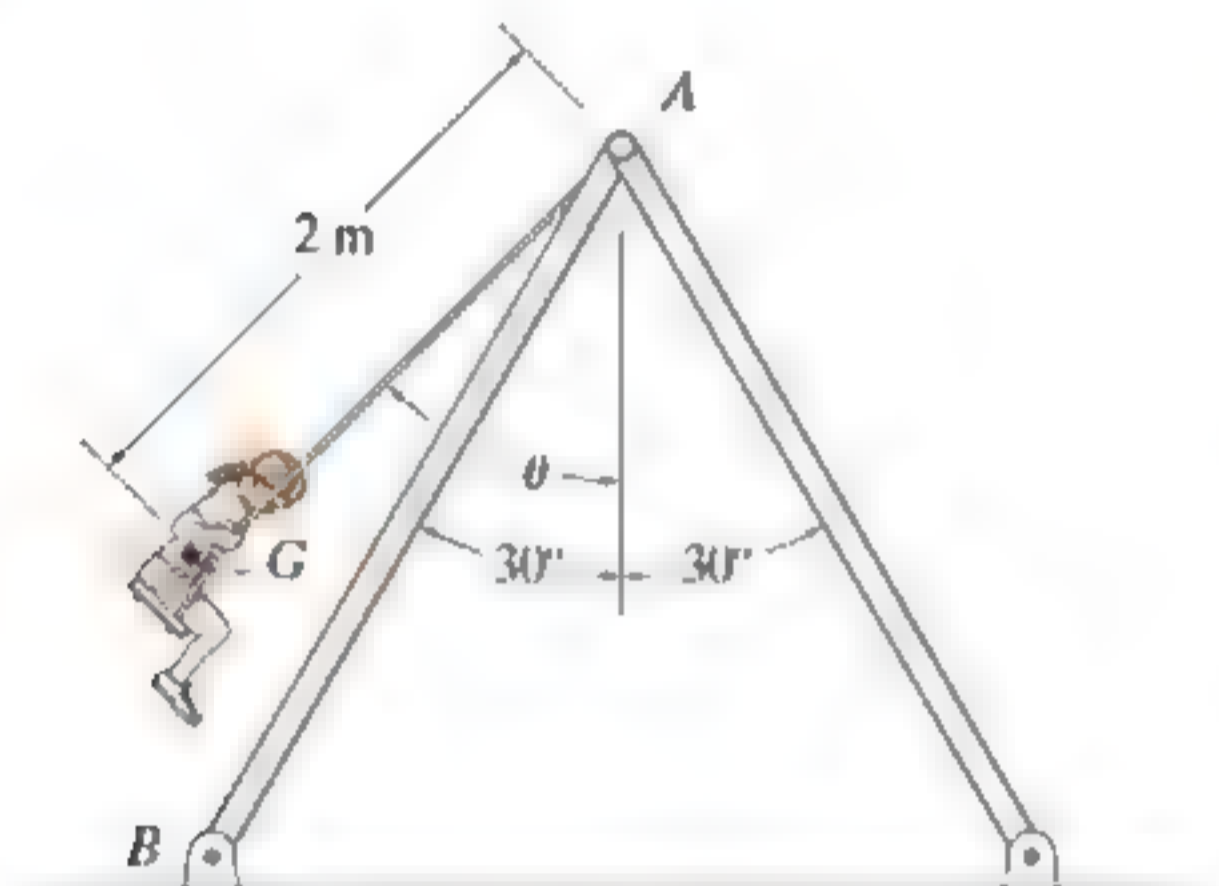
**F14-18.** El collarín *C* de 4 kg tiene una velocidad de  $v_A = 2$  m/s cuando está en *A*. Si la varilla guía es lisa, determine la rapidez del collarín cuando está en *B*. La longitud sin estirar del resorte es  $l_0 = 0.2$  m.



Prob. F14-18

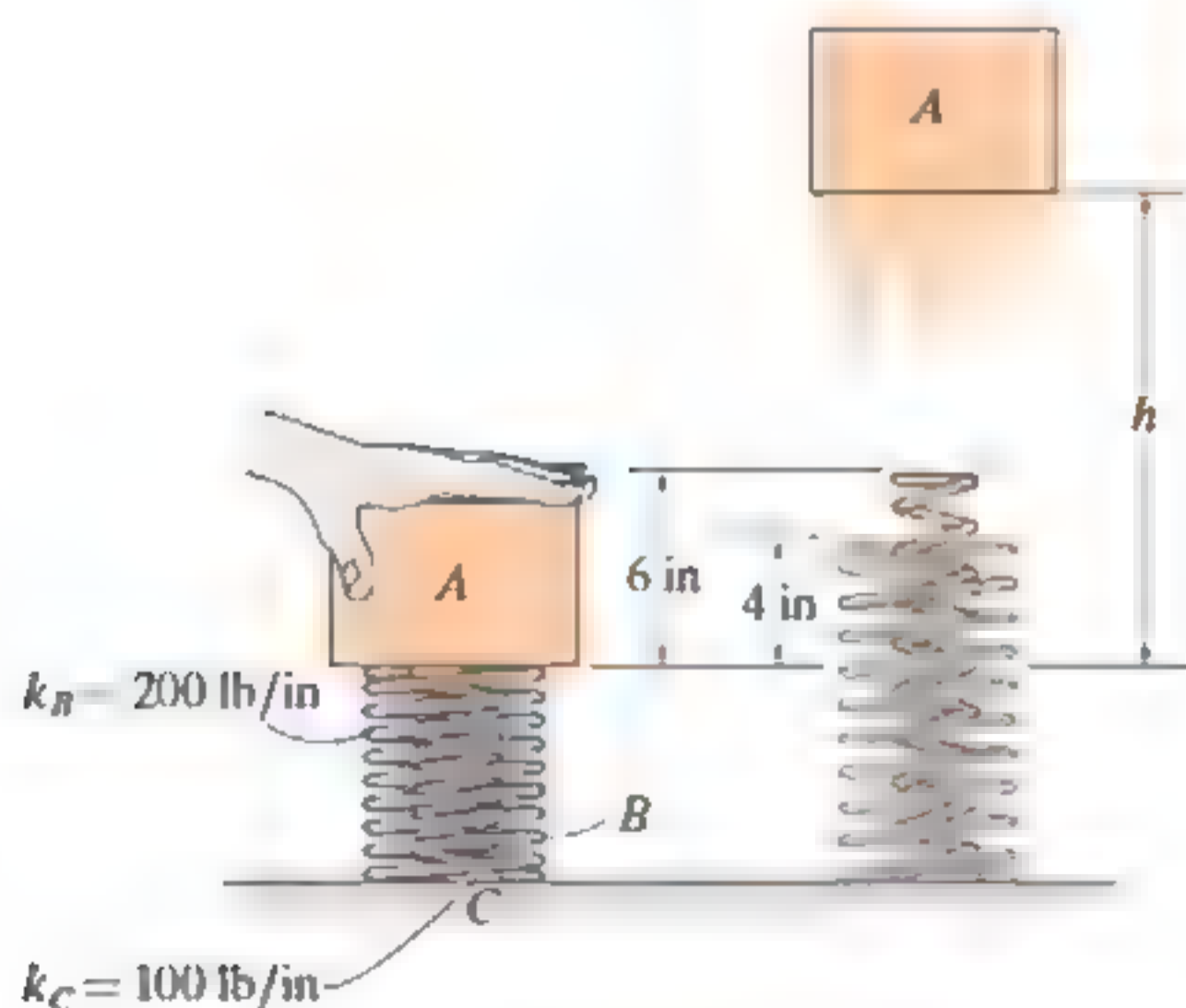
## PROBLEMAS

**14-66.** La niña tiene una masa de 40 kg y su centro de masa en  $G$ . Si se columpia hasta una altura máxima definida por  $\theta = 60^\circ$ , determine la fuerza desarrollada a lo largo de cada uno de los cuatro postes de soporte que sean iguales a  $AB$ , en el instante  $\theta = 0^\circ$ . El movimiento del columpio está centrado entre los postes.



Prob. 14-66

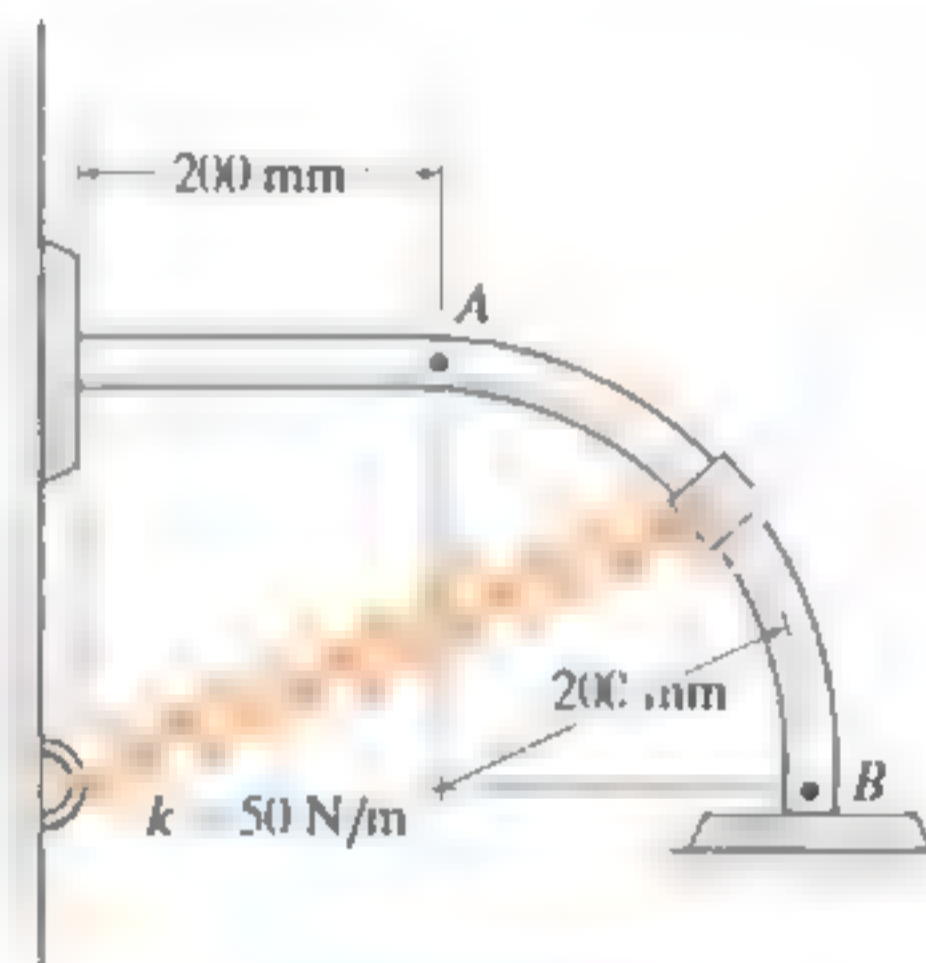
**14-67.** El bloque  $A$  de 30 lb se coloca en la parte superior de dos resortes concéntricos  $B$  y  $C$ , y después se empuja hacia abajo hasta la posición indicada. Si el bloque se libera en ese instante, determine la altura máxima  $h$  a la que se elevará.



Prob. 14-67

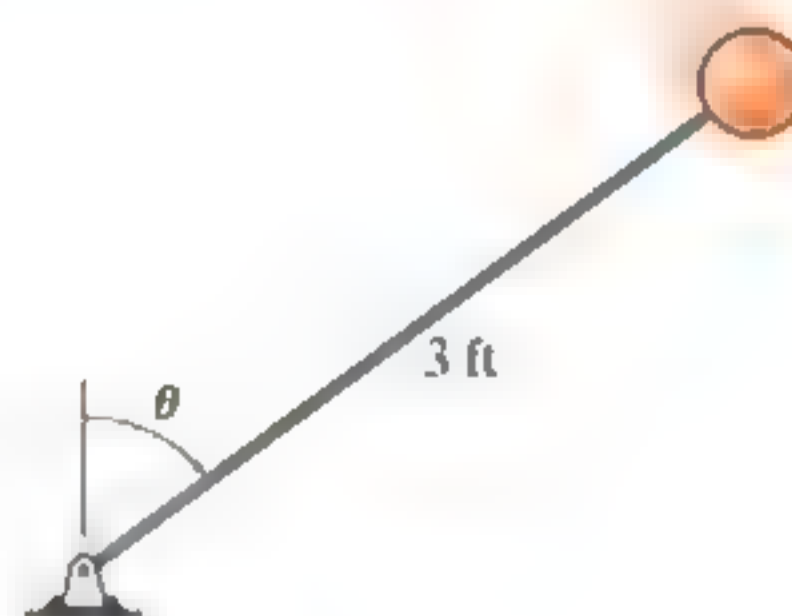
**\*14-68.** El collarín de 5 kg tiene una velocidad de 5 m/s hacia la derecha cuando está en  $A$ . En seguida, se desplaza hacia abajo a lo largo de la guía lisa. Determine la rapidez del collarín cuando llega al punto  $B$ , que se localiza justo antes del final de la porción curva de la varilla. El resorte tiene una longitud sin estirar de 100 mm y  $B$  se ubica justo antes del extremo de la porción curva de la varilla.

**14-69.** El collarín de 5 kg tiene una velocidad de 5 m/s hacia la derecha cuando está en  $A$ . En seguida, se desplaza a lo largo de la guía lisa. Determine su rapidez cuando su centro llega al punto  $B$  y la fuerza normal que ejerce sobre la varilla en este punto. El resorte tiene una longitud sin estirar de 100 mm y  $B$  está situado justo antes del final de la porción curva de la varilla.



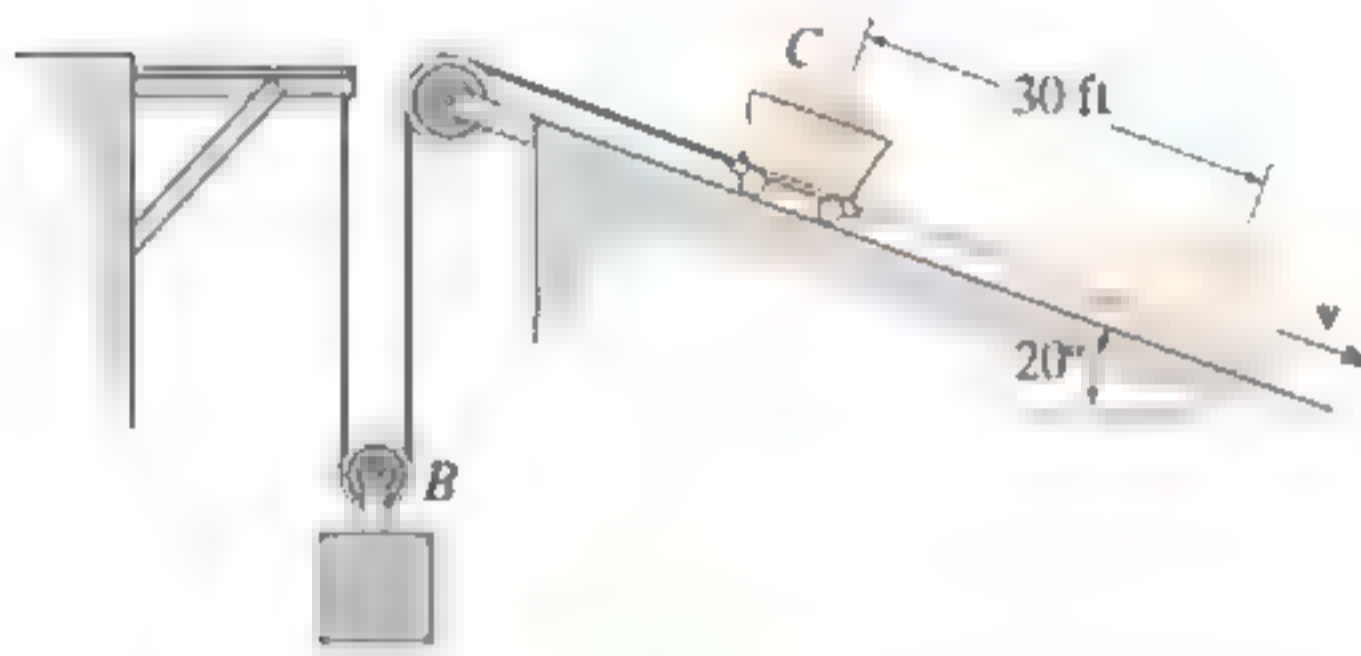
Probs. 14-68/69

**14-70.** La bola tiene un peso de 15 lb y se fija a una varilla con masa despreciable. Si se libera desde el reposo cuando  $\theta = 0^\circ$ , determine el ángulo  $\theta$  en el que la fuerza de compresión sobre la varilla se convierte en cero.



Prob. 14-70

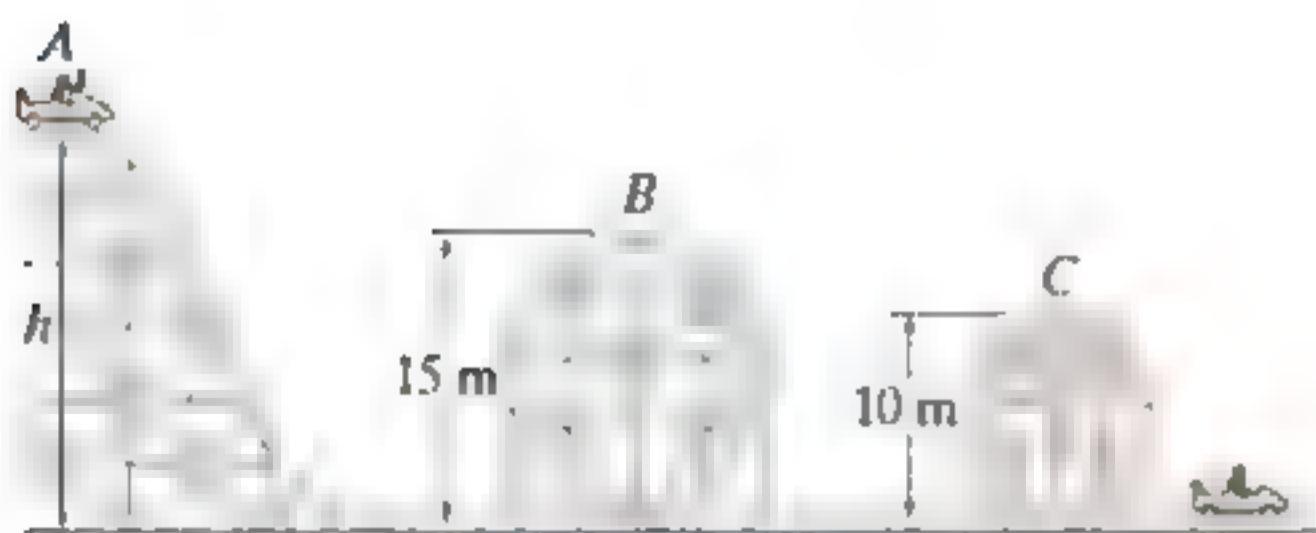
**14-71.** El carro  $C$  y su contenido tienen un peso de 600 lb, mientras que el bloque  $B$  tiene un peso de 200 lb. Si el carro se libera del reposo, determine su rapidez después de desplazarse 30 ft hacia abajo sobre el plano inclinado a  $20^\circ$ . *Sugerencia:* Para medir la energía potencial gravitacional, establezca diferentes planos de referencia en las elevaciones iniciales de  $B$  y  $C$ .



Prob. 14-71

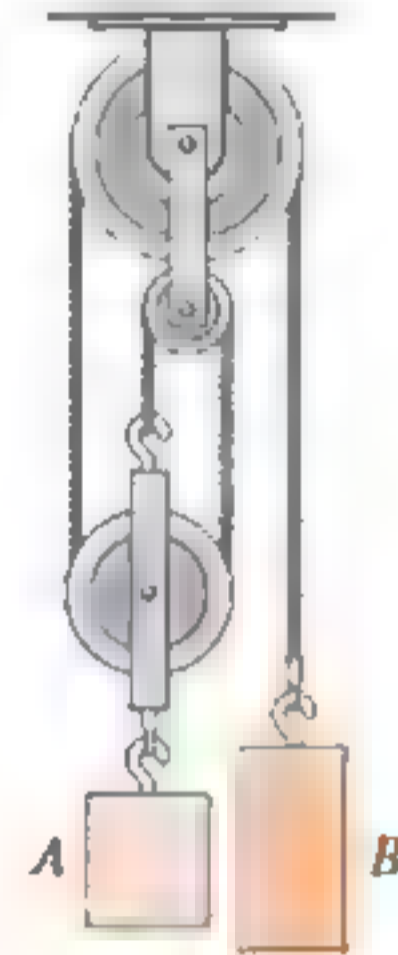
**\*14-72.** La masa del carro de la montaña rusa, incluido su pasajero, es de 700 kg. Si comienza a moverse desde la cima de la cuesta  $A$  con una rapidez  $v_A = 3$  m/s, determine la altura mínima  $h$  de la cima, de modo que el carro complete los dos rizos sin que pierda el contacto con la vía. Ignore la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal sobre el carro cuando éste se encuentra en  $B$  y cuando está en  $C$ ? Considere que  $\rho_B = 7.5$  m y  $\rho_C = 5$  m.

**14-73.** La masa del carro de la montaña rusa, incluido su pasajero, es de 700 kg. Si arranca del reposo en la cima de la cuesta  $A$ , determine la altura mínima  $h$  de la cima, de modo que el carro complete los dos rizos sin que pierda el contacto con la vía. Ignore la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal en el carro cuando éste se encuentra en  $B$  y cuando está en  $C$ ? Considere que  $\rho_B = 7.5$  m y  $\rho_C = 5$  m.



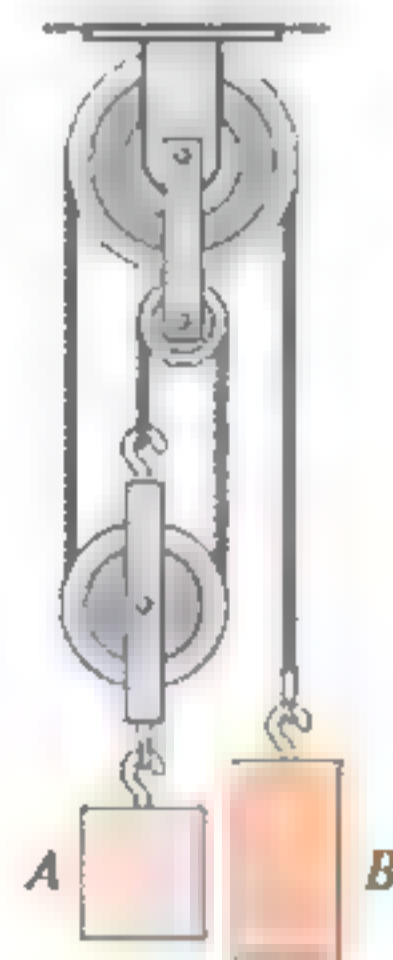
Probs. 14-72, 73

**14-74.** El ensamble consta de dos bloques  $A$  y  $B$  que tienen masas de 20 kg y 30 kg, respectivamente. Determine la rapidez de cada bloque cuando  $B$  desciende 1.5 m. Los bloques se liberan del reposo. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.



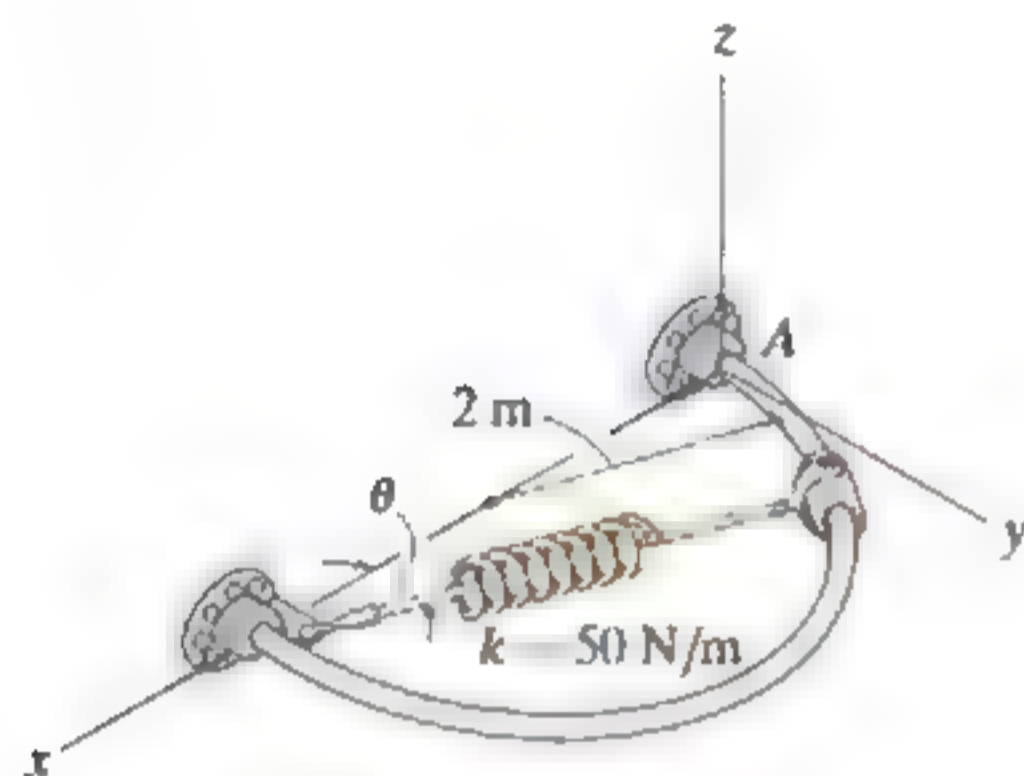
Prob. 14-74

**14-75.** El ensamble consta de dos bloques  $A$  y  $B$  que tienen masas de 20 kg y 30 kg, respectivamente. Determine la distancia que debe descender  $B$  para que  $A$  alcance una rapidez de 3 m/s a partir del reposo.



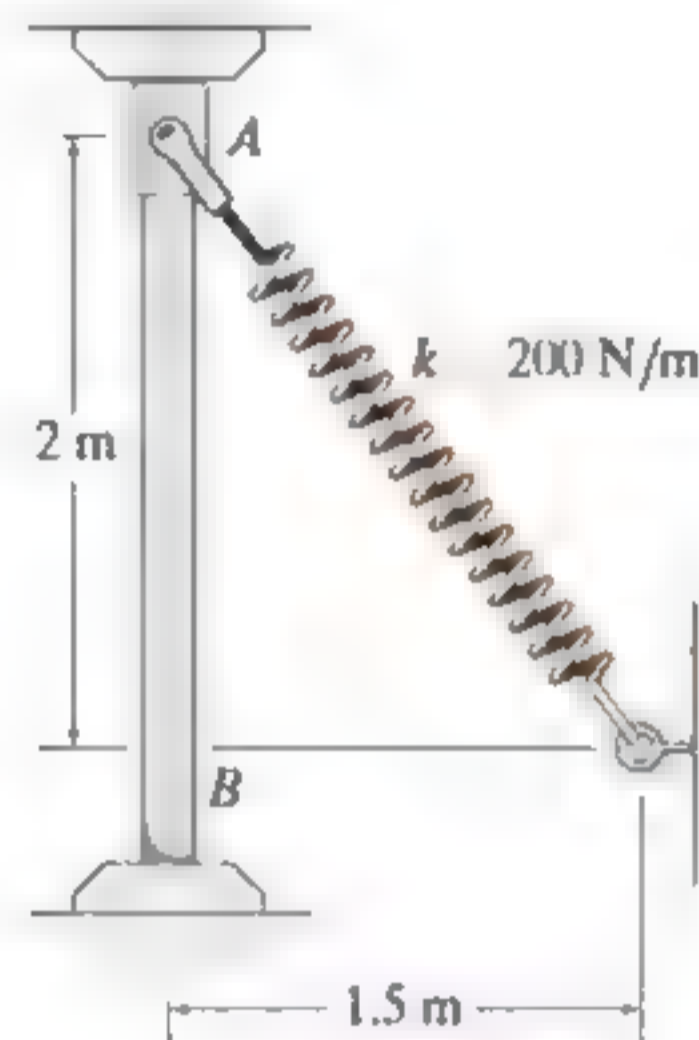
Prob. 14-75

**\*14-76.** El resorte tiene una rigidez  $k = 50 \text{ N/m}$  y una longitud sin estirar de  $0.3 \text{ m}$ . Si está unido al collarín liso de  $2 \text{ kg}$  y éste se libera del reposo en  $A$  ( $\theta = 0^\circ$ ), determine la rapidez del collarín cuando  $\theta = 60^\circ$ . El movimiento ocurre en el plano horizontal. Desprecie el tamaño del collarín.



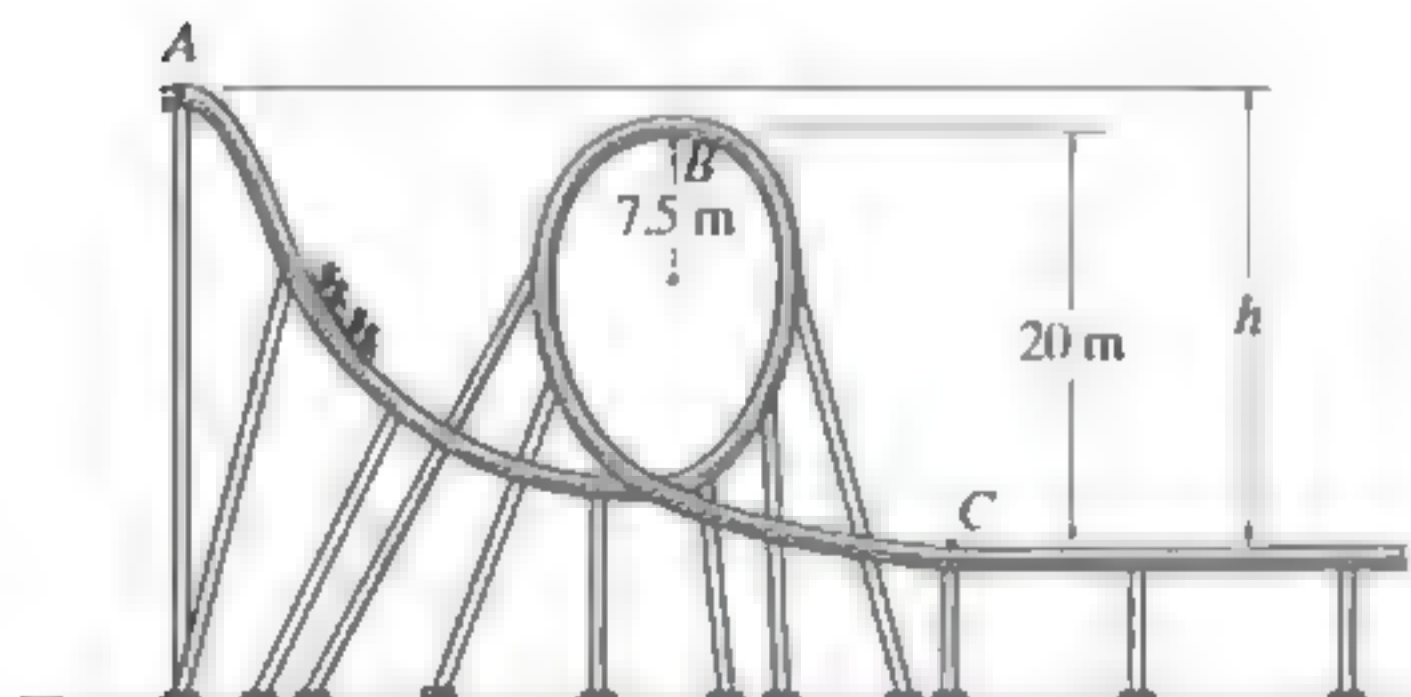
Prob. 14-76

**14-78.** El resorte tiene una rigidez  $k = 200 \text{ N/m}$  y una longitud sin estirar de  $0.5 \text{ m}$ . Si está unido al collarín liso de  $3 \text{ kg}$  y éste se libera del reposo en  $A$ , determine la rapidez del collarín cuando llega a  $B$ . Desprecie el tamaño del collarín.



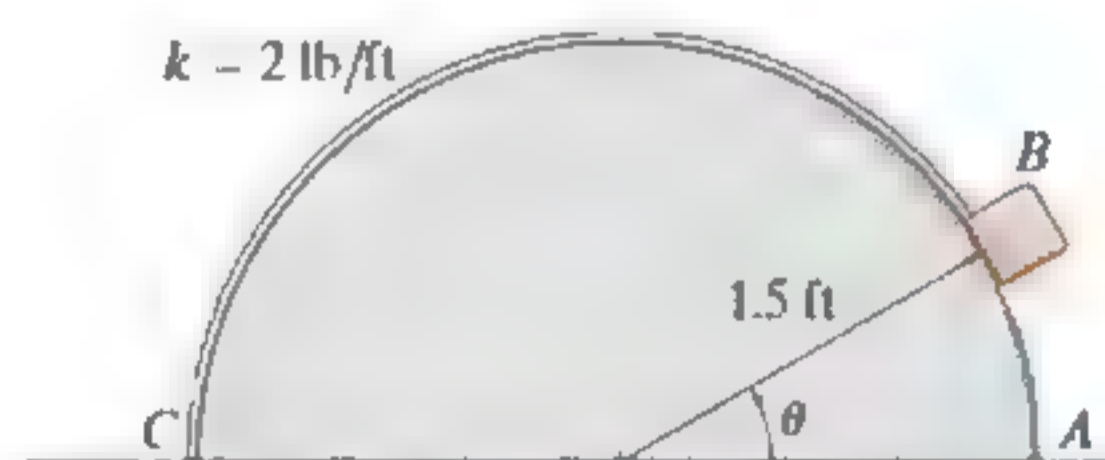
Prob. 14-78

**14-77.** El carro de la montaña rusa tiene una masa  $m$  y se libera del reposo en el punto  $A$ . Si la pista debe diseñarse para que el carro no se despegue de la vía en  $B$ , determine la altura  $h$  requerida. Además, encuentre la rapidez del carro cuando llega al punto  $C$ . Desprecie la fricción.



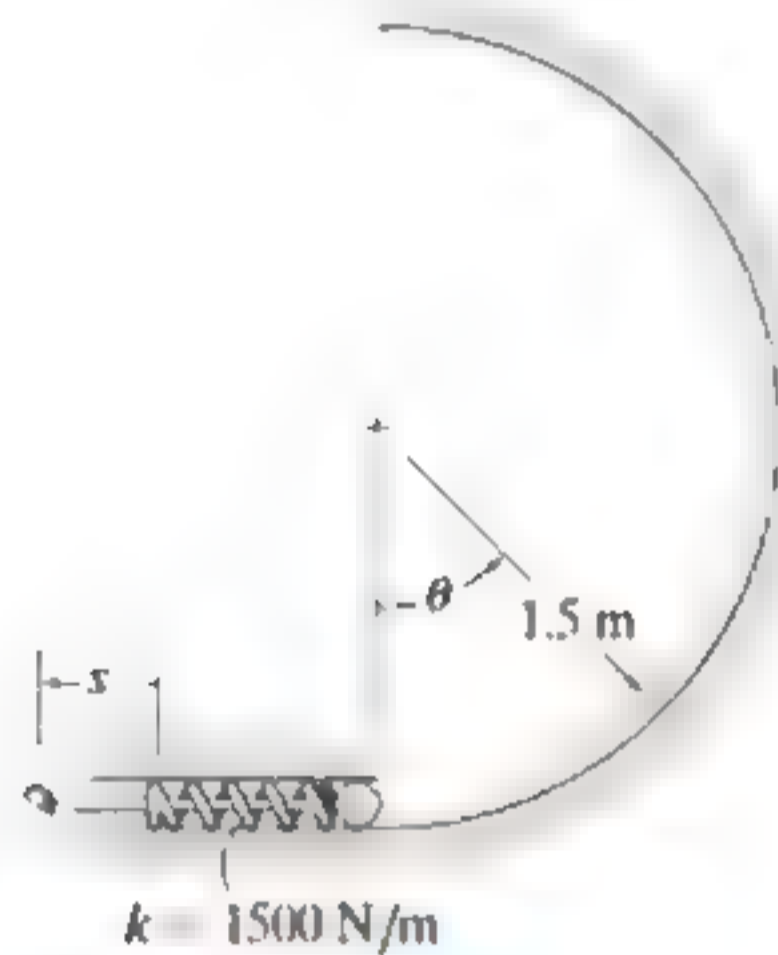
Prob. 14-77

**14-79.** Un bloque de  $2 \text{ lb}$  descansa sobre la superficie semicilíndrica lisa en  $A$ . Una cuerda elástica con rigidez  $k = 2 \text{ lb/ft}$  está unida al bloque en  $B$  y a la base del semicilindro en  $C$ . Si el bloque se libera del reposo en  $\theta = 0^\circ$ ,  $A$ , determine la mayor longitud sin estirar de la cuerda, tal que el bloque comience a despegarse del semicilindro en el instante  $\theta = 45^\circ$ . Desprecie el tamaño del bloque.



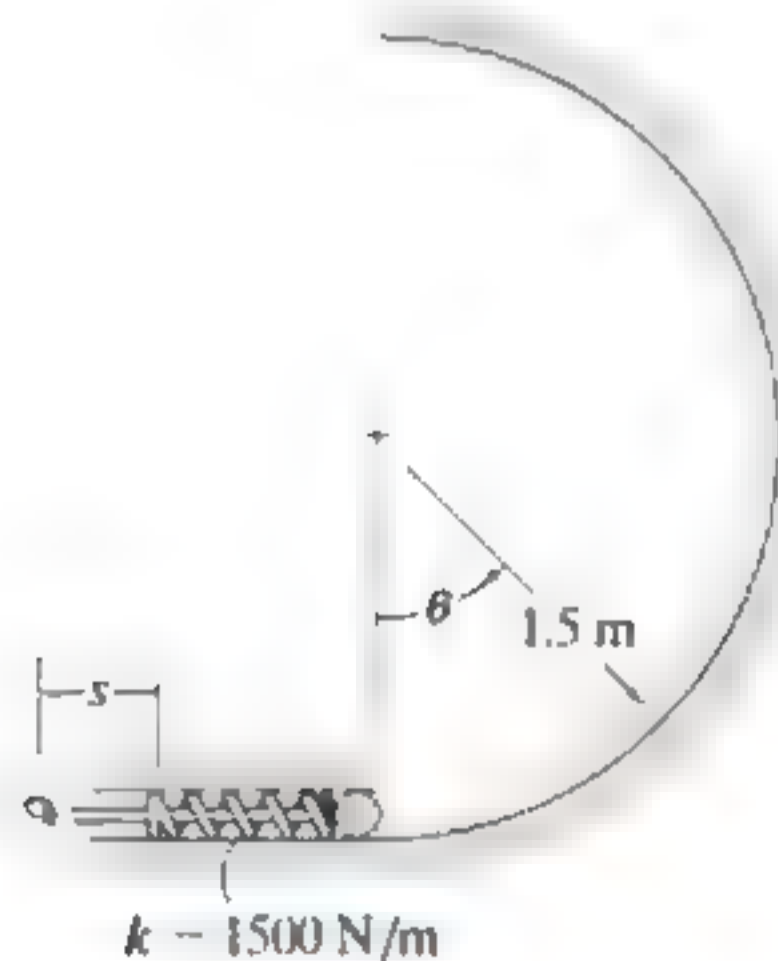
Prob. 14-79

**\*14-80.** Cuando  $s = 0$ , el resorte del mecanismo de disparo no está estirado. Si el brazo se jala de modo que  $s = 100$  mm y luego se suelta, determine la rapidez de la bola de  $0.3$  kg y la reacción normal de la pista circular sobre la bola cuando  $\theta = 60^\circ$ . Suponga que todas las superficies de contacto son lisas. Desprecie la masa del resorte y el tamaño de la bola.



Prob. 14-80

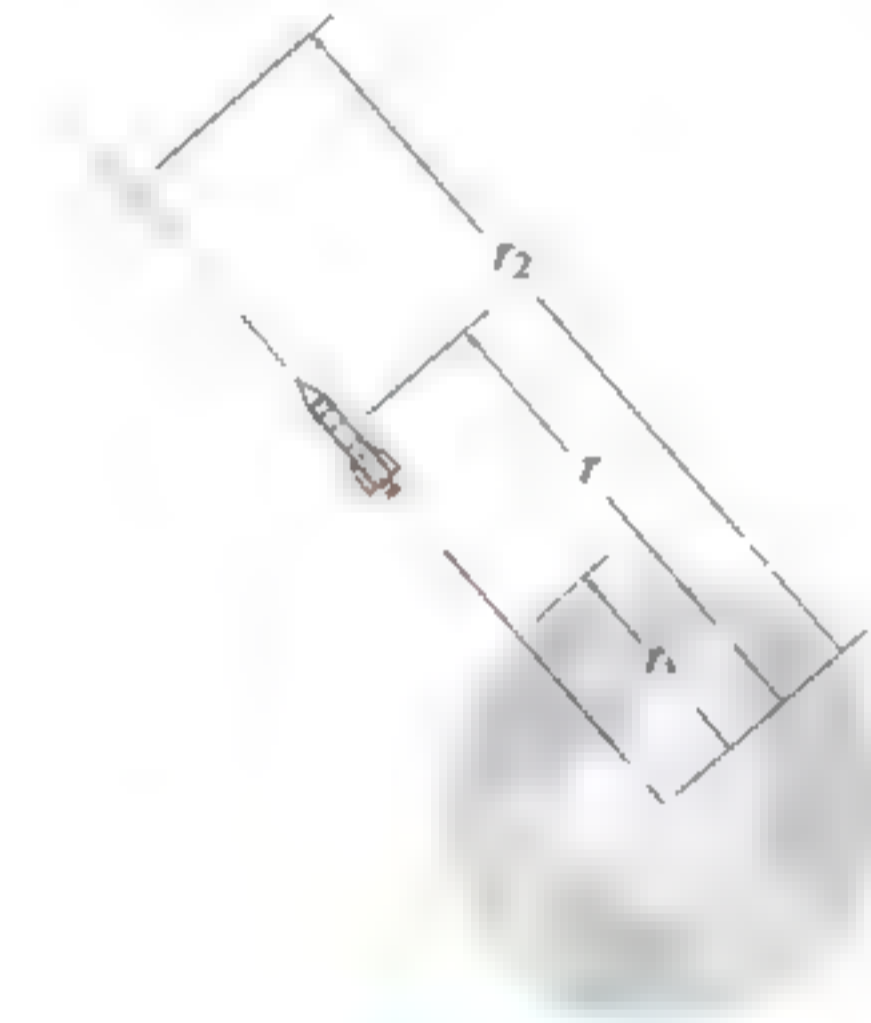
**14-81.** Cuando  $s = 0$ , el resorte del mecanismo de disparo no está estirado. Si el brazo se jala de modo que  $s = 100$  mm y luego se suelta, determine el ángulo máximo  $\theta$  que se desplazará la bola sin salir de la pista circular. Suponga que todas las superficies de contacto son lisas. Desprecie la masa del resorte y el tamaño de la bola.



Prob. 14-81

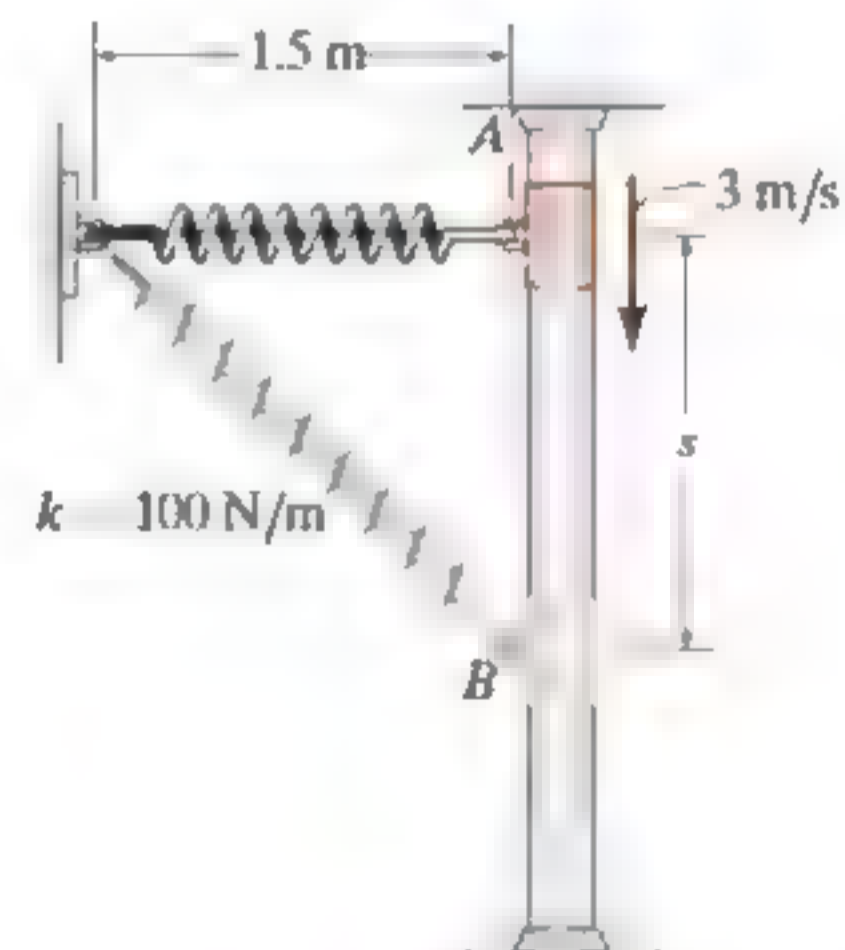
**14-82.** Si la masa de la tierra es  $M_e$  demuestre que la energía potencial gravitacional de un cuerpo de masa  $m$  situado a una distancia  $r$  del centro de la Tierra es  $V_g = -GM_em/r$ . Recuerde que la fuerza gravitacional que actúa entre la Tierra y el cuerpo es  $F = G(M_em/r^2)$ , ecuación 13-1. Para el cálculo, localice el plano de referencia en  $r \rightarrow \infty$ . Asimismo, demuestre que  $F$  es una fuerza conservativa.

**14-83.** Se lanza verticalmente un cohete de masa  $m$  desde la superficie terrestre, es decir, en  $r = r_1$ . Suponiendo que el cohete no pierde masa al ascender, determine el trabajo que debe realizar contra la gravedad para alcanzar una distancia  $r_2$ . La fuerza gravitacional es  $F = GM_em/r^2$  (ecuación 13-1), donde  $M_e$  es la masa terrestre y  $r$  la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra.



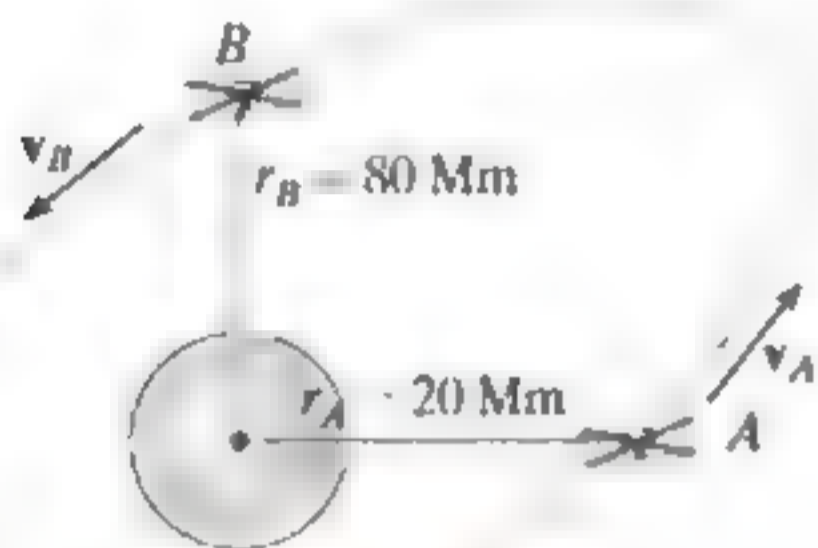
Probs. 14-82/83

**\*14-84.** El collarín liso de  $4$  kg tiene una rapidez de  $3$  m/s cuando está en  $s = 0$ . Determine la distancia máxima  $s$  que viaja antes de detenerse momentáneamente. El resorte tiene una longitud sin estirar de  $1$  m.



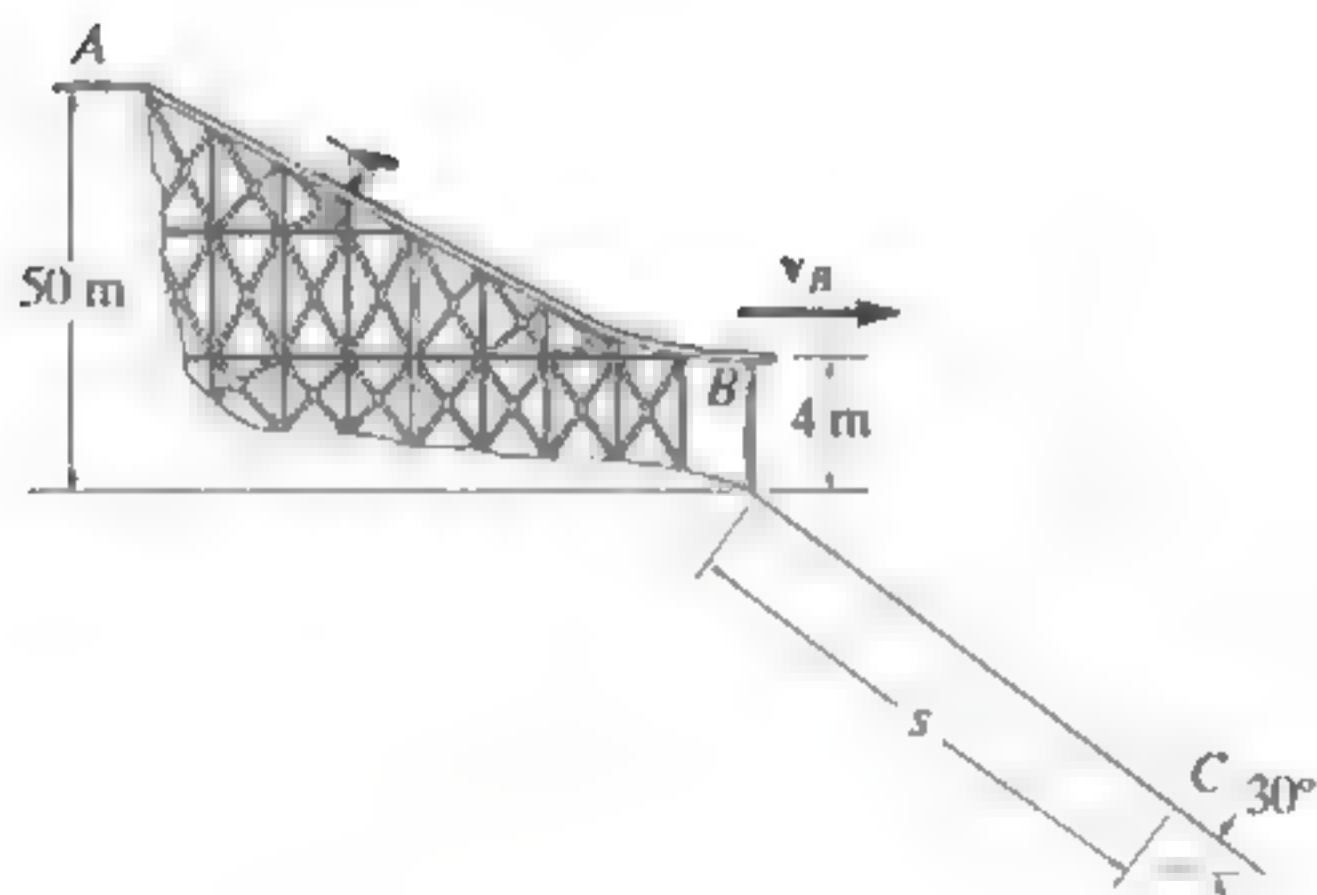
Prob. 14-84

**14-85.** Un satélite de 60 kg vuela libremente a lo largo de una órbita elíptica de modo que en  $A$ , donde  $r_A = 20$  Mm, su rapidez es  $v_A = 40$  Mm/h. ¿Cuál es la rapidez del satélite cuando llega al punto  $B$ , donde  $r_B = 80$  Mm? *Sugerencia:* Vea el problema 14-82, donde  $M_e = 5.976(10^{24})$  kg y  $G = 66.73(10^{-12})$  m<sup>3</sup>/(kg · s<sup>2</sup>).



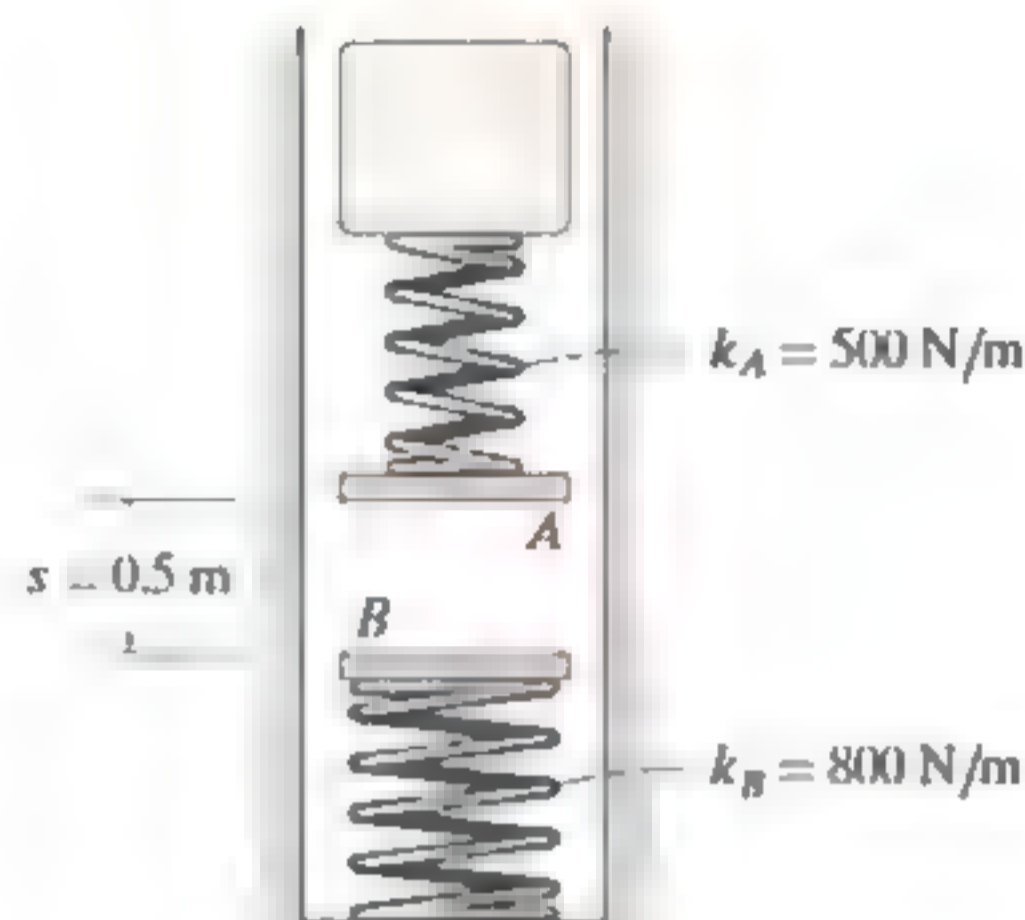
Prob. 14-85

**14-86.** El esquiador parte del reposo en  $A$  y desciende por la rampa. Si la fricción y la resistencia del aire pueden despreciarse, determine su rapidez  $v_B$  cuando llega a  $B$ . Además, determine la distancia  $s$  donde hace contacto con el suelo en  $C$ , si salta cuando se desplaza horizontalmente en  $B$ . Ignore el tamaño del esquiador. Su masa es de 70 kg.



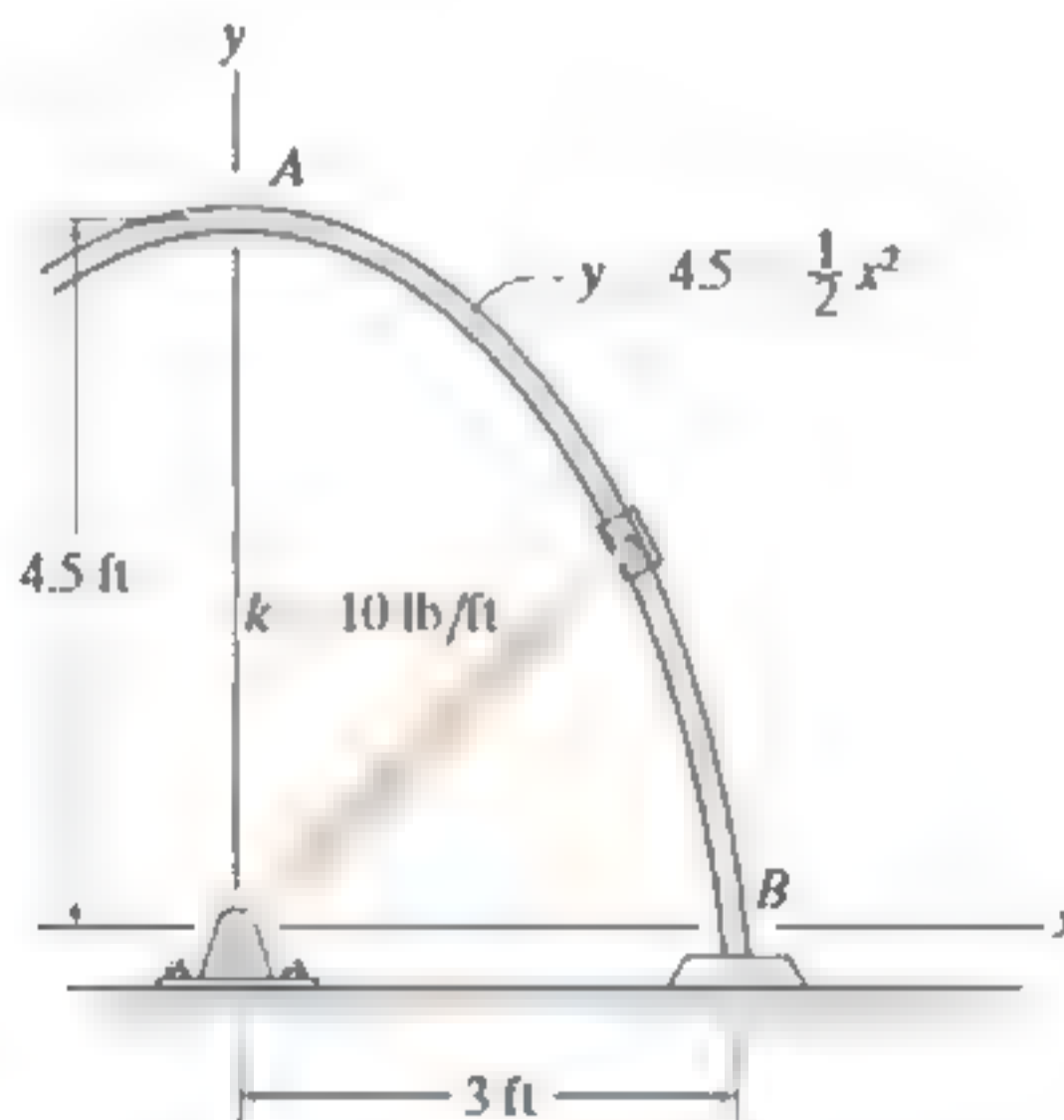
Prob. 14-86

**14-87.** El bloque tiene una masa de 20 kg y se libera desde el reposo cuando  $s = 0.5$  m. Si las masas de los parachoques  $A$  y  $B$  son despreciables, determine la deformación máxima de cada resorte debido a la colisión.



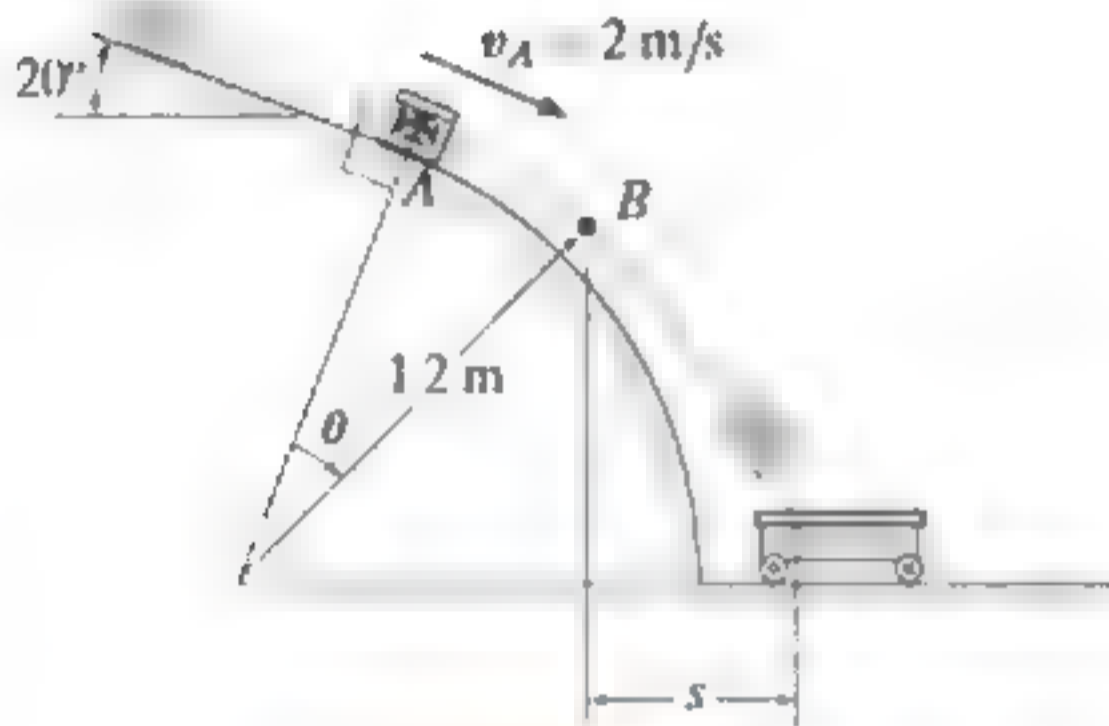
Prob. 14-87

**\*14-88.** El collarín de 2 lb tiene una rapidez de 5 ft/s en  $A$ . El resorte al que está unido tiene una longitud sin estirar de 2 ft y una rigidez de  $k = 10$  lb/ft. Si el collarín se mueve sobre la varilla lisa, determine su rapidez cuando llega al punto  $B$ , la fuerza normal de la varilla sobre el collarín y la razón a la que disminuye su rapidez.



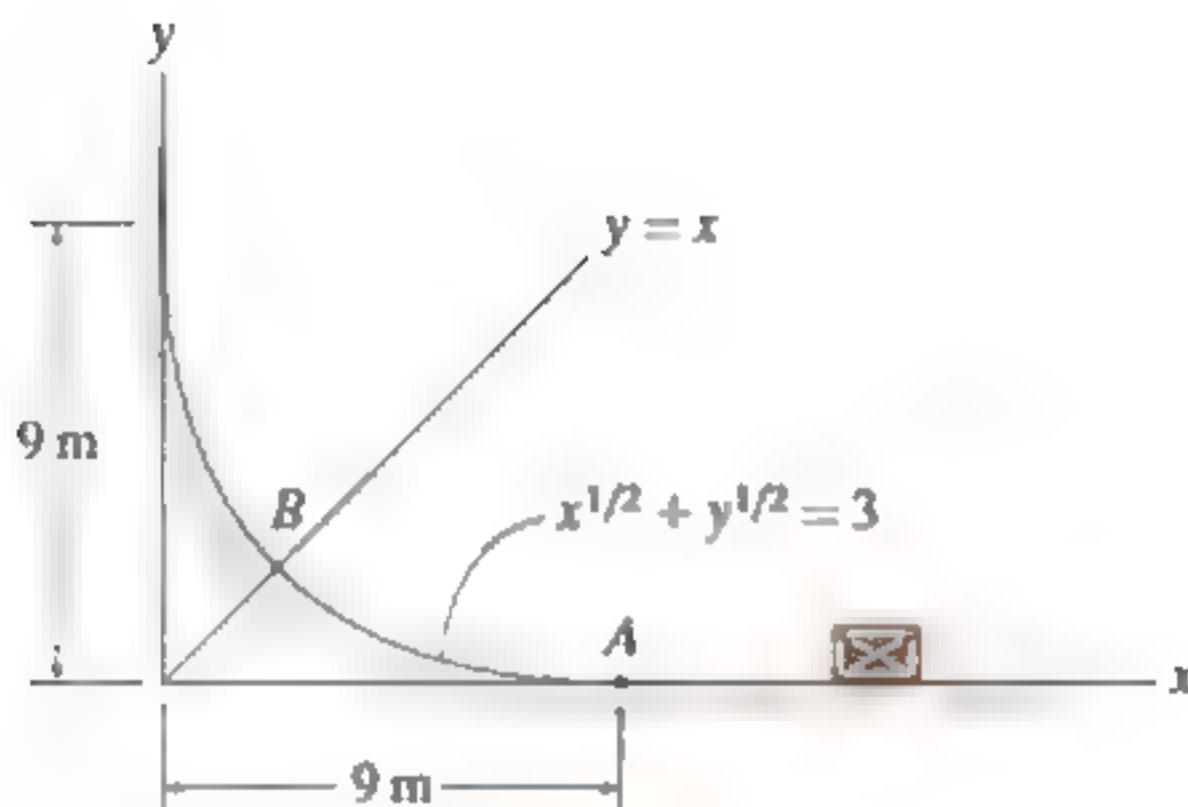
Prob. 14-88

**14-89.** Cuando la caja de 6 kg alcanza el punto *A* tiene una rapidez de  $v_A = 2$  m/s. Determine el ángulo  $\theta$  al que sale de la rampa circular lisa y la distancia  $s$  a la que cae en el carro. Desprecie la fricción.



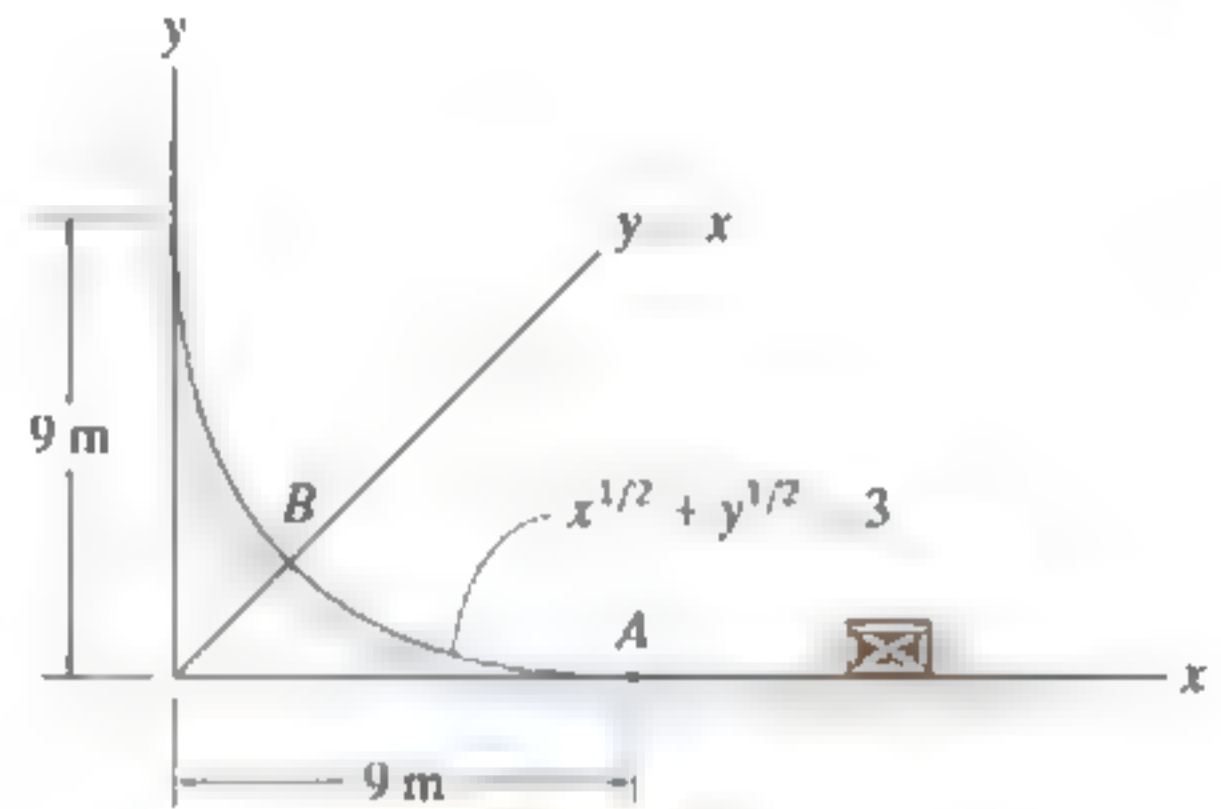
Prob. 14-89

**14-90.** Cuando la caja de 5 kg alcanza el punto *A* tiene una rapidez  $v_A = 10$  m/s. Determine la fuerza normal que la caja ejerce sobre la superficie cuando llega al punto *B*. Desprecie la fricción y el tamaño de la caja.



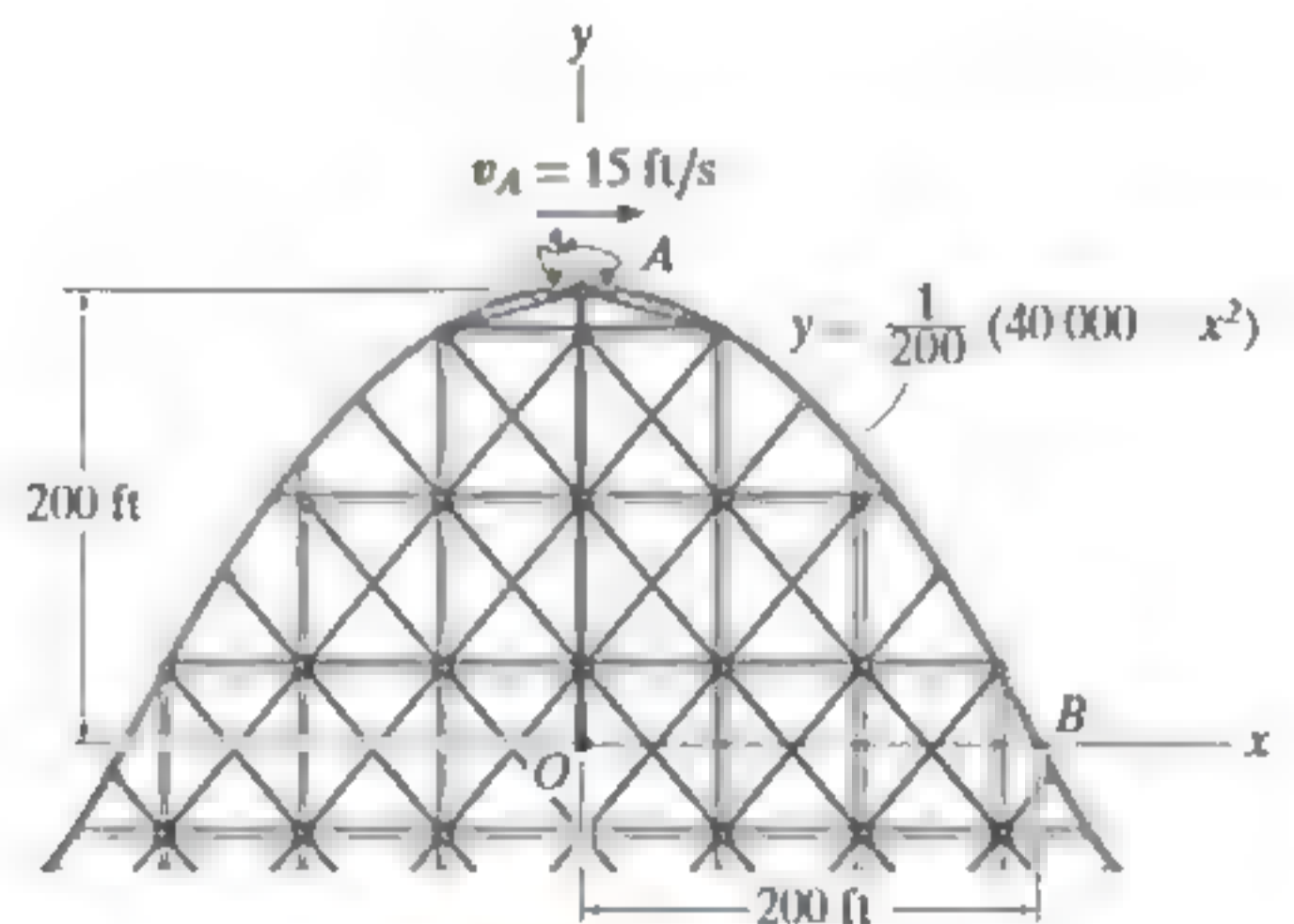
Prob. 14-90

**14-91.** Cuando la caja de 5 kg alcanza el punto *A* tiene una rapidez  $v_A = 10$  m/s. Determine qué tan alto llega la caja sobre la superficie antes de detenerse. Además, ¿cuál es la fuerza normal resultante en la superficie y la aceleración en este punto? Desprecie la fricción y el tamaño de la caja.



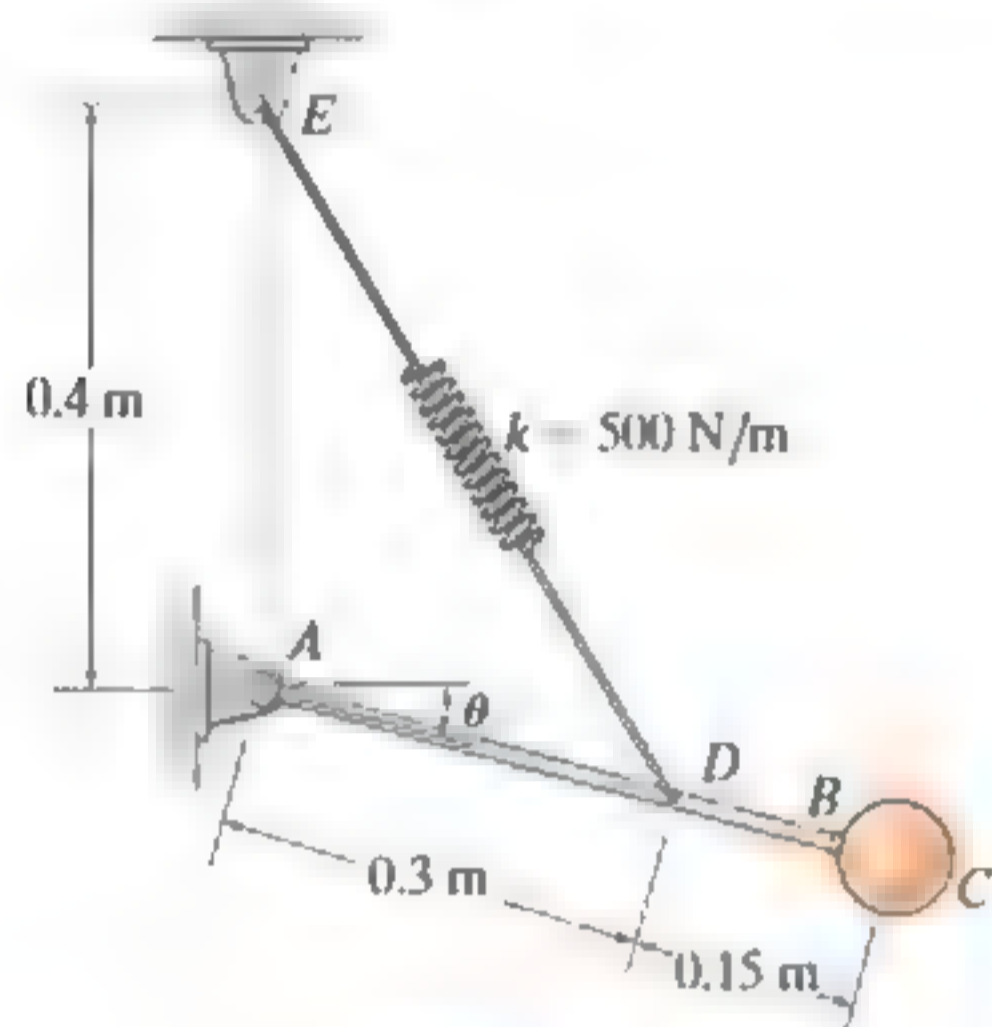
Prob. 14-91

**\*14-92.** El carro de la montaña rusa tiene una rapidez de 15 ft/s cuando está en la cresta de una pista parabólica vertical. Determine la velocidad del carro y la fuerza normal que ejerce sobre la pista cuando alcanza el punto *B*. Desprecie la fricción y la masa de las ruedas. El peso total del vehículo y de los pasajeros es de 350 lb.



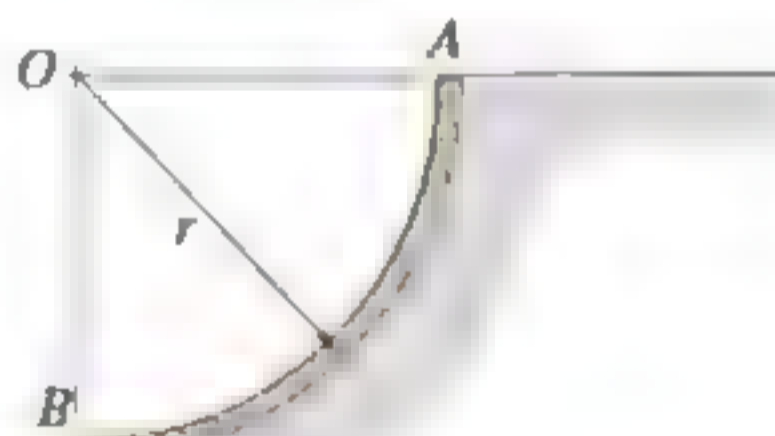
Prob. 14-92

**14-93.** La esfera  $C$  de 10 kg se libera del reposo cuando  $\theta = 0^\circ$  y la tensión en el resorte es 100 N. Determine la rapidez de la esfera en el instante  $\theta = 90^\circ$ . Desprecie la masa de la varilla  $AB$  y el tamaño de la esfera.



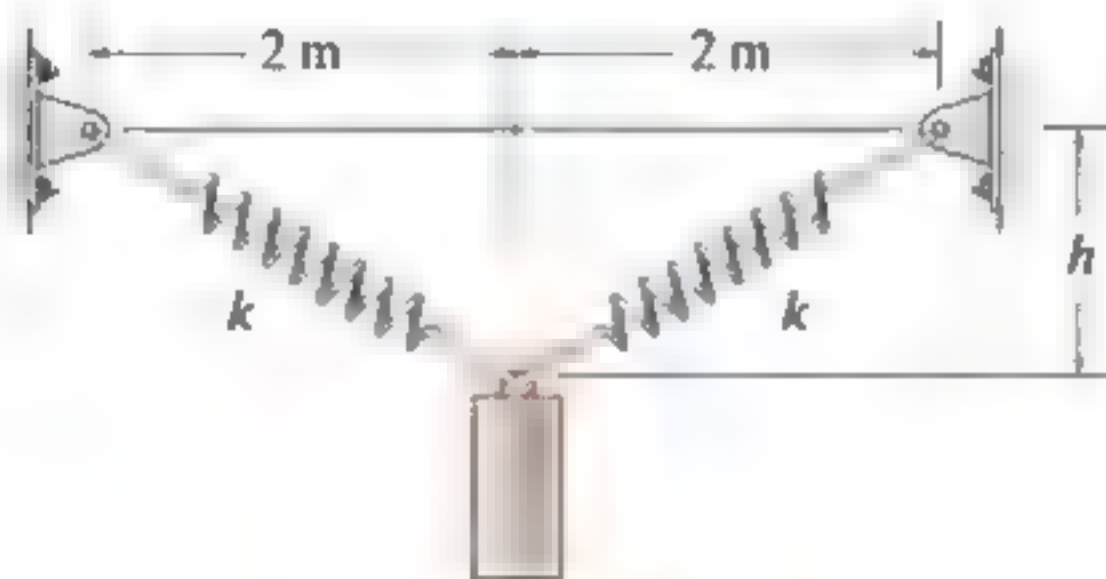
Prob. 14-93

**14-94.** Un tubo  $AB$  de un cuarto de círculo con radio medio  $r$  contiene una cadena lisa que tiene una masa por unidad de longitud  $m_0$ . Si la cadena se libera del reposo desde la posición indicada, determine su rapidez cuando sale completamente del tubo.



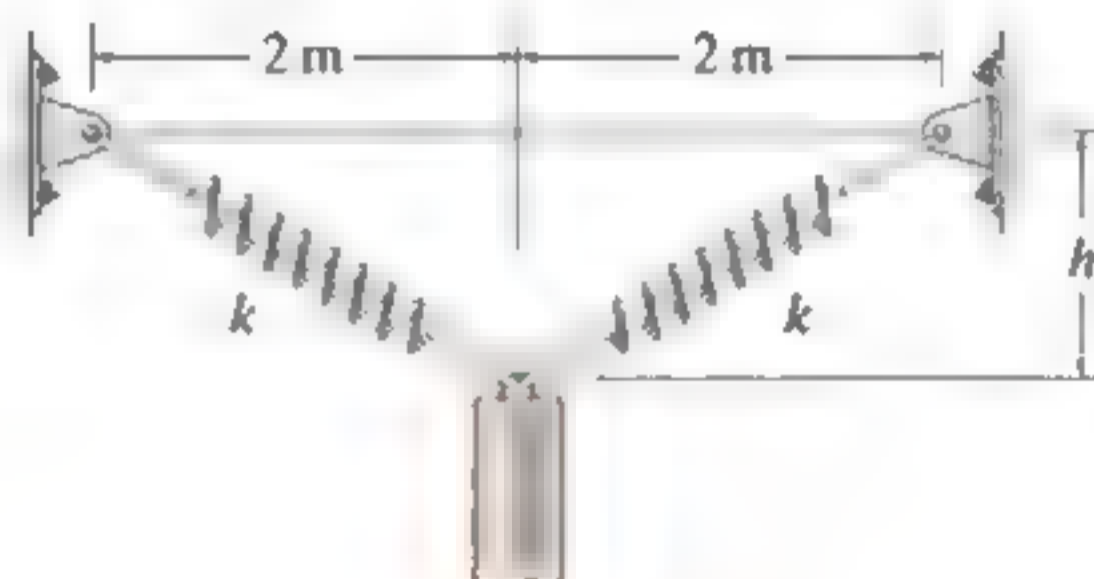
Prob. 14-94

**14-95.** El cilindro tiene una masa de 20 kg y se libera del reposo cuando  $h = 0$ . Determine su rapidez cuando  $h = 3$  m. Cada resorte tiene una rigidez  $k = 40$  N/m y una longitud sin estirar de 2 m.



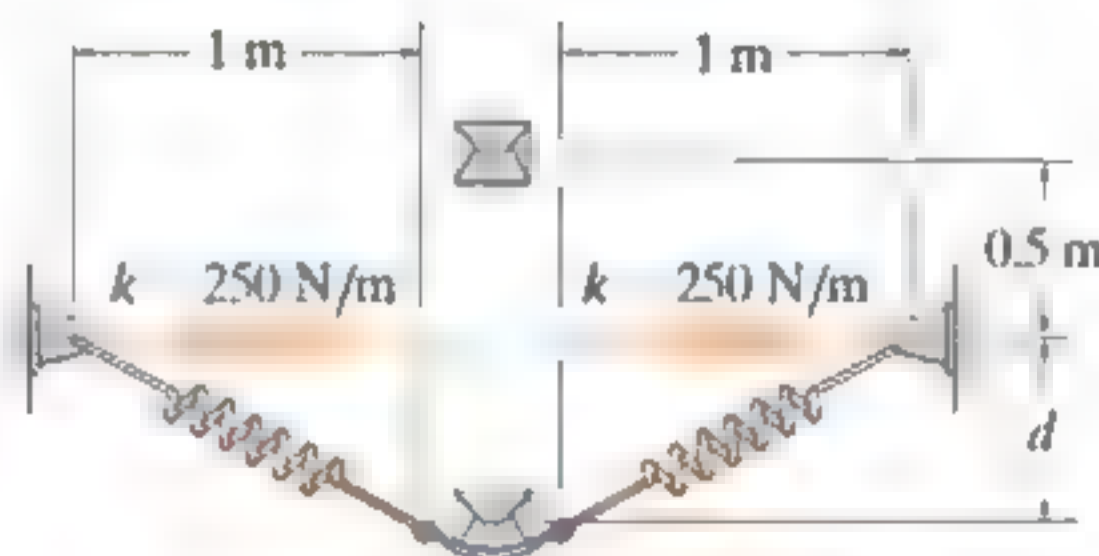
Prob. 14-95

**\*14-96.** Si el cilindro de 20 kg se libera del reposo en  $h = 0$ , determine la rigidez  $k$  de cada resorte requerida para que su movimiento se detenga cuando  $h = 0.5$  m. Cada resorte tiene una longitud sin estirar de 1 m.



Prob. 14-96

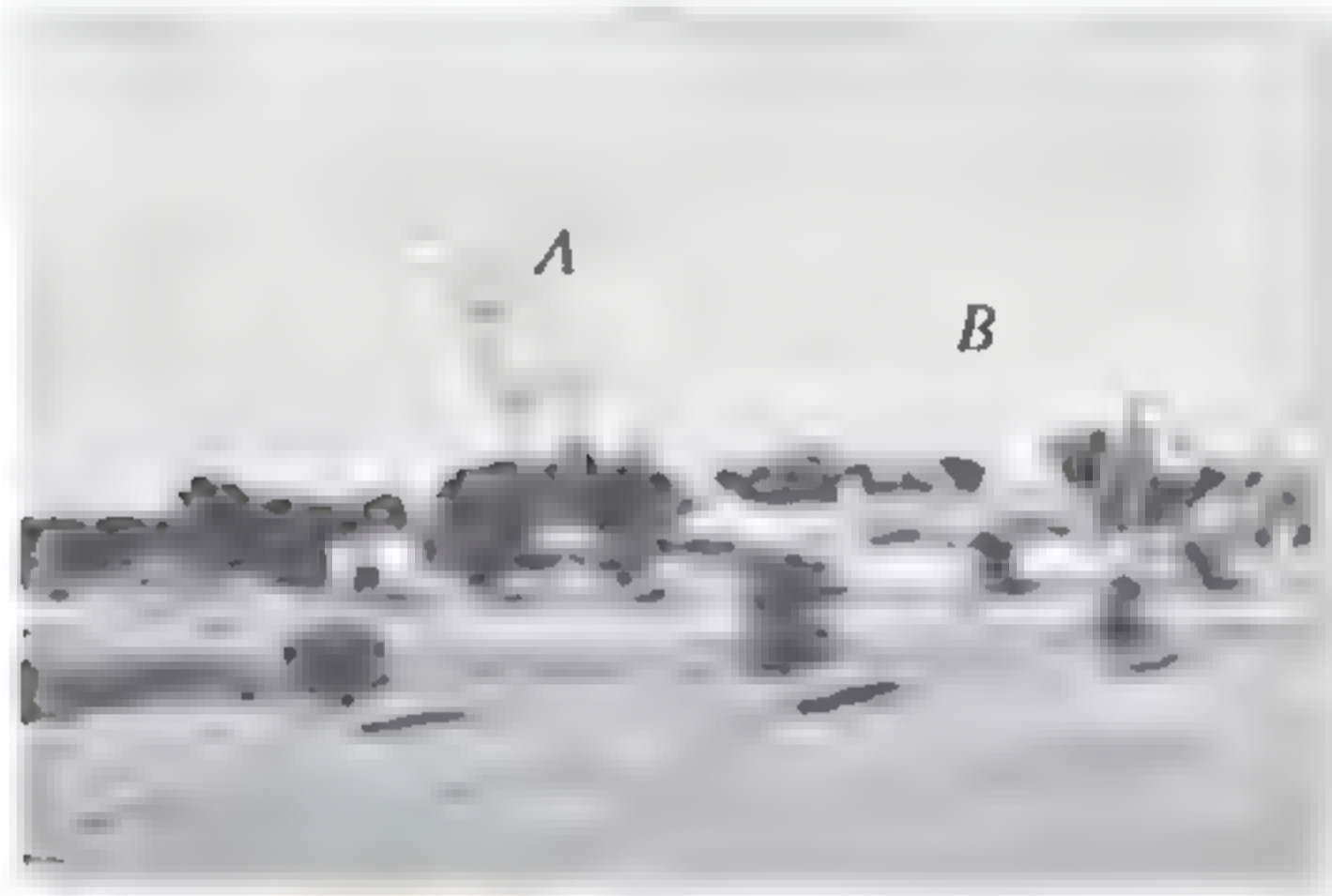
**14-97.** Una bandeja de masa despreciable está unida a dos resortes idénticos de rigidez  $k = 250$  N/m. Si una caja de 10 kg se deja caer desde una altura de 0.5 m por encima de la bandeja, determine el máximo desplazamiento vertical  $d$ . En un inicio, cada resorte tiene una tensión de 50 N.



Prob. 14-97

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**C14-1.** Los carros de la montaña rusa se detienen momentáneamente en *A*. Determine la fuerza normal aproximada que ejercen en la vía en *B*. También determine su aceleración aproximada en este punto. Use datos numéricos y tome medidas a escala en la fotografía con una altura conocida en *A*.



Prob. C14-1 (© R. C. Hibbeler)

**C14-2.** A medida que gira la rueda grande, el operador puede aplicar un mecanismo de frenado que fija los carros en la rueda, lo cual permite entonces que éstos giren junto con la rueda. Suponga que los pasajeros no tienen puesto el cinturón de seguridad y determine la rapidez mínima de la rueda (carros), de modo que ningún pasajero se caiga. ¿Cuándo deberá el operador soltar el freno para que los carros alcancen su velocidad máxima al girar libremente en la rueda? Estime la fuerza normal máxima que el asiento ejerce en el pasajero cuando se alcanza esta velocidad. Use valores numéricos para explicar su respuesta.



Prob. C14-2 (© R. C. Hibbeler)

**C14-3.** La mujer jala hacia atrás el lanzador de globos llenos de agua, por lo que se estiran las cuatro cuerdas elásticas. Estime la altura máxima y la distancia máxima que alcanza una bola colocada dentro del recipiente, si se lanza desde la posición mostrada. Use valores numéricos y cualquier medida que sea necesaria desde la fotografía. Suponga que se conocen la longitud sin estirar y la rigidez de cada cuerda.



Prob. C14-3 (© R. C. Hibbeler)

**C14-4.** La niña está momentáneamente en reposo en la posición mostrada. Si se conocen la longitud sin estirar y rigidez de cada una de las dos cuerdas elásticas, determine aproximadamente qué distancia baja la niña antes de que vuelva a estar en reposo de forma momentánea. Use valores numéricos y tome cualquier medida que sea necesaria a partir de la fotografía.



Prob. C14-4 (© R. C. Hibbeler)

## REPASO DEL CAPÍTULO

### Trabajo de una fuerza

Una fuerza realiza trabajo cuando se produce un desplazamiento a lo largo de su línea de acción. Si la fuerza varía con el desplazamiento, entonces el trabajo es  $U = \int F \cos \theta \, ds$ .

Gráficamente, ésta representa el área bajo el diagrama  $F$ - $s$ .

Si la fuerza es constante, entonces para un desplazamiento  $\Delta s$  en la dirección de la fuerza  $U = F_c \Delta s$ . Un ejemplo típico de este caso es el trabajo de un peso,  $U = -W\Delta y$ . Aquí,  $\Delta y$  es el desplazamiento vertical.

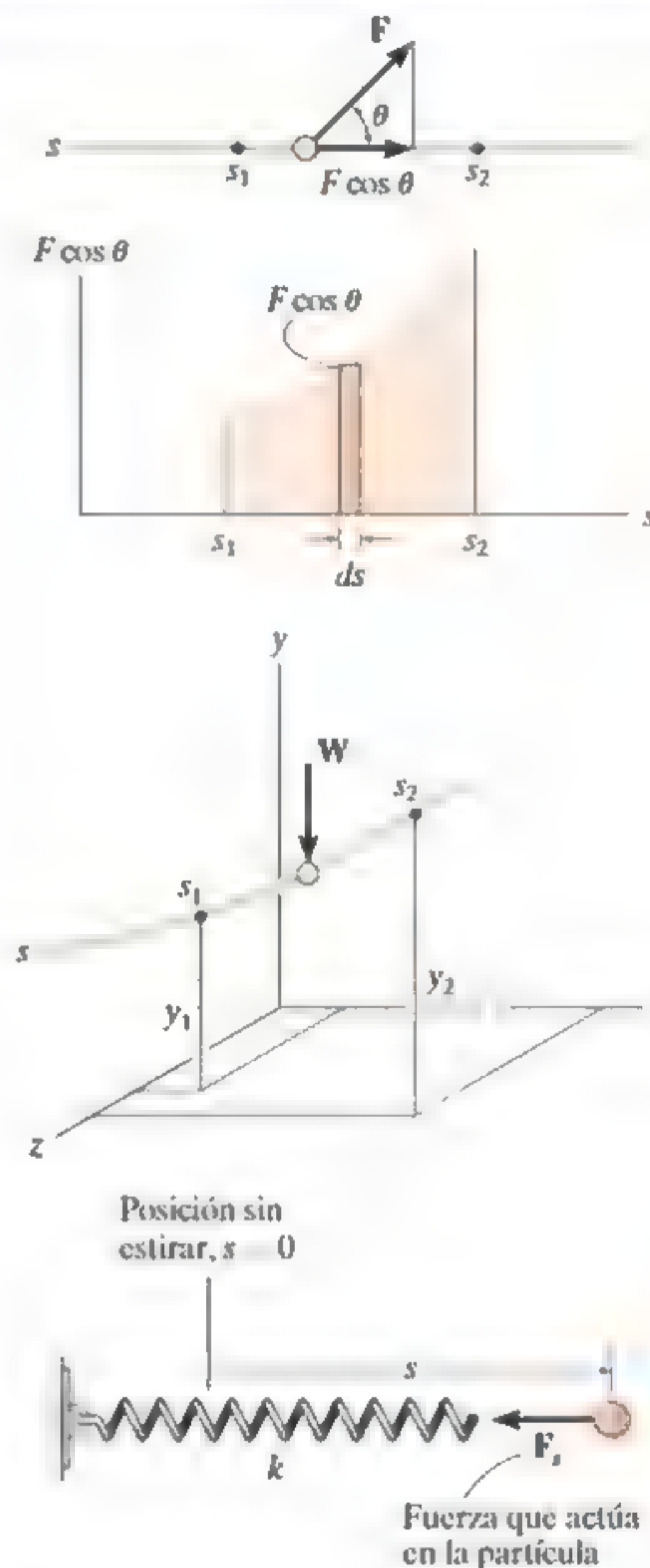
El trabajo realizado por la fuerza de un resorte,  $F = ks$ , depende del alargamiento o la compresión  $s$  del resorte.

### Principio de trabajo y energía

Si la ecuación de movimiento en la dirección tangencial,  $\Sigma F_t = ma_t$  se combina con la ecuación cinemática,  $a_t \, ds = v \, dv$ , obtenemos el principio de trabajo y energía. Esta ecuación establece que la energía cinética inicial  $T$ , más el trabajo realizado  $\Sigma U_{1-2}$  es igual a la energía cinética final.

$$U = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right)$$

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$



El principio de trabajo y energía es útil para resolver problemas que involucren fuerza, velocidad y desplazamiento. Para su aplicación, debe dibujarse el diagrama de cuerpo libre de la partícula e identificar las fuerzas que realizan trabajo.

### Potencia y eficiencia

Potencia es la cantidad de trabajo realizada por unidad de tiempo. Para su aplicación, deben especificarse la fuerza  $\mathbf{F}$  que crea la potencia y su velocidad  $\mathbf{v}$ .

La eficiencia representa la razón entre la potencia de salida y la potencia de entrada y, debido a las fuerza de fricción, siempre es menor que uno.

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\varepsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}}$$

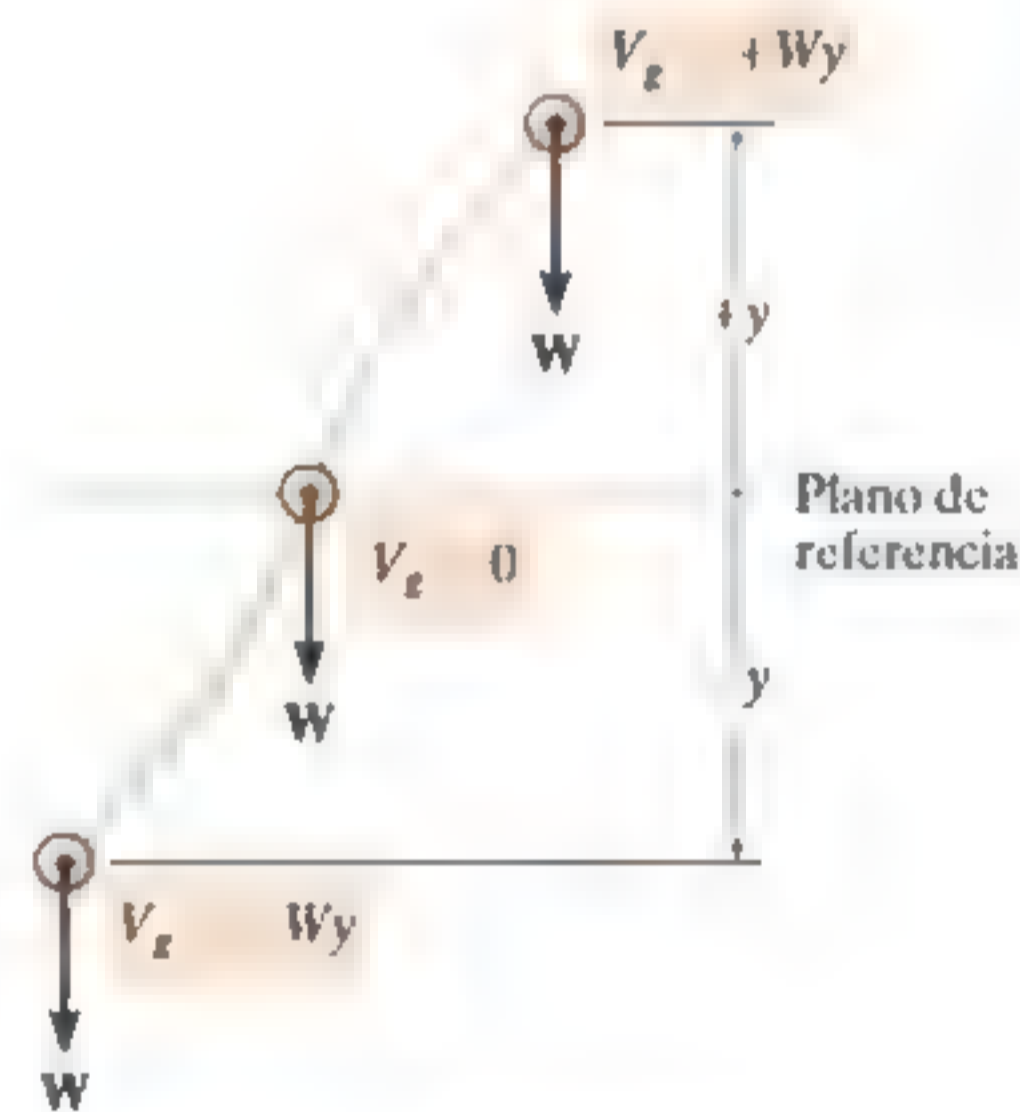
### Conservación de la energía

Una fuerza conservativa realiza trabajo que es independiente de su trayectoria. Dos ejemplos son el peso de una partícula y la fuerza de un resorte.

La fricción es una fuerza no conservativa, ya que el trabajo depende de la longitud de la trayectoria. Cuanto más larga sea la trayectoria, más trabajo se realizará.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa depende de su posición con respecto a un plano de referencia. Cuando este trabajo se refiere a un plano de referencia, se llama energía potencial. Para un peso es  $V_g = \pm Wy$  y para un resorte es  $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$ .

La energía mecánica se compone de la energía cinética  $T$  y las energías potenciales gravitacional y elástica  $V$ . De acuerdo con la conservación de la energía, esta suma es constante y tiene el mismo valor en cualquier posición de la trayectoria. Si sólo fuerzas gravitacionales y de resortes provocan el movimiento de la partícula, entonces puede usarse la ecuación de la conservación de la energía para resolver problemas que involucren estas fuerzas conservativas, desplazamiento y velocidad.



Energía potencial gravitacional

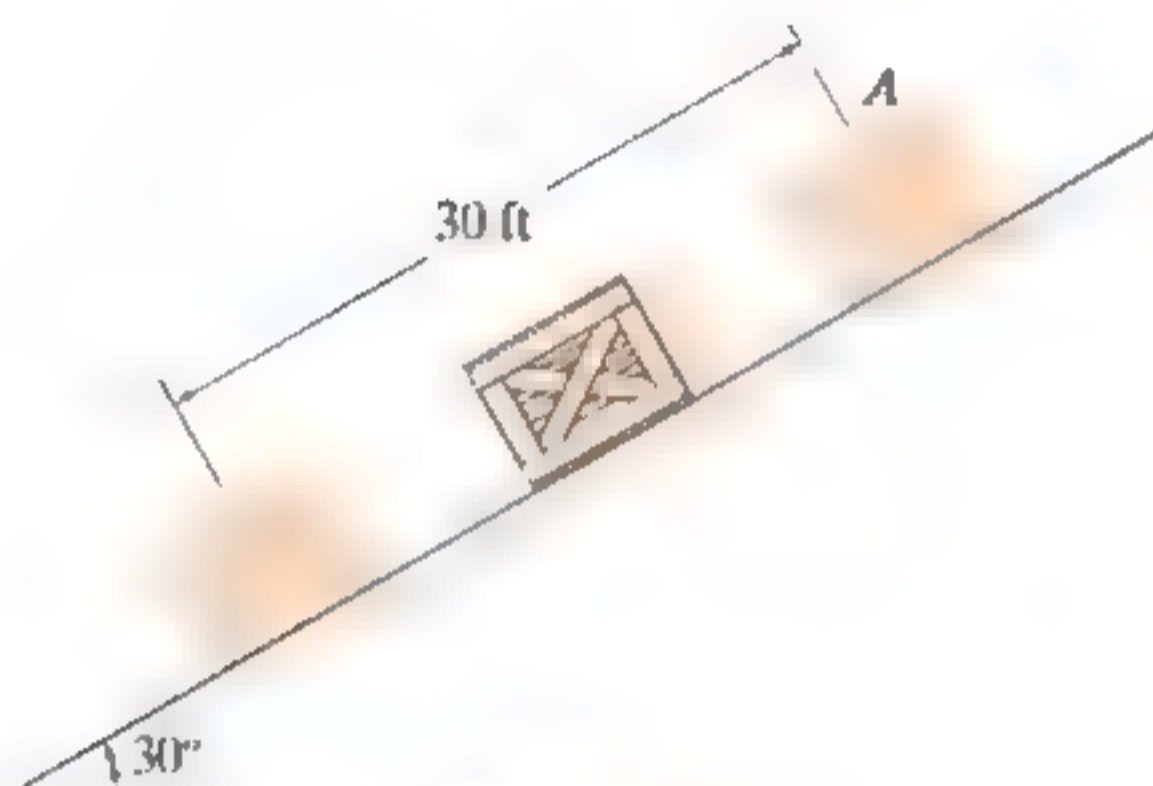


Energía potencial elástica

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

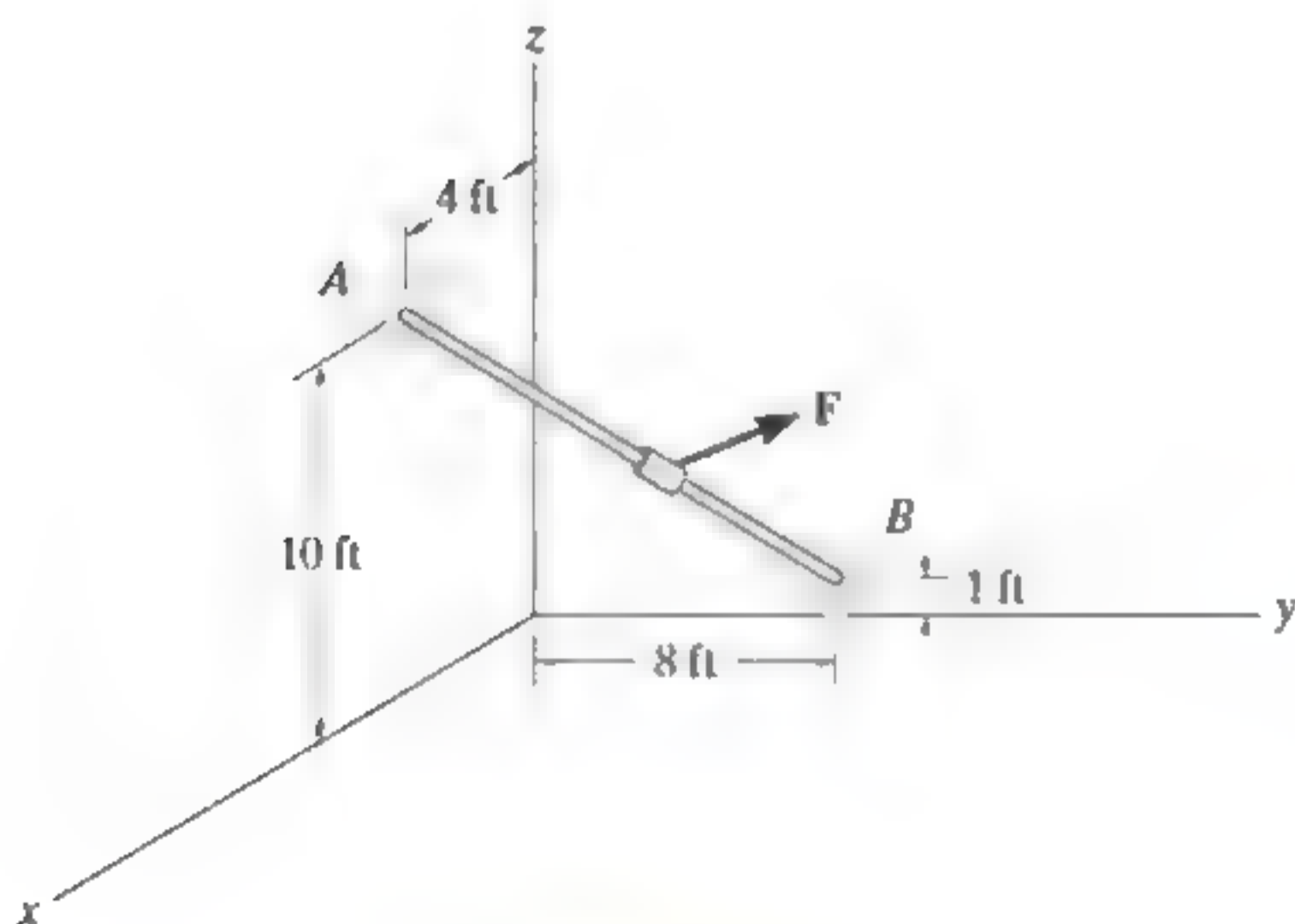
Problemas de repaso

**R14-1.** Si el embalaje de 150 lb se libera del reposo en  $A$ , determine su rapidez después de que se desliza 30 ft hacia abajo sobre el plano. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es  $\mu_k = 0.3$ .



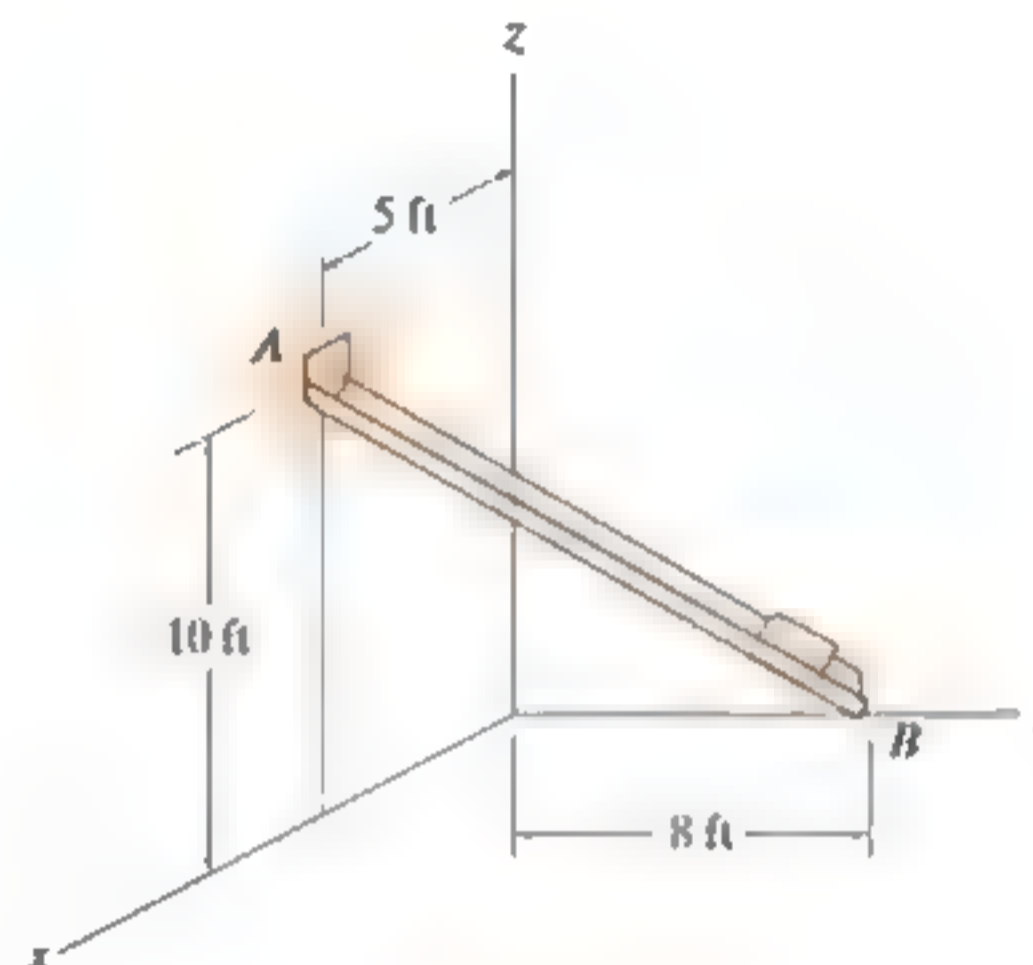
Prob. R14-1

**R14-2.** El collarín pequeño de 2 lb parte del reposo en  $A$  y se desliza hacia abajo a lo largo de la varilla lisa. Durante el movimiento, actúa sobre el collarín una fuerza  $\mathbf{F} = (10\mathbf{i} - 6y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k})$  lb, donde  $x, y, z$  están en pies. Determine la rapidez del collarín cuando golpea la pared en  $B$ .



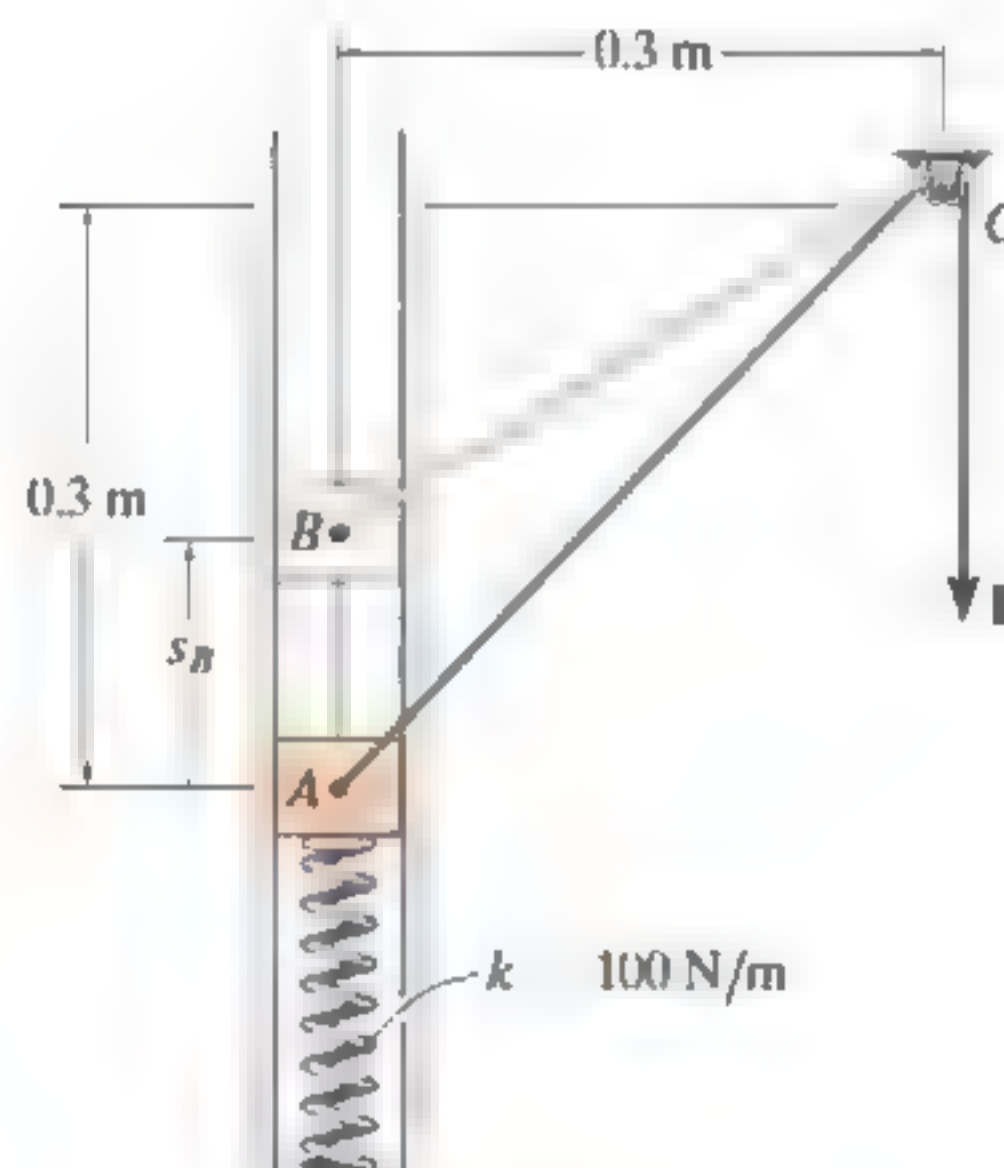
Prob. R14-2

**R14-3.** El bloque tiene un peso de 1.5 lb y se desliza a lo largo del conducto liso  $AB$ . Se libera del reposo en  $A$ , que tiene coordenadas de  $A(5 \text{ ft}, 0, 10 \text{ ft})$ . Determine la rapidez a la que se desliza en  $B$ , que tiene coordenadas de  $B(0, 8 \text{ ft}, 0)$ .



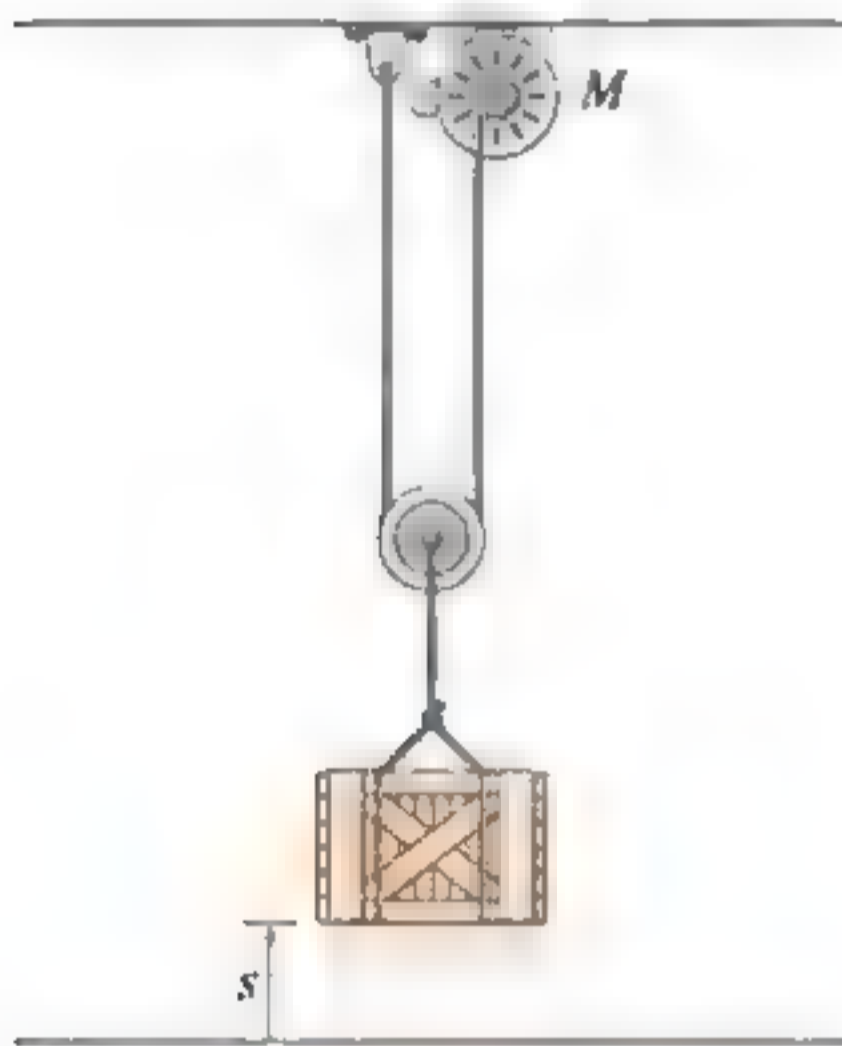
Prob. R14-3

**R14-4.** El bloque tiene una masa de 0.5 kg y se mueve dentro de la ranura vertical lisa. Si el bloque parte del reposo cuando el resorte al que está unido se ubica en la posición sin estirar en  $A$ , determine la fuerza vertical constante  $F$  que debe aplicarse a la cuerda, de modo que el bloque alcance una rapidez  $v_B = 2.5 \text{ m/s}$  cuando llegue a  $B$ ;  $s_B = 0.15 \text{ m}$ . Desprecie la masa de la cuerda y la polea.



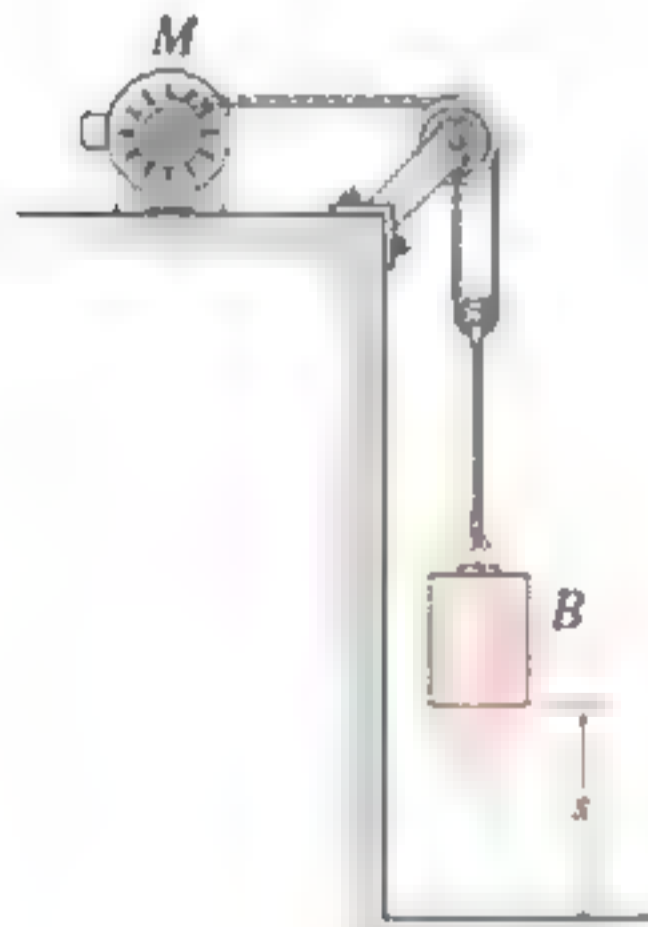
Prob. R14-4

**R14-5.** La caja, que tiene un peso de 50 lb, se eleva mediante el sistema de polea y motor  $M$ . Si la caja parte del reposo y, por aceleración constante, alcanza una rapidez de 12 ft/s después de elevarse 10 ft, determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante  $s = 10$  ft. El motor tiene una eficiencia  $\epsilon = 0.74$ .



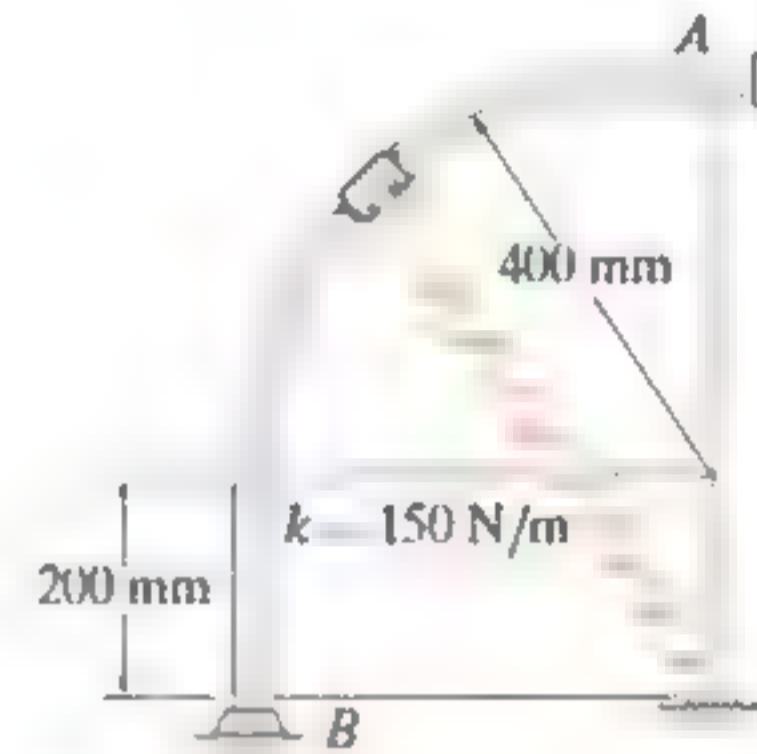
Prob. R14-5

**R14-6.** La carga de 50 lb se eleva mediante el sistema de polea y motor  $M$ . Si el motor ejerce una fuerza constante de 30 lb sobre el cable, determine la potencia que debe suministrarse al motor, si la carga se ha elevado  $s = 10$  ft partiendo del reposo. El motor tiene una eficiencia de  $\epsilon = 0.76$ .



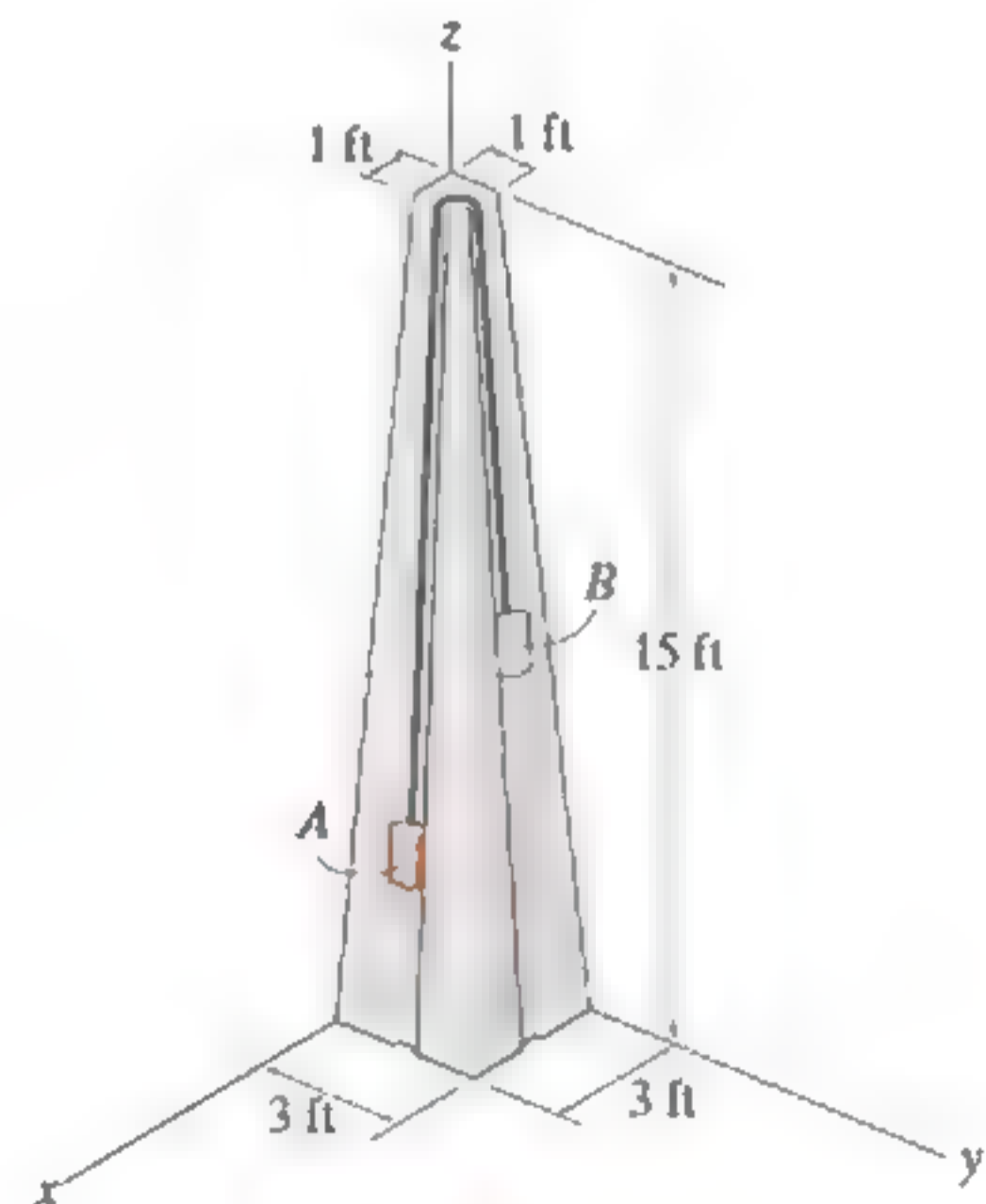
Prob. R14-6

**R14-7.** El collarín de tamaño despreciable tiene una masa de 0.25 kg y está unido a un resorte que tiene una longitud sin estirar de 100 mm. Si el collarín se libera del reposo en  $A$  y se desplaza a lo largo de la guía lisa, determine su rapidez justo antes de que golpee  $B$ .



Prob. R14-7

**R14-8.** Los bloques  $A$  y  $B$  pesan 10 y 30 lb, respectivamente. Están conectados entre sí mediante una cuerda ligera y están montados en las ranuras sin fricción. Determine la rapidez de cada bloque después de que el bloque  $A$  se mueve hacia arriba 6 ft a lo largo del plano. Los bloques se liberan desde el reposo.



Prob. R14-8

# Capítulo 15



(© David J. Green/Alamy)

El diseño de los carritos chocones utilizados en este parque de diversiones requiere el conocimiento de los principios del impulso y la cantidad de movimiento.

# Cinética de una partícula: impulso y cantidad de movimiento

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineales para una partícula, y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.
- Estudiar la conservación de la cantidad de movimiento lineal para partículas.
- Analizar la mecánica del impacto.
- Presentar el concepto de impulso y cantidad de movimiento angulares.
- Resolver problemas que implican corrientes de fluidos constantes y propulsión con masa variable.

## 15.1 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales

En esta sección integraremos la ecuación de movimiento con respecto al tiempo para obtener el principio de impulso y cantidad de movimiento. La ecuación resultante es útil para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.

Con cinemática, la ecuación de movimiento para una partícula de masa  $m$  puede escribirse como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (15-1)$$

donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{v}$  se miden a partir de un marco de referencia inercial. Al reordenar los términos, e integrarlos entre los límites  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$  cuando  $t = t_1$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$  cuando  $t = t_2$ , tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$



La herramienta de impulso se utiliza para reparar la abolladura del guardafangos. Para ello, primero se inserta su extremo en un orificio perforado en el guardafangos, luego se sujeta la herramienta y se mueve a tirones hacia arriba, hasta que se detiene con el anillo de retención. El impulso desarrollado se transfiere a lo largo de la herramienta y de repente saca la abolladura. (© R. C. Hibbeler)

o bien,

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad (15-2)$$

Esta ecuación se conoce como *principio de impulso y cantidad de movimiento lineales*. Por la derivación se observa que es simplemente una integración con respecto al tiempo de la ecuación de movimiento. Ofrece un *medio directo* de obtener la velocidad final  $\mathbf{v}_2$  de la partícula, después de un lapso de tiempo especificado, cuando se conoce la velocidad inicial de la partícula y las fuerzas que actúan en ella son constantes o pueden expresarse en función del tiempo. Por comparación, si  $\mathbf{v}_2$  se determinara usando la ecuación de movimiento, se requeriría un proceso de dos pasos; es decir, aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  para obtener  $\mathbf{a}$  y, luego, integrar  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  para obtener  $\mathbf{v}_2$ .

**Cantidad de movimiento lineal.** Cada uno de los dos vectores de la forma  $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$  en la ecuación 15-2 se conoce como la cantidad de movimiento lineal de la partícula. Como  $m$  es un escalar positivo, el vector de cantidad de movimiento lineal tiene la misma dirección que  $\mathbf{v}$ , y su magnitud  $m\mathbf{v}$  tiene unidades de masa por velocidad, como  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$  o  $\text{slug} \cdot \text{ft/s}$ .

**Impulso lineal.** La integral  $\mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt$  en la ecuación 15-2 se conoce como *impulso lineal*. El término es una cantidad vectorial que mide el efecto de una fuerza durante el tiempo en que ésta actúa. Como el tiempo es un escalar positivo, el impulso actúa en la misma dirección que la fuerza, y su magnitud tiene unidades de fuerza por tiempo, como  $\text{N} \cdot \text{s}$  o  $\text{lb} \cdot \text{s}$ .

Si la fuerza se expresa como una función del tiempo, el impulso se determina mediante la evaluación directa de la integral. En particular, si la fuerza es constante en cuanto a magnitud y dirección, el impulso resultante es

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_c dt = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$$

Gráficamente, el área sombreada bajo la curva de fuerza *versus* tiempo representa la magnitud del impulso (fig. 15-1). Una fuerza constante crea el área rectangular sombreada que aparece en la figura 15-2.

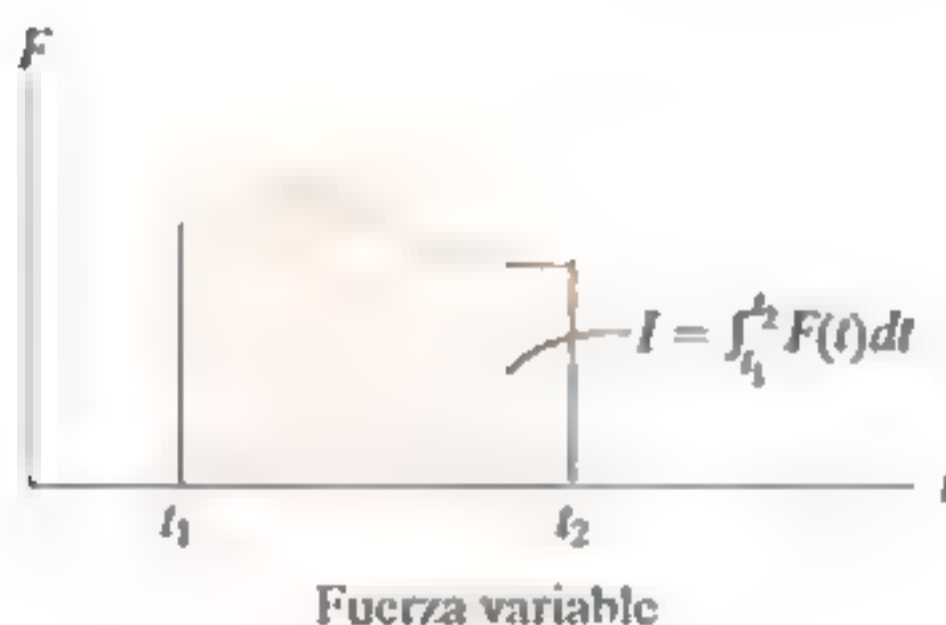


Fig. 15-1

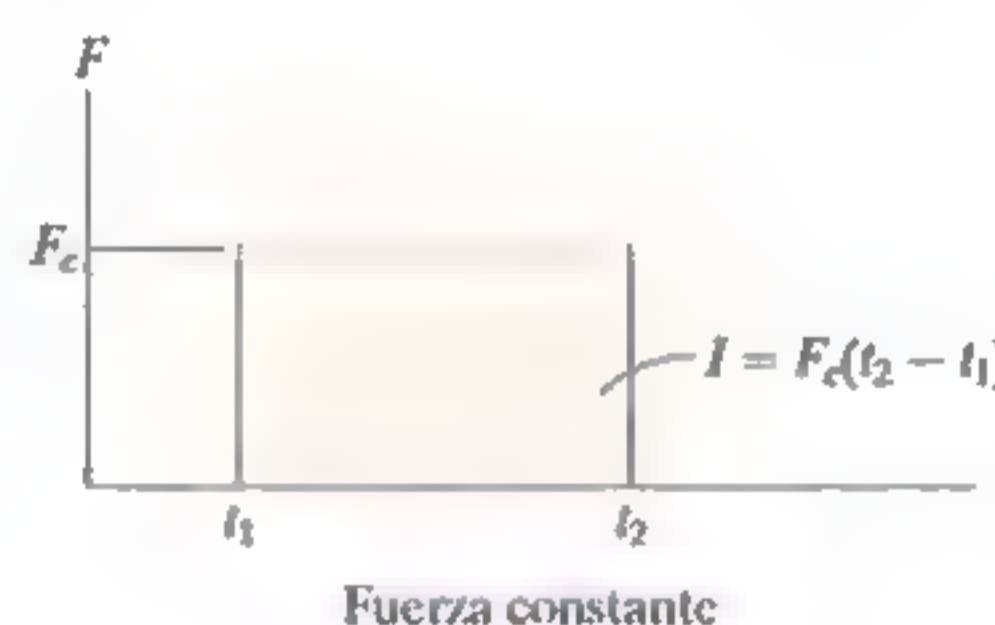


Fig. 15-2

\*Aunque las unidades de impulso y cantidad de movimiento se definen de forma diferente, puede demostrarse que la ecuación 15-2 es dimensionalmente homogénea.

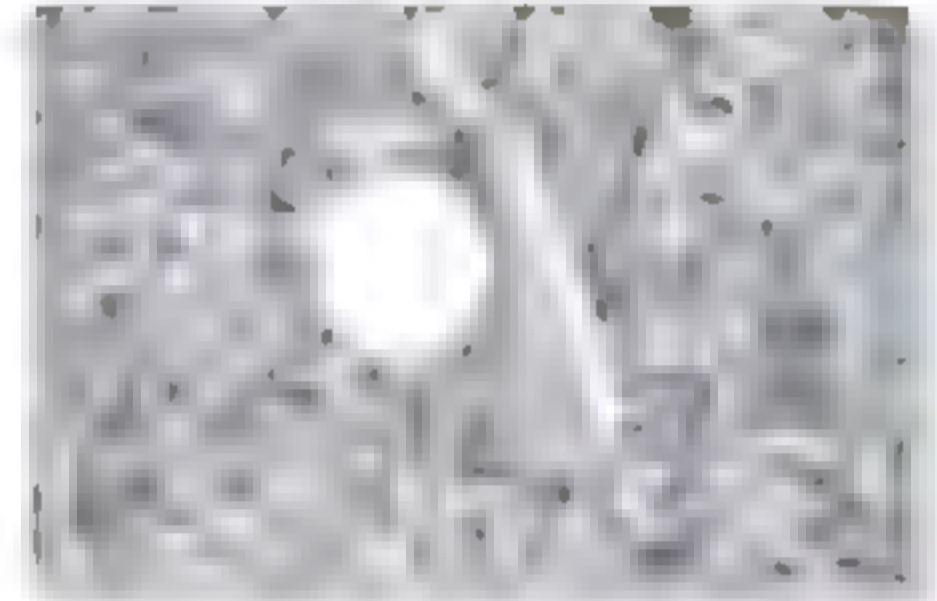
**Principio del impulso y cantidad de movimiento lineales.** Para solucionar problemas, la ecuación 15-2 se reescribirá como

$$mv_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = mv_2 \quad (15-3)$$

la cual expresa que la cantidad de movimiento inicial de la partícula en el instante  $t_1$  más la suma de todos los impulsos aplicados a la partícula de  $t_1$  a  $t_2$  equivale a la cantidad de movimiento final de la partícula en el instante  $t_2$ . Los tres términos se ilustran gráficamente en los *diagramas de impulso y cantidad de movimiento* en la figura 15-3. Los dos *diagramas de cantidad de movimiento* son sólo las formas delineadas de la partícula, las cuales indican la dirección y la magnitud de las cantidades de movimiento inicial y final de la partícula,  $mv_1$  y  $mv_2$ . Al igual que el diagrama de cuerpo libre, el *diagrama de impulso* es una forma delineada de la partícula que muestra todos los impulsos que actúan en ella cuando se encuentra en algún punto intermedio a lo largo de su trayectoria.

Si cada uno de los vectores en la figura 15-3 se divide en sus componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , podemos escribir las siguientes tres ecuaciones escalares de impulso y cantidad de movimiento lineales.

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_y)_2 \\ m(v_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_z dt &= m(v_z)_2 \end{aligned} \quad (15-4)$$



El estudio de muchos tipos de deportes, como el golf, requiere la aplicación del principio del impulso y de la cantidad de movimiento lineales (© R. C. Hibbeler)

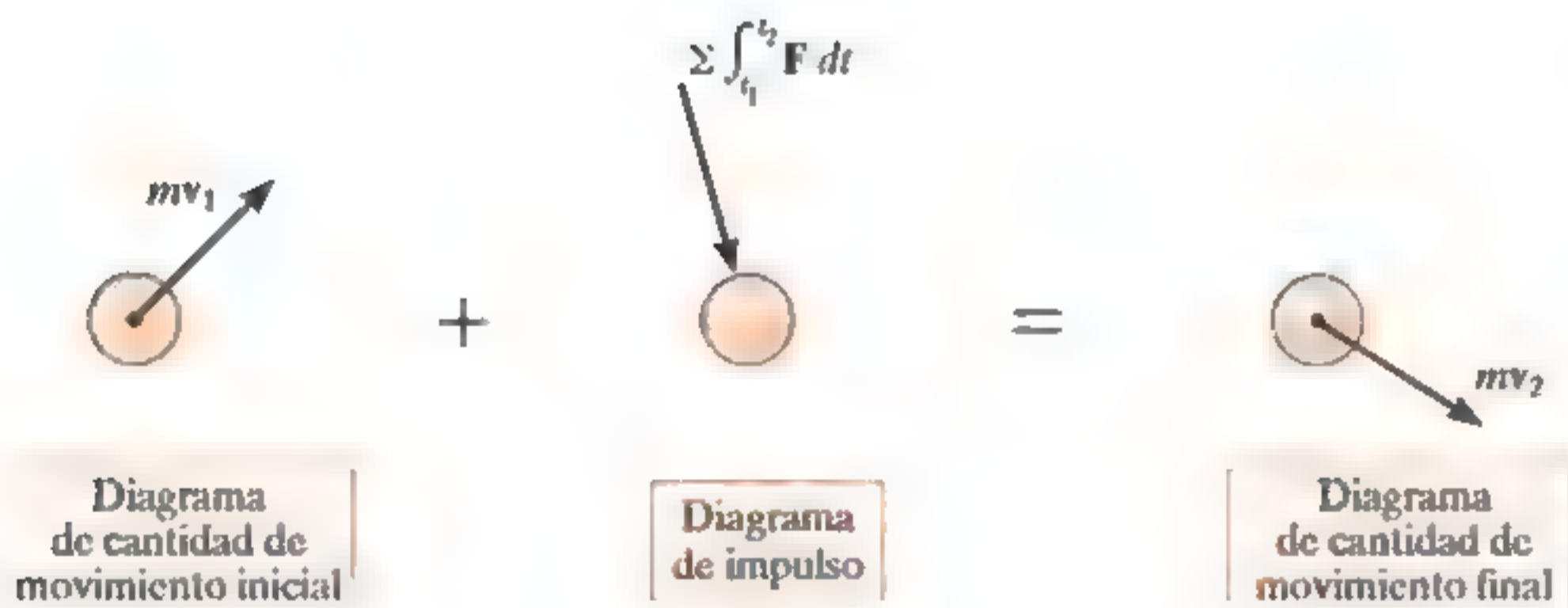


Fig. 15-3

## 15.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas

El principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas que se mueven con respecto a una referencia inercial (fig. 15-4), se obtiene con la ecuación de movimiento aplicada a todas las partículas del sistema, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (15-5)$$

El término del lado izquierdo representa tan sólo la suma de las *fuerzas externas* que actúan en las partículas. Recuerde que las fuerzas internas  $\mathbf{f}_i$  que actúan entre las partículas no aparecen con esta suma, ya que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y, por ende, se cancelan. Al multiplicar ambos lados de la ecuación 15-5 por  $dt$  e integrar entre los límites  $t = t_1$ ,  $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_1$  y  $t = t_2$ ,  $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_2$  se obtiene

$$\Sigma m_i (\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \Sigma m_i (\mathbf{v}_i)_2 \quad (15-6)$$

Esta ecuación establece que la cantidad de movimiento lineal inicial del sistema más los impulsos de todas las *fuerzas externas* que actúan en el sistema de  $t_1$  a  $t_2$  son iguales a la cantidad de movimiento lineal final del sistema.

Como la ubicación del centro de masa  $G$  del sistema se determina a partir de  $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$ , donde  $m = \Sigma m_i$  es la masa total de todas las partículas (fig. 15-4), y si luego se considera la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$$

la cual establece que la cantidad de movimiento lineal total del sistema de partículas equivale a la cantidad de movimiento lineal de una partícula aglomerada “ficticia” de masa  $m = \Sigma m_i$  que se mueve a la velocidad del centro de masa del sistema. Al sustituir en la ecuación 15-6 se obtiene

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \quad (15-7)$$

Aquí, la cantidad de movimiento lineal inicial de la partícula aglomerada, más los impulsos externos que actúan en el sistema de partículas de  $t_1$  a  $t_2$ , es igual a la cantidad de movimiento lineal final de la partícula aglomerada. Por consiguiente, la ecuación anterior justifica la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento lineales a un sistema de partículas que componen un cuerpo rígido.

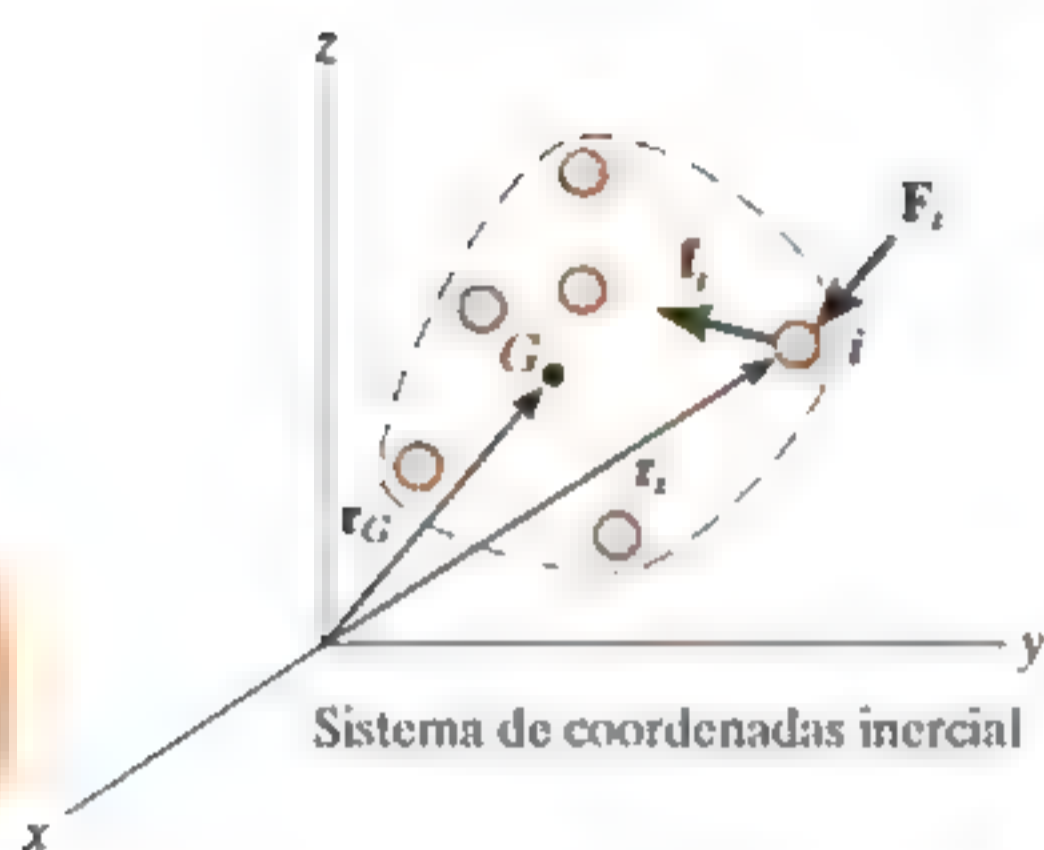


Fig. 15-4

## Procedimiento para el análisis

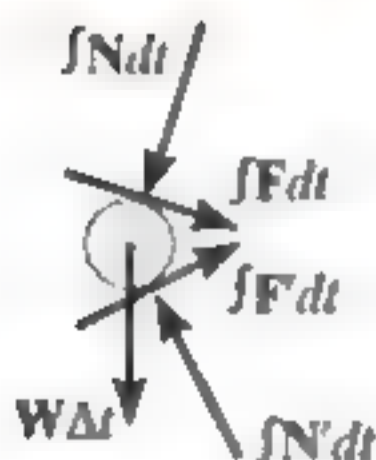
El principio de impulso y cantidad de movimiento lineales se utiliza para resolver problemas que implican *fuerza*, *tiempo* y *velocidad*, pues estos términos intervienen en la formulación. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.\*

### Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el marco de referencia inercial  $x, y, z$  y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula, que incluya todas las fuerzas que producen impulsos en la partícula.
- Deberá establecer la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de la partícula.
- Si se desconoce un vector, suponga que el sentido de sus componentes está en la dirección de la(s) coordenada(s) inercial(es) positiva(s).
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la partícula como se planteó en la referencia a la figura 15-3.

### Principio de impulso y cantidad de movimiento

- De acuerdo con el sistema de coordenadas establecido, aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales,  $mv_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F dt = mv_2$ . Si el movimiento ocurre en el plano  $x-y$ , las dos ecuaciones de componentes escalares pueden formularse ya sea al encontrar las componentes vectoriales de  $F$  en el diagrama de cuerpo libre, o al utilizar los datos que aparecen en los diagramas de impulso y cantidad de movimiento.
- Tenga en cuenta que todas las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre de la partícula crearán un impulso, aun cuando algunas de estas fuerzas no trabajen.
- Las fuerzas que son funciones del tiempo se integran para obtener el impulso. Gráficamente, el impulso es igual al área bajo la curva de fuerza-tiempo.



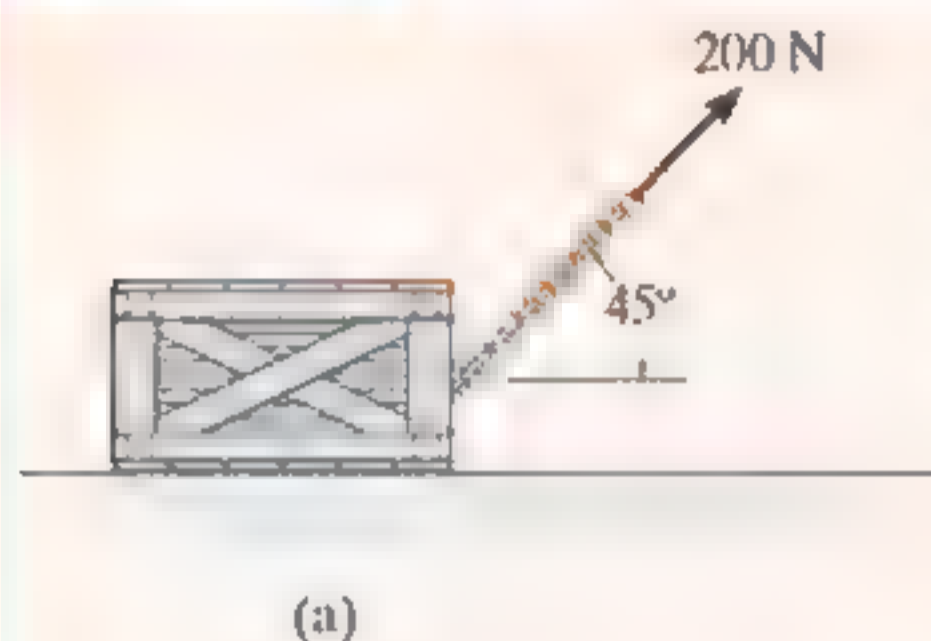
A medida que giran las ruedas de la máquina de lanzar, aplican impulsos de fricción a la pelota y le imprimen una cantidad de movimiento lineal. Los impulsos se muestran en el diagrama de impulso. Aquí, tanto los impulsos de fricción como los normales varían con el tiempo. Por comparación, el impulso producido por el peso es constante y es muy pequeño, dado que es muy corto el tiempo  $\Delta t$  en que la pelota está en contacto con las ruedas. (© R. C. Hibbeler)



\* Este procedimiento se seguirá cuando se desarrollen las comprobaciones y la teoría en el texto.

## EJEMPLO

## 15.1



La caja de 100 kg que se muestra en la figura 15-5a está originalmente en reposo sobre la superficie horizontal lisa. Si se aplica una fuerza de remolque de 200 N, que actúa a un ángulo de  $45^\circ$ , durante 10 s, determine la velocidad final y la fuerza normal que la superficie ejerce en la caja durante este intervalo.

## SOLUCIÓN

Este problema se resuelve mediante el principio de impulso y cantidad de movimiento, ya que implica fuerza, velocidad y tiempo.

**Diagrama de cuerpo libre.** Vea la figura 15-5b. Como todas las fuerzas que actúan son *constantes*, los impulsos son simplemente el producto de la magnitud de la fuerza por 10 s [ $\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$ ]. Observe el procedimiento alternativo de trazar los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la caja (fig. 15-5c).

**Principio de impulso y cantidad de movimiento.** Al aplicar las ecuaciones 15-4, se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m(v_x)_2 \\
 0 + 200 \text{ N} \cos 45^\circ (10 \text{ s}) &= (100 \text{ kg})v_2 \\
 v_2 &= 14.1 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (+\uparrow) \quad m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_y)_2 \\
 0 + N_C(10 \text{ s}) - 981 \text{ N}(10 \text{ s}) + 200 \text{ N} \sin 45^\circ (10 \text{ s}) &= 0 \\
 N_C &= 840 \text{ N}
 \end{aligned}$$

*Resp.*

**NOTA:** Como no ocurre movimiento en la dirección  $y$ , la aplicación directa de la ecuación de equilibrio  $\sum F_y = 0$  da el mismo resultado para  $N_C$ . Trate de resolver el problema al aplicar primero  $\sum F_x = ma_x$ , entonces  $v = v_0 + a_x t$ .

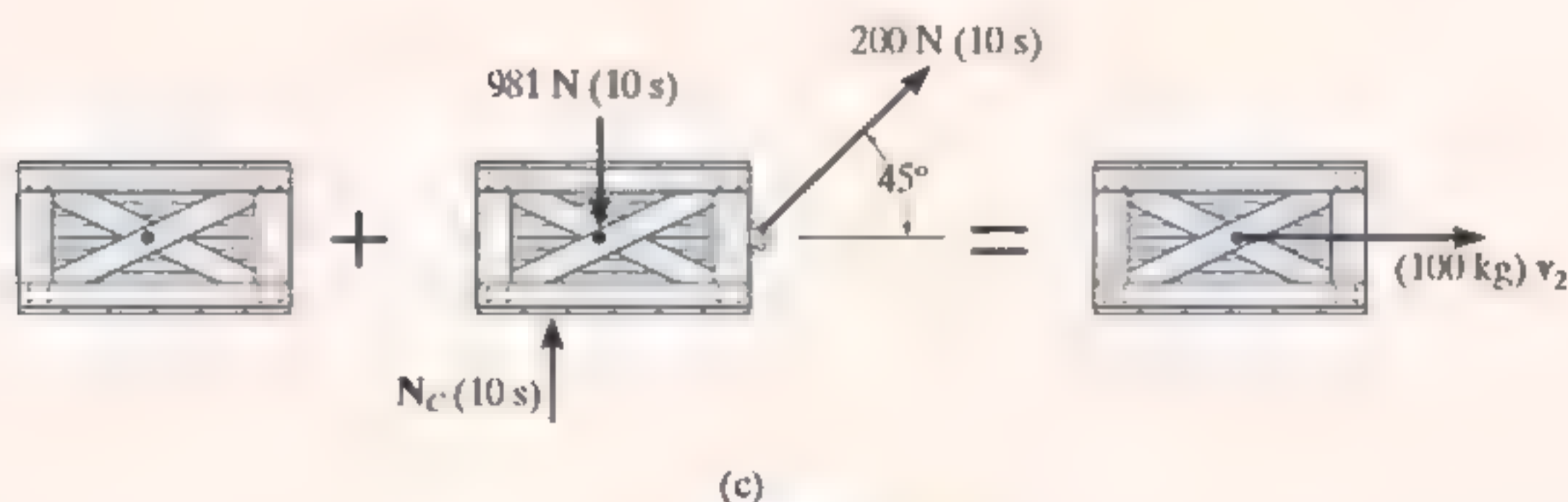


Fig. 15-5

## EJEMPLO

En el embalaje de 50 lb de la figura 15-6a actúa una fuerza de magnitud variable  $P = (20t)$  lb, donde  $t$  está en segundos. Determine la velocidad del embalaje 2 s después de que  $P$  se aplica. La velocidad inicial es  $v_1 = 3$  ft/s hacia abajo del plano y el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es  $\mu_k = 0.3$ .

## SOLUCIÓN

Vea la figura 15-6b. Como la magnitud de la fuerza  $P = 20t$  varía con el tiempo, el impulso que crea se determina al integrarse a lo largo del intervalo de 2 s.

**Principio de impulso y cantidad de movimiento.** Al aplicar la ecuación 15-4 en la dirección  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 (+\curvearrowright) \quad m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m(v_x)_2 \\
 \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (3 \text{ ft/s}) + \int_0^{2 \text{ s}} 20t dt - 0.3N_C(2 \text{ s}) + (50 \text{ lb}) \sin 30^\circ (2 \text{ s}) &= \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} v_2 \\
 4.658 + 40 - 0.6N_C + 50 &= 1.553v_2
 \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio puede aplicarse en la dirección  $y$ . ¿Por qué?

$$+\curvearrowleft \sum F_y = 0; \quad N_C - 50 \cos 30^\circ \text{ lb} = 0$$

Al resolver,

$$\begin{aligned}
 N_C &= 43.30 \text{ lb} \\
 v_2 &= 44.2 \text{ ft/s} \curvearrowleft
 \end{aligned}$$

*Resp.*

**NOTA:** También podemos resolver este problema con la ecuación de movimiento. A partir de la ecuación 15-6b,

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowleft \sum F_x &= ma_x; \quad 20t - 0.3(43.30) + 50 \sin 30^\circ = \frac{50}{32.2} a \\
 a &= 12.88t + 7.734
 \end{aligned}$$

Con cinemática,

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowleft dv &= a dt; \quad \int_{3 \text{ ft/s}}^v dv = \int_0^{2 \text{ s}} (12.88t + 7.734) dt \\
 v &= 44.2 \text{ ft/s}
 \end{aligned}$$

*Resp.*

Por comparación, la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento elimina la necesidad de utilizar cinemática ( $a = dv/dt$ ) y, por lo tanto, el resultado es un método más fácil de solución.

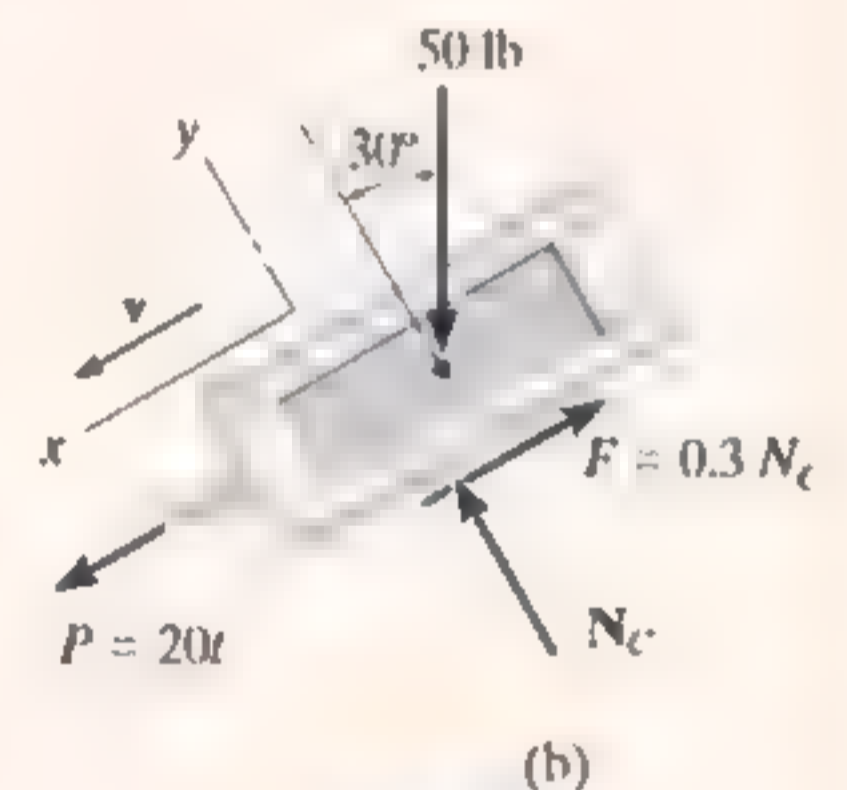
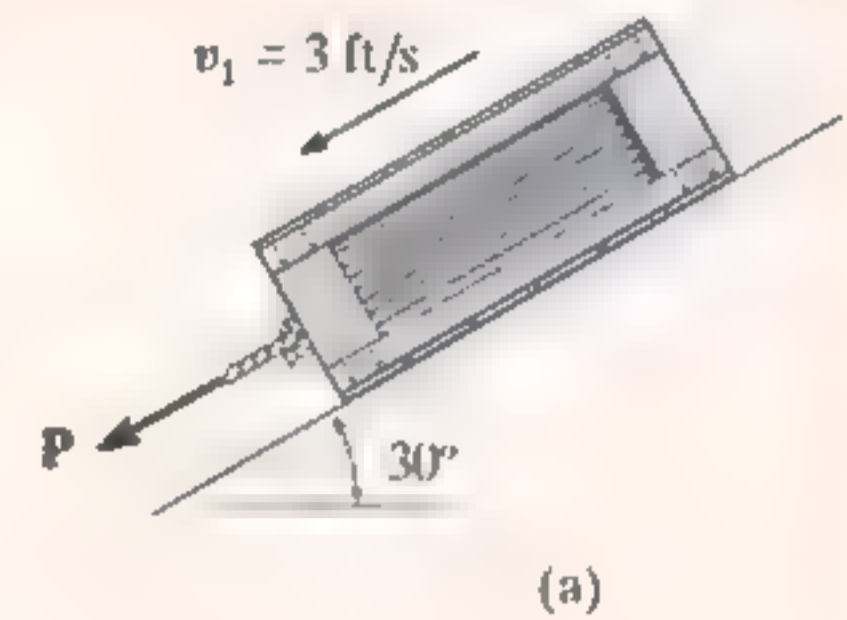
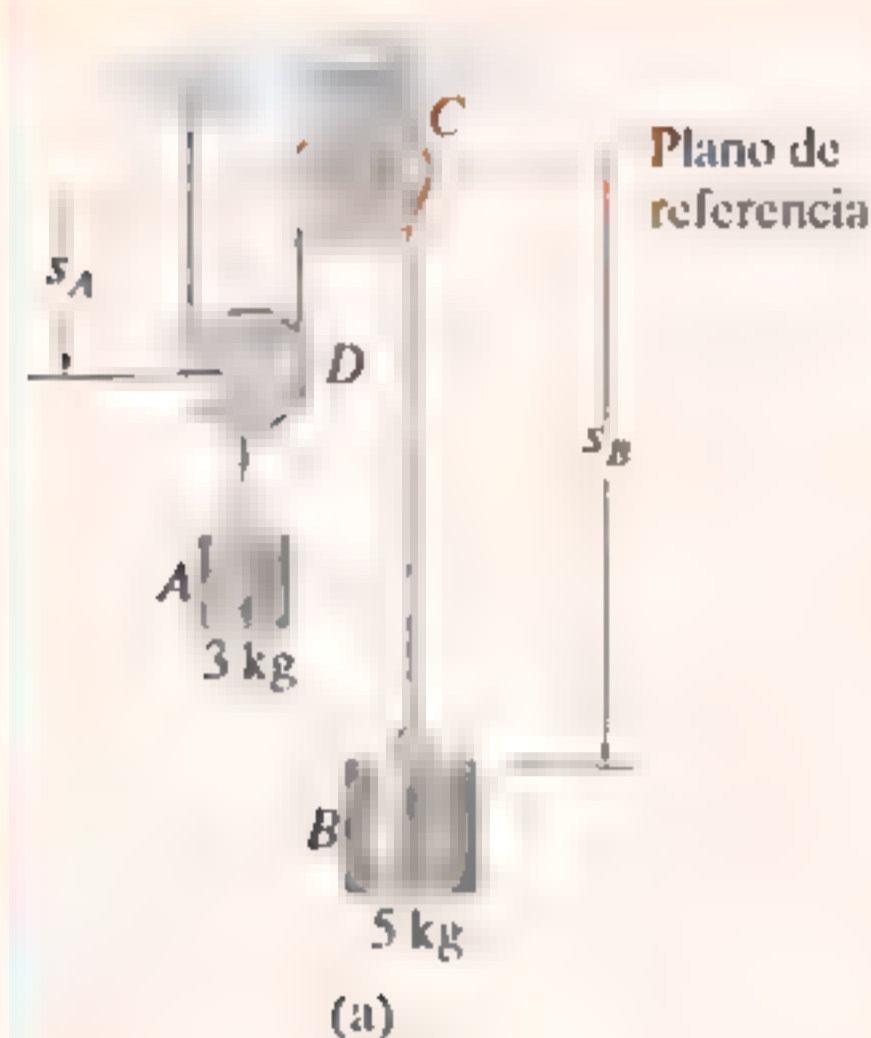


Fig. 15-6

**EJEMPLO**

Los bloques  $A$  y  $B$  de la figura 15-7a tienen una masa de 3 kg y 5 kg, respectivamente. Si se pone en movimiento el sistema a partir del reposo, determine la velocidad del bloque  $B$  en 6 s. Ignore la masa de las poleas y la cuerda.

**SOLUCIÓN**

**Diagrama de cuerpo libre.** Vea la figura 15-7b. Como el peso de cada bloque es constante, las tensiones en las cuerdas también lo serán. Asimismo, como se desprecia la masa de la polea  $D$ , la tensión en la cuerda  $T_A = 2T_B$ . Observe que se supone que los bloques se mueven hacia abajo en las direcciones de las coordenadas positivas  $s_A$  y  $s_B$ .

**Principio de impulso y cantidad de movimiento.**

Bloque  $A$ :

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad m(v_A)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_A)_2 \\
 0 - 2T_B(6 \text{ s}) + 3(9.81) \text{ N}(6 \text{ s}) &= (3 \text{ kg})(v_A)_2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Bloque  $B$ :

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad m(v_B)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_B)_2 \\
 0 + 5(9.81) \text{ N}(6 \text{ s}) - T_B(6 \text{ s}) &= (5 \text{ kg})(v_B)_2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

**Cinemática.** Como los bloques están sometidos a un movimiento dependiente, la velocidad de  $A$  puede relacionarse con la de  $B$  por medio del análisis de cinemática visto en la sección 12.9. Se establece un plano de referencia horizontal a través del punto fijo en  $C$  (fig. 15-7a) y las coordenadas de posición,  $s_A$  y  $s_B$ , se relacionan con la longitud total constante  $l$  de los segmentos verticales de la cuerda mediante la ecuación

$$2s_A + s_B = l$$

Al considerar la derivada con respecto al tiempo se obtiene

$$2v_A = -v_B \quad (3)$$

Como lo indica el signo negativo, cuando  $B$  se mueve hacia abajo  $A$  lo hace hacia arriba. Al sustituir este resultado en la ecuación 1, y resolver las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$(v_B)_2 = 35.8 \text{ m/s} \downarrow$$

*Resp.*

$$T_B = 19.2 \text{ N}$$

**NOTA:** Dese cuenta que la dirección *positiva* (hacia abajo) de  $v_A$  y  $v_B$  es *consistente* en las figuras 15-7a y 15-7b y en las ecuaciones 1 a 3. Esto es importante pues lo que buscamos es una solución de ecuaciones simultáneas.

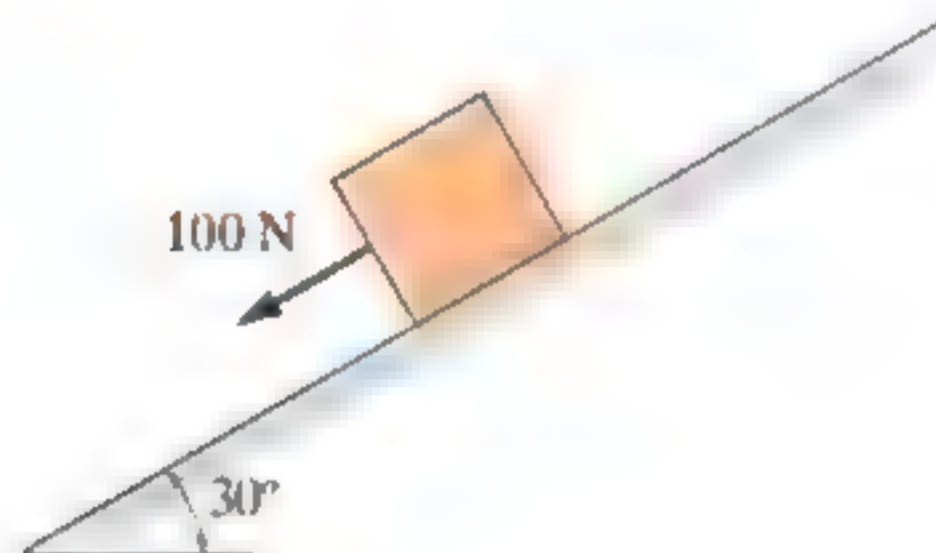


Fig. 15-7

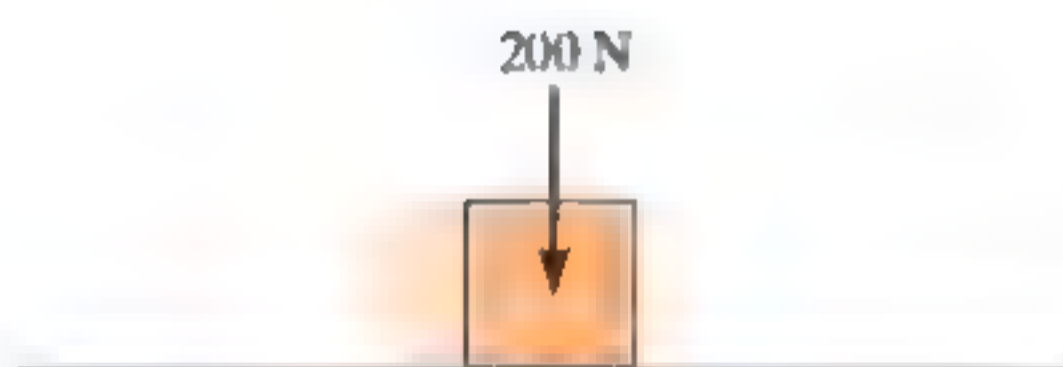
## PROBLEMAS PRELIMINARES

**P15-1.** Determine el impulso de la fuerza para  $t = 2$  s.

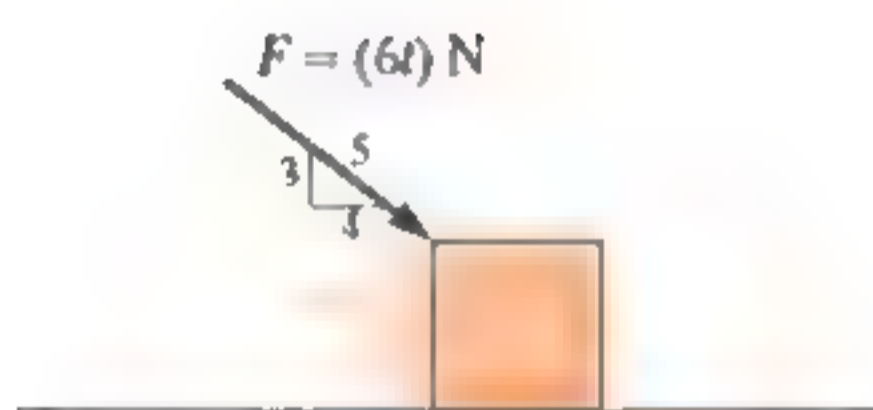
a)



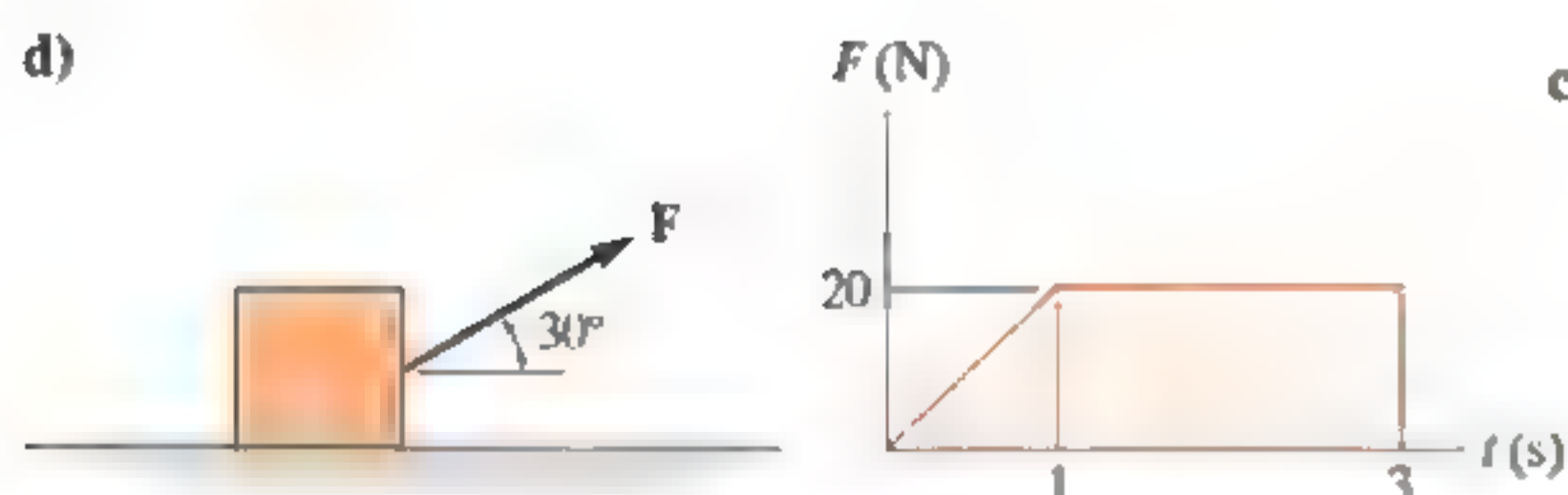
b)



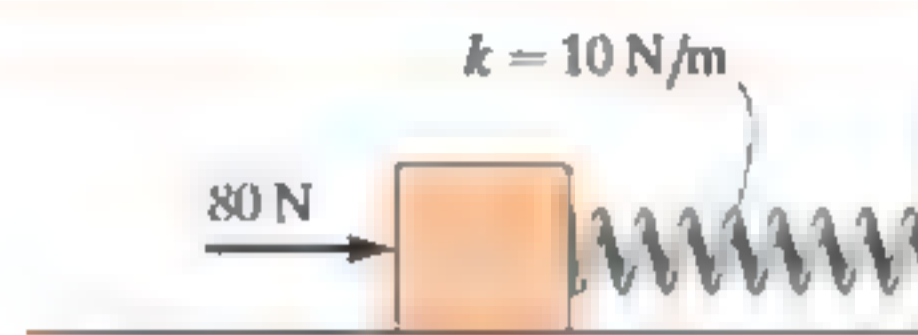
c)



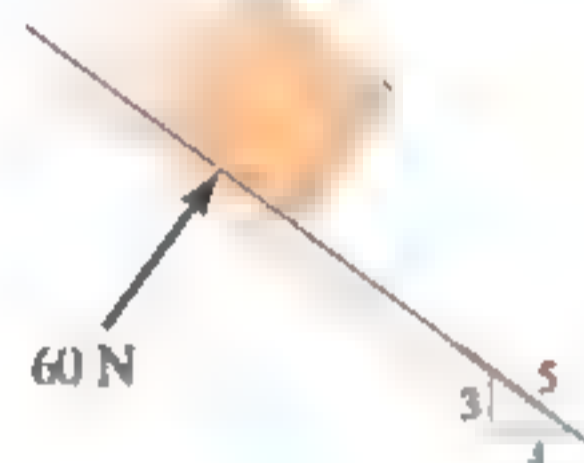
d)



e)



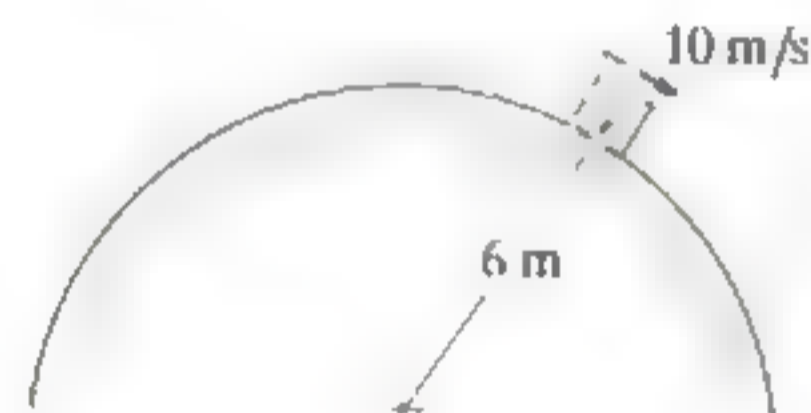
f)



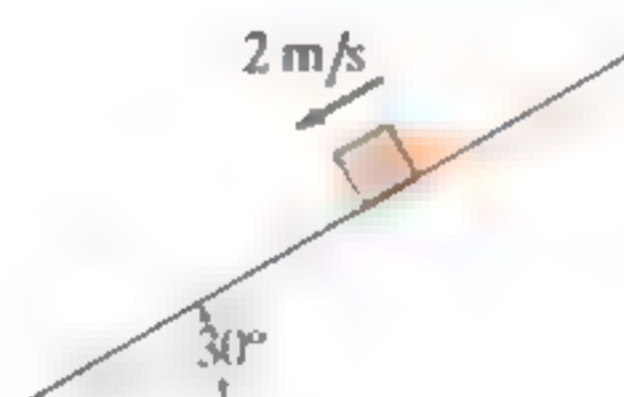
Prob. P15-1

**15-2.** Determine la cantidad de movimiento lineal del bloque de 10 kg.

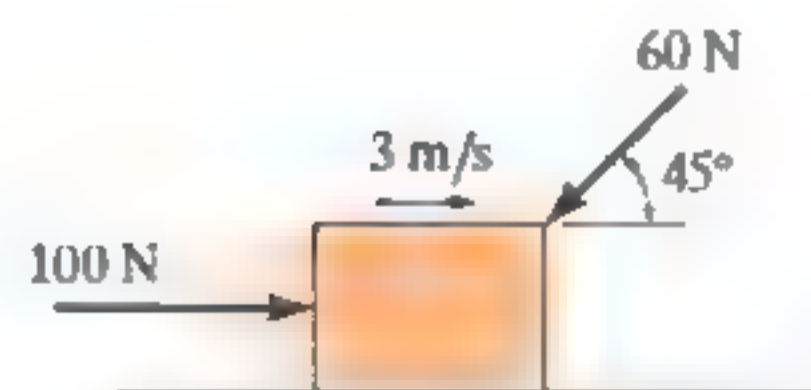
a)



b)



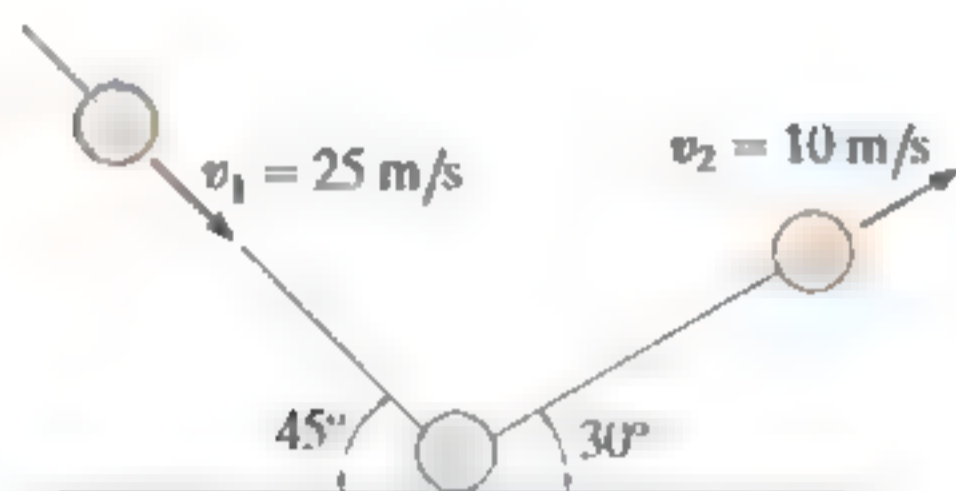
c)



Prob. P15-2

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F15-1.** La pelota de 0.5 kg choca contra el suelo áspero y rebota con las velocidades que se indican. Determine la magnitud del impulso que ejerce el suelo en la pelota. Suponga que ésta no se desliza cuando choca contra el suelo, e ignore su tamaño y el impulso producido por su peso.



Prob. F15-1

**F15-2.** Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 150 lb y el suelo es  $\mu_k = 0.2$ , determine la rapidez del embalaje cuando  $t = 4$  s. El embalaje comienza a moverse desde el punto de reposo y lo remolca la fuerza de 100 lb.



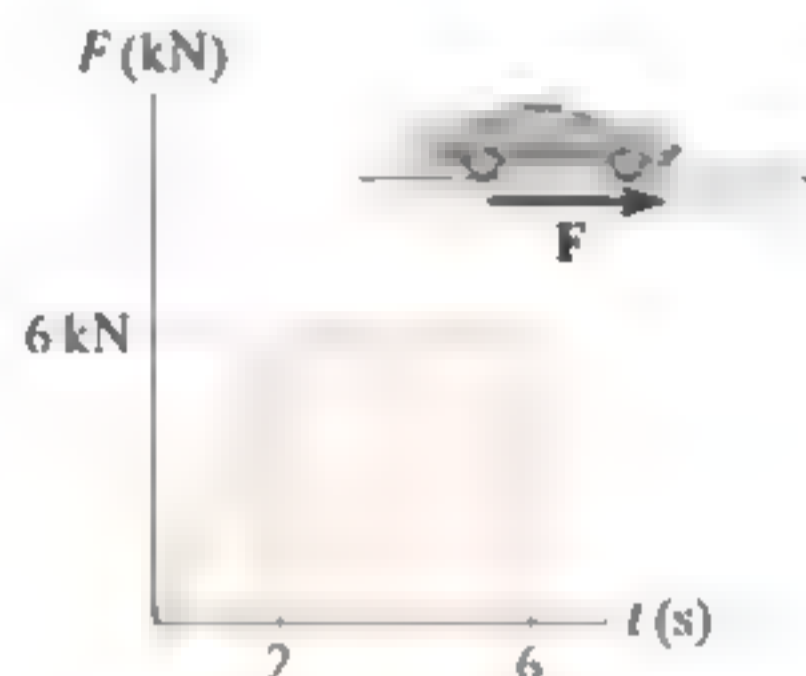
Prob. F15-2

**F15-3.** El motor ejerce una fuerza  $F = (20t^2)$  N en el cable, donde  $t$  está en segundos. Determine la rapidez del embalaje de 25 kg cuando  $t = 4$  s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el plano son  $\mu_s = 0.3$  y  $\mu_k = 0.25$ , respectivamente.



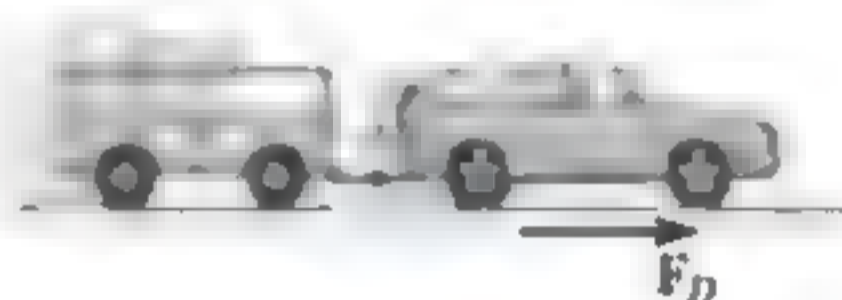
Prob. F15-3

**F15-4.** Las ruedas del automóvil de 1.5 Mg generan la fuerza de tracción  $F$  descrita por la gráfica. Si el automóvil arranca desde el punto de reposo, determine su rapidez cuando  $t = 6$  s.



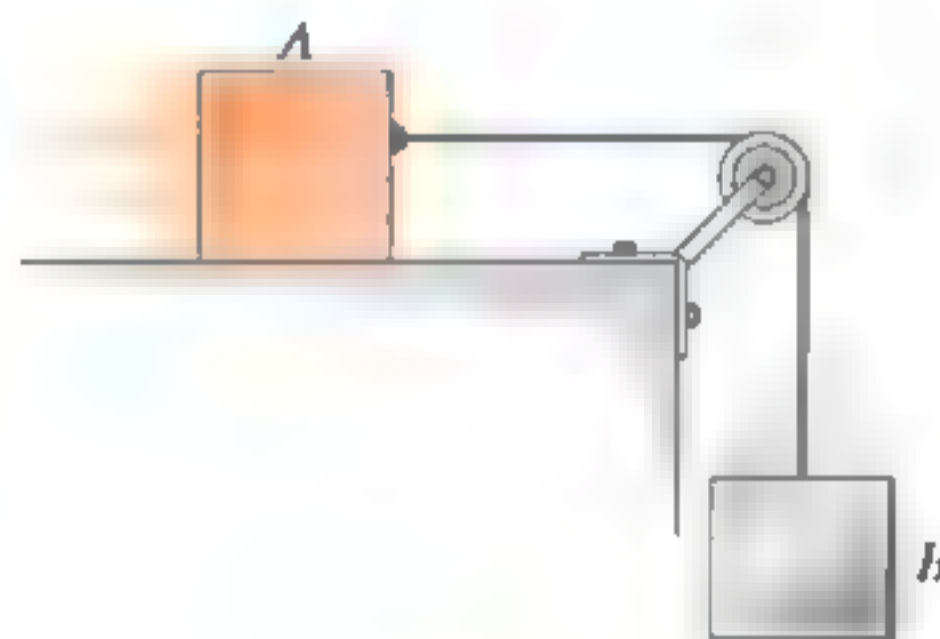
Prob. F15-4

**F15-5.** El vehículo de tracción en las cuatro ruedas (vehículo utilitario deportivo) de 2.5 Mg tira del remolque de 1.5 Mg. La fuerza de tracción desarrollada en las ruedas es  $F_D = 9$  kN. Determine la rapidez del vehículo en 20 s, a partir del punto de reposo. Además, determine la tensión desarrollada en el acoplamiento entre el vehículo utilitario deportivo y el remolque. Desprecie la masa de las ruedas.



Prob. F15-5

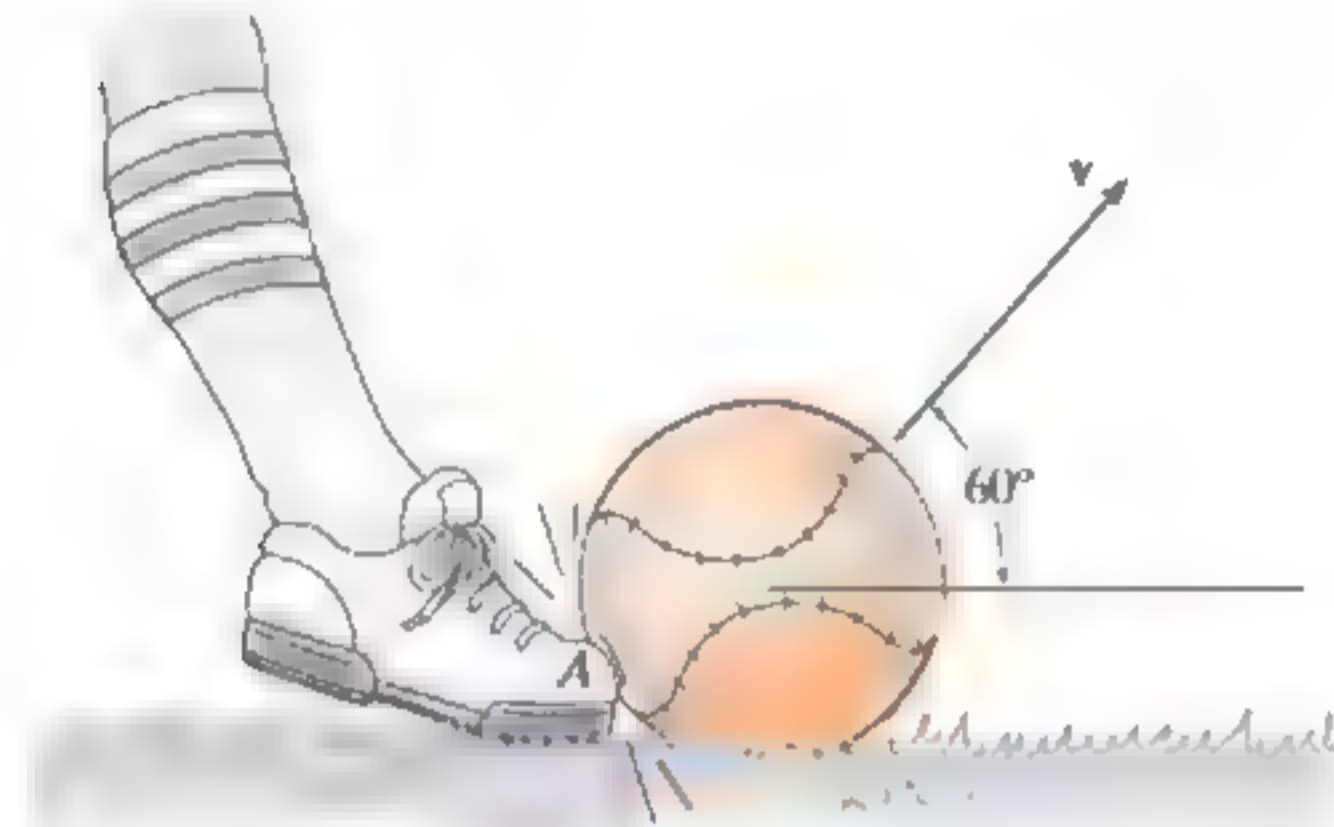
**F15-6.** El bloque de 10 lb  $A$  alcanza una velocidad de 1 ft/s en 5 segundos, a partir del punto de reposo. Determine la tensión en la cuerda y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque  $A$  y el plano horizontal. Ignore el peso de la polea. El bloque  $B$  pesa 8 lb.



Prob. F15-6

## PROBLEMAS

**15-1.** Un hombre patea el balón de 150 g, de modo que éste se despegue del suelo a un ángulo de  $60^\circ$  y golpea el suelo a la misma altura a una distancia de 12 m. Determine el impulso del pie sobre el balón en A. No tome en cuenta el impulso causado por el peso del balón mientras está siendo pateado.

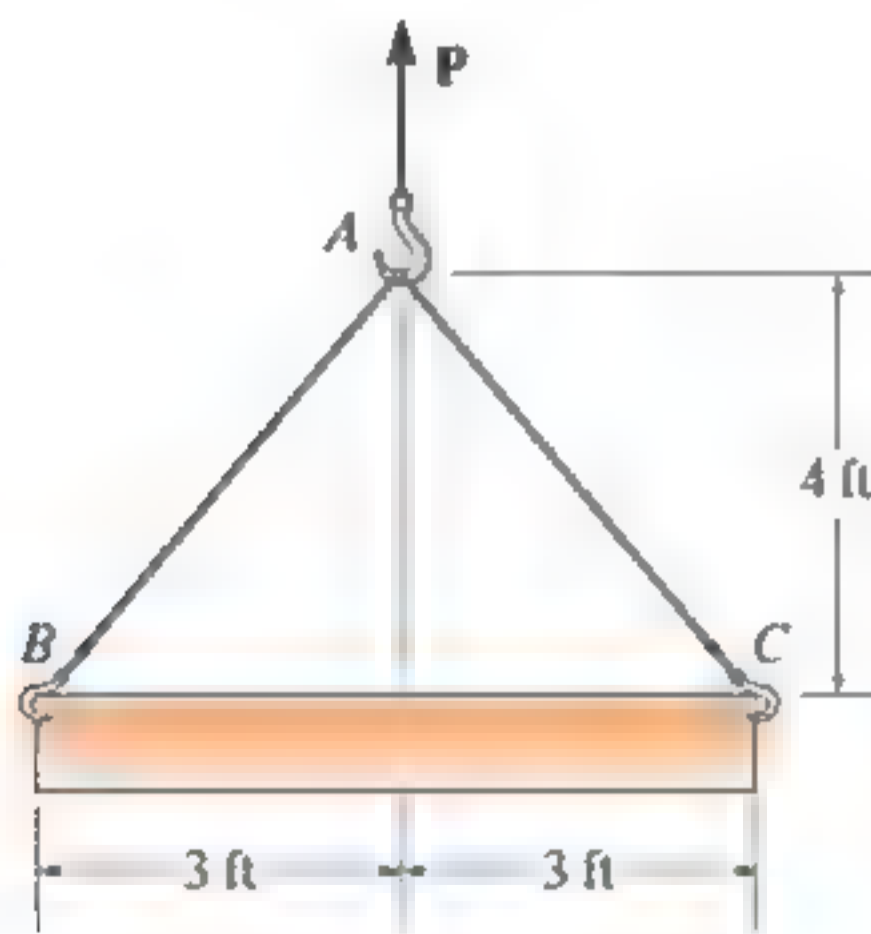


Prob. 15-1

**15-2.** Un bloque de 20 lb se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado a  $30^\circ$ , con una velocidad inicial de 2 ft/s. Determine la velocidad del bloque en 3 s, si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es  $\mu_k = 0.25$ .

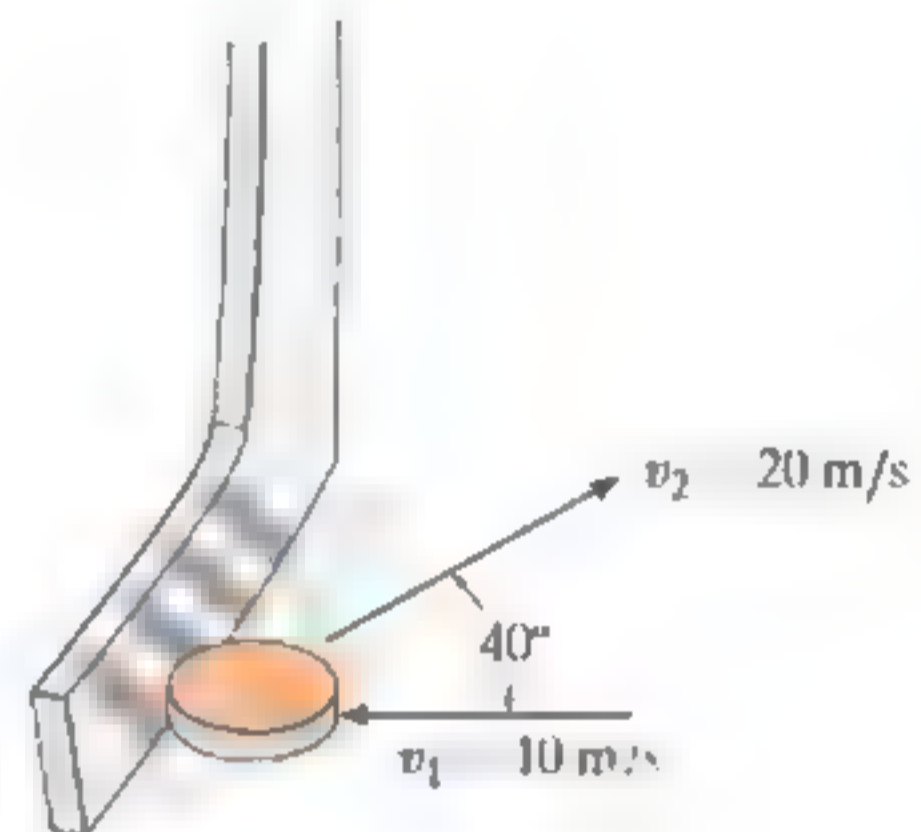
**15-3.** La viga uniforme tiene un peso de 5000 lb. Determine la tensión promedio en cada uno de los dos cables AB y AC, si a la viga se le da una rapidez hacia arriba de 8 ft/s en 1.5 s, partiendo del reposo. Desprecie la masa de los cables.

**\*15-4.** Cada uno de los cables puede soportar una tensión máxima de 5000 lb. Si la viga uniforme tiene un peso de 5000 lb, determine el tiempo más corto posible para levantar la viga con una rapidez de 10 ft/s partiendo del reposo.



Probs. 15-3, 4

**15-5.** Un disco de hockey se desplaza a la izquierda con una velocidad de  $v_1 = 10$  m/s cuando es golpeado por un palo de hockey y se le da una velocidad de  $v_2 = 20$  m/s, como se indica en la figura. Determine la magnitud del impulso neto ejercido por el palo de hockey sobre el disco que tiene una masa de 0.2 kg.



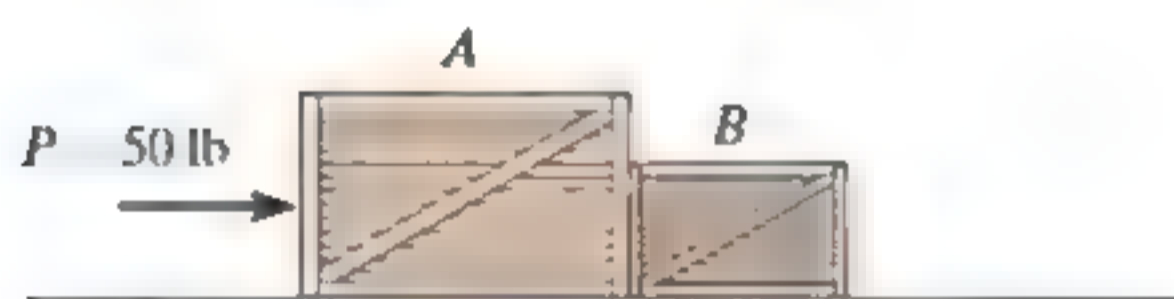
Prob. 15-5

**15-6.** Un tren se compone de una máquina de 50 Mg y tres vagones, cada uno con 30 Mg de masa. Si se requieren 80 s para que el tren incremente su rapidez de manera uniforme a 40 km/h, a partir del punto de reposo, determine la fuerza  $T$  desarrollada en el acoplamiento entre la máquina E y el primer vagón A. Las ruedas de la máquina generan una fuerza de tracción de fricción resultante  $F$  que mueve el tren hacia delante, mientras las ruedas de los vagones ruedan libremente. Asimismo, determine la fuerza  $F$  que actúa en las ruedas de la máquina.



Prob. 15-6

**15-7.** Las cajas *A* y *B* pesan 100 lb y 50 lb, respectivamente. Si parten desde el reposo, determine su rapidez cuando  $t = 5$  s. Además, encuentre la fuerza ejercida por la caja *A* sobre la caja *B* durante el movimiento. El coeficiente de fricción cinética entre las cajas y el suelo es  $\mu_k = 0.25$ .



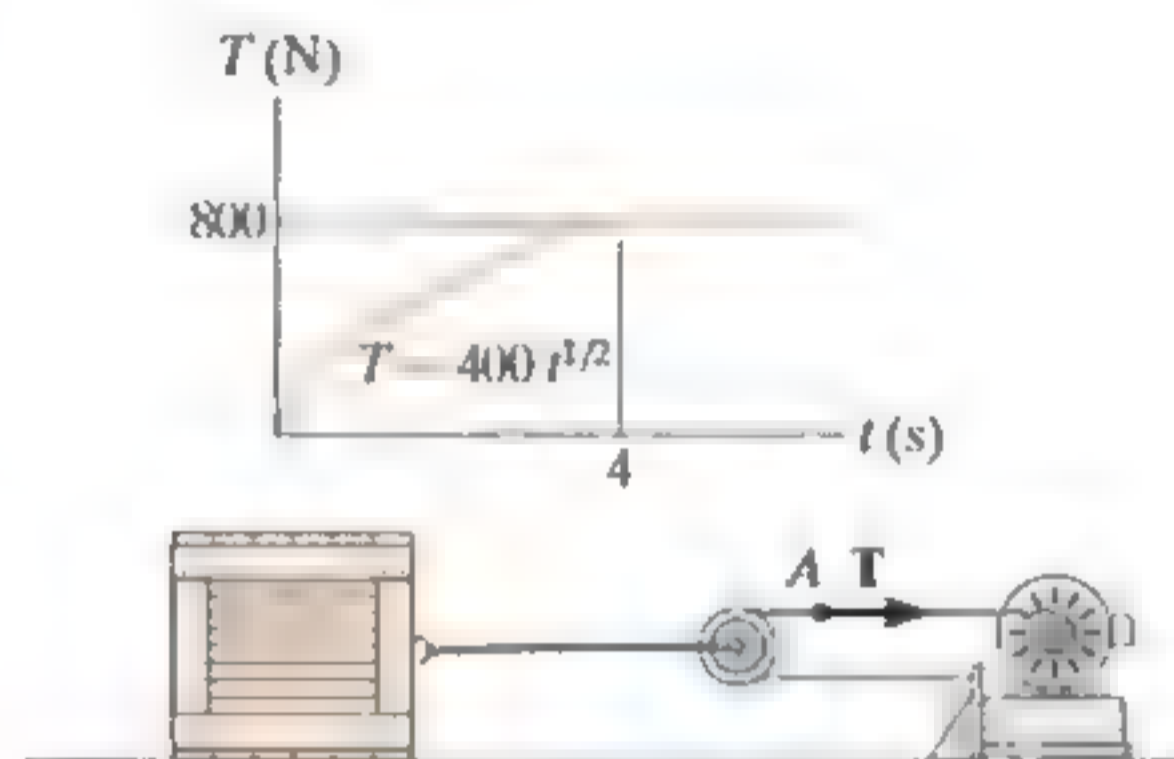
Prob. 15-7

**\*15-8.** El automóvil tiene un peso de 2700 lb y se desplaza hacia delante a 4 ft/s cuando choca contra la pared. Si el impacto se produce en 0.06 s, determine la fuerza impulsora promedio que actúa sobre el auto. Suponga que *no se aplican* los frenos. Si el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el pavimento es  $\mu_k = 0.3$ , calcule la fuerza impulsora sobre la pared, si los frenos *se aplicaran* durante el choque. La aplicación de los frenos es sobre las cuatro ruedas, por lo que todas ellas se deslizan.



Prob. 15-8

**15-9.** La caja de 200 kg descansa sobre el suelo, cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son  $\mu_s = 0.5$  y  $\mu_k = 0.4$ , respectivamente. El cabrestante proporciona una fuerza de remolque horizontal  $T$  a su cable en *A*, que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez de la caja cuando  $t = 4$  s. Originalmente, la tensión en el cable es cero. *Sugerencia:* Primero determine la fuerza necesaria para comenzar a mover la caja.



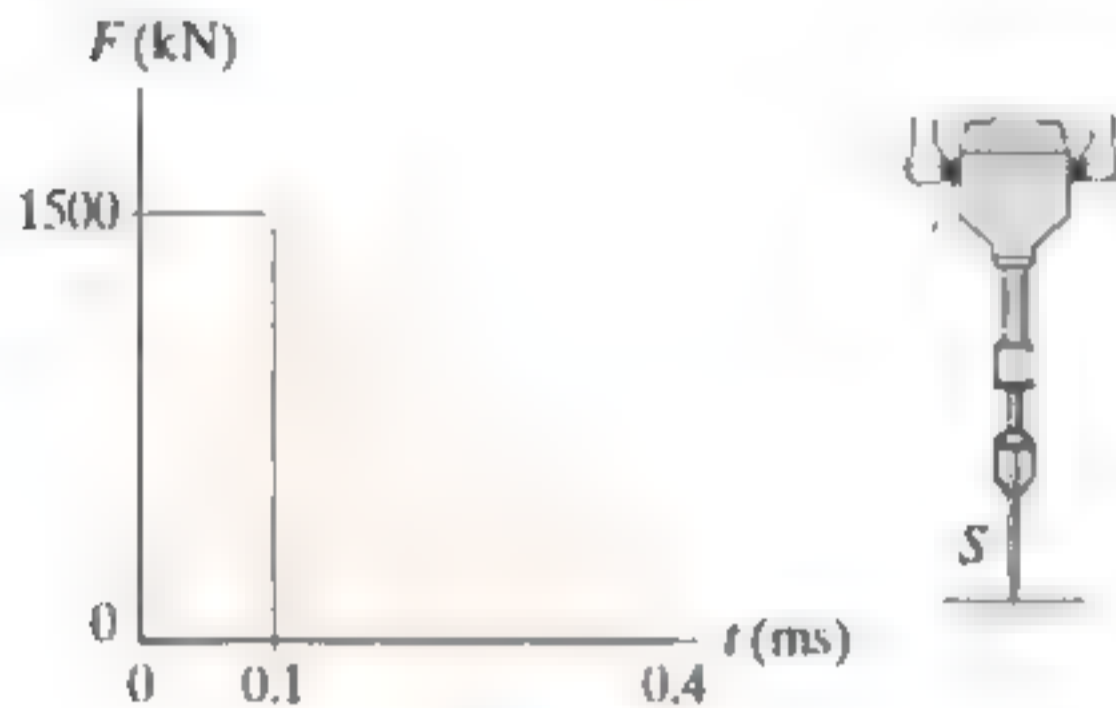
Prob. 15-9

**15-10.** La caja de 50 kg se jala mediante la fuerza constante  $P$ . Si la caja parte desde el reposo y alcanza una rapidez de 10 m/s en 5 s, determine la magnitud de  $P$ . El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el suelo es  $\mu_k = 0.2$ .



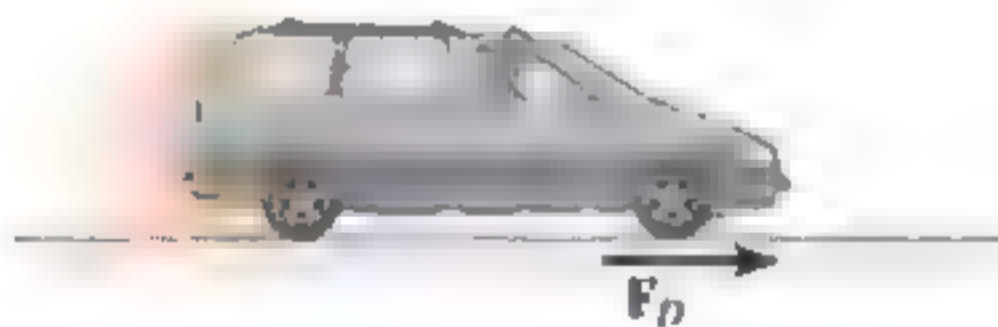
Prob. 15-10

**15-11.** Durante su operación, el martillo de percusión golpea la superficie de concreto con la fuerza que se indica en la gráfica. Para conseguir esto, la punta  $S$  de 2 kg se dispara hacia la superficie a 90 m/s. Determine la rapidez de la punta justo después de rebotar.



Prob. 15-11

**\*15-12.** Durante un periodo de tiempo corto, la fuerza impulsora de fricción que actúa sobre las ruedas de la furgoneta de 2.5 Mg es  $F_D = (600t^2)$  N, donde  $t$  se da en segundos. Si la furgoneta tiene una rapidez de 20 km/h cuando  $t = 0$ , determine su rapidez cuando  $t = 5$  s.



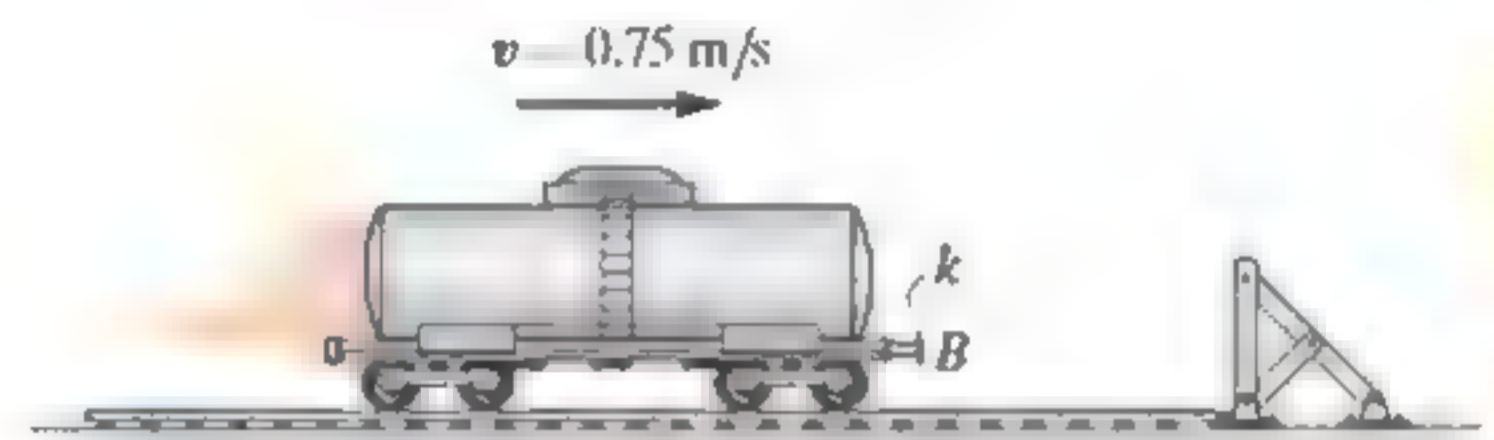
Prob. 15-12

**15-13.** La furgoneta de 2.5 Mg viaja con una rapidez de 100 km/h cuando se aplican los frenos y se bloquean las cuatro ruedas. Si la rapidez disminuye hasta 40 km/h en 5 s, determine el coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera.



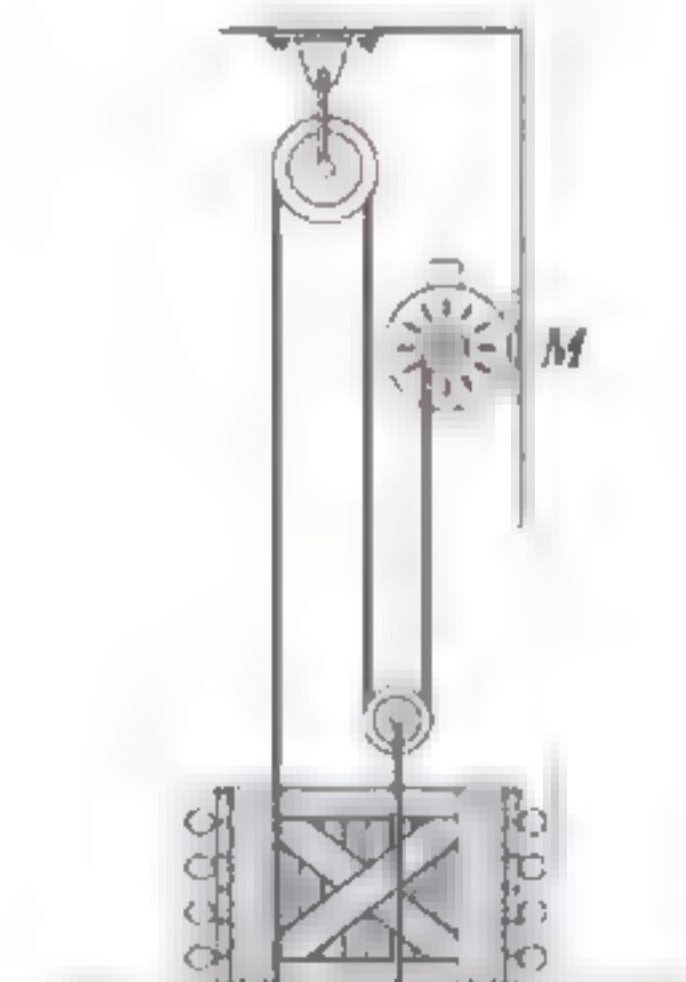
Prob. 15-13

**15-14.** Un vagón-tanque tiene una masa de 20 Mg y rueda libremente hacia la derecha con una rapidez de 0.75 m/s. Si golpea la barrera, determine el impulso horizontal necesario para detener el vagón, si el resorte del parachoques  $B$  tiene una rigidez (a)  $k \rightarrow \infty$  (el parachoques es rígido) y (b)  $k = 15$  kN/m.



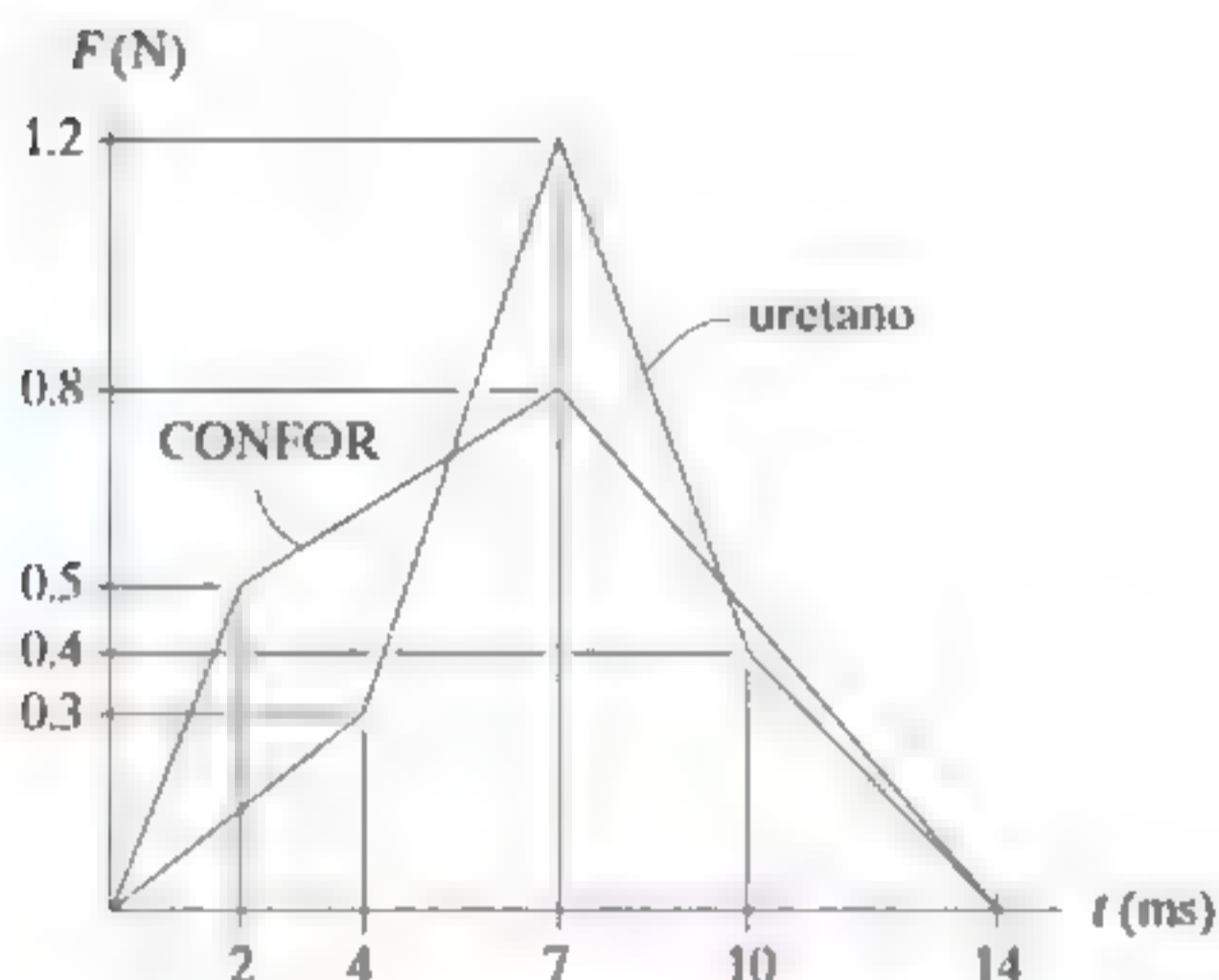
Prob. 15-14

**15-15.** El motor,  $M$ , tira del cable con una fuerza  $F = (10t^2 + 300)$  N, donde  $t$  se da en segundos. Si la caja de 100 kg está inicialmente en reposo en  $t = 0$ , determine su rapidez cuando  $t = 4$  s. Desprecie la masa del cable y las poleas. *Sugerencia:* Primero encuentre el tiempo necesario para comenzar a elevar la caja.



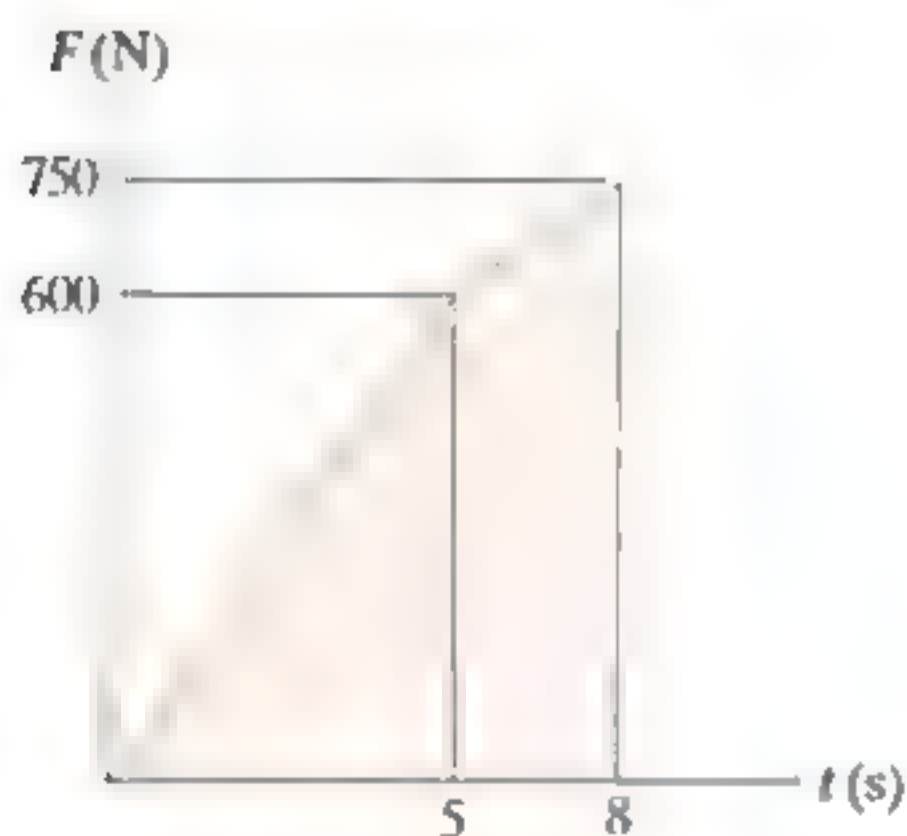
Prob. 15-15

**\*15-16.** La elección de un material para asientos de vehículos depende de su capacidad para resistir golpes y vibraciones. Con base en los datos que se muestran en las gráficas, determine los impulsos creados por un peso que cae sobre una muestra de espuma de uretano y de espuma CONFOR.



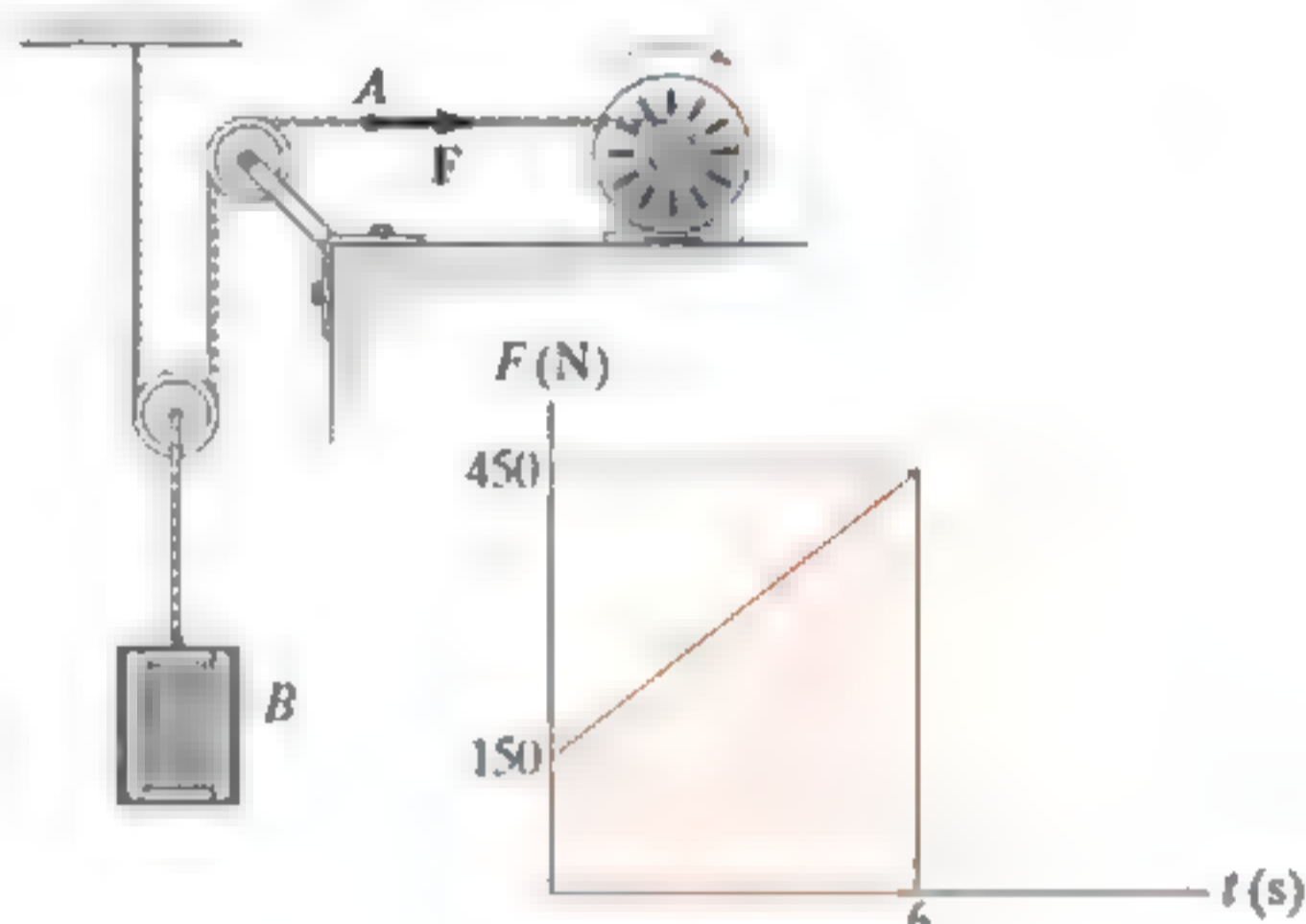
Prob. 15-16

**15-17.** La fuerza de remolque que actúa sobre el gabinete de 400 kg varía como se muestra en la gráfica. Determine su rapidez, partiendo del reposo, cuando  $t = 8$  s. ¿Hasta dónde habrá viajado el gabinete durante ese tiempo?



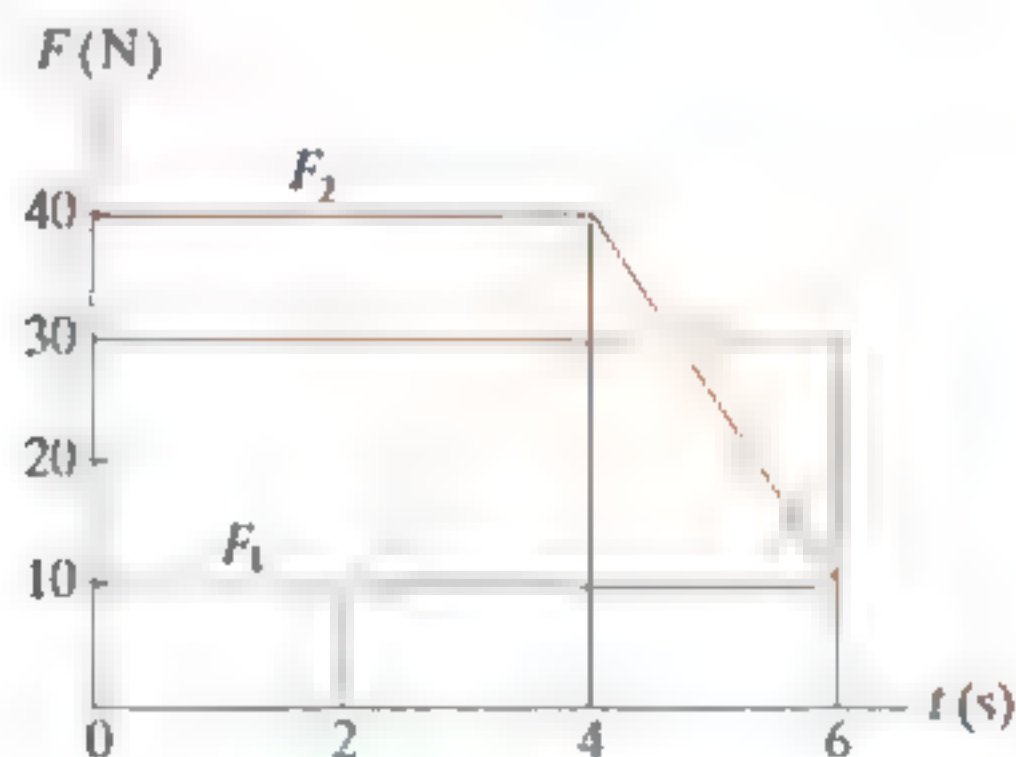
Prob. 15-17

**15-18.** El motor ejerce una fuerza  $F$  sobre la caja de 40 kg, como se indica en la gráfica. Determine la rapidez de la caja cuando  $t = 3$  s y cuando  $t = 6$  s. Cuando  $t = 0$ , la caja se mueve hacia abajo a 10 m/s.



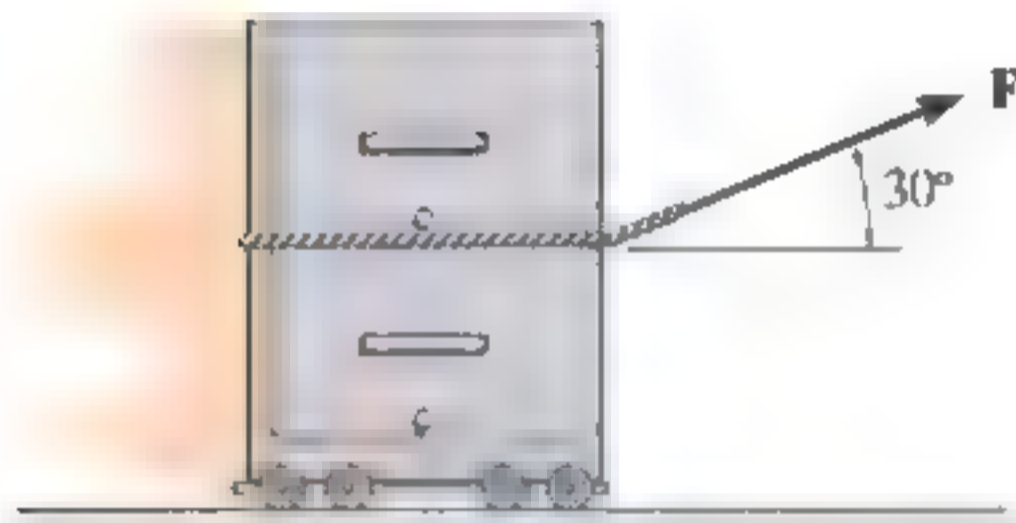
Prob. 15-18

**15-19.** El bloque deslizante de 30 kg se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 5 m/s cuando actúan sobre él las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . Si estas cargas varían de la manera mostrada en la gráfica, determine la rapidez del bloque en  $t = 6$  s. No tome en cuenta la fricción ni la masa de las poleas y las cuerdas.



Prob. 15-19

**\*15-20.** El gabinete de 200 lb se somete a la fuerza  $F = 20(t + 1)$  lb, donde  $t$  se da en segundos. Si el gabinete se mueve inicialmente hacia la izquierda con una velocidad de 20 ft/s, determine su rapidez cuando  $t = 5$  s. No tome en cuenta el tamaño de los rodillos.



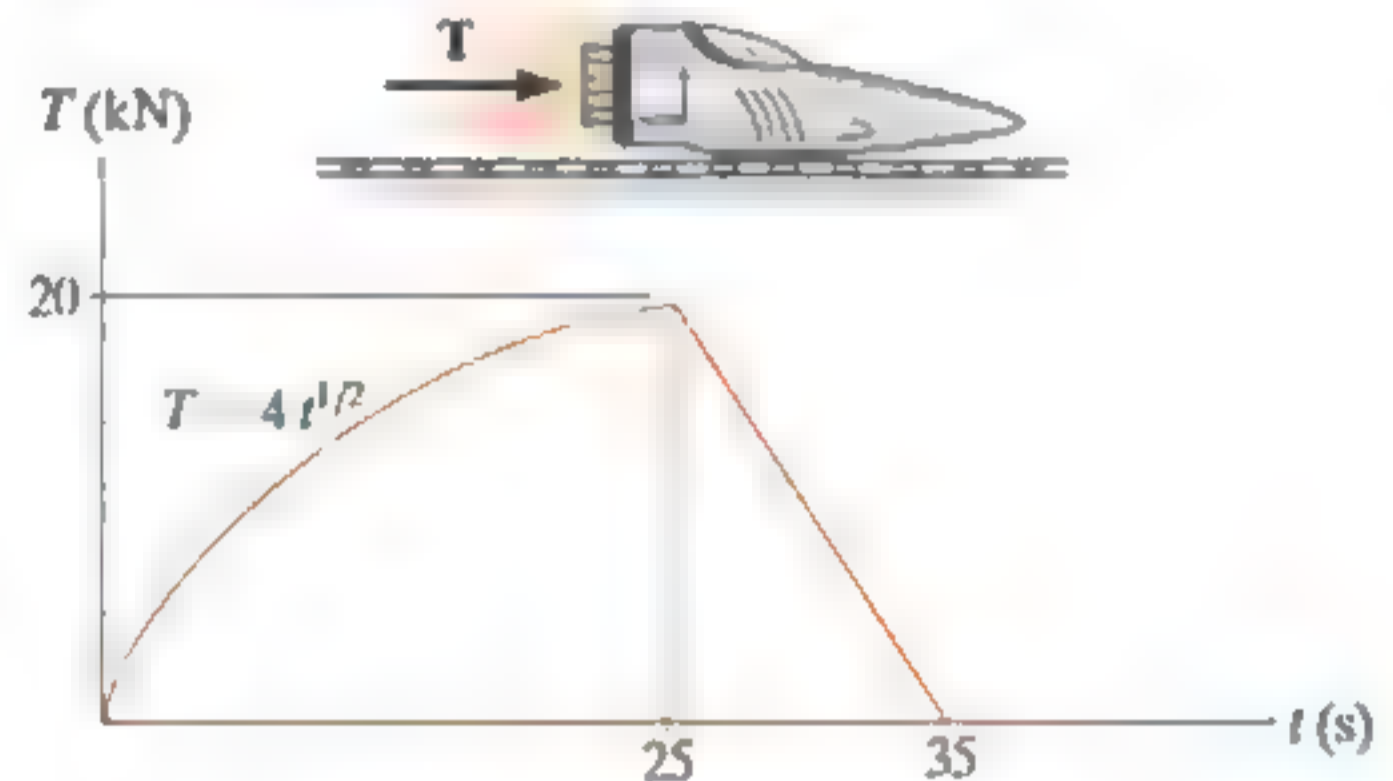
Prob. 15-20

**15-21.** Si el remolcador de 50 Mg requiere 35 s para aumentar su rapidez uniformemente desde el reposo hasta 25 km/h, determine la fuerza de la cuerda sobre el remolcador. La hélice proporciona la fuerza de propulsión  $F$  que genera el movimiento hacia delante del remolcador, en tanto que la barcaza se mueve libremente. Además, determine  $F$  que actúa sobre el remolcador. La barcaza tiene una masa de 75 Mg.



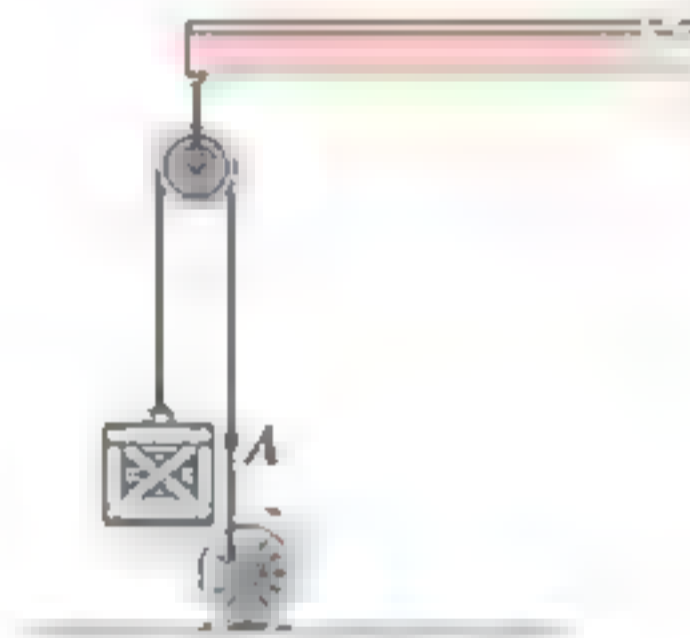
Prob. 15-21

**15-22.** El empuje sobre el cohete-trineo de 4 Mg se muestra en la gráfica. Determine la velocidad máxima del trineo y la distancia que éste viaja cuando  $t = 35$  s. No tome en cuenta la fricción.



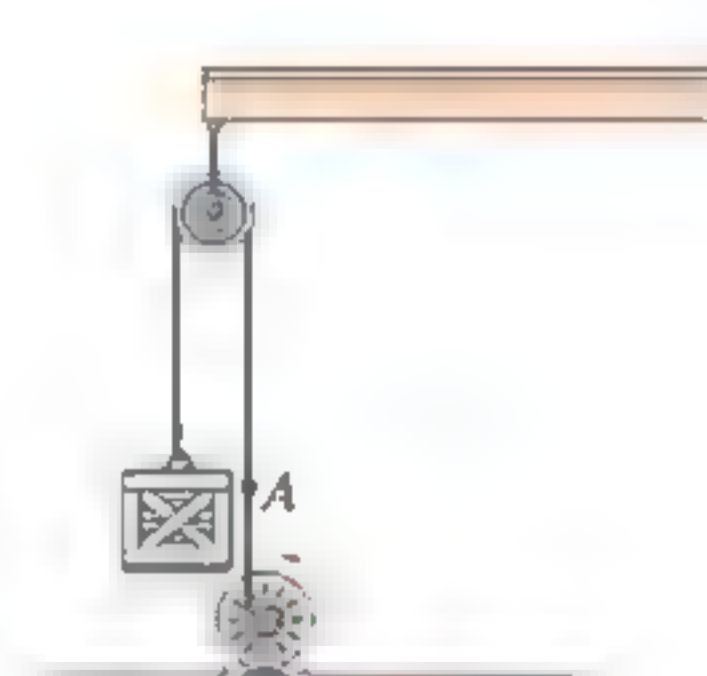
Prob. 15-22

**15-23.** El motor jala el cable en  $A$  con una fuerza  $F = (30 + t^2)$  lb, donde  $t$  se da en segundos. Si la caja de 34 lb está originalmente sobre el suelo en  $t = 0$ , determine su rapidez en  $t = 4$  s. Desprecie la masa del cable y las poleas. *Sugerencia:* Primero encuentre el tiempo necesario para comenzar a elevar la caja.



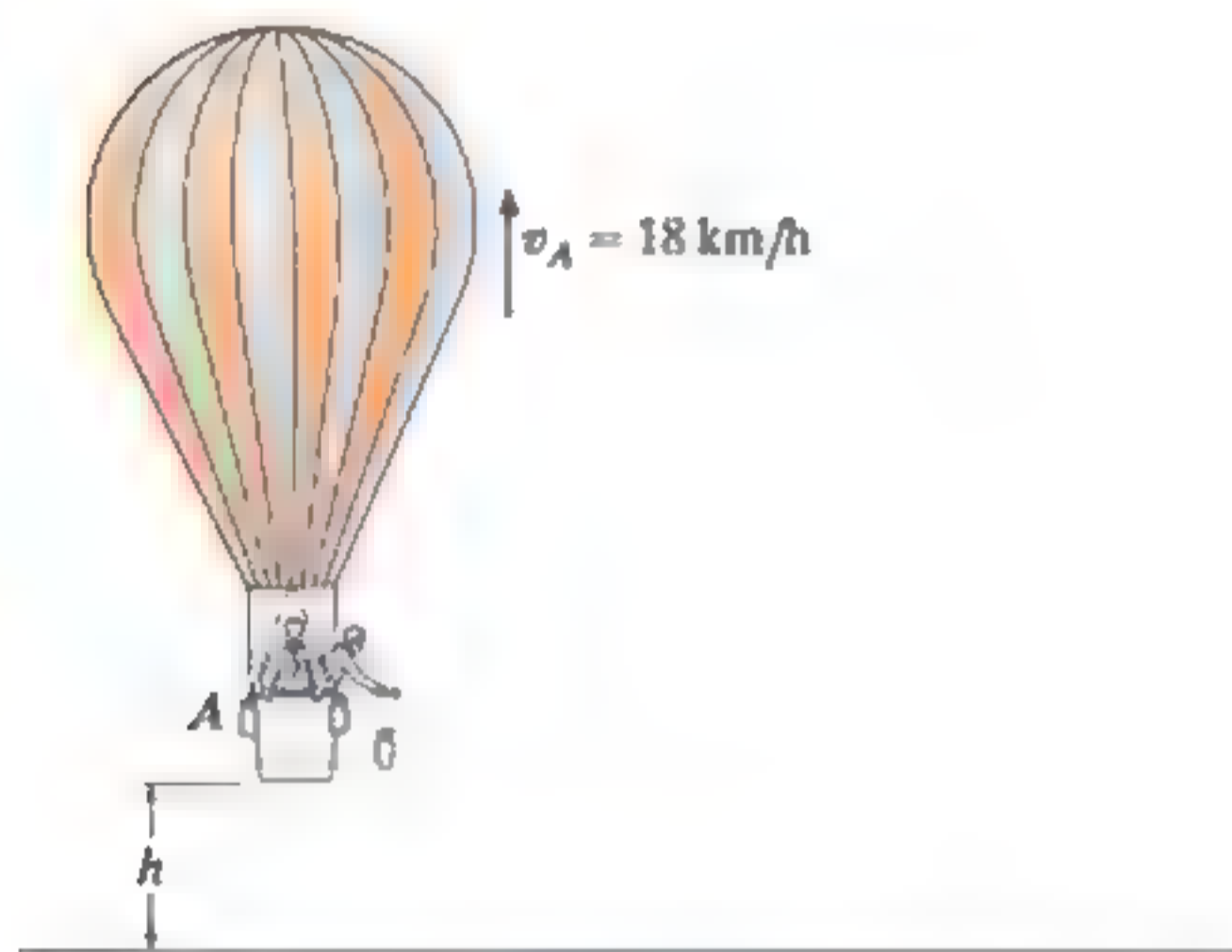
Prob. 15-23

**\*15-24.** El motor tira del cable en  $A$  con una fuerza  $F = (e^{2t})$  lb, donde  $t$  se da en segundos. Si la caja de 34 lb está originalmente en reposo sobre el suelo en  $t = 0$ , determine su velocidad en  $t = 2$  s. Desprecie la masa del cable y las poleas. *Sugerencia:* Primero encuentre el tiempo necesario para comenzar a elevar la caja.



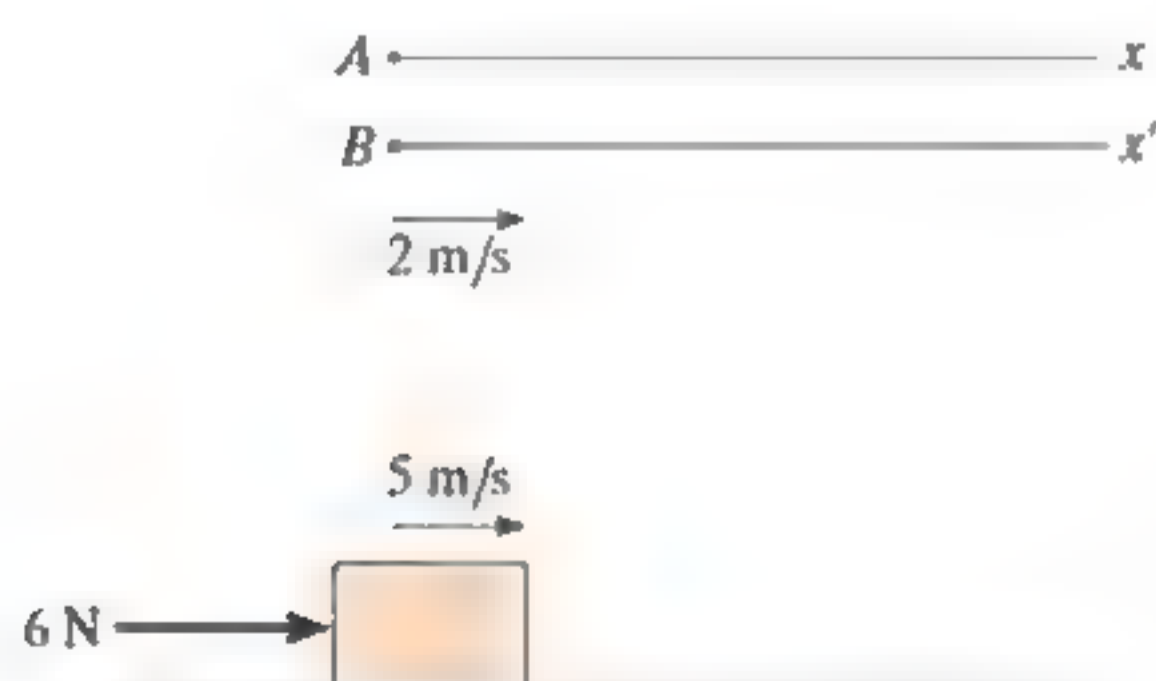
Prob. 15-24

**15-25.** El globo aerostático tiene una masa total de 400 kg, incluyendo los pasajeros y el lastre. El globo se está elevando a una velocidad constante de 18 km/h cuando  $h = 10$  m. Si el hombre deja caer una bolsa de arena de 40 kg, determine la velocidad del globo cuando la bolsa golpea el suelo. No tome en cuenta la resistencia del aire.



Prob. 15-25

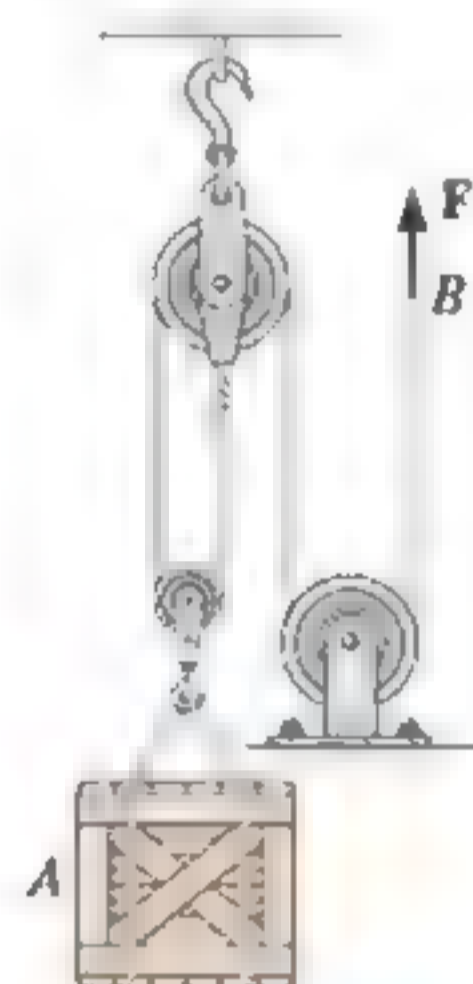
**15-26.** De acuerdo con lo indicado en la deducción, el principio del impulso y la cantidad de movimiento es válido para los observadores en *cualquier* marco de referencia inercial. Demuestre que esto es así, considerando el bloque de 10 kg que se desliza sobre la superficie lisa y se somete a una fuerza horizontal de 6 N. Si el observador A está en un marco  $x$  fijo, determine la rapidez final del bloque en 4 s si tiene una velocidad inicial de 5 m/s, medida desde el marco fijo. Compare el resultado con el obtenido por un observador B, unido al eje  $x'$ , que se mueve a una velocidad constante de 2 m/s con respecto a A.



Prob. 15-26

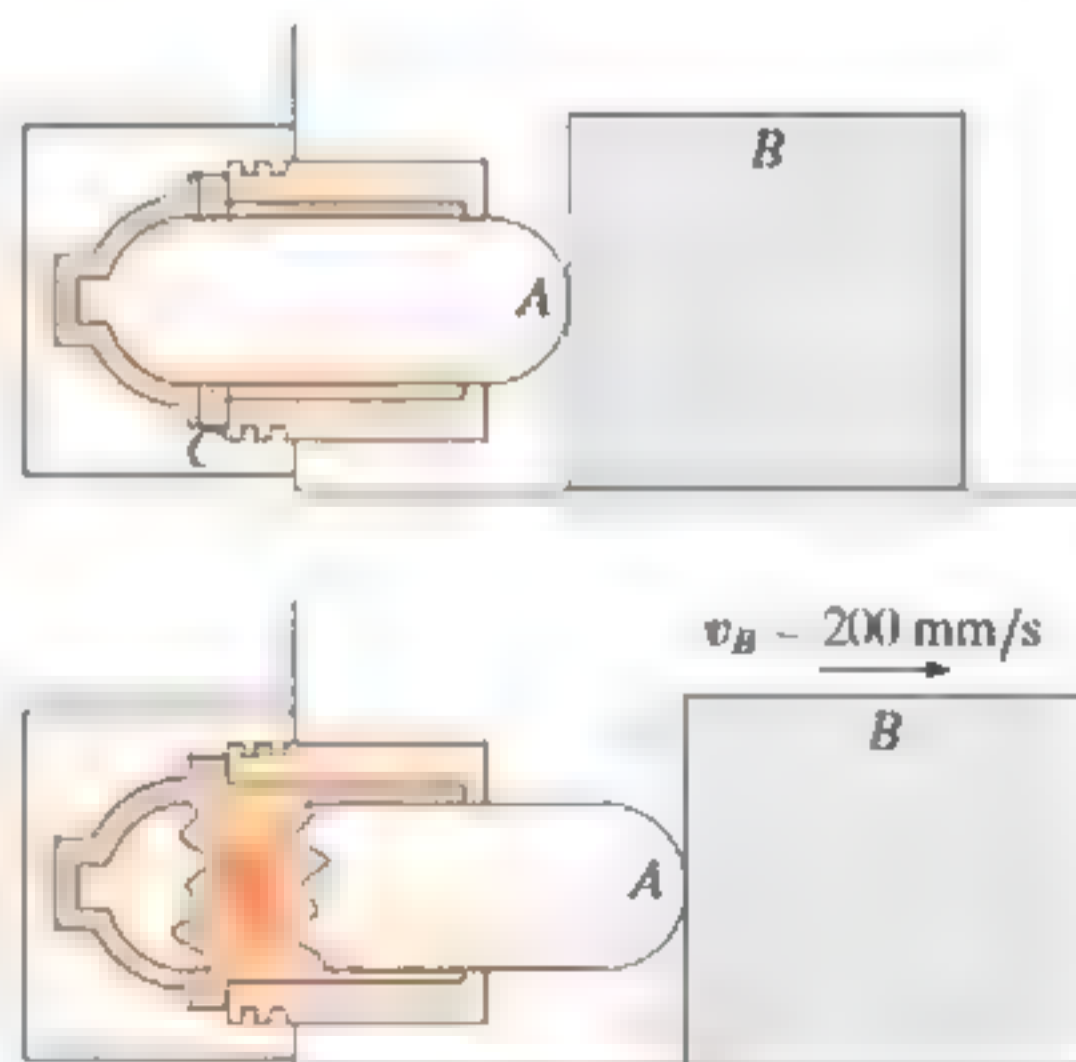
**15-27.** La caja de 20 kg se eleva mediante una fuerza de  $F = (100 + 5t^2)$  N, donde  $t$  se da en segundos. Determine la rapidez de la caja cuando  $t = 3$  s, si parte desde el reposo.

**\*15-28.** La caja de 20 kg se eleva mediante una fuerza de  $F = (100 + 5t^2)$  N, donde  $t$  se da en segundos. Determine cuánto se ha elevado la caja cuando  $t = 3$  s, si parte desde el reposo.



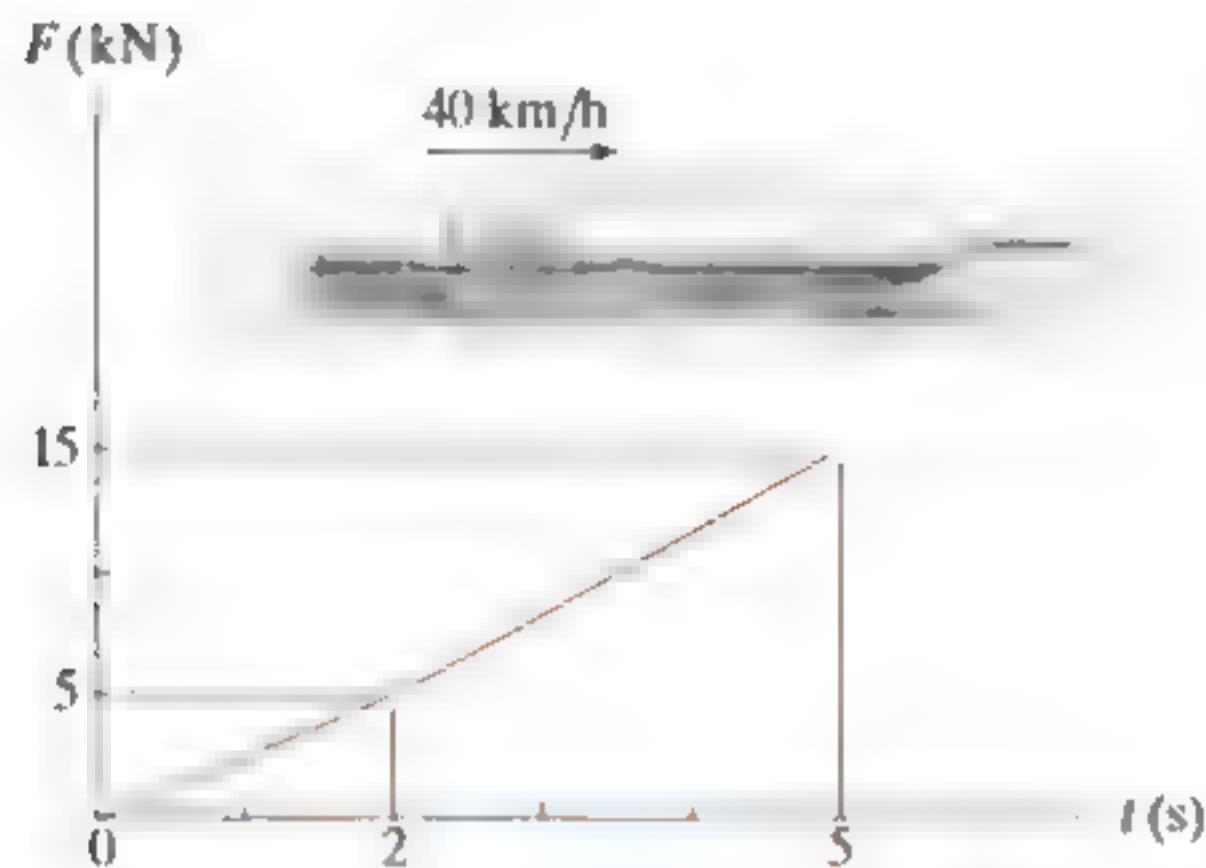
Probs. 15-27/28

**15-29.** En caso de emergencia, el actuador de gas se utiliza para mover un bloque B de 75 kg, mediante la explosión de una carga de C cerca de un cilindro presurizado de masa despreciable. Como resultado de la explosión, las fracturas del cilindro y el gas liberado hacen que la parte frontal del cilindro A mueva hacia adelante el bloque B, dándole una rapidez de 200 mm/s en 0.4 s. Si el coeficiente de fricción cinética entre B y el piso es  $\mu_k = 0.5$ , determine el impulso que el actuador imparte sobre B.



Prob. 15-29

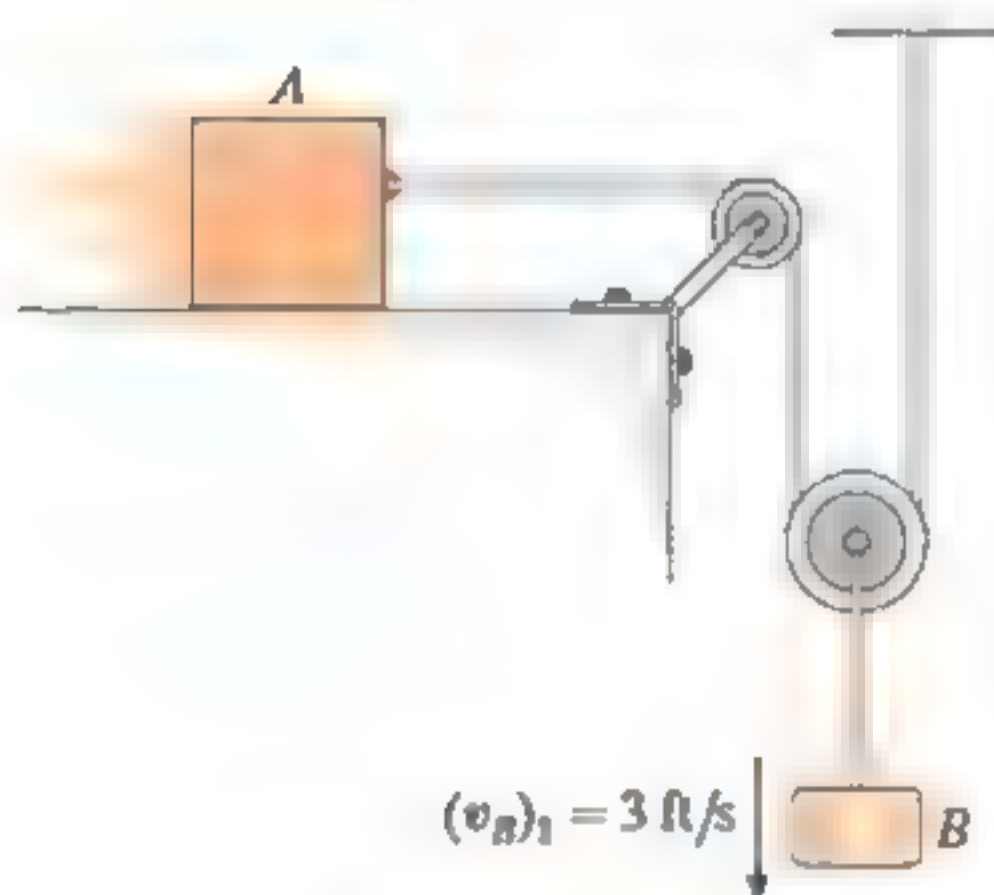
**15-30.** Un avión a reacción que tiene una masa de 7 Mg despegue desde un portaaviones, de manera que el empuje del motor varía como se indica en la gráfica. Si el portaaviones se desplaza hacia adelante con una rapidez de 40 km/h, determine la rapidez aerodinámica del avión después de 5 s.



Prob. 15-30

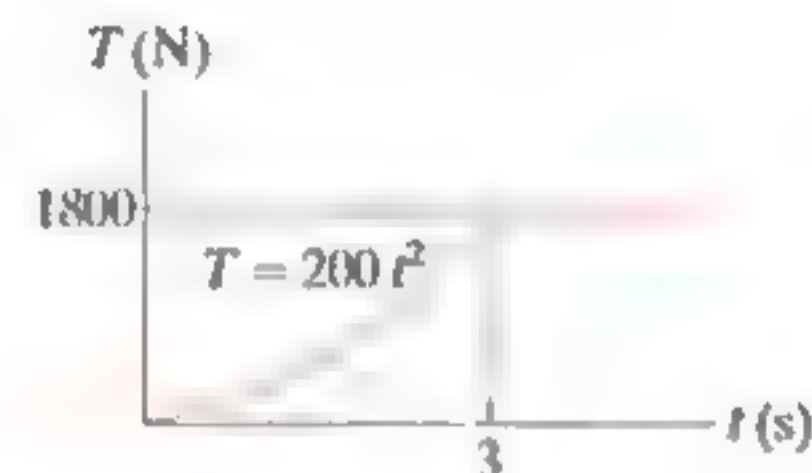
**15-31.** El bloque  $A$  pesa 10 lb y el bloque  $B$  pesa 3 lb. Si  $B$  se mueve hacia abajo con una velocidad  $(v_B)_1 = 3$  ft/s en  $t = 0$ , determine la velocidad de  $A$  cuando  $t = 1$  s. Suponga que el plano horizontal es liso. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.

**\*15-32.** El bloque  $A$  pesa 10 lb y el bloque  $B$  pesa 3 lb. Si  $B$  se mueve hacia abajo con una velocidad  $(v_B)_1 = 3$  ft/s en  $t = 0$ , determine la velocidad de  $A$  cuando  $t = 1$  s. El coeficiente de fricción cinética entre el plano horizontal y el bloque  $A$  es  $\mu_A = 0.15$ .



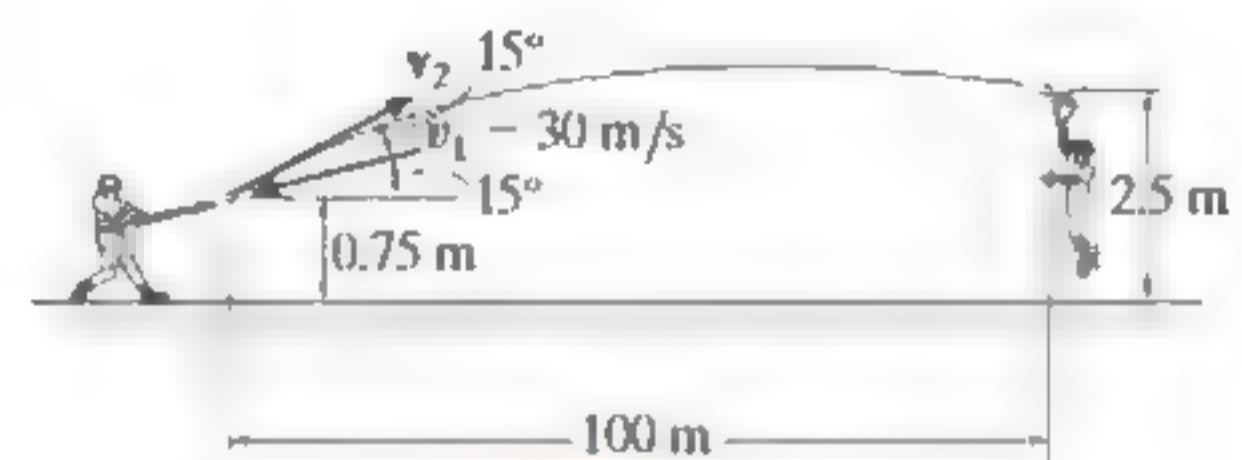
Probs. 15-31/32

**15-33.** El tronco tiene una masa de 500 kg y descansa sobre el suelo cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son  $\mu_s = 0.5$  y  $\mu_k = 0.4$ , respectivamente. El malacate proporciona una fuerza de remolque horizontal  $T$  a su cable en  $A$ , que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez del tronco cuando  $t = 5$  s. Originalmente, la tensión en el cable es cero. *Sugerencia:* Primero determine la fuerza necesaria para empezar a mover el tronco.

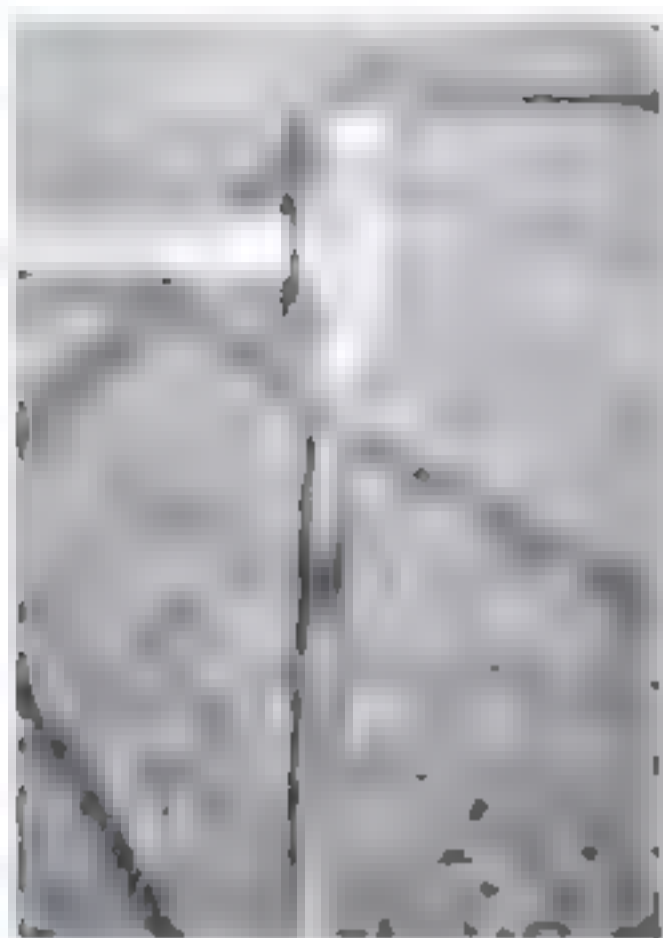


Prob. 15-33

**15-34.** La pelota de béisbol de 0.15 kg tiene una rapidez de  $v = 30$  m/s justo antes de ser golpeada por el bate. Después, se desplaza a lo largo de la trayectoria mostrada antes de que el jardinero la atrape. Determine la magnitud de la fuerza impulsora promedio impartida a la pelota, si está en contacto con el bate durante 0.75 ms.



Prob. 15-34



(© R. C. Hibbeler)



El martillo de la fotografía superior aplica una fuerza impulsora a la estaca. Durante este tiempo de contacto extremadamente corto, el peso de la estaca puede considerarse no impulsor y siempre que se hincque en suelo blando; el impulso de éste al actuar en la estaca también puede considerarse no impulsor. En contraste, si se utiliza la estaca en un rompe-pavimentos, entonces dos fuerzas impulsoras actúan en la estaca, una en su extremo superior, producida por el rompe-pavimentos, y la otra en su parte inferior debida a la rigidez del concreto. (© R. C. Hibbeler)

### 15.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas

Cuando la suma de los *impulsos externos* que actúan en un sistema de partículas es *cero*, la ecuación 15-6 se reduce a una forma simplificada, a saber,

$$\left[ \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \right] \quad (15-8)$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento lineal* y establece que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante durante el lapso  $t_1$  a  $t_2$ . Al sustituir  $m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i\mathbf{v}_i$  en la ecuación 15-8, también podemos escribir

$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2 \quad (15-9)$$

la cual indica que la velocidad  $\mathbf{v}_G$  del centro de masa del sistema de partículas no cambia, si no se aplican impulsos externos al sistema.

La conservación de la cantidad de movimiento lineal se suele aplicar cuando las partículas chocan o interactúan. Para su aplicación, debería estudiarse con cuidado el diagrama de cuerpo libre de *todo* el sistema de partículas, para identificar las fuerzas que crean, ya sea impulsos internos o externos, y determinar así en qué dirección(es) se conserva la cantidad de movimiento lineal. Como se estableció antes, los *impulsos internos* del sistema siempre se eliminan, puesto que se presentan en pares colineales iguales pero opuestos. Si el lapso de tiempo durante el cual se estudia el movimiento es *muy corto*, algunos de los impulsos externos también pueden ignorarse o considerarse aproximadamente iguales a cero. Las fuerzas que producen estos impulsos despreciables se llaman *fuerzas no impulsoras*. Por comparación, las fuerzas que son muy grandes y que actúan durante un lapso de tiempo muy corto producen un cambio significativo de la cantidad de movimiento y se llaman *fuerzas impulsoras*. Desde luego, no se pueden omitir en el análisis del impulso-cantidad de movimiento.

Por lo común, las fuerzas impulsoras ocurren a causa de la explosión o el choque de un cuerpo contra otro; en tanto que las fuerzas no impulsoras pueden incluir el peso de un cuerpo, la fuerza impartida por un resorte levemente deformado de rigidez en cierto modo pequeña, o en cuanto a eso, cualquier fuerza que sea muy pequeña comparada con otras fuerzas (impulsoras) más grandes. Cuando se hace esta distinción entre fuerzas impulsoras y no impulsoras, es importante darse cuenta de que ésta sólo se aplica durante el tiempo  $t_1$  a  $t_2$ . Como ejemplo, considere el efecto de golpear una pelota de tenis con una raqueta, como se muestra en la fotografía. Durante el *muy corto* tiempo de interacción, la fuerza de la raqueta en la pelota es impulsora puesto que cambia drásticamente su cantidad de movimiento. Por comparación, el peso de la pelota tendrá un efecto insignificante en el cambio de la cantidad de movimiento y, por consiguiente, es no impulsor. Entonces, puede despreciarse en el análisis de impulso-can-

tividad de movimiento durante este tiempo. Si se considera un análisis de impulso-cantidad de movimiento, durante el tiempo de vuelo mucho más largo después de la interacción raqueta-pelota, el impulso del peso de la pelota es importante ya que, junto con la resistencia del aire, hace que cambie la cantidad de movimiento de la pelota.



(© R. C. Hibbeler)

## Procedimiento para el análisis

En general, el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales o el de la conservación de la cantidad de movimiento lineal se aplican a un *sistema de partículas*, para determinar las velocidades finales de las partículas *justo después* del periodo de tiempo considerado. Al aplicar este principio a todo el sistema, los impulsos internos que actúan dentro del sistema, los cuales pueden ser desconocidos, se *eliminan* del análisis. Para su aplicación se sugiere seguir el procedimiento indicado.

### Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el marco de referencia inercial  $x, y, z$  y trace el diagrama de cuerpo libre de cada partícula del sistema, con la finalidad de identificar las fuerzas internas y externas.
- La conservación de la cantidad de movimiento lineal se aplica al sistema en una dirección donde no hay fuerzas externas o donde las fuerzas pueden considerarse no impulsoras.
- Establezca la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de las partículas. Si se desconoce el sentido, suponga que es a lo largo de un eje de coordenadas inercial positivo.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de cada una de las partículas del sistema.

### Ecuaciones de cantidad de movimiento

- Aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, o el de la conservación de la cantidad de movimiento lineal en las direcciones apropiadas.
- Si es necesario determinar el *impulso interno*  $\int F dt$  que actúa en sólo una partícula de un sistema, entonces debe *aislarse* la partícula (diagrama de cuerpo libre) y debe aplicarse *a esta partícula* el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales.
- Después de que se calcula el impulso y siempre que se conozca el tiempo  $\Delta t$  durante el cual actúa el impulso, entonces la *fuerza impulsora promedio*  $F_{\text{prom}}$  se determina mediante  $F_{\text{prom}} = \int F dt / \Delta t$ .

## EJEMPLO



El vagón cerrado  $A$  de 15 Mg rueda libremente a 1.5 m/s por la vía horizontal hasta que se encuentra con un carro tanque  $B$  de 12 Mg que rueda a 0.75 m/s hacia él, como se indica en la figura 15-8a. Si los dos chocan y se acoplan, determine (a) la rapidez de ambos justo después del acoplamiento, y (b) la fuerza promedio entre ellos si el acoplamiento ocurre en 0.8 s.

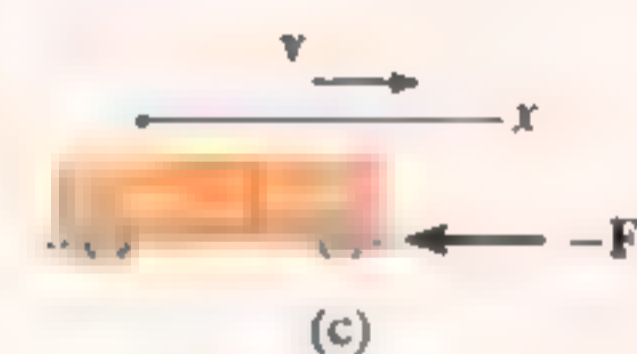
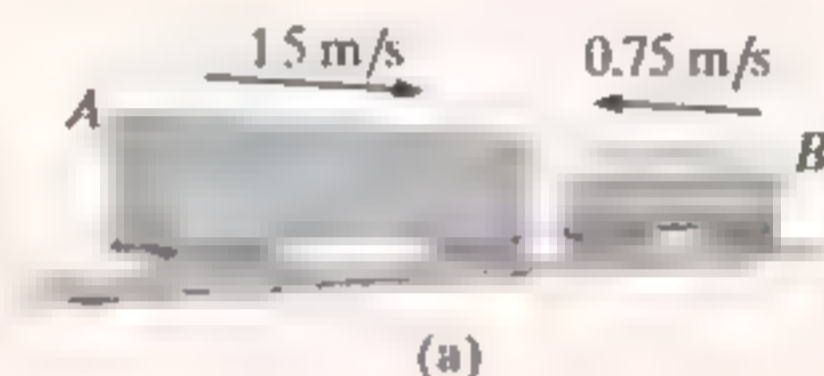


Fig. 15-8

## SOLUCIÓN

**Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.\*** En este caso consideramos *ambos*, carro y vagón, como un solo sistema (fig. 15-8b). Por inspección, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección  $x$  puesto que la fuerza de acoplamiento  $F$  es *interna* al sistema y, por consiguiente, se anula. Se supone que los dos, al acoplarse, se mueven a  $v_2$  en la dirección  $x$  positiva.

## Conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$\begin{aligned}
 (\pm) \quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 &= (m_A + m_B)v_2 \\
 (15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - 12\,000\text{ kg}(0.75\text{ m/s}) &= (27\,000\text{ kg})v_2 \\
 v_2 &= 0.5\text{ m/s} \rightarrow \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

**Parte (b)** La fuerza de acoplamiento (impulsora) promedio,  $F_{\text{prom}}$ , se determina al aplicar el principio de cantidad de movimiento lineal a *cualquiera* de los dos.

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 15-8c, al aislar el vagón cerrado la fuerza de acoplamiento es *externa* a él.

**Principio de impulso y cantidad de movimiento.** Como  $\int F dt = F_{\text{prom}}\Delta t = F_{\text{prom}}(0.8\text{ s})$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 (\pm) \quad m_A(v_A)_1 + \Sigma \int F dt &= m_A v_2 \\
 (15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - F_{\text{prom}}(0.8\text{ s}) &= (15\,000\text{ kg})(0.5\text{ m/s}) \\
 F_{\text{prom}} &= 18.8\text{ kN} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

**NOTA:** La solución fue posible en este caso, puesto que la velocidad final del vagón cerrado se obtuvo en la parte (a). Intente resolver  $F_{\text{prom}}$  mediante el principio de impulso y cantidad de movimiento para el carro tanque.

\*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo las fuerzas horizontales.

## EJEMPLO

Cada uno de los carritos chocones  $A$  y  $B$  en la figura 15-9a tiene una masa de 150 kg y se mueve libremente a las velocidades que se muestran antes de que choquen de frente. Si no se pierde energía durante la colisión, determine sus velocidades después de la colisión.

## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Los carritos se considerarán como un solo sistema. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 15-9b.

**Conservación de la cantidad de movimiento.**

$$\begin{aligned}
 (\pm) \quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 &= m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \\
 (150 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) + (150 \text{ kg})(-2 \text{ m/s}) &= (150 \text{ kg})(v_A)_2 + (150 \text{ kg})(v_B)_2 \\
 (v_A)_2 &= 1 - (v_B)_2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

**Conservación de la energía.** Como no se pierde energía, el teorema de la conservación de la energía resulta

$$\begin{aligned}
 T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\
 \frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + 0 &= \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + 0 \\
 \frac{1}{2}(150 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(150 \text{ kg})(2 \text{ m/s})^2 + 0 &= \frac{1}{2}(150 \text{ kg})(v_A)_2^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(150 \text{ kg})(v_B)_2^2 + 0 \\
 (v_A)_2^2 + (v_B)_2^2 &= 13 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Si sustituimos la ecuación (1) en la (2) y simplificamos, obtenemos

$$(v_B)_2^2 - (v_B)_2 - 6 = 0$$

Al resolver las dos raíces,

$$(v_B)_2 = 3 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad (v_B)_2 = -2 \text{ m/s}$$

Como  $(v_B)_2 = -2 \text{ m/s}$  se refiere a la velocidad de  $B$  justo *antes* de la colisión, entonces la velocidad de  $B$  justo después de la colisión debe ser

$$(v_B)_2 = 3 \text{ m/s} \rightarrow \quad \text{Resp.}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (1), obtenemos

$$(v_A)_2 = 1 - 3 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} \leftarrow \quad \text{Resp.}$$

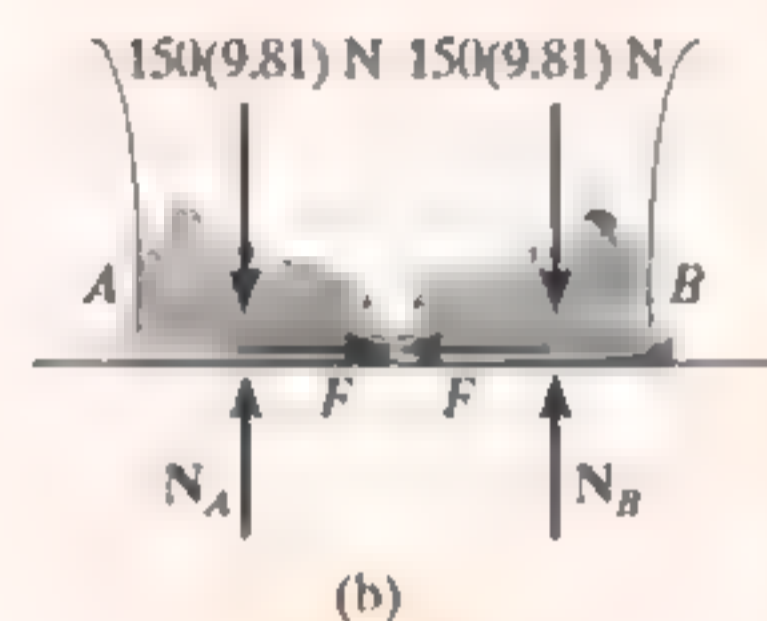
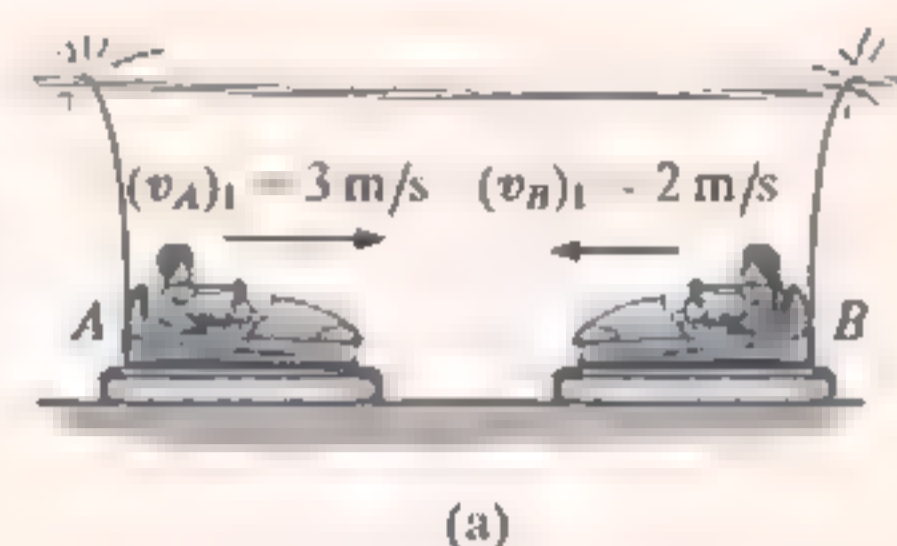
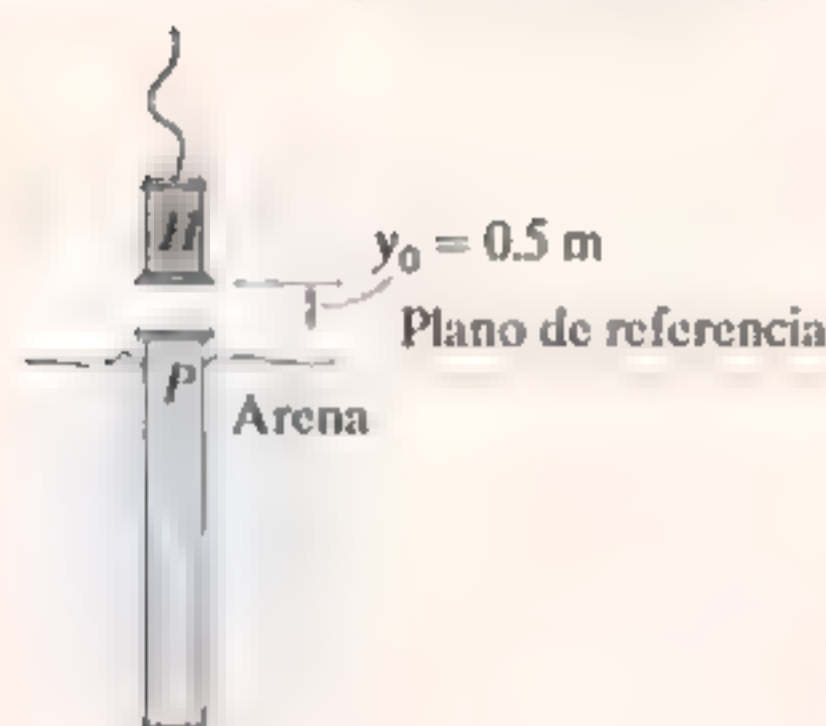


Fig. 15-9

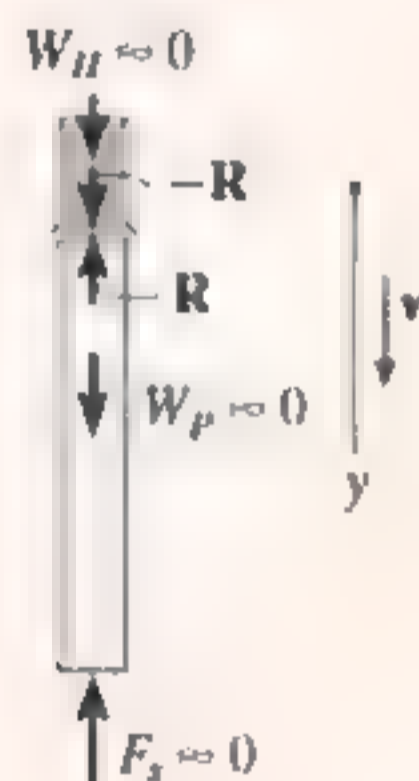
## EJEMPLO



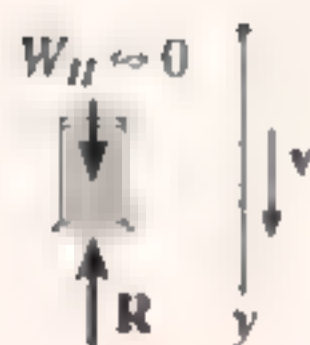
(© R. C. Hibbeler)



(a)



(b)



(c)

Fig. 15-19

En la figura 15-10a se muestra un pilote rígido de 800 kg que se hinea en el suelo usando un martinete de 300 kg. Éste cae desde el punto de reposo a una altura  $y_0 = 0.5$  m y golpea la parte superior del pilote. Determine el impulso que el pilote ejerce en el martinete, si el pilote está rodeado por completo de arena suelta, de modo que después del golpe el martinete *no* rebota del pilote.

## SOLUCIÓN

**Conservación de la energía.** La velocidad a la cual el martinete golpea el pilote se determina con la ecuación de la conservación de la energía aplicada al martinete. Con el plano de referencia en el extremo superior del pilote (fig. 15-10a), tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\frac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \frac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9.81) \text{ N}(0.5 \text{ m}) = \frac{1}{2}(300 \text{ kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3.132 \text{ m/s}$$

**Diagrama de cuerpo libre.** Por los aspectos físicos del problema, el diagrama de cuerpo libre del martinete y el pilote (fig. 15-10b) indica que durante el *corto tiempo* desde *justo antes* hasta *justo después* del *choque*, los pesos del martinete y el pilote y la fuerza de resistencia  $F_s$  de la arena son *no impulsores*. La fuerza impulsora  $R$  es interna al sistema y, por consiguiente, se cancela. Entonces, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección vertical durante este corto tiempo.

**Conservación de la cantidad de movimiento.** Como el martinete no rebota del pilote justo después de la colisión, entonces  $(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2$ .

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 &= m_H v_2 + m_P v_2 \\ (300 \text{ kg})(3.132 \text{ m/s}) + 0 &= (300 \text{ kg})v_2 + (800 \text{ kg})v_2 \\ v_2 &= 0.8542 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Principio de impulso y cantidad de movimiento.** Ahora puede determinarse el impulso que el pilote imparte al martinete, puesto que se conoce  $v_2$ . Por el diagrama de cuerpo libre del martinete (fig. 15-10c), tenemos

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad m_H(v_H)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m_H v_2 \\ (300 \text{ kg})(3.132 \text{ m/s}) - \int R dt &= (300 \text{ kg})(0.8542 \text{ m/s}) \\ \int R dt &= 683 \text{ N} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

Resp.

**NOTA:** El impulso igual pero opuesto actúa sobre el pilote. Trate de determinarlo aplicando al pilote el principio del impulso y la cantidad de movimiento.

## EJEMPLO



El hombre de 80 kg puede lanzar la caja de 20 kg horizontalmente a 4 m/s cuando está de pie sobre el suelo. Si en vez de eso se encuentra firmemente parado sobre el bote de 120 kg y lanza la caja, como se muestra en la fotografía, determine cuánto se moverá el bote en tres segundos. No tome en cuenta la resistencia del agua.

## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Si el hombre, el bote y la caja se consideran como un solo sistema, las fuerzas horizontales entre el hombre y el bote y el hombre y la caja se vuelven internas al sistema (fig. 15-11a), de modo que el impulso lineal se conserva a lo largo del eje  $x$ .

**Conservación de la cantidad de movimiento.** Al escribir la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento, es importante que las velocidades se midan a partir del mismo sistema de coordenadas inercial, que aquí se supone fijo. A partir de este sistema de coordenadas, supondremos que el bote y el hombre van hacia la derecha, mientras que la caja va a la izquierda, como se indica en la figura 15-11b.

Al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento lineal para el sistema hombre, bote, caja,

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad 0 + 0 + 0 &= (m_m + m_b) v_b - m_{\text{caja}} v_{\text{caja}} \\
 0 &= (80 \text{ kg} + 120 \text{ kg}) v_b - (20 \text{ kg}) v_{\text{caja}} \\
 v_{\text{caja}} &= 10 v_b \quad (1)
 \end{aligned}$$

**Cinemática.** Como se conoce la velocidad de la caja en relación con el hombre (y el bote),  $v_{\text{caja}/h}$ , entonces  $v_b$  también puede relacionarse con  $v_{\text{caja}}$  utilizando la ecuación de velocidad relativa.

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad v_{\text{caja}} &= v_b + v_{\text{caja}/h} \\
 -v_{\text{caja}} &= v_b - 4 \text{ m/s} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2),

$$\begin{aligned}
 v_{\text{caja}} &= 3.64 \text{ m/s} \leftarrow \\
 v_b &= 0.3636 \text{ m/s} \rightarrow
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el desplazamiento del bote en tres segundos es

$$s_b = v_b t = (0.3636 \text{ m/s})(3 \text{ s}) = 1.09 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

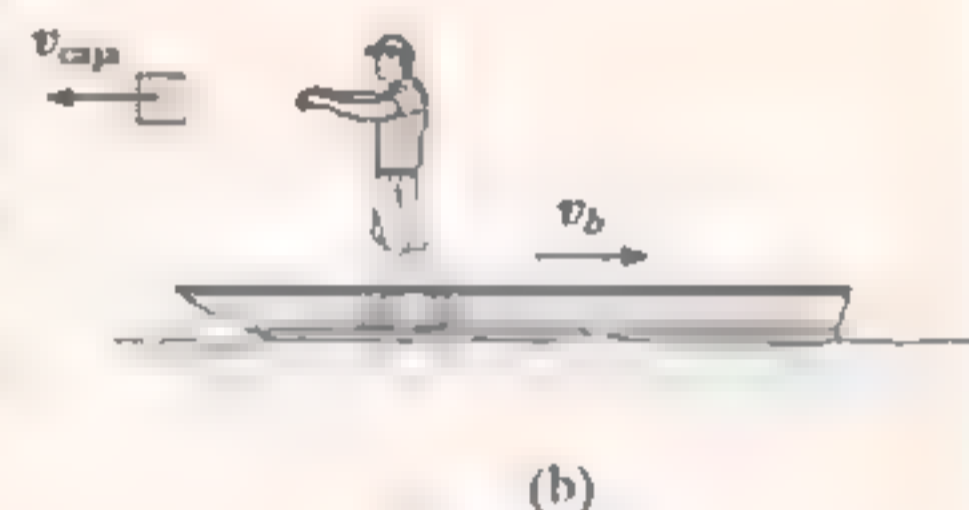
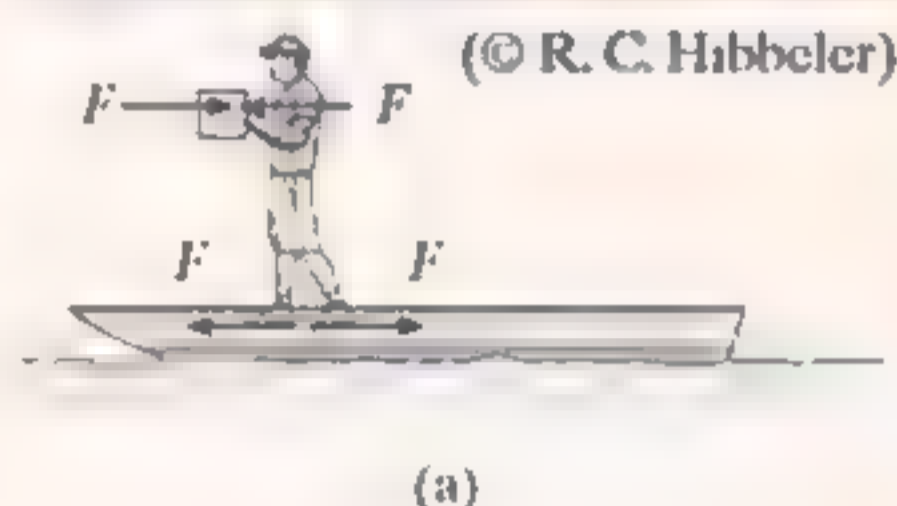
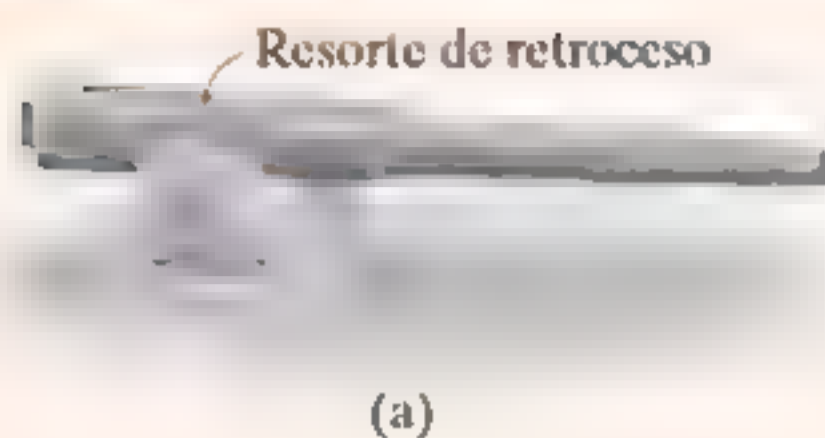


Fig. 15.11

## EJEMPLO



El cañón de 1200 lb de la figura 15-12a dispara un proyectil de 8 lb con una velocidad de salida de 1500 ft/s medida con respecto al cañón. Si el disparo ocurre en 0.03 s, determine la velocidad de retroceso del cañón justo después del disparo. El soporte del cañón está fijo en el suelo y el retroceso horizontal del cañón es absorbido por dos resortes.

## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.\*** Como se muestra en la figura 15-9b, consideraremos el proyectil y el cañón como un solo sistema, ya que las fuerzas impulsoras,  $F$  y  $-F$ , entre el cañón y el proyectil son *internas* al sistema y, por consiguiente, se eliminarán del análisis. Asimismo, durante el tiempo  $\Delta t = 0.03$  s, cada uno de los dos resortes de retroceso conectados al soporte ejerce una *fuerza no impulsora*  $F$  en el cañón. Esto se debe a que  $\Delta t$  es muy corto, de modo que durante este tiempo el cañón tan sólo recorre una distancia  $s$  *muy pequeña*. En consecuencia,  $F_s = ks \approx 0$ , donde  $k$  es la rigidez del resorte, que también se considera relativamente pequeña. Entonces se concluye que la cantidad de movimiento del sistema se conserva en la *dirección horizontal*.

## Conservación de la cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 &= -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2 \\
 0 + 0 &= \left( \frac{1200 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (v_c)_2 + \left( \frac{8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (v_p)_2 \\
 (v_p)_2 &= 150 (v_c)_2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Estas velocidades desconocidas se miden mediante un observador *fijo*. Como en el ejemplo 15.7, también pueden relacionarse mediante la ecuación de velocidad relativa.

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \quad (v_p)_2 &= (v_c)_2 + v_{p/c} \\
 (v_p)_2 &= -(v_c)_2 + 1500 \text{ ft/s} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$\begin{aligned}
 (v_c)_2 &= 9.93 \text{ ft/s} \\
 (v_p)_2 &= 1490 \text{ ft/s} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

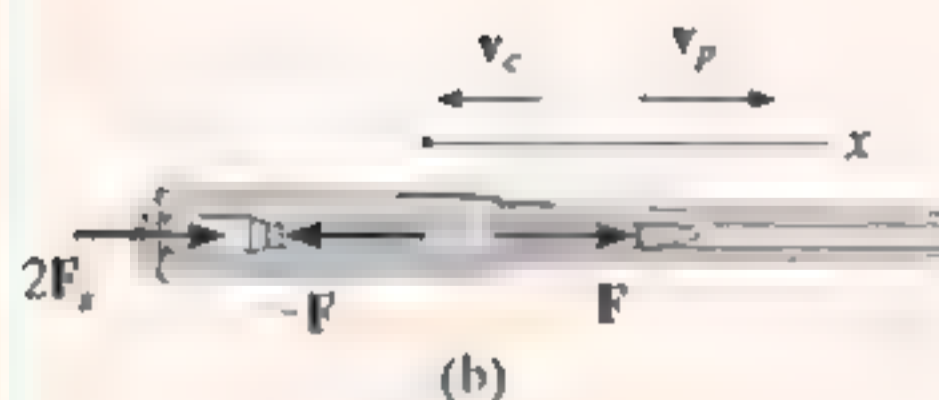


Fig. 15-12

Aplique el principio del impulso y la cantidad de movimiento al proyectil (o el cañón) y demuestre que la fuerza impulsora promedio sobre el proyectil es de 12.3 kip.

**NOTA:** Si el cañón está firmemente sujeto a su soporte (sin resortes), la fuerza de reacción del soporte en el cañón debe considerarse como un impulso externo al sistema, ya que el soporte no permite que el cañón se mueva. En este caso *no* se conserva la cantidad de movimiento.

\*En el diagrama de cuerpo libre se muestran únicamente las fuerzas horizontales.

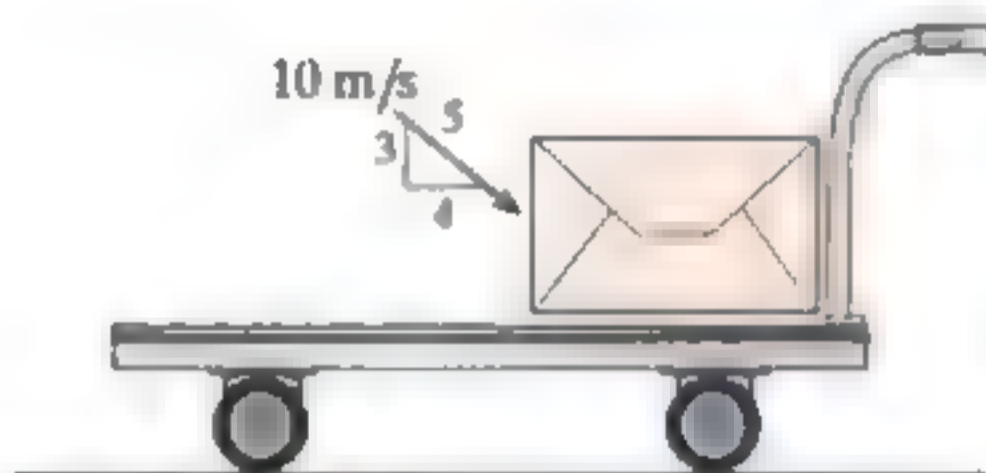
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F15-7.** Los carros de carga *A* y *B* tienen una masa de 20 Mg y 15 Mg, respectivamente. Determine la velocidad de *A* después de la colisión, si los carros chocan y rebotan, de tal suerte que *B* se desplaza hacia la derecha con una rapidez de 2 m/s. Si *A* y *B* están en contacto durante 0.5 s, determine la fuerza impulsora promedio que actúa entre ellos.



Prob. F15-7

**F15-8.** La carretilla y el paquete tienen una masa de 20 kg y 5 kg, respectivamente. Si la superficie de la carretilla es lisa e inicialmente está en reposo, mientras que la velocidad del paquete es la que se muestra, determine la velocidad final común de la carretilla y el paquete después del impacto.



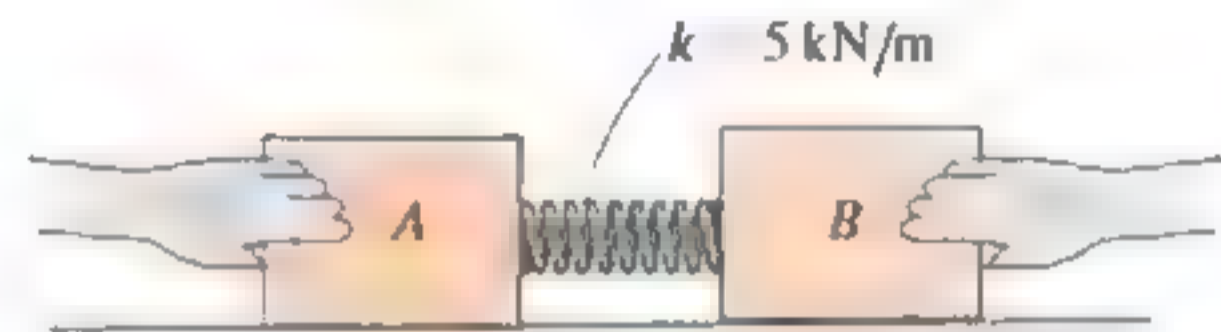
Prob. F15-8

**F15-9.** La rapidez inicial del bloque *A* de 5 kg es de 5 m/s cuando se desliza hacia abajo de la rampa lisa y choca contra el bloque estacionario *B* de 8 kg de masa. Si los dos bloques se acoplan después de la colisión, determine su velocidad común inmediatamente después de la colisión.



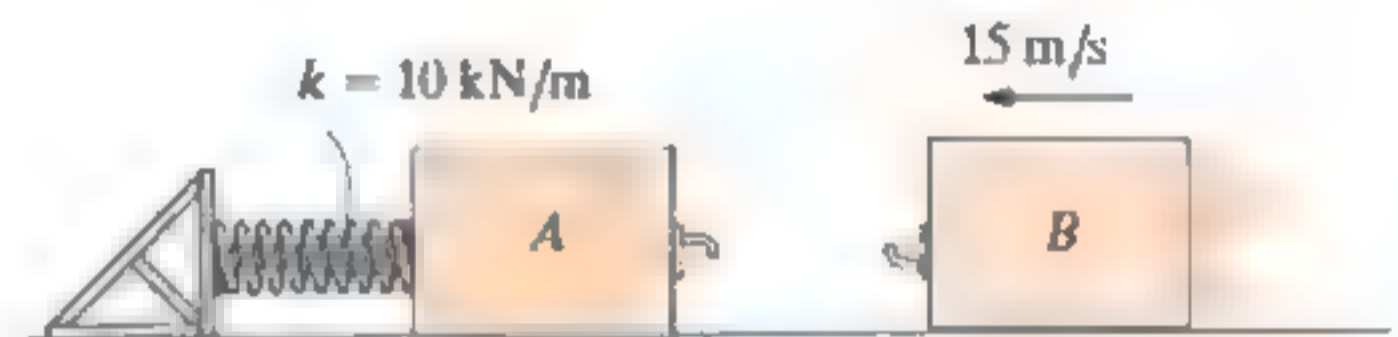
Prob. F15-9

**F15-10.** El resorte está fijo al bloque *A* y el bloque *B* se comprime contra el resorte. Si éste se comprime  $s = 200$  mm y luego se sueltan los bloques, determine su velocidad en el instante en que el bloque *B* pierde el contacto con el resorte. Las masas de los bloques *A* y *B* son de 10 kg y 15 kg, respectivamente.



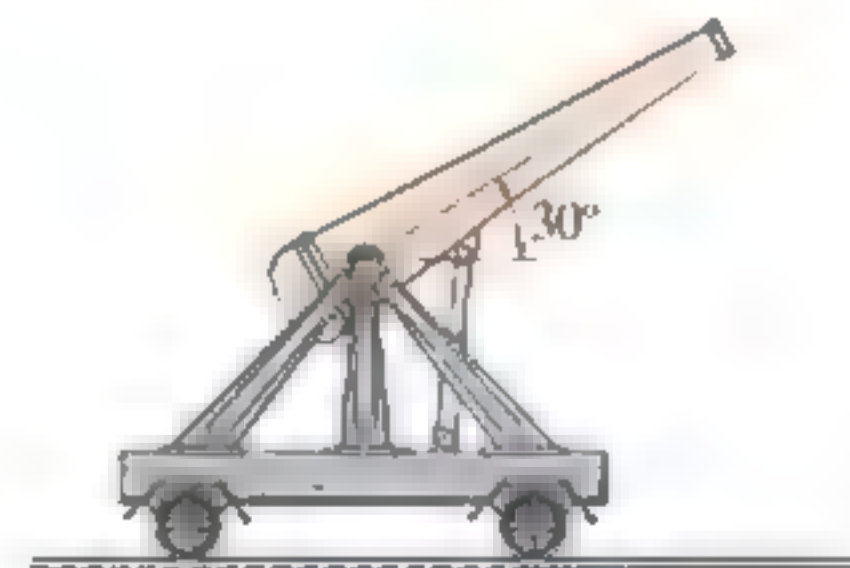
Prob. F15-10

**F15-11.** La masa de los bloques *A* y *B* es de 15 kg y 10 kg, respectivamente. Si *A* está estacionario y *B* tiene una velocidad de 15 m/s justo antes de la colisión, y los bloques se acoplan entre sí después del impacto, determine la compresión máxima del resorte.



Prob. F15-11

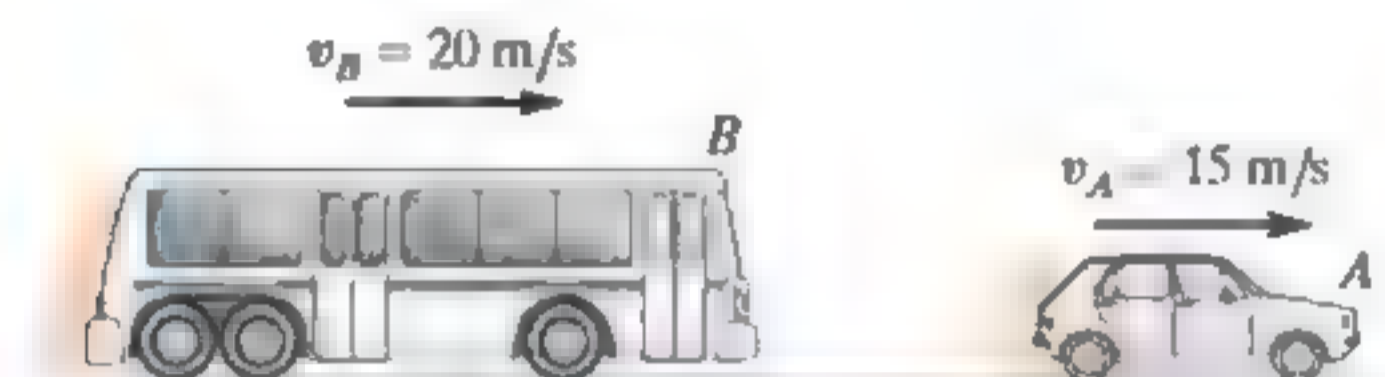
**F15-12.** El cañón y su pedestal sin un proyectil tienen una masa de 250 kg. Si se dispara un proyectil de 20 kg con el cañón a una velocidad de 400 m/s, medida *con respecto* al cañón, determine la rapidez del proyectil cuando sale del cañón. Desprecie la resistencia al rodamiento.



Prob. F15-12

# PROBLEMAS

**15-35.** El autobús  $B$  de 5 Mg se desplaza hacia la derecha a 20 m/s. Mientras tanto, un automóvil  $A$  de 2 Mg viaja a 15 m/s hacia la derecha. Si los vehículos chocan y se embrollan, determine su velocidad en común justo después de la colisión. Suponga que los vehículos ruedan libremente durante la colisión.



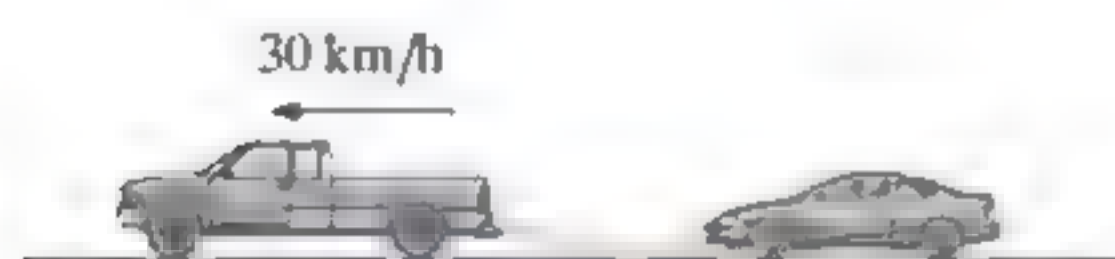
Prob. 15-35

**\*15-36.** El niño de 50 kg salta sobre la patineta de 5 kg con una velocidad horizontal de 5 m/s. Determine la distancia  $s$  que alcanza el niño sobre el plano inclinado, antes de llegar al reposo momentáneamente. Desprecie la resistencia al rodamiento de la patineta.



Prob. 15-36

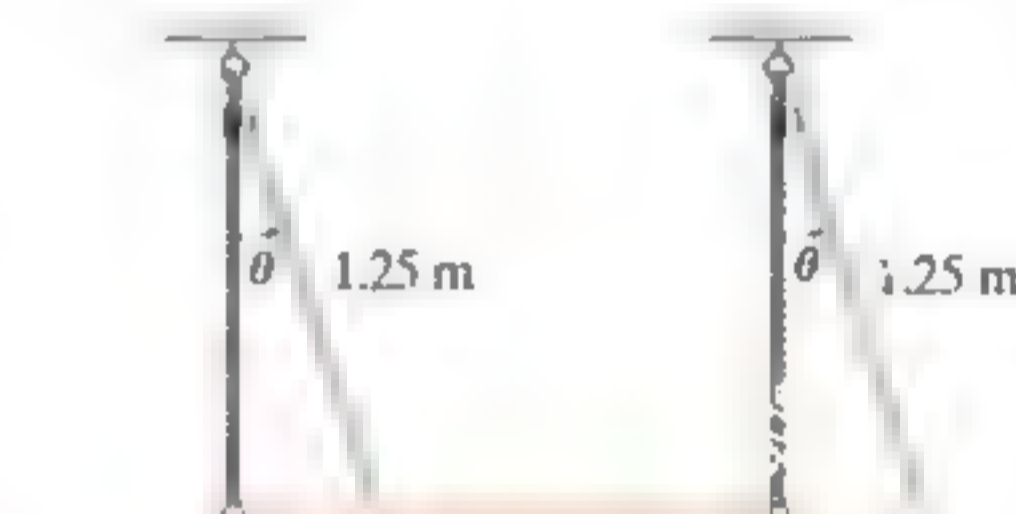
**15-37.** La camioneta de 2.5 Mg remolca el automóvil de 1.5 Mg mediante un cable, como se muestra en la figura. Si el auto está inicialmente en reposo y la camioneta se desplaza con una velocidad de 30 km/h cuando el cable está flojo, determine la velocidad común de la camioneta y el automóvil justo después de que el cable se tensa. Además, encuentre la pérdida de energía.



Prob. 15-37

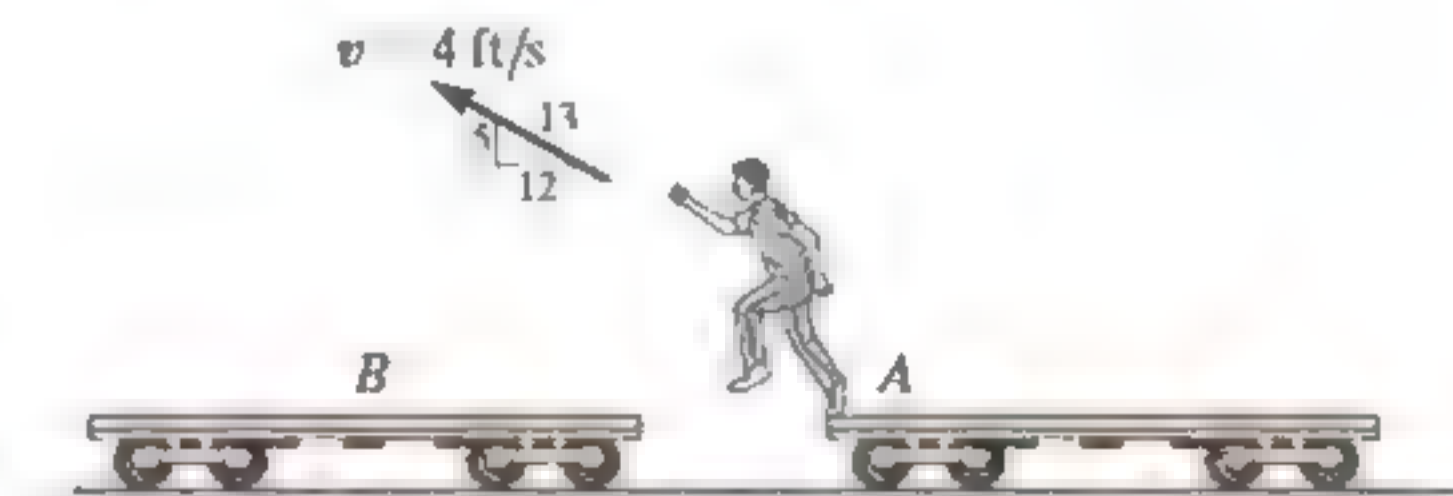
**15-38.** Un vagón de ferrocarril que tiene una masa de 15 Mg se desplaza a 1.5 m/s sobre una pista horizontal. Al mismo tiempo, otro vagón que tiene una masa de 12 Mg se desplaza a 0.75 m/s en la dirección contraria. Si los vagones se encuentran y se acoplan, determine la rapidez de los dos vagones justo después del acoplamiento. Encuentre la diferencia entre la energía cinética total antes y después de producirse el acoplamiento, y explique cualitativamente lo que sucedió con esta energía.

**15-39.** Un péndulo balístico consiste en un bloque de madera de 4 kg inicialmente en reposo,  $\theta = 0^\circ$ . Cuando una bala de 2 g lo impacta y se incrusta en él, se observa que el bloque oscila hacia arriba hasta un ángulo máximo de  $\theta = 6^\circ$ . Estime la rapidez inicial de la bala.



Prob. 15-39

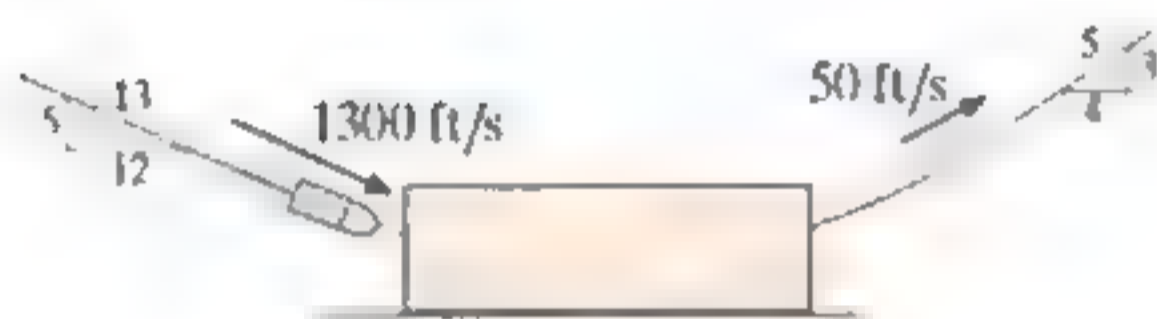
**\*15-40.** El muchacho salta del vagón descubierto en  $A$  con una velocidad de  $v = 4$  ft/s relativa al vagón, como se indica en la figura. Si aterriza en el segundo vagón  $B$ , determine la velocidad final de ambos vagones después del movimiento. Cada vagón tiene un peso de 80 lb. El peso del muchacho es 60 lb. Ambos vagones están inicialmente en reposo. Desprecie la masa de las ruedas del vagón.



Prob. 15-40

**15-41.** Una bala de 0.03 lb que viaja a 1300 ft/s impacta el bloque de madera de 10 lb y sale del otro lado, a 50 ft/s, como se ilustra en la figura. Determine la rapidez del bloque justo después de que la bala sale de él y, también, determine hasta qué punto el bloque se desliza antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es  $\mu_k = 0.5$ .

**15-42.** Una bala de 0.03 lb que viaja a 1300 ft/s impacta el bloque de madera de 10 lb y sale del otro lado, a 50 ft/s, como se muestra en la figura. Determine la velocidad del bloque justo después de que la bala sale de él. Además, determine la fuerza normal promedio sobre el bloque, si la bala pasa a través de él en 1 ms, y el tiempo que se desliza el bloque antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es  $\mu_k = 0.5$ .



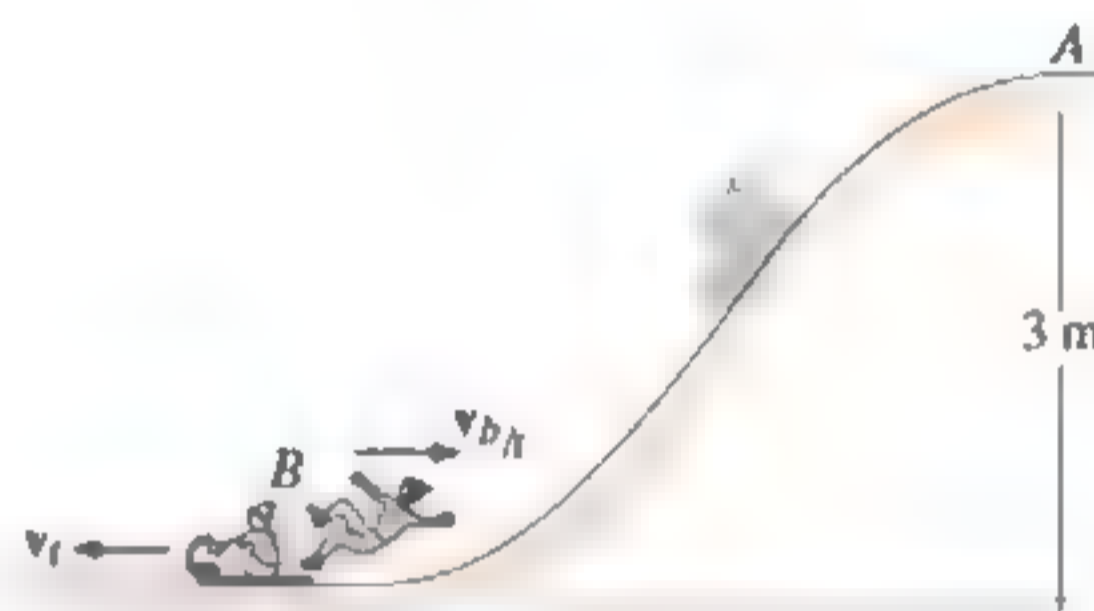
Probs. 15-41-42

**15-43.** La bala de 20 g viaja a 400 m/s cuando se incrusta en el bloque estacionario de 2 kg. Determine la distancia que se desliza el bloque antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es  $\mu_k = 0.2$ .



Prob. 15-43

**\*15-44.** Un trineo, que tiene una masa de 10 kg, parte desde el reposo en *A* y carga a una niña y un niño que tienen masas de 40 kg y 45 kg, respectivamente. Cuando el trineo llega a la parte inferior de la pendiente en *B*, el niño es empujado hacia atrás con una velocidad horizontal de  $v_{b/r} = 2$  m/s, medida en relación con el trineo. Determine la velocidad del trineo después de esto. Para realizar el cálculo, desprecie la fricción.



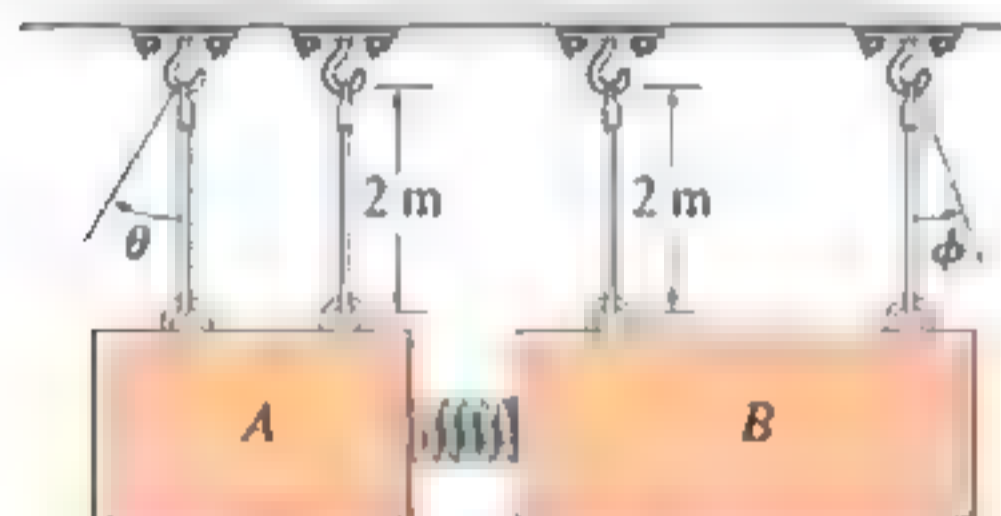
Prob. 15-44

**15-45.** El bloque de masa  $m$  se desplaza a  $v_1$  en la dirección  $\theta_1$  mostrada en la parte superior de la pendiente lisa. Determine su rapidez  $v_2$  y su dirección  $\theta_2$  cuando alcanza la parte inferior.



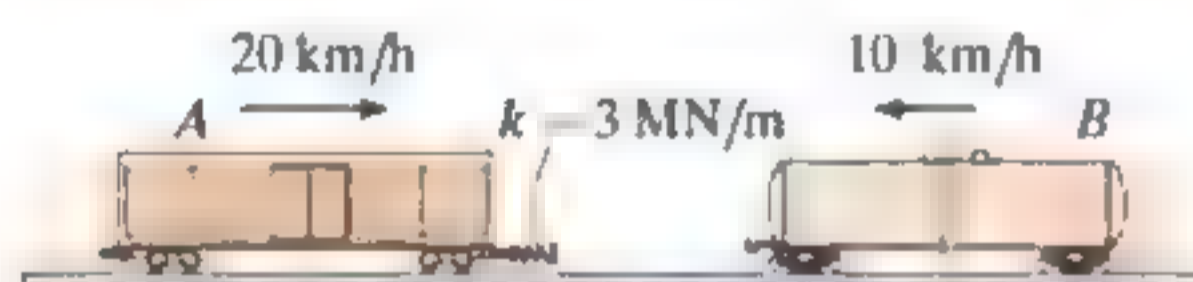
Prob. 15-45

**15-46.** La masa de cada uno de los bloques  $A$  y  $B$  es de  $5\text{ kg}$  y cuelgan de cuerdas paralelas. Un resorte de rigidez  $k = 60\text{ N/m}$  está sujeto a  $B$  y se comprime  $0.3\text{ m}$  contra  $A$  y  $B$  como se muestra. Determine los ángulos máximos  $\theta$  y  $\phi$  de las cuerdas, después de que los bloques se sueltan del punto de reposo y el resorte regresa a su longitud no alargada.



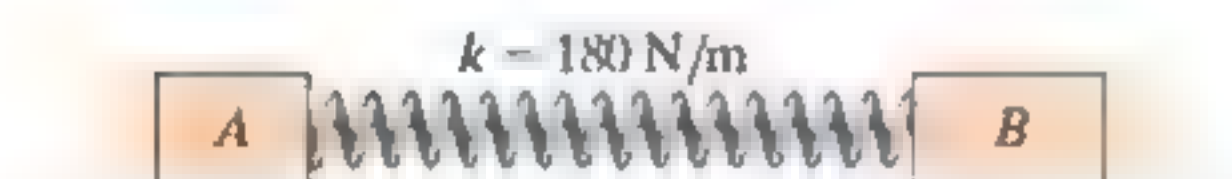
Prob. 15-46

**15-47.** El vagón de carga  $A$  de  $30\text{ Mg}$  y el vagón de carga  $B$  de  $15\text{ Mg}$  se mueven uno hacia el otro, con las velocidades mostradas. Determine la compresión máxima del resorte montado sobre el vagón  $A$ . No tome en cuenta la resistencia al rodamiento.



Prob. 15-47

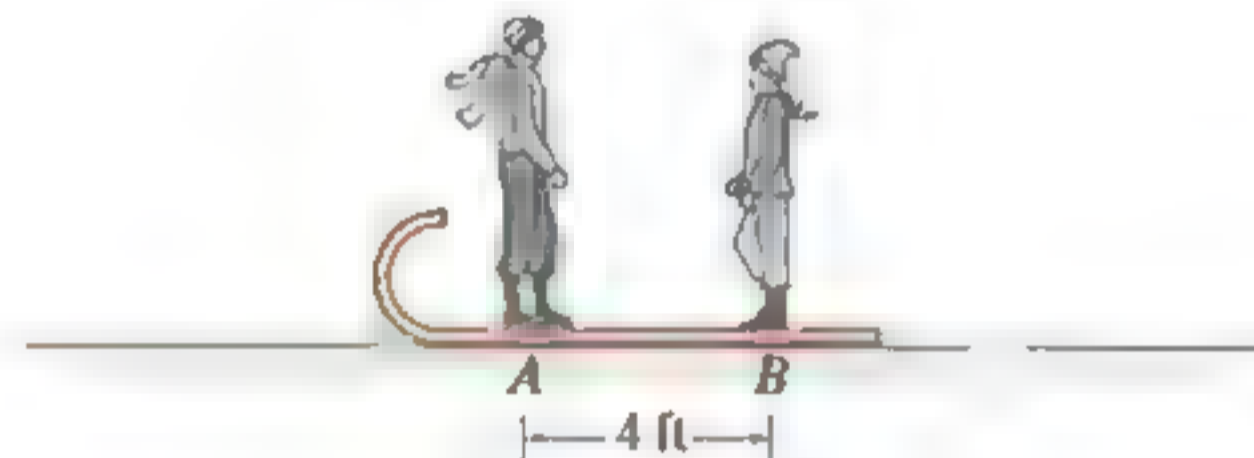
**15-48.** Los bloques  $A$  y  $B$  tienen masas de  $40\text{ kg}$  y  $60\text{ kg}$ , respectivamente. Se colocan sobre una superficie lisa y el resorte conectado entre ellos se estira  $2\text{ m}$ . Si se liberan desde el reposo, determine la rapidez de cada uno de los bloques en el instante en que el resorte está sin estirar.



Prob. 15-48

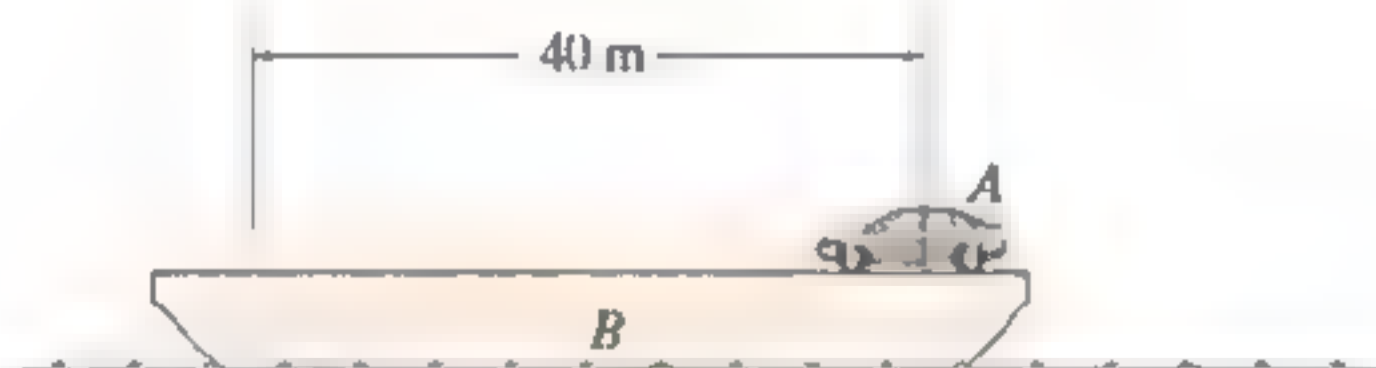
**15-49.** Un muchacho  $A$  que pesa  $80\text{ lb}$  y una chica  $B$  con un peso de  $65\text{ lb}$  se paran inmóviles en los extremos del trineo, cuyo peso es de  $20\text{ lb}$ . Si intercambian posiciones, es decir,  $A$  pasa a la posición original de  $B$  y viceversa, determine la posición final del trineo justo después del movimiento. Desprecie la fricción entre el trineo y la nieve.

**15-50.** Un muchacho  $A$  que pesa  $80\text{ lb}$  y una chica  $B$  con un peso de  $65\text{ lb}$  se paran inmóviles en los extremos del trineo, que tiene un peso de  $20\text{ lb}$ . Si  $A$  camina hacia  $B$  y se detiene, y ambos caminan juntos de nuevo a la posición original de  $A$ , determine la posición final del trineo justo después de que se detiene el movimiento. Desprecie la fricción entre el trineo y la nieve.



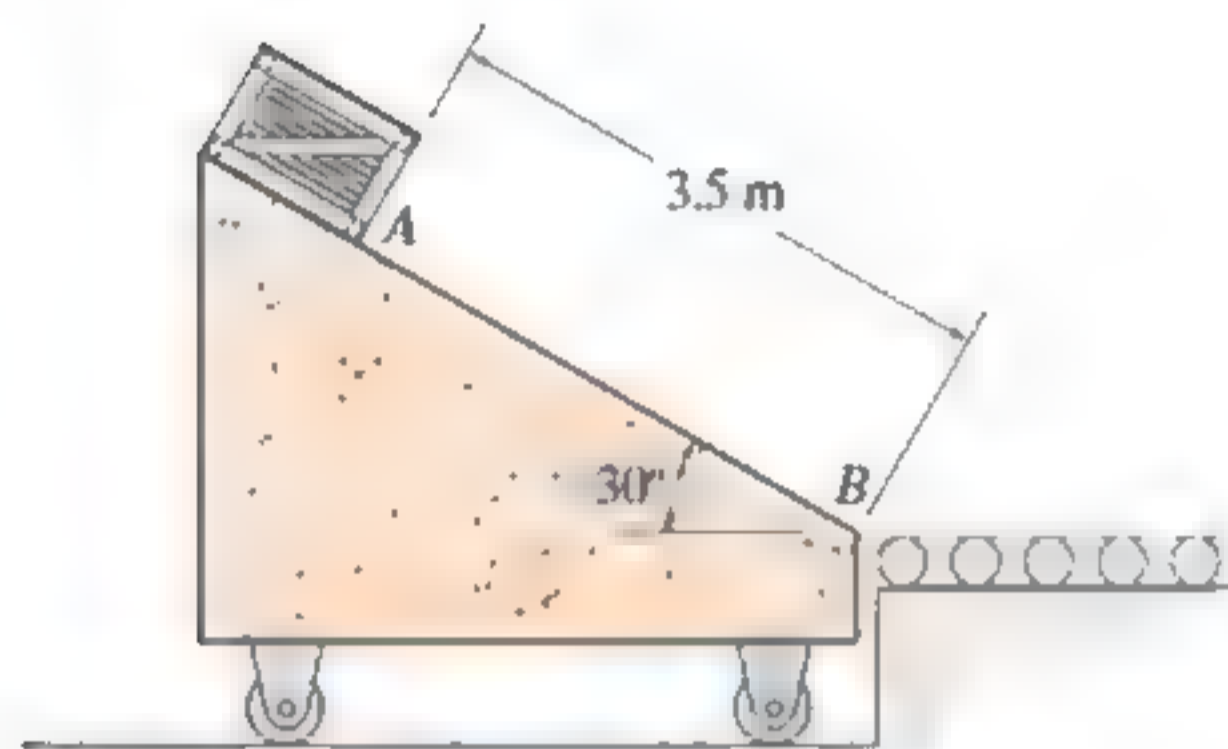
Probs. 15-49/50

**15-51.** La barcaza  $B$  de  $10\text{ Mg}$  soporta un automóvil  $A$  de  $2\text{ Mg}$ . Si alguien conduce el automóvil hasta el otro lado de la barcaza, determine cuánto se mueve la barcaza. Desprecie la resistencia del agua.



Prob. 15-51

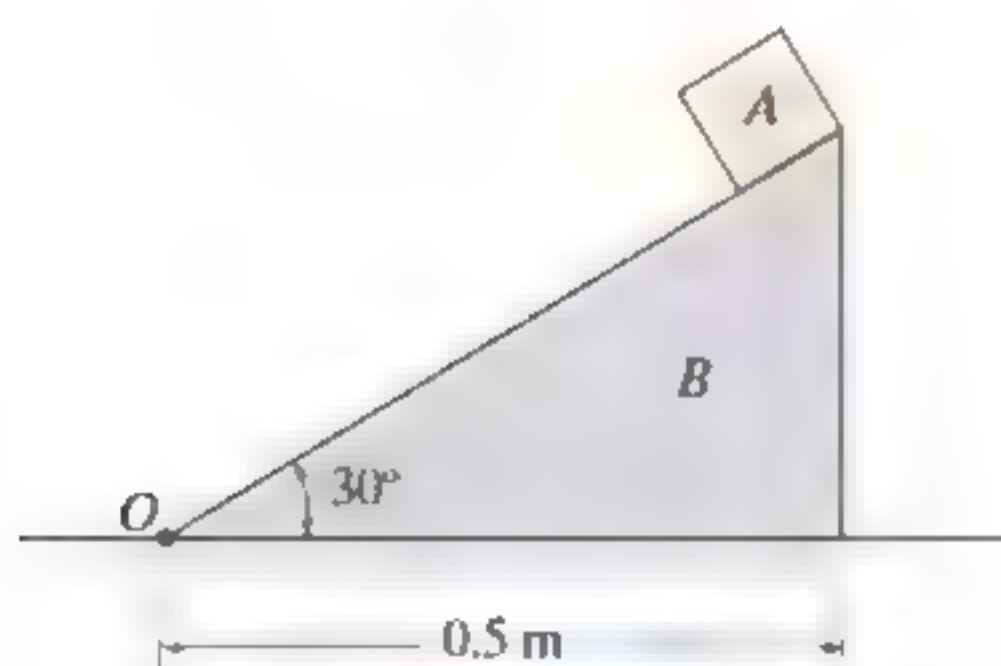
**\*15-52.** La rampa de rodamiento libre tiene una masa de 40 kg. Una caja de 10 kg se libera desde el reposo en  $A$  y se desliza hacia abajo 3.5 m hasta el punto  $B$ . Si la superficie de la rampa es lisa, determine su rapidez cuando la caja llega a  $B$ . Además, ¿cuál es la velocidad de la caja?



Prob. 15-52

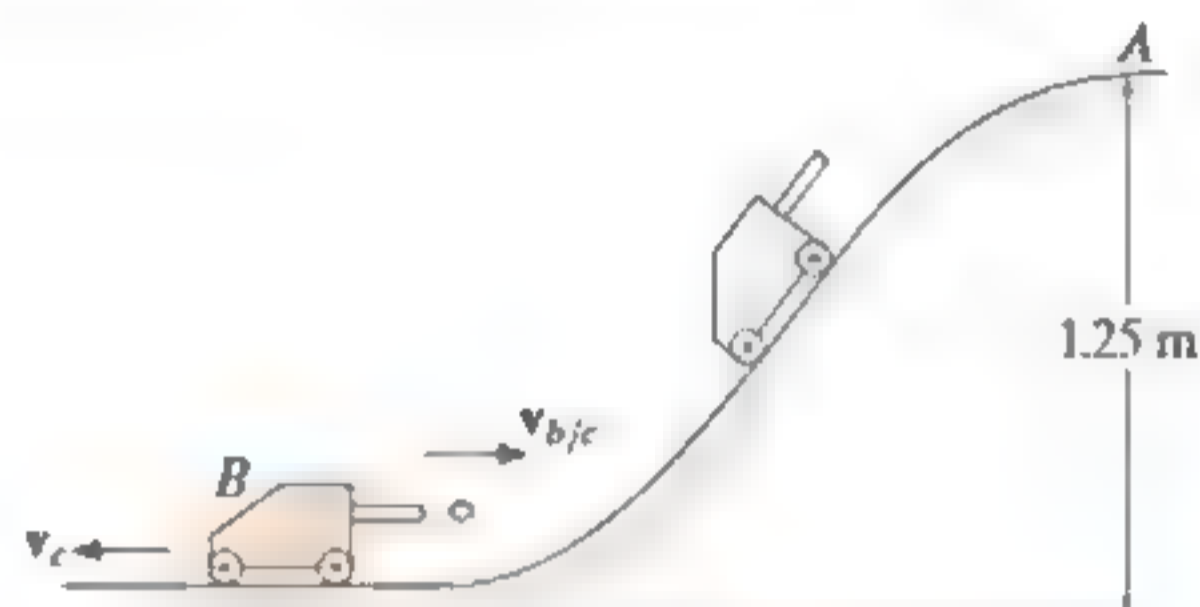
**15-53.** El bloque  $A$  tiene una masa de 5 kg y se coloca sobre el bloque  $B$  triangular liso que tiene una masa de 30 kg. Si el sistema se libera desde el reposo, determine la distancia  $B$  que se mueve desde el punto  $O$  cuando  $A$  llega a la parte inferior. Desprecie el tamaño del bloque  $A$ .

**15-54.** Resuelva el problema 15-53 si el coeficiente de fricción cinética entre  $A$  y  $B$  es  $\mu_k = 0.3$ . No tome en cuenta la fricción entre el bloque  $B$  y el plano horizontal.



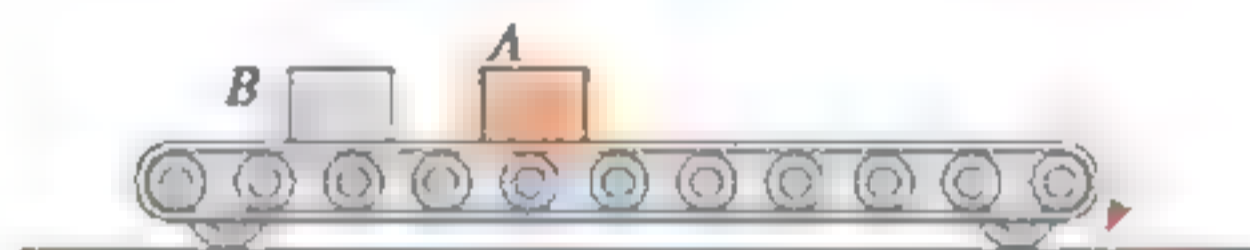
Probs. 15-53, 54

**15-55.** El carro tiene una masa de 3 kg y rueda libremente hacia abajo desde  $A$  sobre la pendiente. Cuando llega a la parte inferior, una pistola de resorte dispara una bola de 0.5 kg por la parte trasera con una velocidad horizontal de  $v_{b/c} = 0.6$  m/s, medida en relación con el carro. Determine la velocidad final del carro.



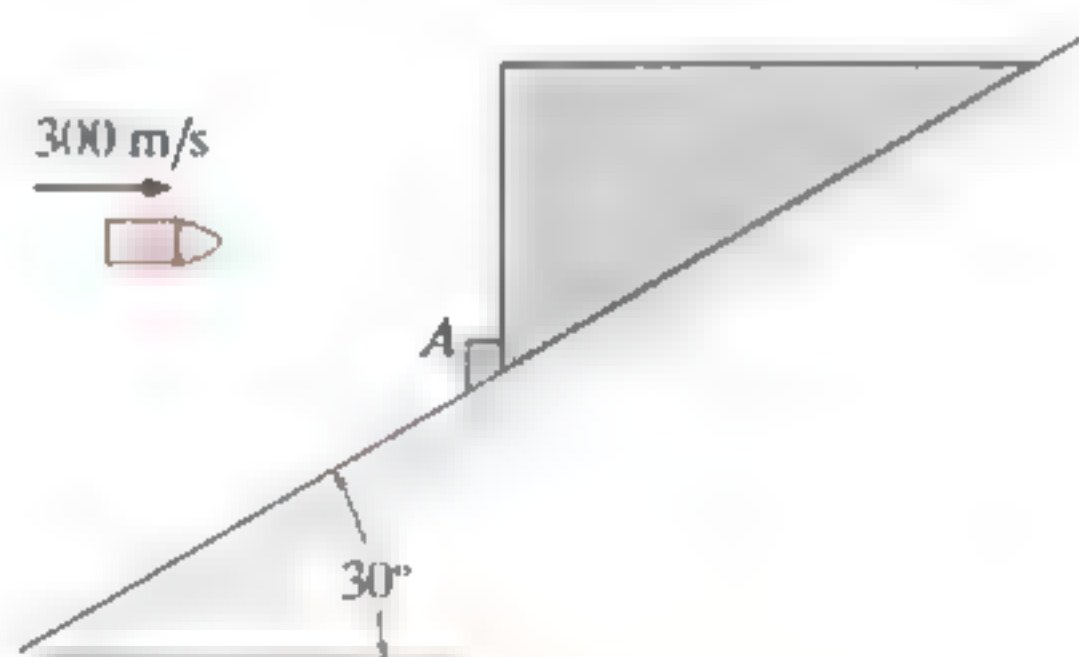
Prob. 15-55

**\*15-56.** Dos cajas  $A$  y  $B$ , cada una con un peso de 160 lb, se apoyan sobre la banda transportadora de 500 lb, que puede rodar libremente sobre el piso. Si la banda parte desde el reposo y comienza a moverse con una rapidez de 3 ft/s, determine la rapidez final de la banda transportadora, si (a) las cajas no se apilan, por lo que  $A$  cae y después lo hace  $B$ , y (b)  $A$  se apila sobre  $B$  y ambas cajas caen juntas.



Prob. 15-56

**15-57.** El bloque de 10 kg se mantiene en reposo sobre el plano inclinado liso debido al bloque de tope en  $A$ . Si la bala de 10 g viaja a 300 m/s cuando se incrusta en el bloque de 10 kg, determine la distancia que se desliza el bloque a lo largo del plano antes de detenerse momentáneamente.



Prob. 15-57

## 15.4 Impacto

El *impacto* ocurre cuando dos cuerpos chocan entre sí durante un periodo muy corto, lo cual hace que se ejerzan fuerzas (impulsoras) relativamente grandes entre los cuerpos. El golpe de un martillo sobre un clavo, o un palo de golf sobre una pelota, son ejemplos comunes de cargas de impacto.

Por lo general, hay dos tipos de impacto. El *impacto central* ocurre cuando la dirección del movimiento de los centros de masa de las dos partículas va a lo largo de una línea, que pasa a través de los centros de masa de las partículas. Esta línea se llama *línea de impacto*, que es perpendicular al plano de contacto (fig. 15-13a). Cuando el movimiento de una o de las dos partículas forma un ángulo con la línea de impacto (fig. 15-13b), se dice que el impacto es un *impacto oblicuo*.

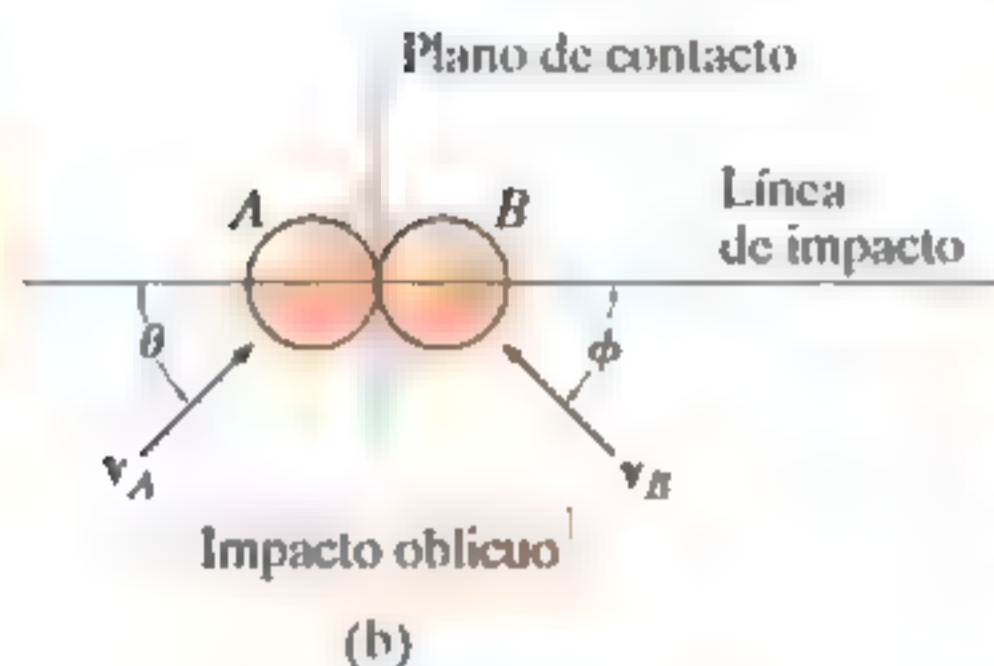
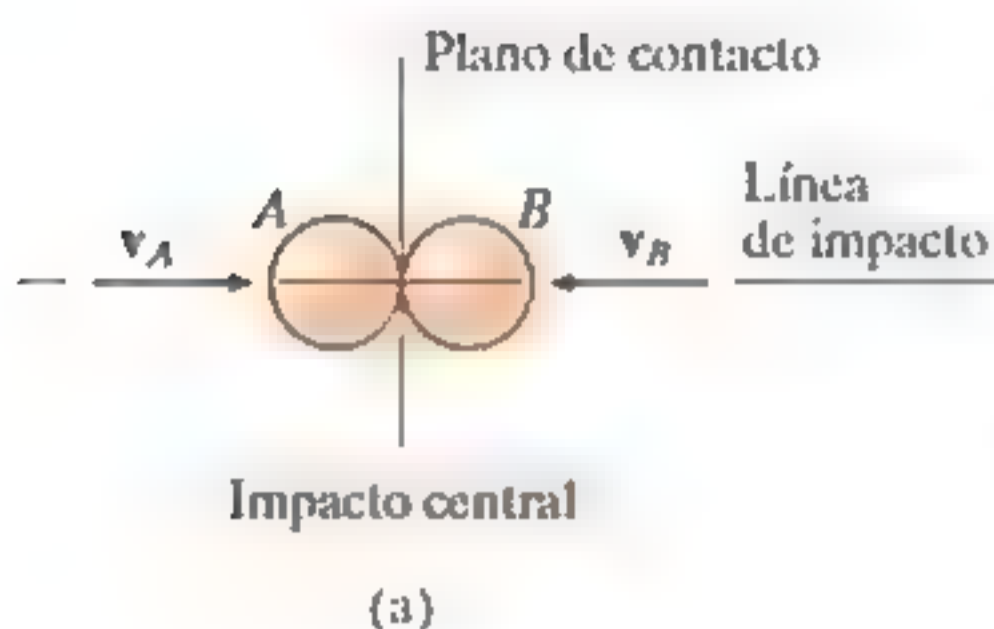


Fig. 15-13

Para ilustrar el método de analizar la mecánica del impacto, considere el caso que implica el impacto central de las partículas A y B que se muestran en figura 15-14.

- Las partículas tienen los momentos iniciales que se muestran en la figura 15-14a. Siempre que  $(v_A)_1 > (v_B)_1$ , finalmente ocurrirá la colisión.
- Durante la colisión las partículas deben considerarse como *deformables* o no rígidas. Las partículas experimentarán un *periodo de deformación*, de modo que ejercen un impulso de deformación igual y opuesto  $\int P dt$  entre sí (fig. 15-14b).
- Sólo en el instante de *deformación máxima* ambas partículas se desplazarán con una velocidad constante  $v$ , puesto que su movimiento relativo es cero (fig. 15-14c).
- Después de un *periodo de restitución*, las partículas recuperarán su forma original o permanecerán deformadas permanentemente. El *impulso de restitución*  $\int R dt$  igual pero opuesto separa las partículas (fig. 15-14d). En realidad, las propiedades físicas de cualquiera de los dos cuerpos son tales que el impulso de deformación *siempre será mayor* que el de restitución, es decir,  $\int P dt > \int R dt$ .
- Justo después de la separación, las partículas tendrán las cantidades de movimiento mostradas en la figura 15-14e, donde  $(v_B)_2 > (v_A)_2$ .

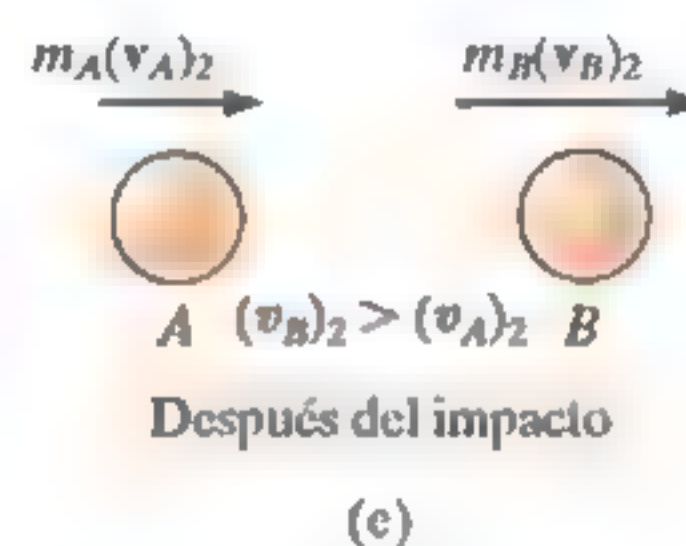
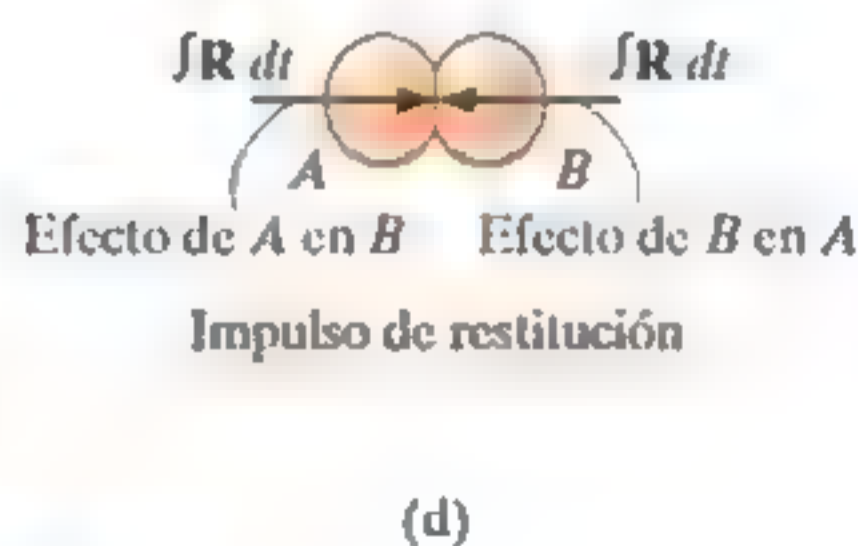
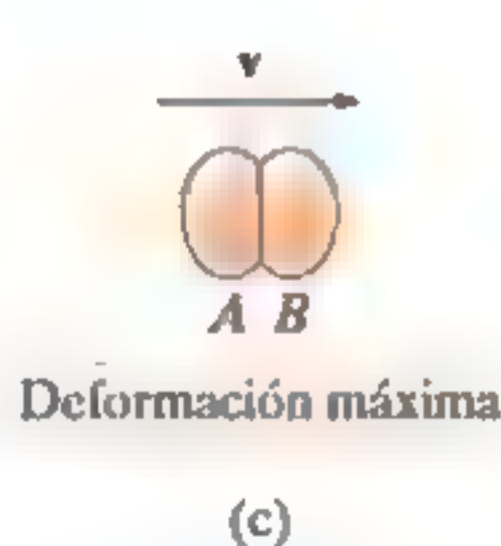
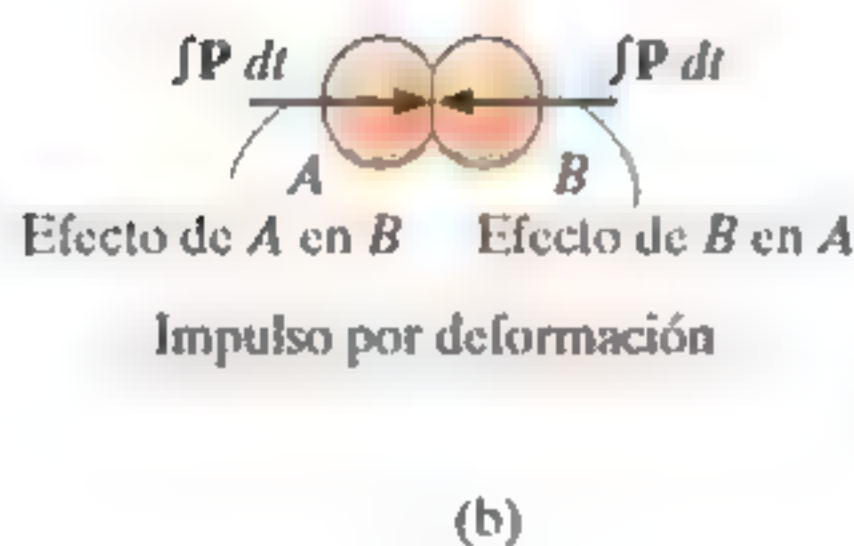
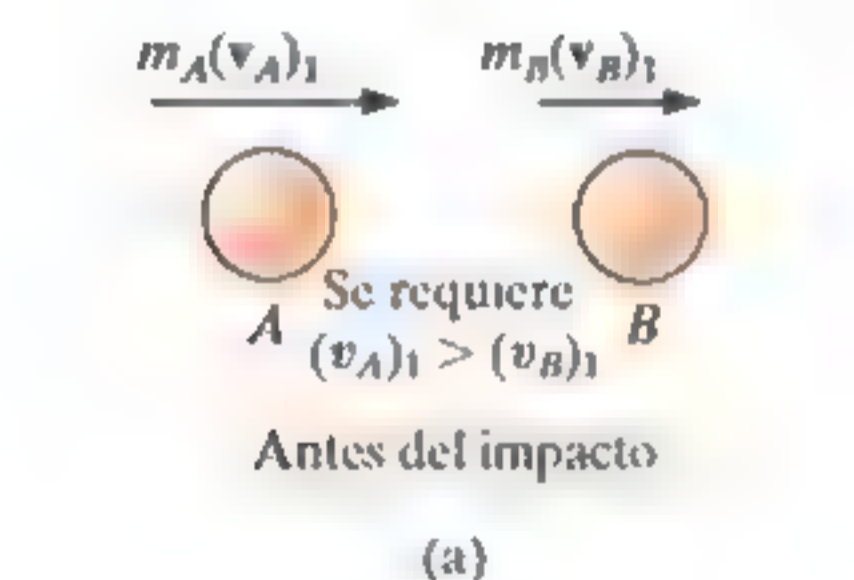


Fig. 15-14

En la mayoría de los problemas se *conocerán* las velocidades iniciales de las partículas, y será necesario determinar sus velocidades finales  $(v_A)_2$  y  $(v_B)_2$ . Al respecto, la *cantidad de movimiento* del *sistema de partículas* se *conserva*, pues durante la colisión se *cancelan* los impulsos internos de deformación y restitución. Por consiguiente, al remitirnos a la figura 15-14a y 15-14e requerimos

$$(\pm) \quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \quad (15-10)$$

Para obtener una segunda ecuación necesaria para resolver  $(v_A)_2$  y  $(v_B)_2$ , debemos aplicar a *cada partícula* el principio de impulso y cantidad de movimiento. Por ejemplo, durante la fase de deformación de la partícula A, figuras 15-14a, 15-14b y 15-14c, tenemos

$$(\pm) \quad m_A(v_A)_1 - \int P dt = m_A v$$

Para la fase de restitución, figuras 15-14c, 15-14d y 15-14e,

$$(\pm) \quad m_A v - \int R dt = m_A(v_A)_2$$

La razón entre el impulso de restitución y el impulso de deformación se llama *coeficiente de restitución*,  $e$ . De acuerdo con las ecuaciones anteriores, este valor para la partícula A es

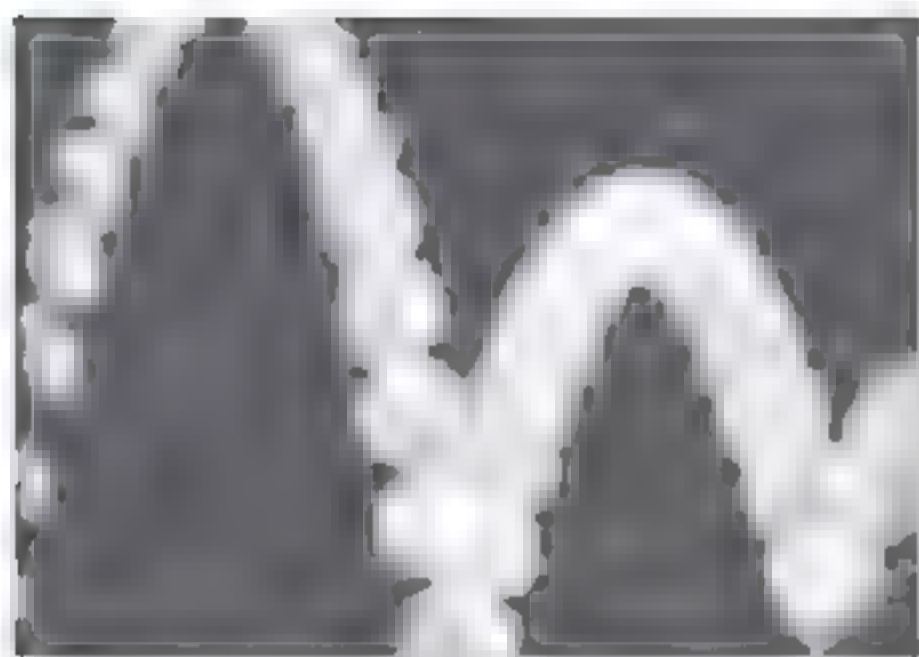
$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

Asimismo, podemos establecer  $e$  si consideramos la partícula B (fig. 15-14). Esto resulta en

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

Si se elimina la incógnita  $v$  de las dos ecuaciones anteriores, el coeficiente de restitución puede expresarse en función de las velocidades inicial y final de las partículas, como

$$(\pm) \quad \left| e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \right. \quad (15-11)$$



La calidad de fabricación de una pelota de tenis se mide por la altura de su rebote, la cual puede relacionarse con su coeficiente de restitución. Por medio de la mecánica del impacto oblicuo, los ingenieros pueden diseñar un dispositivo de separación para eliminar las pelotas de tenis que están por debajo del estándar de una línea de producción. (© Gary S. Settles/Science Source)

Siempre que se especifica un valor para  $e$ , las ecuaciones 15-10 y 15-11 pueden resolverse simultáneamente para obtener  $(v_A)_2$  y  $(v_B)_2$ . Sin embargo, para ello es importante establecer con cuidado una convención de signos para definir la dirección positiva tanto de  $v_A$  como de  $v_B$  y, luego, utilizarla *de manera consistente* cuando se escriban *ambas* ecuaciones. Como se vio en la aplicación mostrada,  $e$  indicada simbólicamente mediante la flecha entre paréntesis, definimos la dirección positiva hacia la derecha cuando se refiere a los movimientos tanto de  $A$  como de  $B$ . Por consiguiente, si en la solución de  $(v_A)_2$  o  $(v_B)_2$  resulta un valor negativo, ello indica que el movimiento es hacia la izquierda.

**Coeficiente de restitución.** Según las figuras 15-14a y 15-14e, se observa que la ecuación 15-11 establece que  $e$  es igual a la relación de la velocidad relativa de la separación de las partículas *justo después del impacto*,  $(v_B)_2 - (v_A)_2$  a la velocidad relativa de aproximación de las partículas *justo antes del impacto*,  $(v_A)_1 - (v_B)_1$ . Al medir tales velocidades relativas de manera experimental, se ha visto que  $e$  varía considerablemente con la velocidad de impacto, así como con el tamaño y la forma de los cuerpos que chocan. Por lo tanto, el coeficiente de restitución es confiable sólo cuando se utiliza con datos que representen con fidelidad las condiciones que se sabía existían cuando se tomaron las mediciones. Por lo general,  $e$  tiene un valor entre cero y uno, y debemos estar al tanto del significado físico de estos dos límites.

**Impacto elástico perfecto ( $e = 1$ ).** Si la colisión entre las dos partículas es *perfectamente elástica*, el impulso de deformación ( $\int \mathbf{P} dt$ ) es igual y opuesto al impulso de restitución ( $\int \mathbf{R} dt$ ). Aun cuando en realidad esto nunca puede ser,  $e = 1$  en el caso de una colisión elástica.

**Impacto plástico perfecto ( $e = 0$ ).** Se dice que el impacto es inelástico o *plástico* cuando  $e = 0$ . En este caso, no hay impulso de restitución ( $\int \mathbf{R} dt = 0$ ), por lo que, después de la colisión, ambas partículas se acoplan o *permanecen en contacto* y se mueven con una velocidad común.

Por la derivación anterior, es evidente que no puede utilizarse el principio de trabajo y energía en el análisis de problemas de impacto, ya que no es posible saber cómo varían o se desplazan las *fuerzas internas* de deformación y restitución durante la colisión. Sin embargo, al conocer las velocidades de las partículas antes y después de la colisión, la pérdida de energía durante la colisión se calcula como la diferencia de la energía cinética de las partículas. Esta pérdida de energía,  $\sum U_{1-2} = \sum T_2 - \sum T_1$ , ocurre porque una parte de la energía cinética de la partícula se transforma en energía térmica, y porque también genera ruido y una deformación localizada del material cuando ocurre la colisión. En particular, si el impacto es *perfectamente elástico*, no se pierde energía en la colisión; mientras que si es *plástico*, la pérdida de energía durante la colisión es máxima.



La mecánica del pool depende de la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento y del coeficiente de restitución (© R. C. Hibbeler)

### Procedimiento para el análisis (impacto central)

En la mayoría de los casos, se tienen que determinar las *velocidades finales* de las dos partículas, *justo después* de que se someten a un impacto central directo. Siempre que se conozcan el coeficiente de restitución, la masa y la velocidad inicial de cada partícula, *justo antes* de que se conozca el impacto, la solución de este problema se obtiene mediante las siguientes dos ecuaciones.

- La conservación de la cantidad de movimiento es aplicable al sistema de partículas,  $\sum mv_1 = \sum mv_2$ .
- El coeficiente de restitución,  $e = |(v_B)_2 - (v_A)_2| / |(v_A)_1 - (v_B)_1|$ , relaciona las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto, justo antes y después de la colisión.

Cuando se aplican estas dos ecuaciones, puede suponerse el sentido de una velocidad desconocida. Si la solución da una magnitud negativa, la velocidad actúa en el sentido opuesto.

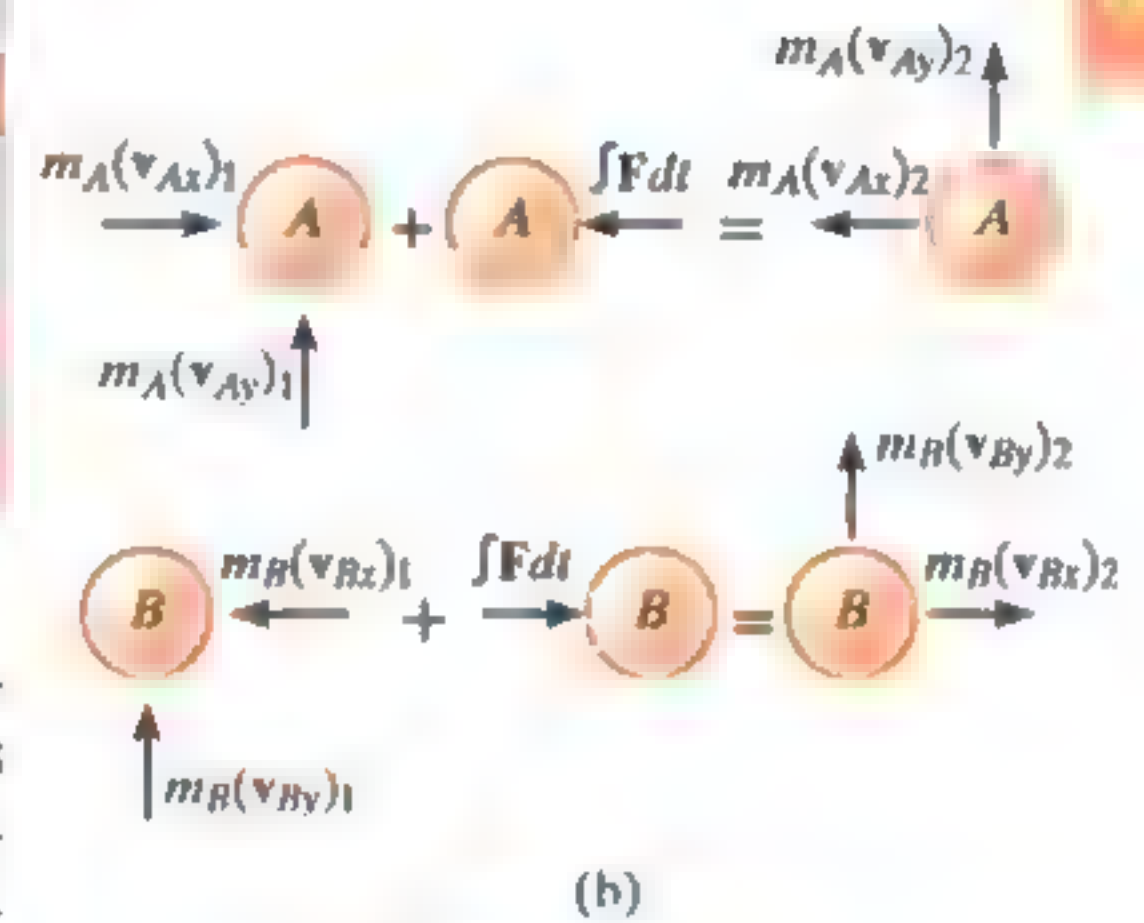
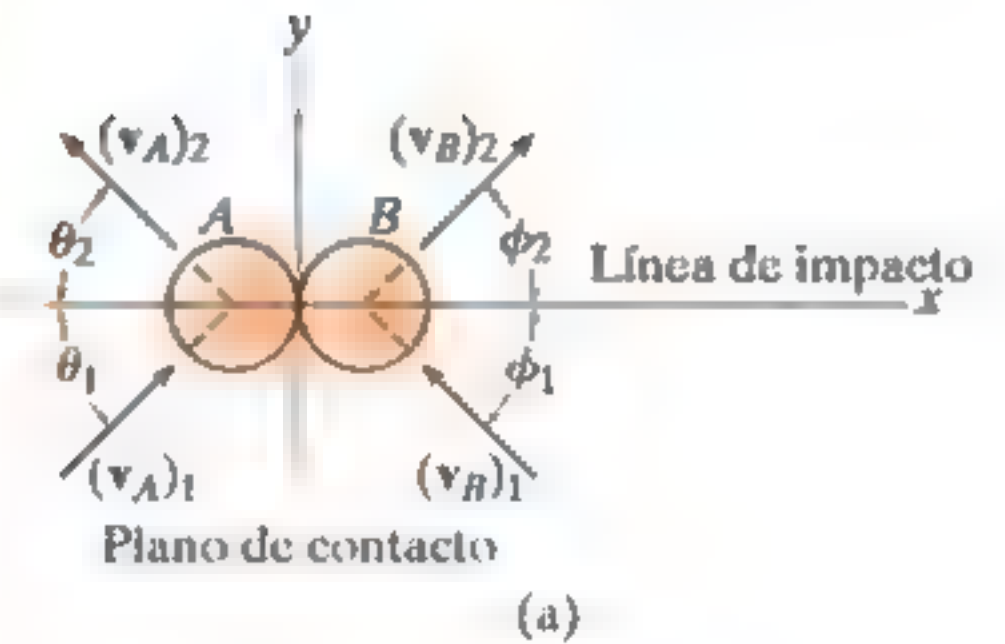


Fig. 15-15

Cuando entre dos partículas lisas ocurre un impacto oblicuo, éstas se apartan una de otra con velocidades de direcciones y magnitudes desconocidas. Siempre que se conozcan las velocidades iniciales, habrá cuatro incógnitas en el problema. Como se muestra en la figura 15-15a, estas incógnitas pueden representarse como  $(v_A)_2$ ,  $(v_B)_2$ ,  $\theta_2$  y  $\phi_2$ , o bien, como las componentes  $x$  y  $y$  de las velocidades finales.

### Procedimiento para el análisis (impacto oblicuo)

Si el eje  $y$  se establece dentro del plano de contacto y el eje  $x$  a lo largo de la línea de impacto, las fuerzas impulsoras de deformación y restitución actúan sólo en la *dirección  $x$*  (fig. 15-15b). Al descomponer la velocidad o los vectores de cantidad de movimiento en componentes a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  (fig. 15-15b), entonces es posible escribir cuatro ecuaciones escalares independientes para determinar  $(v_{Ax})_2$ ,  $(v_{Ay})_2$ ,  $(v_{Bx})_2$ , y  $(v_{By})_2$ .

- La cantidad de movimiento del sistema se conserva a lo largo de la línea de impacto, eje  $x$ , de modo que  $\sum m(v_x)_1 = \sum m(v_x)_2$ .
- El coeficiente de restitución,  $e = [(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2] / [(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1]$ , relaciona las componentes de las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto (eje  $x$ ).
- Si estas dos ecuaciones se resuelven simultáneamente, obtenemos  $(v_{Ax})_2$  y  $(v_{Bx})_2$ .
- La cantidad de movimiento de la partícula  $A$  se conserva a lo largo del eje  $y$ , perpendicular a la línea de impacto, ya que no actúa ningún impulso en la partícula  $A$  en esta dirección. Por consiguiente,  $m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2$  o bien  $(v_{Ay})_1 = (v_{Ay})_2$ .
- La cantidad de movimiento de la partícula  $B$  se conserva a lo largo del eje  $y$ , perpendicular a la línea de impacto, puesto que no actúa ningún impulso en la partícula  $B$  en esta dirección. Por consiguiente,  $(v_{By})_1 = (v_{By})_2$ .

La aplicación de estas cuatro ecuaciones se ilustra en el ejemplo 15.11.

## EJEMPLO 15.1

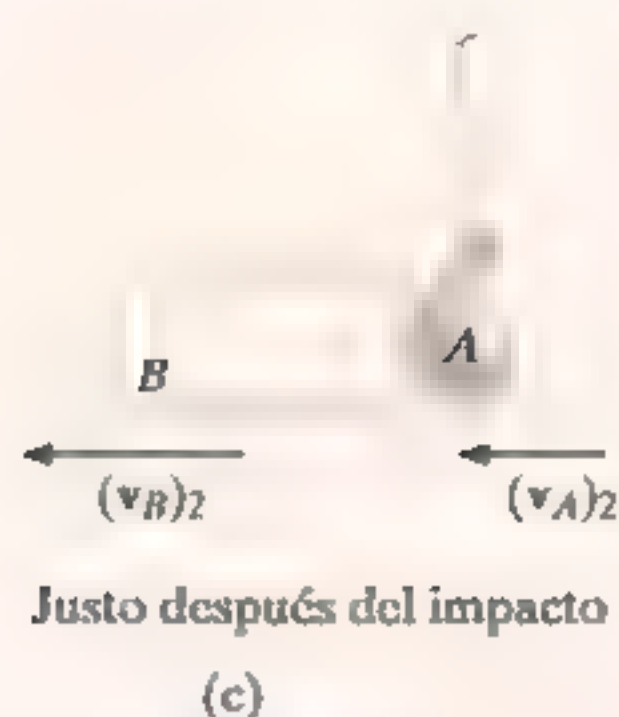
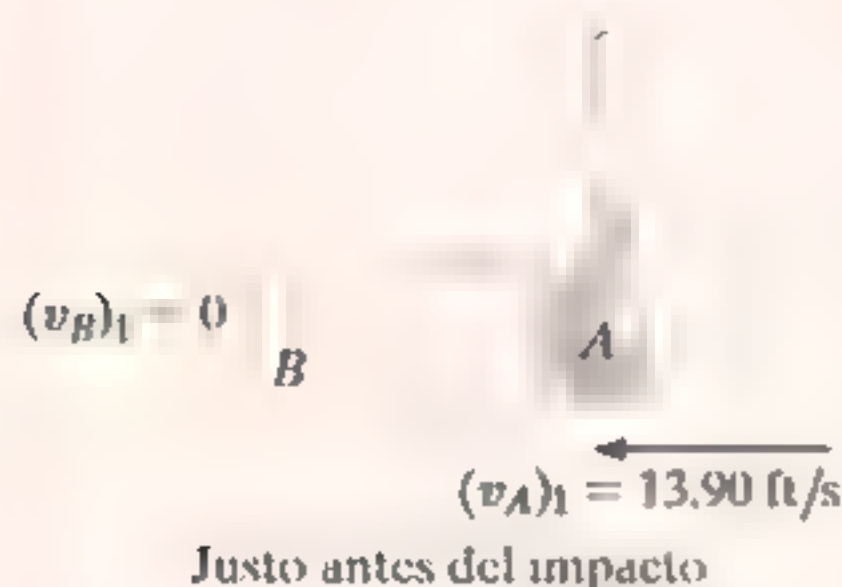
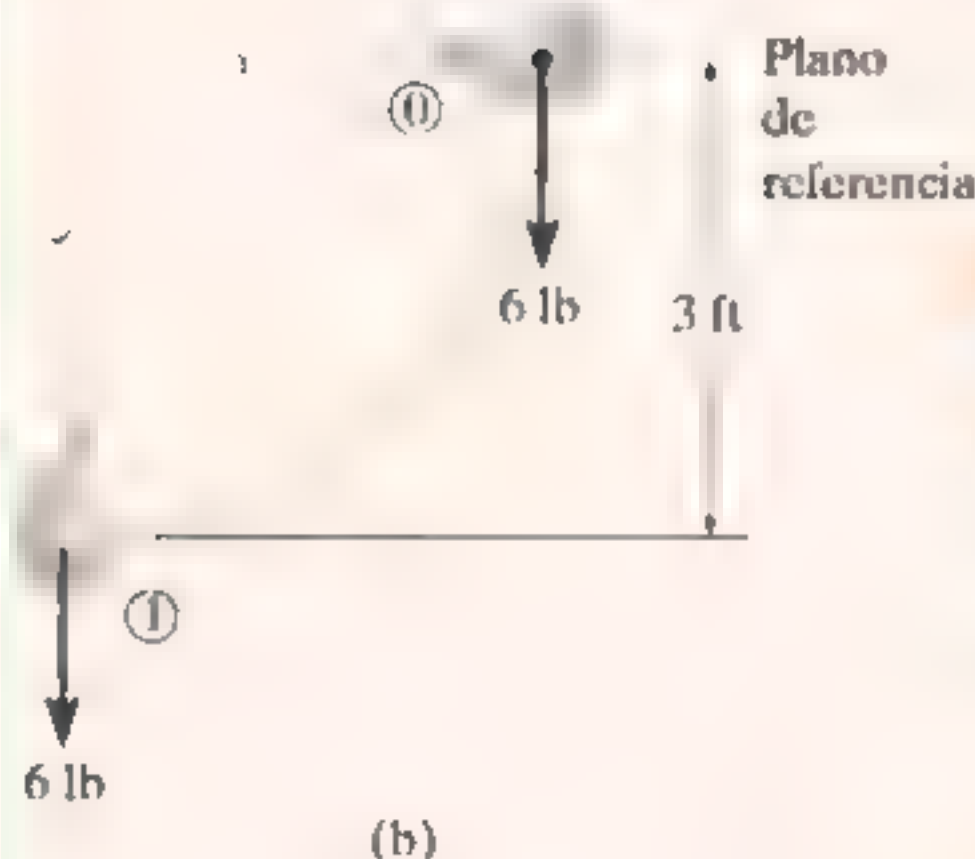
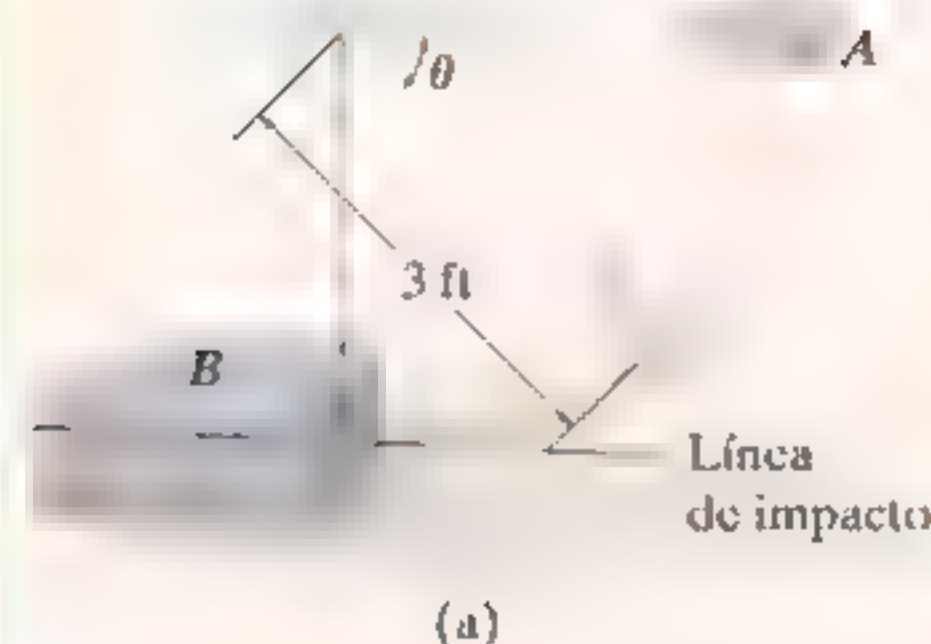


Fig. 15-16

La bolsa  $A$ , que pesa 6 lb, se suelta del punto de reposo en la posición  $\theta = 0^\circ$ , como se muestra en la figura 15-16a. Después de que cae a  $\theta = 90^\circ$ , choca contra la caja  $B$  que pesa 18 lb. Si el coeficiente de restitución entre la bolsa y la caja es  $e = 0.5$ , determine las velocidades de la bolsa y la caja justo después del impacto. ¿Cuál es la pérdida de energía durante la colisión?

## SOLUCIÓN

Este problema implica impacto central. ¿Por qué? Antes de analizar la mecánica del impacto, primero se requiere obtener la velocidad de la bolsa *justo antes* de que choque contra la caja.

**Conservación de la energía.** Con el plano de referencia en  $\theta = 0^\circ$  (fig. 15-16b), obtenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} \left( \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (v_A)_1^2 - 6 \text{ lb}(3 \text{ ft}); (v_A)_1 = 13.90 \text{ ft/s}$$

Después del impacto supondremos que  $A$  y  $B$  se desplazan a la izquierda. Si aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento al sistema (fig. 15-16c),

$$(\leftarrow) \quad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \left( \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (13.90 \text{ ft/s}) - \left( \frac{18 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (v_B)_2 + \left( \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 13.90 - 3(v_B)_2 \quad (1)$$

Al darnos cuenta de que para que ocurra la separación después de la colisión  $(v_B)_2 > (v_A)_2$  (fig. 15-16c), entonces

$$(\leftarrow) \quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}, \quad 0.5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{13.90 \text{ ft/s} - 0}$$

$$(v_A)_2 = (v_B)_2 - 6.950 \quad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 simultáneamente se obtiene

$$(v_A)_2 = -1.74 \text{ ft/s} = 1.74 \text{ ft/s} \rightarrow \quad \text{y} \quad (v_B)_2 = 5.21 \text{ ft/s} \leftarrow$$

**Pérdida de energía.** Al aplicar el principio de trabajo y energía a la bolsa y la caja justo antes y después de la colisión, tenemos

$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1;$$

$$\Sigma U_{1-2} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{18 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (5.21 \text{ ft/s})^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (1.74 \text{ ft/s})^2 \right] - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (13.9 \text{ ft/s})^2 \right]$$

$$\Sigma U_{1-2} = -10.1 \text{ ft} \cdot \text{lb} \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** La pérdida de energía ocurre debido a la deformación inelástica durante la colisión.

## EJEMPLO

La bola  $B$  de la figura 15-17a tiene una masa de 1.5 kg y cuelga del techo por medio de una cuerda elástica de 1 m de largo. Si la cuerda se *estira* hacia abajo 0.25 m y la bola se suelta del punto de reposo, determine cuánto se alarga la cuerda después de que la bola rebota en el techo. La rigidez de la cuerda es  $k = 800 \text{ N/m}$  y el coeficiente de restitución entre la bola y el techo es  $e = 0.8$ . La bola experimenta un impacto central con el techo.

## SOLUCIÓN

Primero debemos obtener la velocidad de la bola *justo antes* de que golpee el techo usando métodos de energía, y considerar en seguida el impulso y la cantidad de movimiento entre la bola y el techo y, por último, utilizar de nuevo métodos de energía para determinar el alargamiento de la cuerda.

**Conservación de la energía.** Con el plano de referencia situado como se muestra en la figura 15-17a, y habida cuenta de que inicialmente  $y = y_0 = (1 + 0.25) \text{ m} = 1.25 \text{ m}$ , tenemos

$$\begin{aligned} T_0 + V_0 &= T_1 + V_1 \\ \frac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \frac{1}{2}ks^2 &= \frac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0 \\ 0 - 1.5(9.81)\text{N}(1.25 \text{ m}) + \frac{1}{2}(800 \text{ N/m})(0.25 \text{ m})^2 &= \frac{1}{2}(1.5 \text{ kg})(v_B)_1^2 \\ (v_B)_1 &= 2.968 \text{ m/s} \uparrow \end{aligned}$$

Ahora se considerará la interacción de la bola con el techo mediante los principios de impacto.\* Como una parte desconocida de la masa del techo interviene en el impacto, no se escribirá la conservación de la cantidad de movimiento del sistema bola-techo. La “velocidad” de esta parte del techo es cero, ya que se supone que él (o la Tierra) permanece(n) en reposo antes y después del impacto.

**Coeficiente de restitución.** Figura 15-17b.

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad e &= \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}, & 0.8 &= \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.968 \text{ m/s}} \\ (v_B)_2 &= -2.374 \text{ m/s} = 2.374 \text{ m/s} \downarrow \end{aligned}$$

**Conservación de la energía.** El alargamiento máximo  $s_3$  en la cuerda se determina al aplicar de nuevo la ecuación de conservación de la energía a la bola justo después de la colisión. Suponga que  $y = y_3 = (1 + s_3) \text{ m}$  (fig. 15-17c), entonces

$$\begin{aligned} T_2 + V_2 &= T_3 + V_3 \\ \frac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 &= \frac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_B y_3 + \frac{1}{2}ks_3^2 \\ \frac{1}{2}(1.5 \text{ kg})(2.37 \text{ m/s})^2 &= 0 - 9.81(1.5) \text{ N}(1 \text{ m} + s_3) + \frac{1}{2}(800 \text{ N/m})s_3^2 \\ 400s_3^2 - 14.715s_3 - 18.94 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para la raíz positiva se obtiene

$$s_3 = 0.237 \text{ m} = 237 \text{ mm}$$

*Resp.*

\*El peso de la bola se considera una fuerza no impulsora.

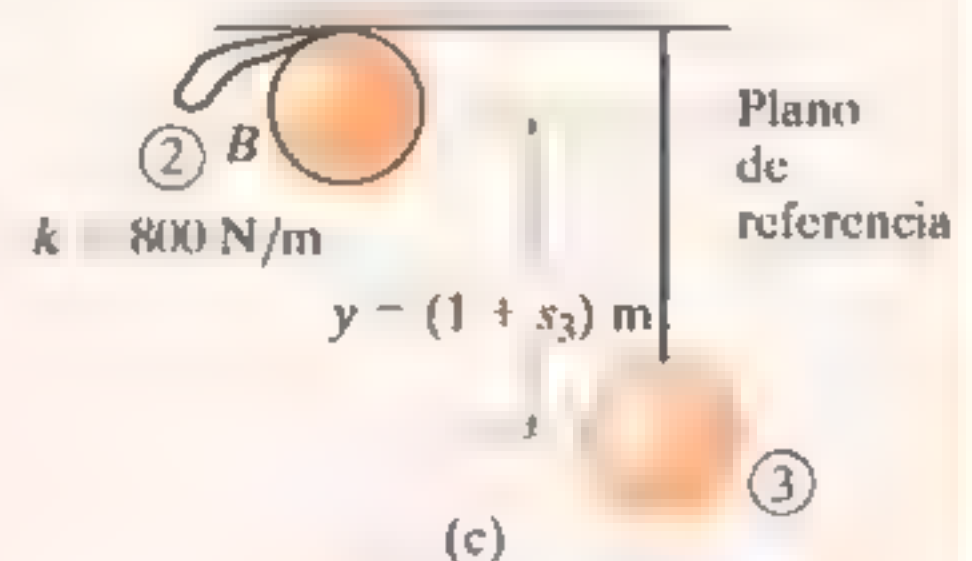
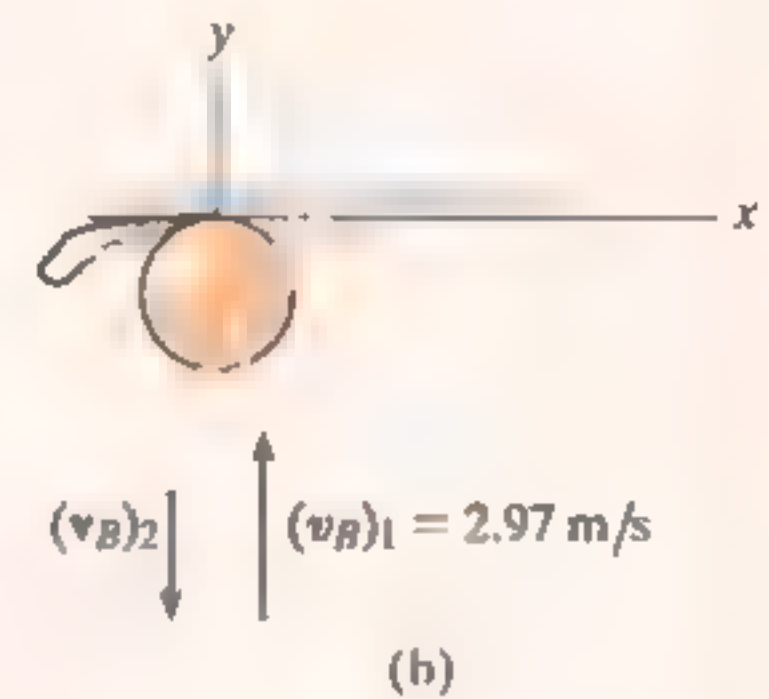
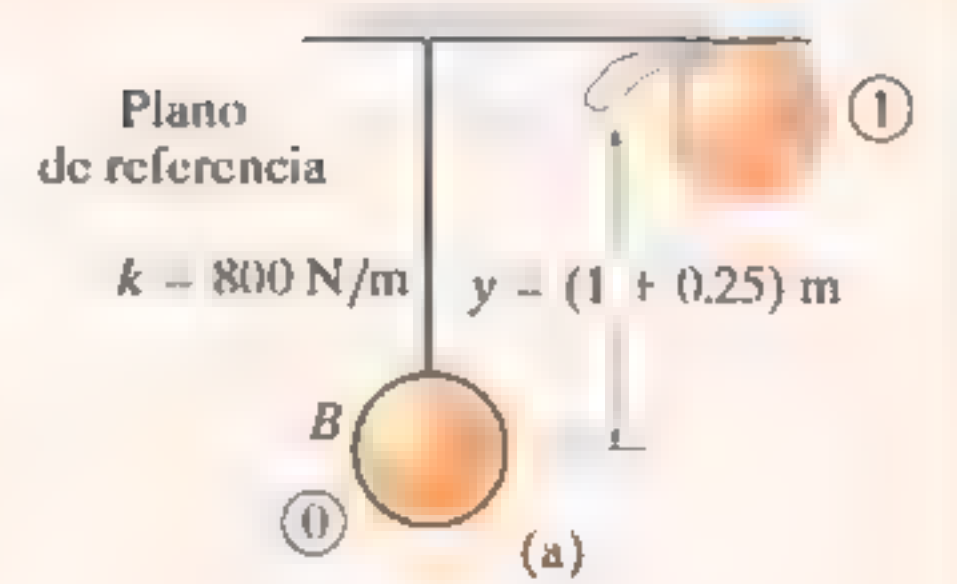
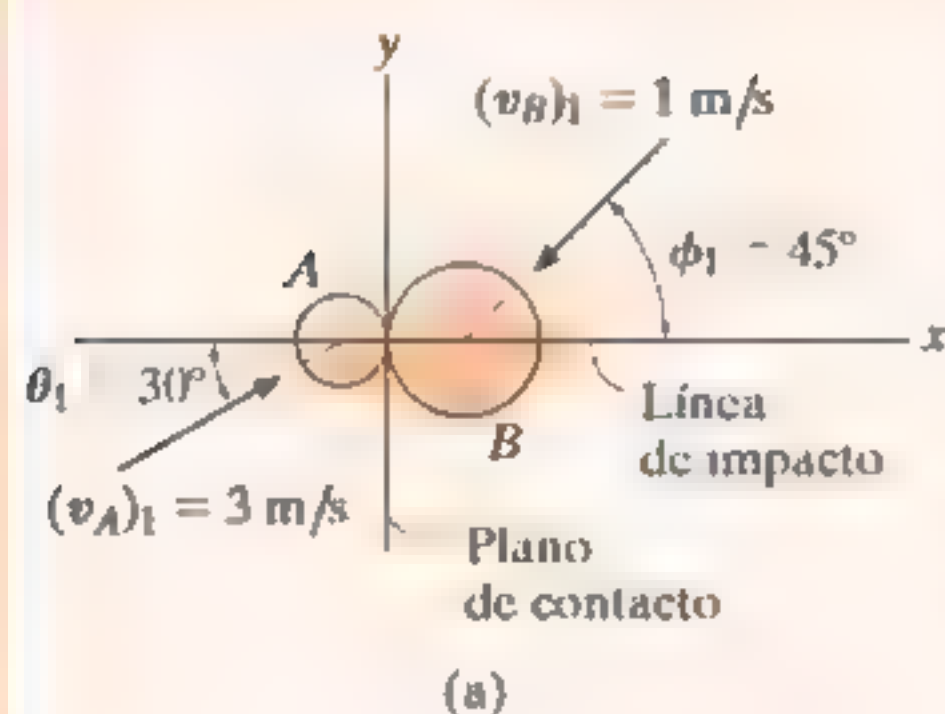


Fig. 15-17

## EJEMPLO



Dos discos lisos  $A$  y  $B$  de 1 kg y 2 kg de masa, respectivamente, chocan a las velocidades que se muestran en la figura 15-18a. Si su coeficiente de restitución es  $e = 0.75$ , determine las componentes  $x$  y  $y$  de la velocidad final de cada disco, justo después de la colisión.

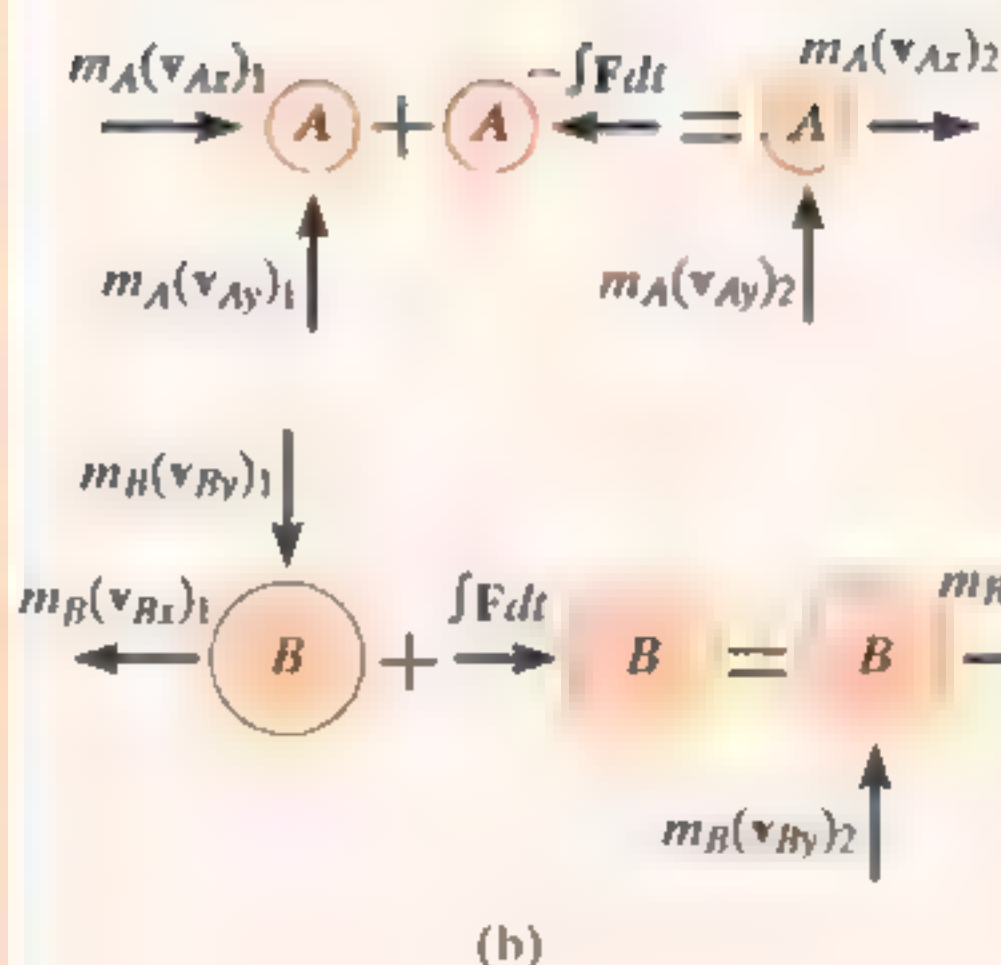
## SOLUCIÓN

Este problema implica *impacto oblicuo*. ¿Por qué? Para resolverlo, establecimos los ejes  $x$  y  $y$  a lo largo de la línea de impacto y del plano de contacto, respectivamente (fig. 15-18a).

Al descomponer cada una de las velocidades iniciales en componentes  $x$  y  $y$ , tenemos

$$\begin{aligned}(v_{Ax})_1 &= 3 \cos 30^\circ = 2.598 \text{ m/s} & (v_{Ay})_1 &= 3 \sin 30^\circ = 1.50 \text{ m/s} \\ (v_{Bx})_1 &= -1 \cos 45^\circ = -0.7071 \text{ m/s} & (v_{By})_1 &= -1 \sin 45^\circ = -0.7071 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Se supone que después de la colisión las cuatro componentes de velocidad desconocidas *actúan en las direcciones positivas* (fig. 15-18b). Como el impacto ocurre en la dirección  $x$  (línea de impacto), la conservación de la cantidad de movimiento de *ambos* se aplica en esta dirección. ¿Por qué?



**Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección "x".** Si nos remitimos a los diagramas de cantidad de movimiento,

$$\begin{aligned}m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 &= m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2 \\ 1 \text{ kg}(2.598 \text{ m/s}) + 2 \text{ kg}(-0.707 \text{ m/s}) &= 1 \text{ kg}(v_{Ax})_2 + 2 \text{ kg}(v_{Bx})_2 \\ (v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 &= 1.184\end{aligned}\quad (1)$$

**Coeficiente de restitución ( $e$ ).**

$$\begin{aligned}(\pm) \quad e &= \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}; \quad 0.75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2.598 \text{ m/s} - (-0.7071 \text{ m/s})} \\ (v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 &= 2.482\end{aligned}\quad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 para  $(v_{Ax})_2$  y  $(v_{Bx})_2$  se obtiene

$$(v_{Ax})_2 = -1.26 \text{ m/s} = 1.26 \text{ m/s} \leftarrow \quad (v_{Bx})_2 = 1.22 \text{ m/s} \rightarrow \quad \text{Resp.}$$

**Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección "y".** La cantidad de movimiento de *cada disco* se conserva en la dirección  $y$  (plano de contacto), pues los discos son lisos y, por consiguiente, en esta dirección *no* actúa ningún impulso externo. De la figura 15-18b,

$$(+\uparrow) m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2; \quad (v_{Ay})_2 = 1.50 \text{ m/s} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

$$(+\uparrow) m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2; \quad (v_{By})_2 = -0.707 \text{ m/s} = 0.707 \text{ m/s} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** Demuestre que cuando se suman las componentes de velocidad vectorialmente, se obtienen los resultados mostrados en la figura 15-18c.

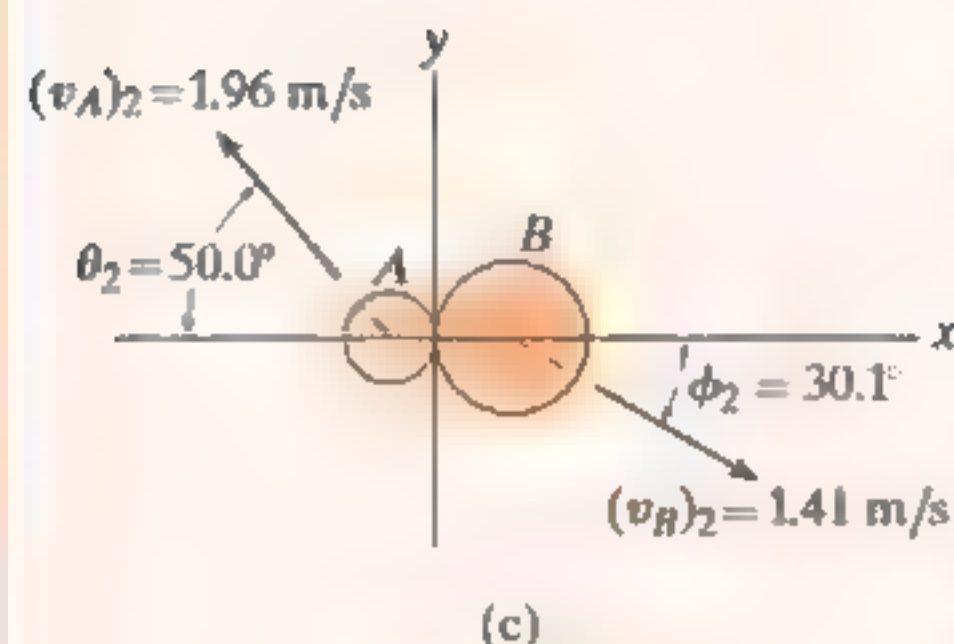
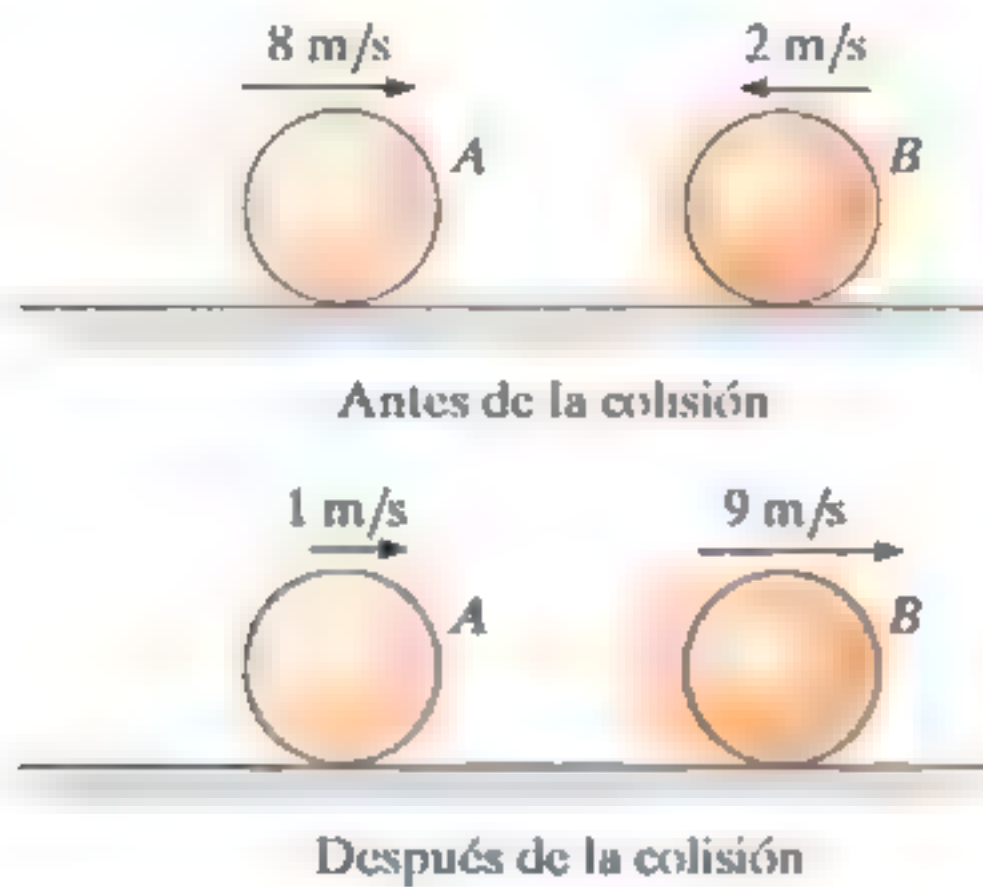


FIG. 15-18

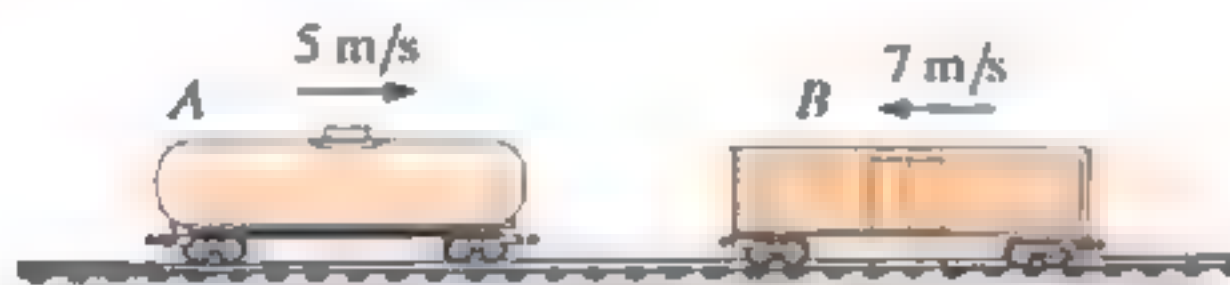
# PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F15-13.** Determine el coeficiente de restitución  $e$  entre la bola  $A$  y bola  $B$ . Se muestran las velocidades de  $A$  y  $B$  antes y después de la colisión.



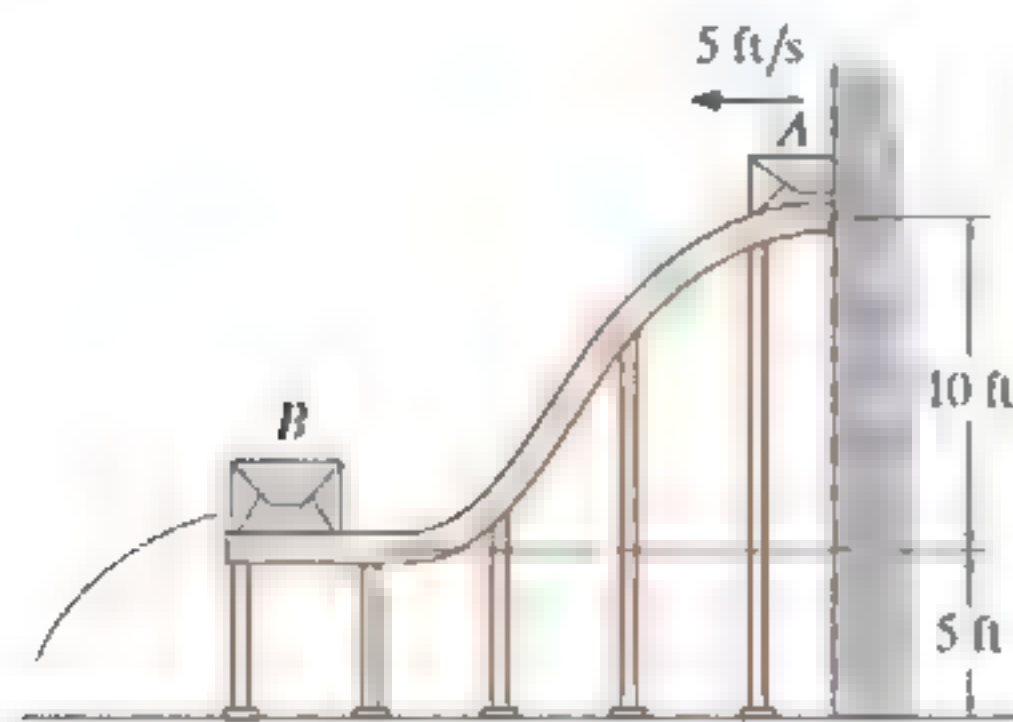
Prob. F15-13

**F15-14.** El carro tanque  $A$  de  $15 \text{ Mg}$  y el vagón de carga  $B$  de  $25 \text{ Mg}$  viajan uno hacia el otro a las velocidades indicadas. Si el coeficiente de restitución entre los parachoques es  $e = 0.6$ , determine la velocidad de cada carro justo después de la colisión.



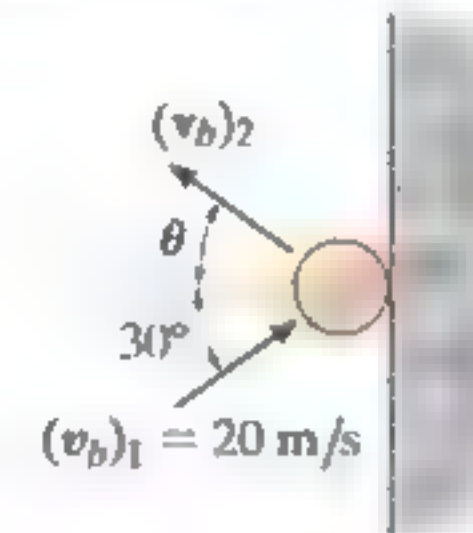
Prob. F15-14

**F15-15.** La rapidez del paquete  $A$  de  $30 \text{ lb}$  es de  $5 \text{ ft/s}$  al entrar a la rampa lisa. Cuando resbala hacia abajo de la rampa, choca contra el paquete  $B$  de  $80 \text{ lb}$ , el cual inicialmente está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre  $A$  y  $B$  es  $e = 0.6$ , determine la velocidad de  $B$  justo después del impacto.



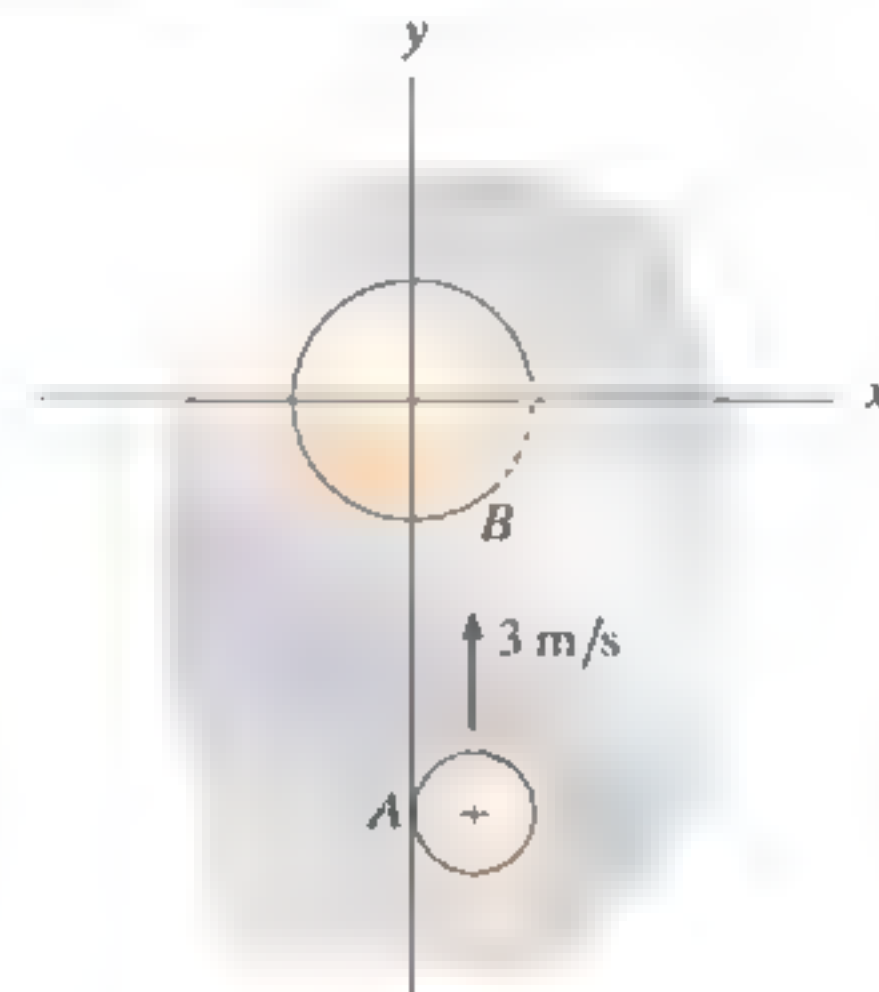
Prob. F15-15

**F15-16.** La bola choca contra la pared lisa a una velocidad de  $(v_b)_1 = 20 \text{ m/s}$ . Si el coeficiente de restitución entre la bola y la pared es  $e = 0.75$ , determine la velocidad de la bola justo después del impacto.



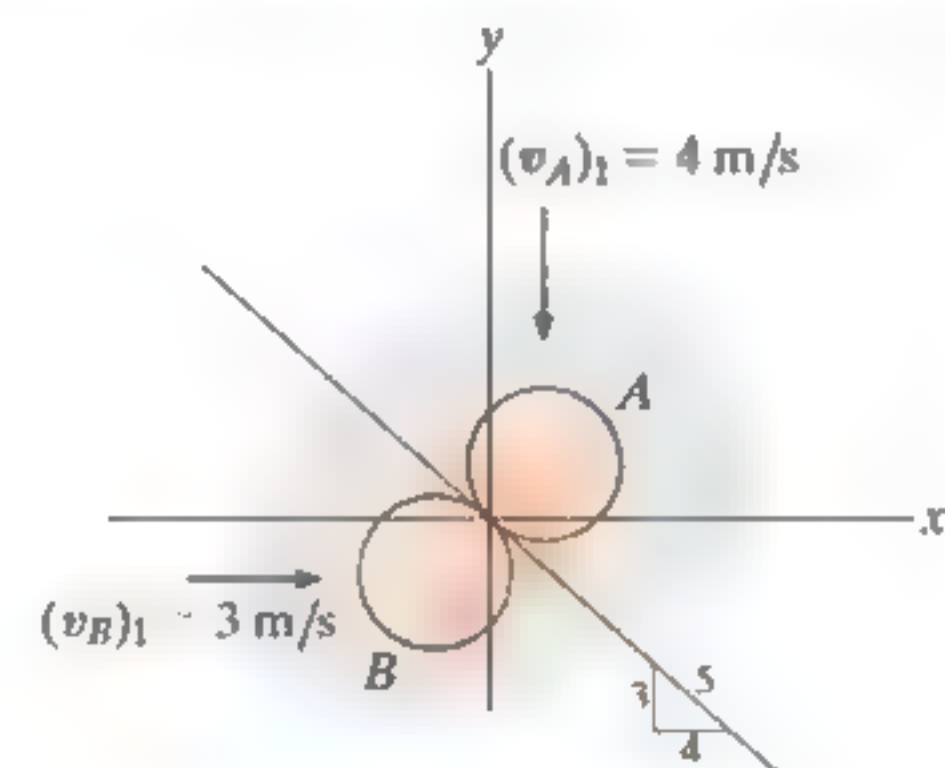
Prob. F15-16

**F15-17.** El disco  $A$  tiene una masa de  $2 \text{ kg}$  y se desliza sobre el plano horizontal liso con una velocidad de  $3 \text{ m/s}$ . El disco  $B$  tiene una masa de  $11 \text{ kg}$  y está inicialmente en reposo. Si, después del impacto,  $A$  tiene una velocidad de  $1 \text{ m/s}$ , paralela al eje  $x$  positivo, determine la rapidez del disco  $B$  después del impacto.



Prob. F15-17

**F15-18.** Dos discos  $A$  y  $B$  tienen cada uno una masa de  $1 \text{ kg}$  y las velocidades iniciales mostradas justo antes de que choquen. Si el coeficiente de restitución es  $e = 0.5$ , determine la rapidez de cada uno justo después del impacto.



Prob. F15-18

## PROBLEMAS

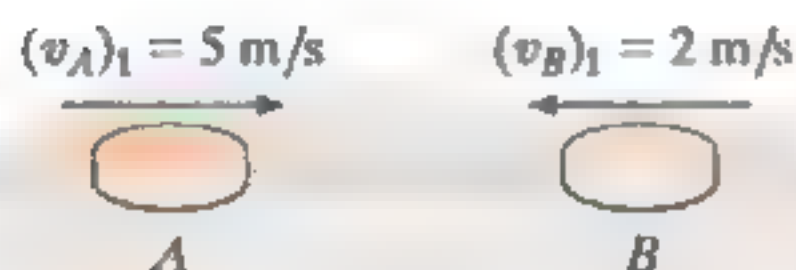
**15-58.** Un disco tiene una masa de 250 g, y se desliza sobre una superficie horizontal lisa con una velocidad inicial  $(v_A)_1 = 2 \text{ m/s}$ . Tiene una colisión directa contra el disco  $B$ , que tiene una masa de 175 g y está originalmente en reposo. Si ambos discos tienen el mismo tamaño y la colisión es perfectamente elástica ( $e = 1$ ), determine la velocidad de cada disco justo después de la colisión. Demuestre que la energía cinética de los discos antes y después de la colisión es la misma.

**15-59.** El camión de 5 Mg y el automóvil de 2 Mg viajan a las velocidades de rodamiento libre que se indican justo antes de chocar. Después de la colisión, el automóvil se desplaza a 15 km/h hacia la derecha *con respecto al* camión. Determine el coeficiente de restitución entre el camión y el automóvil, así como la pérdida de energía a causa de la colisión.



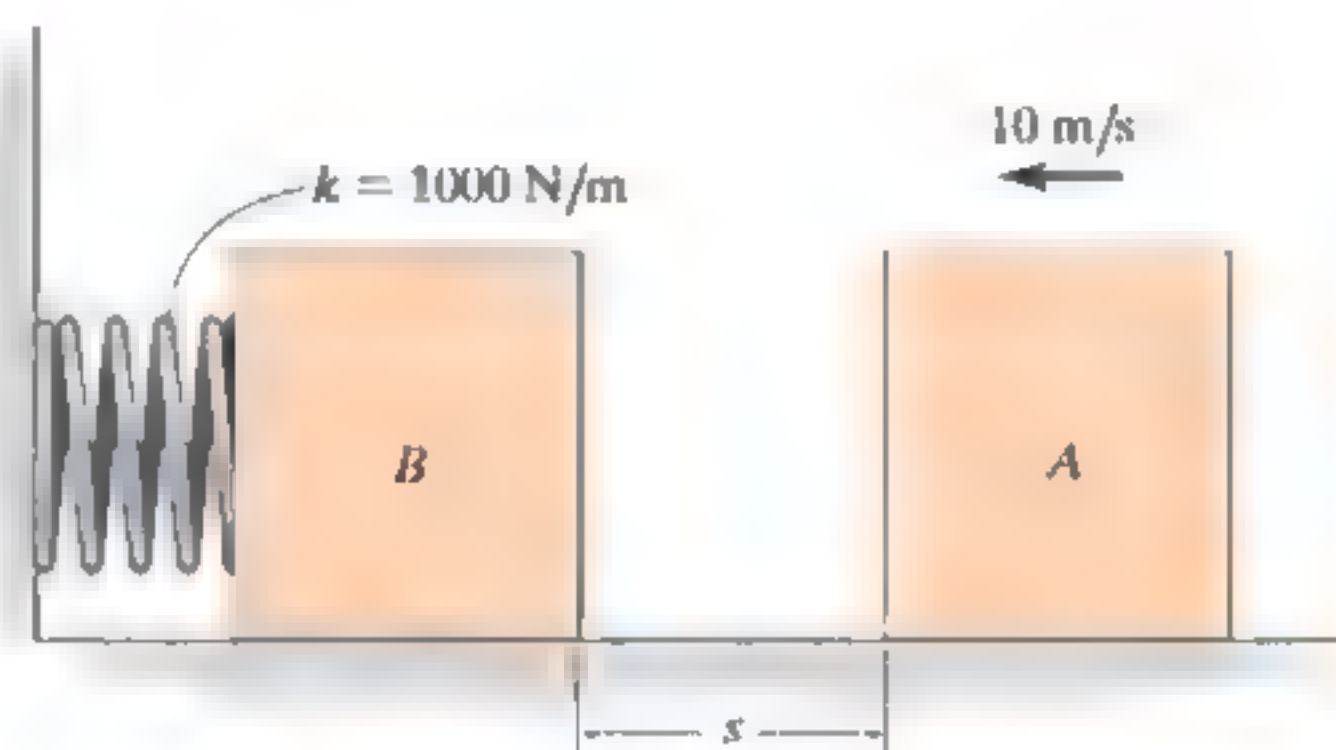
Prob. 15-59

**\*15-60.** El disco  $A$  tiene una masa de 2 kg y se desliza hacia adelante sobre la superficie lisa con una velocidad  $(v_A)_1 = 5 \text{ m/s}$  cuando golpea el disco  $B$  de 4 kg, el cual se desliza hacia  $A$  con velocidad  $(v_B)_1 = 2 \text{ m/s}$ , con un impacto central directo. Si el coeficiente de restitución entre los discos es  $e = 0.4$ , calcule las velocidades de  $A$  y  $B$  justo después de la colisión.



Prob. 15-60

**15-61.** El bloque  $A$  de 15 kg se desliza sobre la superficie cuyo  $\mu_k = 0.3$ . El bloque tiene una velocidad  $v = 10 \text{ m/s}$  cuando  $s = 4 \text{ m}$  a partir del bloque  $B$  de 10 kg. Si el resorte sin estirar tiene una rigidez  $k = 1000 \text{ N/m}$ , determine la máxima compresión del resorte debida a la colisión. Considere que  $e = 0.6$ .



Prob. 15-61

**15-62.** Los cuatro bolas lisas tienen cada una la misma masa  $m$ . Si  $A$  y  $B$  ruedan hacia adelante con velocidad  $v$  y golpean a  $C$ , explique por qué después de la colisión  $C$  y  $D$  se mueven cada una con una velocidad  $v$ . ¿Por qué  $D$  no se mueve con velocidad  $2v$ ? La colisión es elástica,  $e = 1$ . No tome en cuenta el tamaño de cada bola.



Probs. 15-62/63

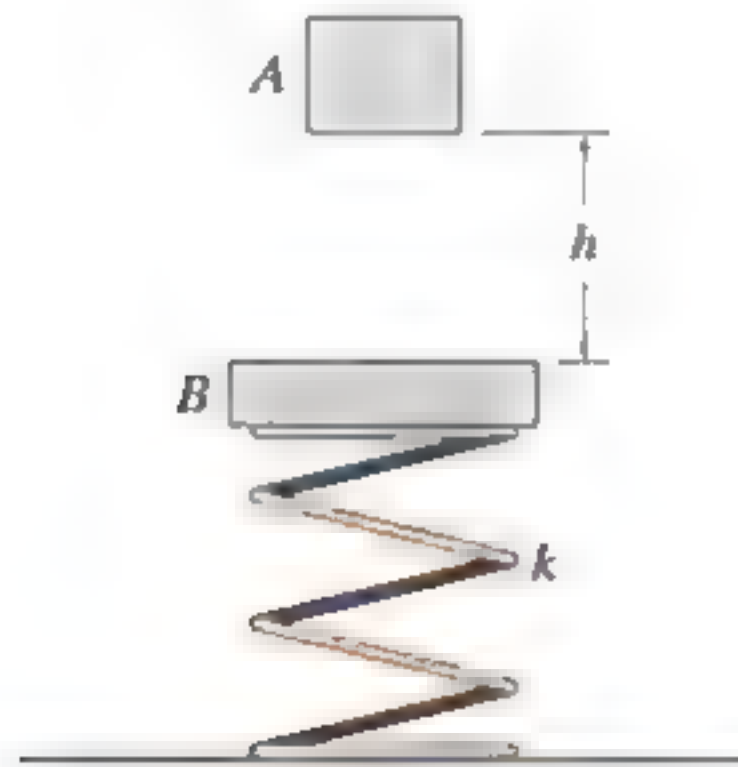
**\*15-64.** La bola  $A$  tiene una masa de 3 kg y se mueve con una velocidad de 8 m/s cuando choca de manera directa contra la bola  $B$ , que tiene una masa de 2 kg y se mueve con una velocidad de 4 m/s. Si  $e = 0.7$  determine la velocidad de cada bola justo después de la colisión. No tome en cuenta el tamaño de las bolas.



Prob. 15-64

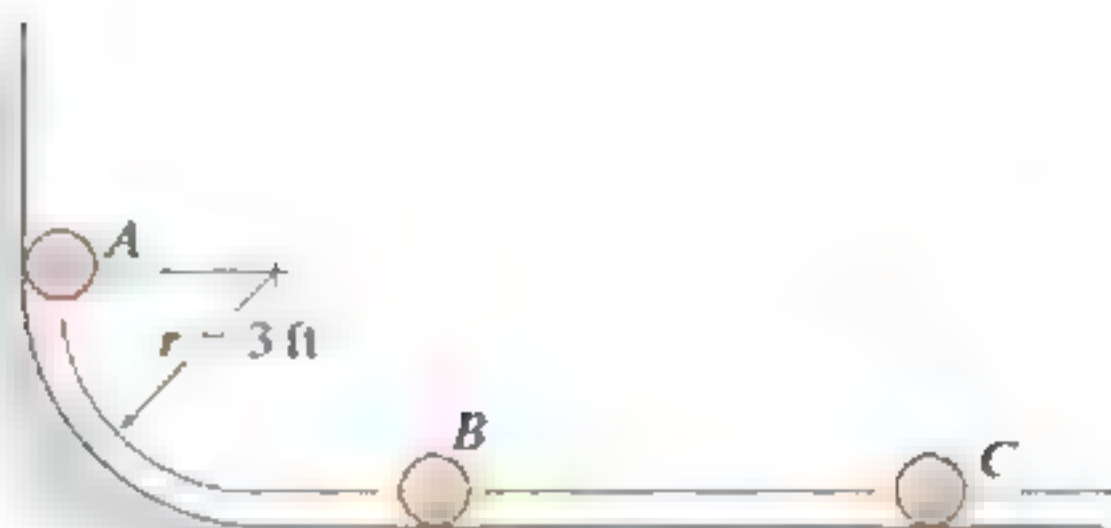
**15-65.** Una bola  $A$  de 1 lb viaja horizontalmente a 20 ft/s cuando golpea un bloque  $B$  de 10 lb que está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre  $A$  y  $B$  es  $e = 0.6$ , y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es  $\mu_k = 0.4$ , determine el tiempo necesario para que el bloque  $B$  detenga su deslizamiento.

**15-66.** El bloque  $A$ , que tiene una masa  $m$ , se libera desde el reposo, cae una distancia  $h$  y golpea la placa  $B$  que tiene una masa  $2m$ . Si el coeficiente de restitución entre  $A$  y  $B$  es  $e$ , determine la velocidad de la placa justo después de la colisión. El resorte tiene una rigidez  $k$ .



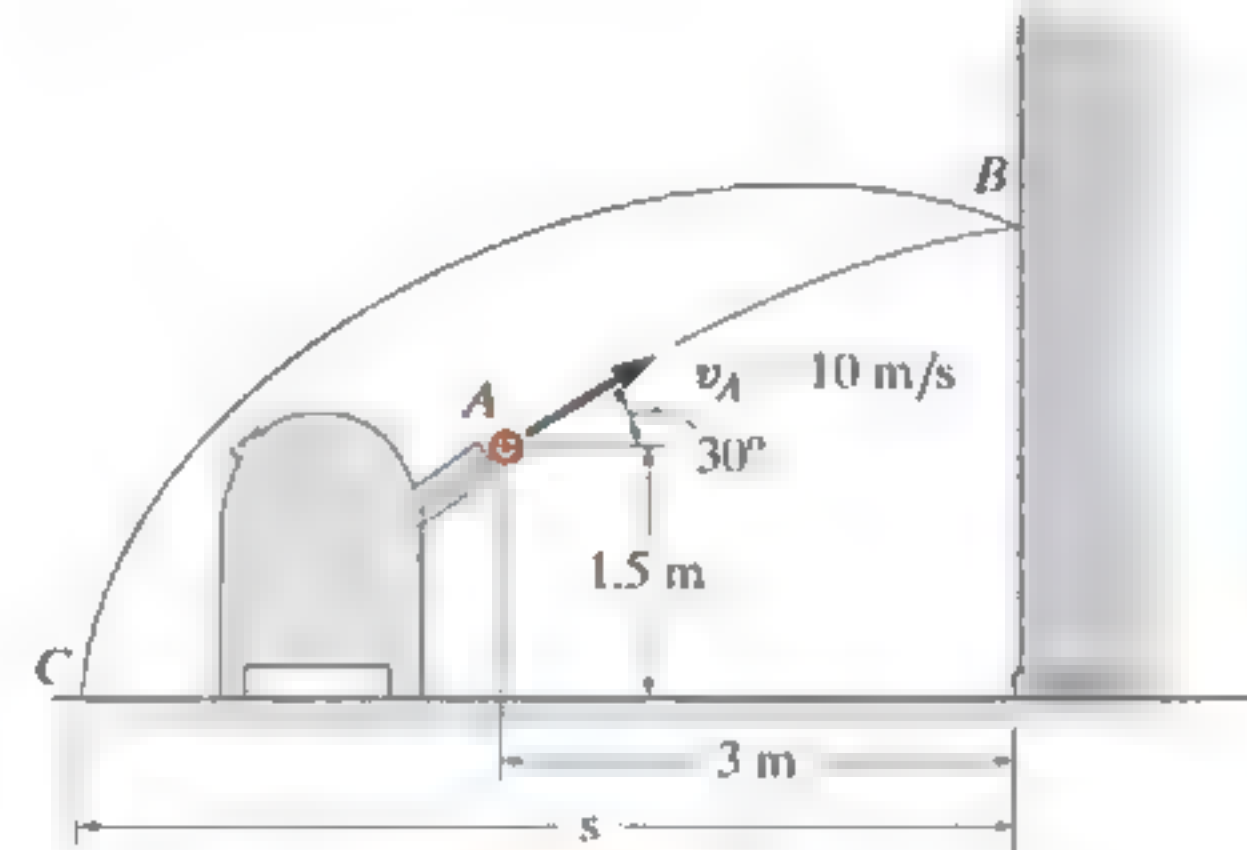
Prob. 15-66

**15-67.** Cada una de las tres bolas pesa 0.5 lb y tiene un coeficiente de restitución de  $e = 0.85$ . Si la bola  $A$  se libera desde el reposo y golpea la bola  $B$  y, luego, la bola  $B$  golpea la bola  $C$ , determine la velocidad de cada bola después de haberse producido la segunda colisión. Las bolas se deslizan sin fricción.



Prob. 15-67

**\*15-68.** Una máquina de lanzar dispara la pelota de 0.5 kg hacia la pared con una velocidad inicial  $v_A = 10$  m/s como se muestra. Determine (a) la velocidad a la que choca contra la pared en  $B$ , (b) la velocidad a la que rebota de la pared si  $e = 0.5$  y (c) la distancia  $s$  desde la pared hasta donde golpea el suelo en  $C$ .



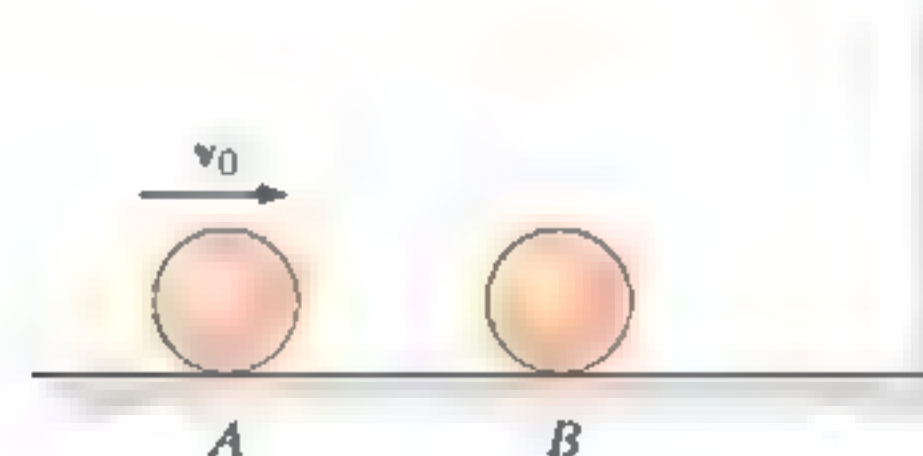
Prob. 15-68

**15-69.** Se patea un balón de 300 g con una velocidad de  $v_A = 25$  m/s en el punto  $A$ , como se indica. Si el coeficiente de restitución entre el balón y el terreno es  $e = 0.4$ , determine la magnitud y la dirección  $\theta$  de la velocidad del balón que rebota en  $B$ .



Prob. 15-69

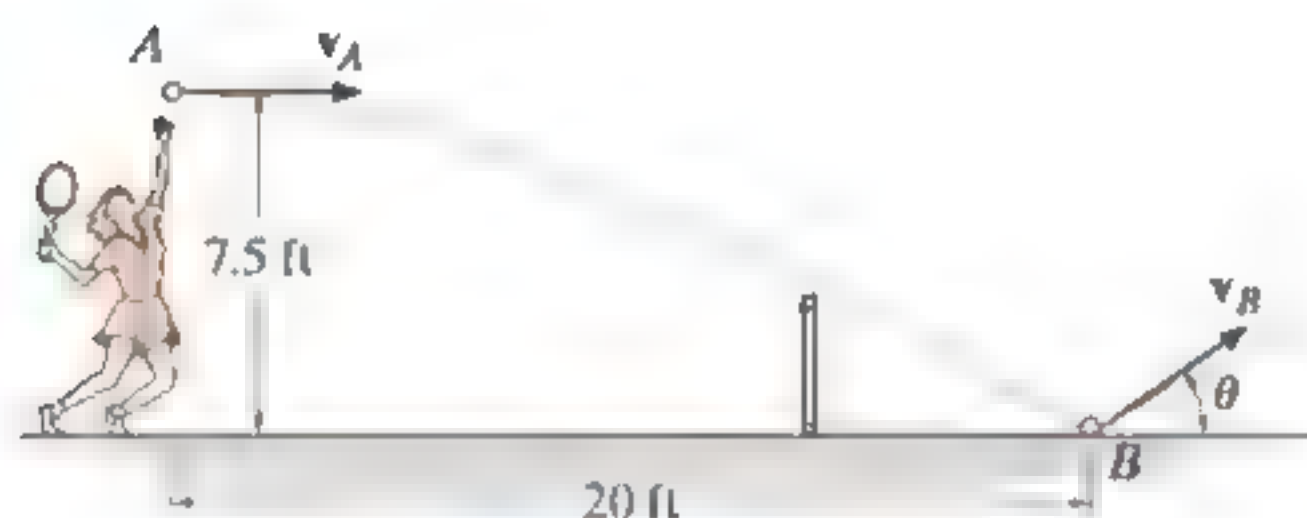
**15-70.** Cada una de las dos esferas lisas  $A$  y  $B$  tiene una masa  $m$ . Si a la esfera  $A$  se le da una velocidad  $v_0$ , mientras que la esfera  $B$  está en reposo, determine la velocidad de  $B$  justo después de que choca contra la pared. El coeficiente de restitución para cualquier colisión es  $e$ .



Prob. 15-70

**15-71.** Se observó que una pelota de tenis, cuando se sirve horizontalmente a 7.5 ft por encima del suelo, golpea el suelo liso en  $B$  a 20 ft de distancia. Determine la velocidad inicial  $v_A$  de la pelota y la velocidad  $v_B$  (y  $\theta$ ) de la pelota, justo después de golpear la cancha en  $B$ . Considere que  $e = 0.7$ .

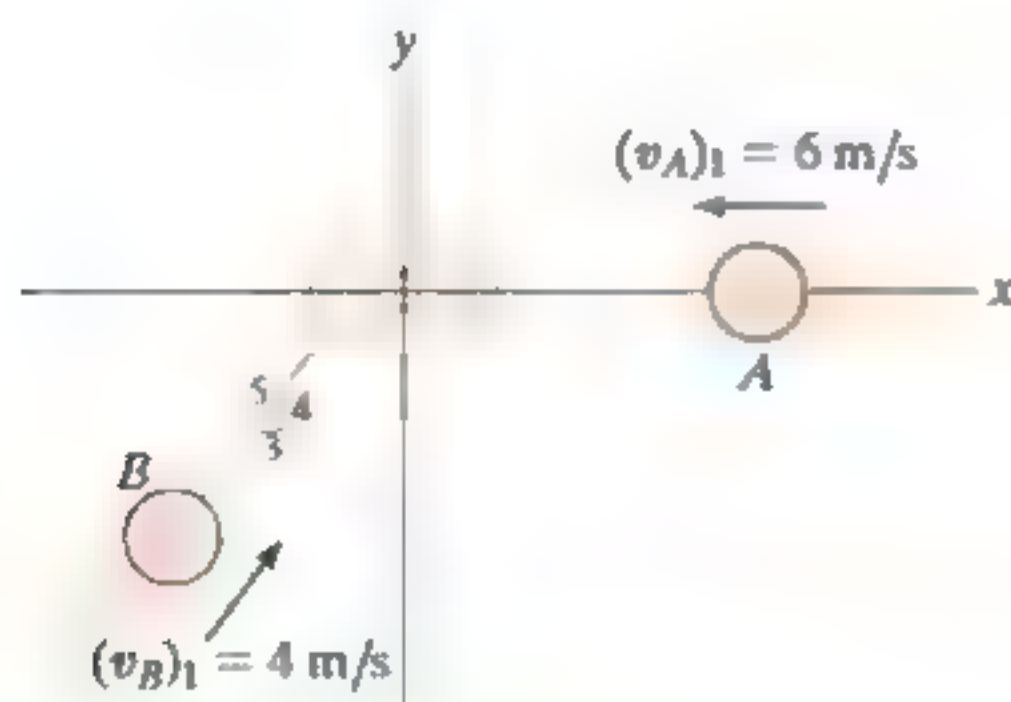
**\*15-72.** La pelota de tenis es golpeada con una velocidad horizontal  $v_A$ , choca contra el suelo liso en  $B$  y rebota hacia arriba a  $\theta = 30^\circ$ . Determine la velocidad inicial  $v_A$ , la velocidad final  $v_B$  y el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.



Probs. 15-71/72

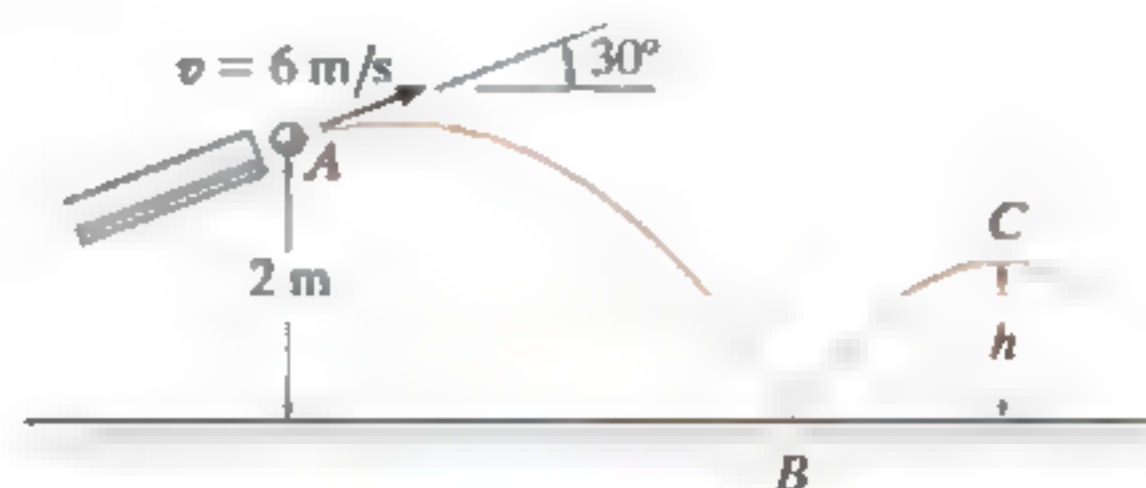
**15-73.** Cada uno de los dos discos lisos  $A$  y  $B$  tiene una masa de 0.5 kg. Si ambos discos se mueven con las velocidades indicadas al chocar, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. El coeficiente de restitución es  $e = 0.75$ .

**15-74.** Cada uno de los dos discos lisos  $A$  y  $B$  tiene una masa de 0.5 kg. Ambos discos se mueven con las velocidades mostradas al chocar. Determine el coeficiente de restitución entre los discos si, después de la colisión,  $B$  viaja a lo largo de una línea,  $30^\circ$  en sentido antihorario desde el eje  $y$ .



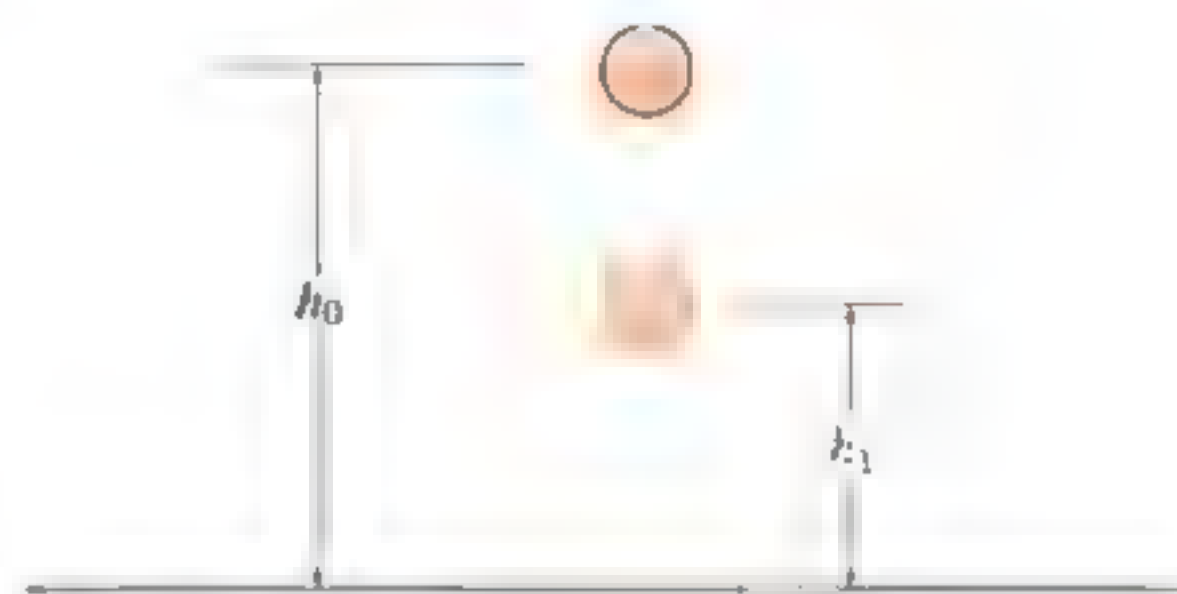
Probs. 15-73/74

**15-75.** La bola de 0.5 kg se dispara desde el tubo en  $A$  con una velocidad de  $v = 6$  m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y la superficie es  $e = 0.8$ , determine la altura  $h$  después de que rebota en la superficie.



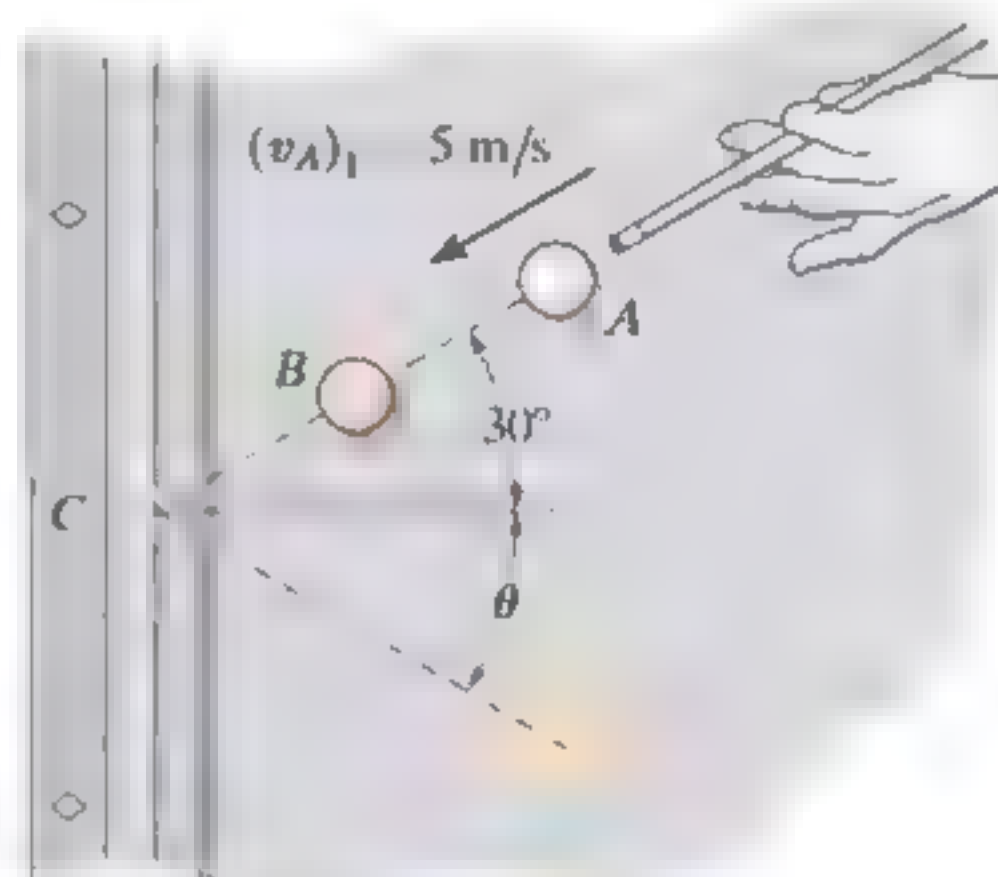
Prob. 15-75

**\*15-76.** Una bola de masa  $m$  se deja caer verticalmente desde una altura  $h_0$  por encima del suelo. Si rebota hasta una altura  $h_1$ , determine el coeficiente de restitución entre la bola y el suelo.



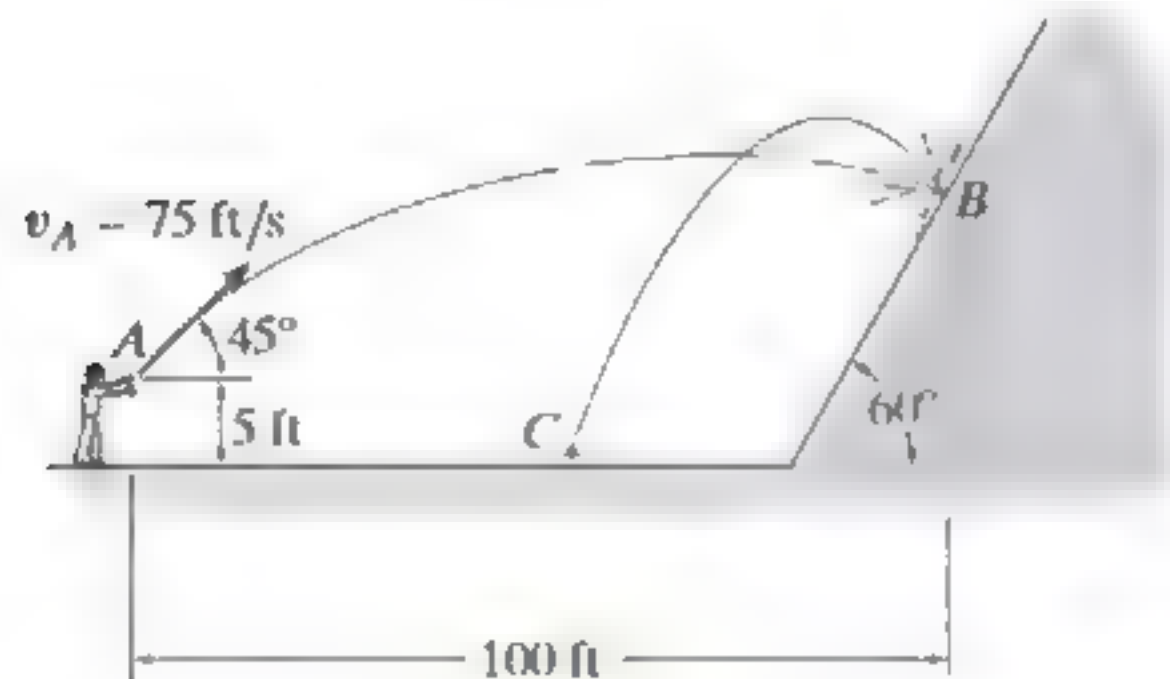
Prob. 15-76

**15-77.** A la bola blanca se le da una velocidad inicial  $(v_A)_1 = 5$  m/s. Si choca directamente contra la bola  $B$  ( $e = 0.8$ ), determine la velocidad de  $B$  y el ángulo  $\theta$  justo después de que rebota en la banda en  $C$  ( $e' = 0.6$ ). Cada bola tiene una masa de 0.4 kg. No tome en cuenta su tamaño.



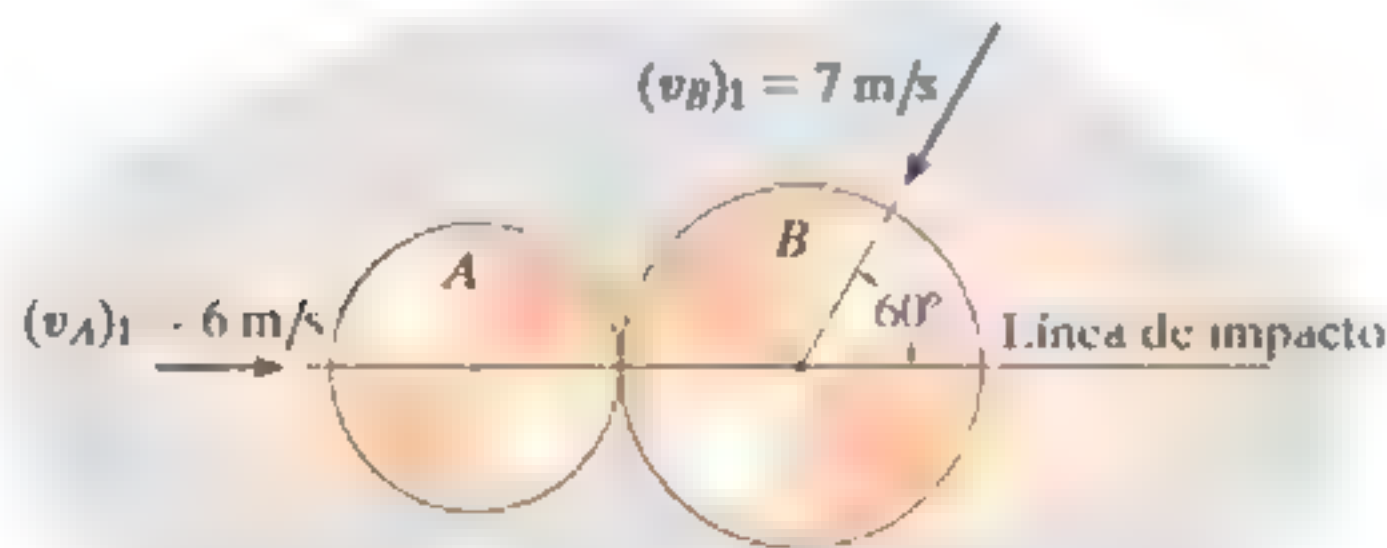
Prob. 15-77

**15-78.** Con el uso de un tirador, el niño dispara la canica de 0.2 lb contra el muro de concreto, golpeándolo en  $B$ . Si el coeficiente de restitución entre la canica y la pared es  $e = 0.5$ , determine la rapidez de la canica después de que rebota en la pared.



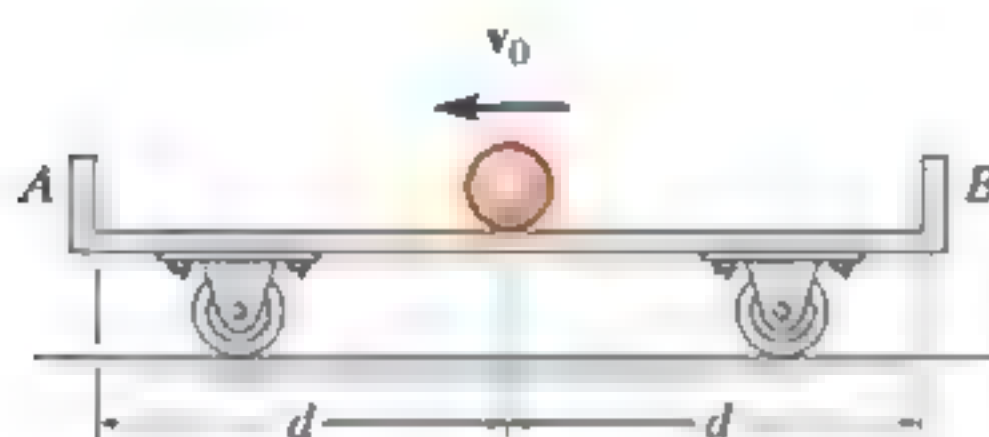
Prob. 15-78

**15-79.** Los dos discos  $A$  y  $B$  tienen una masa de 3 kg y 5 kg, respectivamente. Si chocan con las velocidades iniciales que se indican, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución es  $e = 0.65$ .



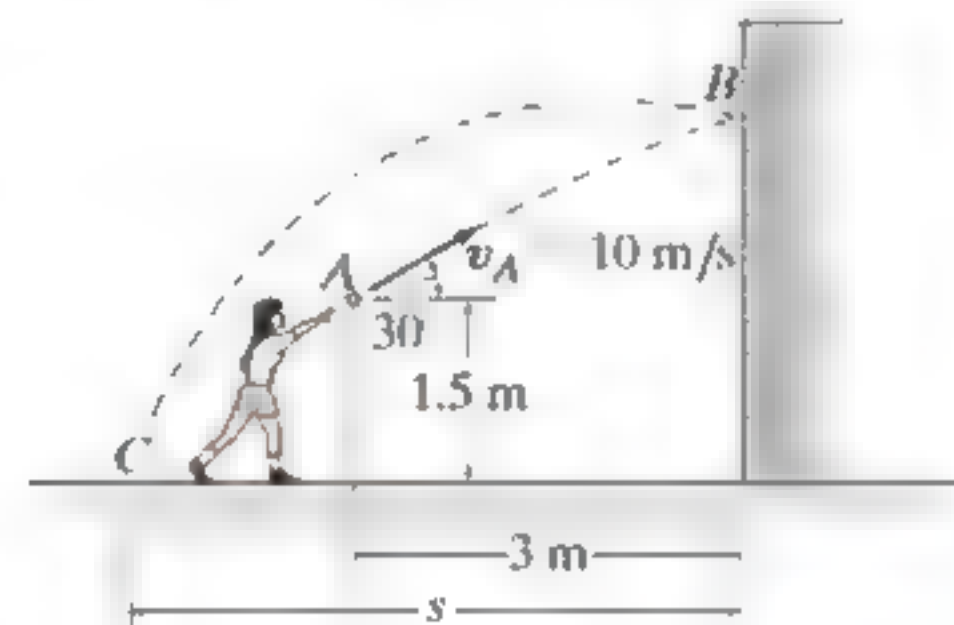
Prob. 15-79

**15-80.** A una bola de tamaño despreciable y masa  $m$  se le da una velocidad de  $v_0$  sobre el centro del carro que tiene una masa  $M$  y está originalmente en reposo. Si el coeficiente de restitución entre la bola y las paredes  $A$  y  $B$  es  $e$ , determine la velocidad de la bola y el carro justo después de que la bola golpea  $A$ . También, determine el tiempo total necesario para que la bola golpee  $A$ , rebote, después golpee  $B$ , rebote, y regrese al centro del carro. Desprecie la fricción.



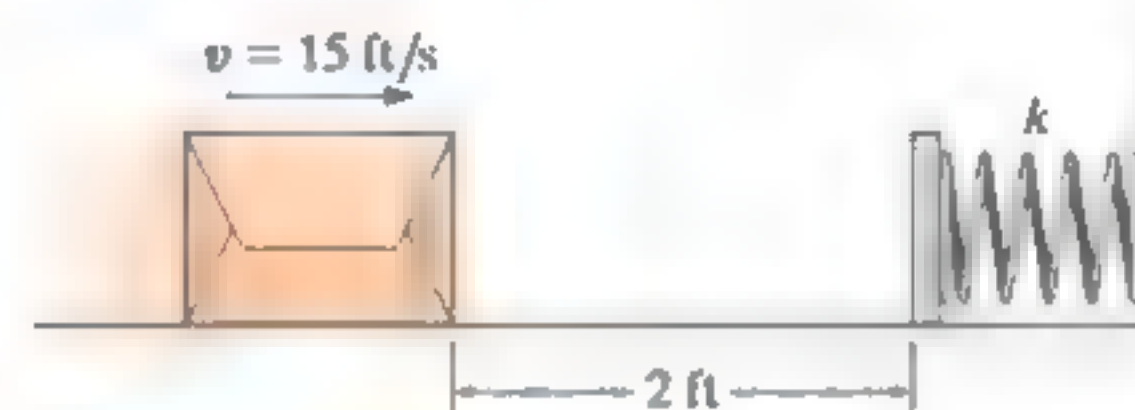
Prob. 15-80

**15-81.** La niña lanza la pelota de 0.5 kg hacia la pared con una velocidad inicial  $v_A = 10$  m/s. Determine (a) la velocidad a que la pelota choca contra la pared en  $B$ , (b) a qué velocidad rebota en la pared si el coeficiente de restitución es  $e = 0.5$ , y (c) la distancia  $s$  desde la pared hasta donde choca contra el suelo en  $C$ .



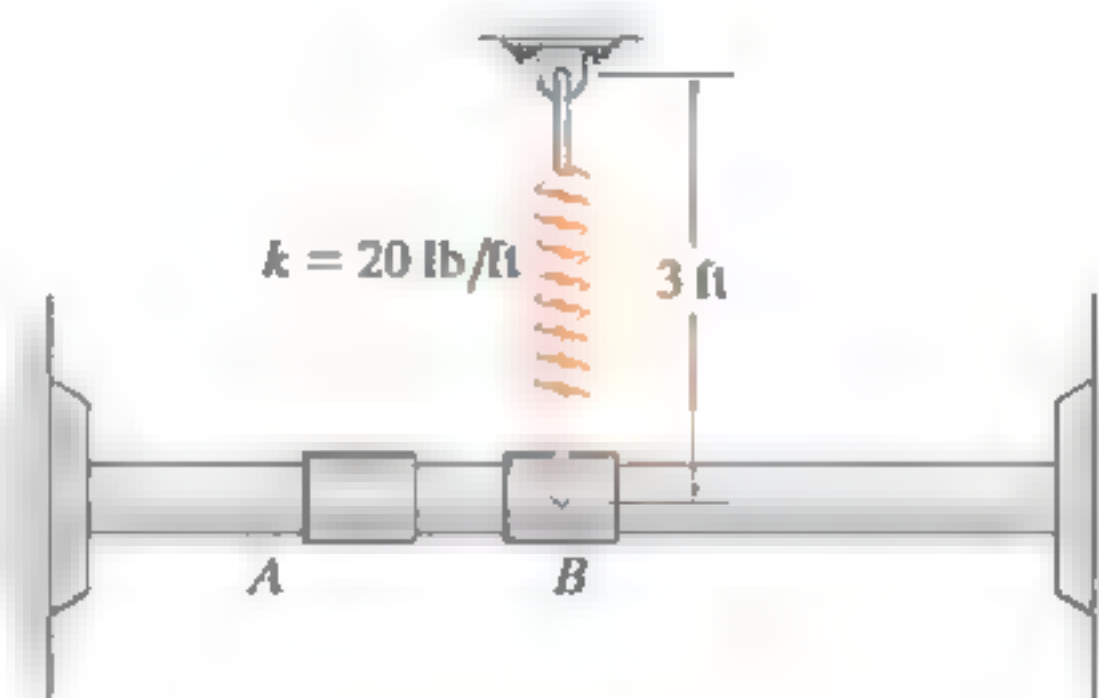
Prob. 15-81

**15-82.** La caja de 20 lb se desliza sobre la superficie cuyo  $\mu_k = 0.3$ . La caja tiene una velocidad  $v = 15$  ft/s cuando está a 2 ft de la placa. Si golpea la placa lisa, que tiene un peso de 10 lb y se mantiene en posición mediante un resorte sin estirar de rigidez  $k = 400$  lb/ft, determine la máxima compresión impartida al resorte. Considere que  $e = 0.8$  entre la caja y la placa. Suponga que la placa se desliza como si fuera lisa.



Prob. 15-82

**15-83.** El collarín  $B$  de 10 lb se encuentra en reposo y, en la posición mostrada, el resorte no está estirado. Si otro collarín  $A$  de 1 lb lo golpea, de modo que  $B$  se desliza 4 ft sobre la varilla lisa antes de parar momentáneamente, determine la velocidad de  $A$  justo después del impacto, y la fuerza promedio ejercida entre  $A$  y  $B$  durante el impacto, si éste ocurre en 0.002 s. El coeficiente de restitución entre  $A$  y  $B$  es  $e = 0.5$ .



Prob. 15-83

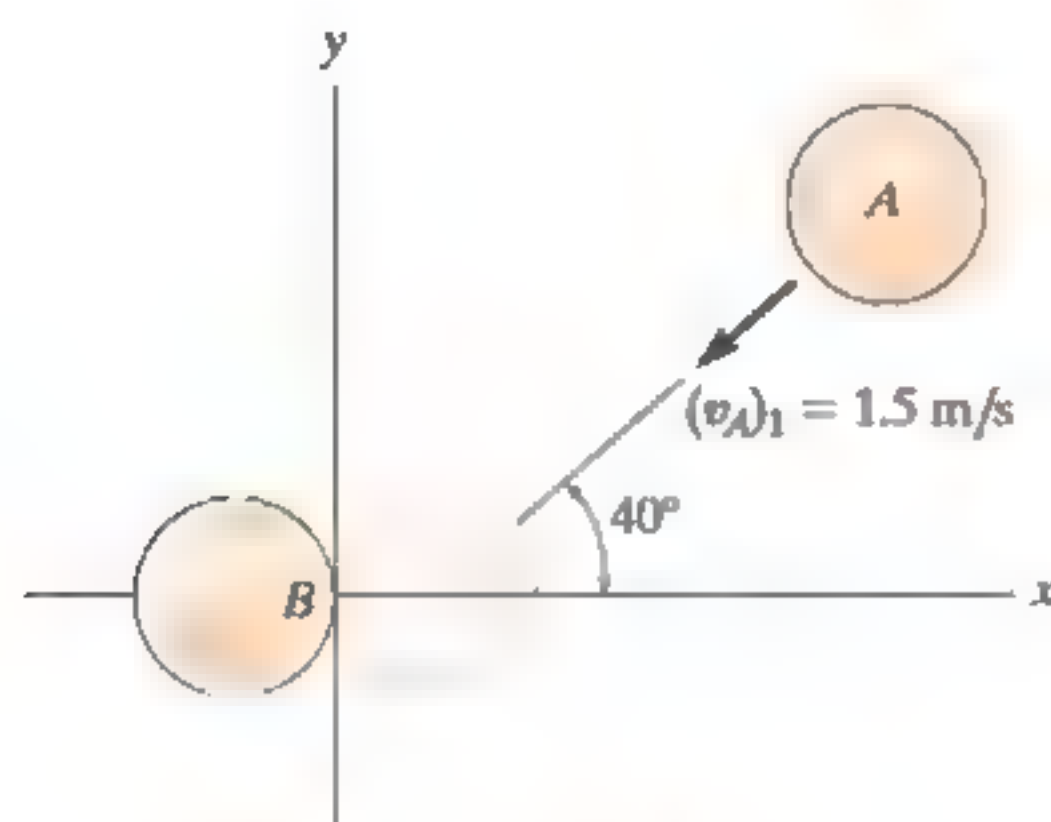
**\*15-84.** Se lanza una pelota sobre un piso áspero a un ángulo  $\theta$ . Si rebota a un ángulo  $\phi$  y el coeficiente de fricción cinética es  $\mu$ , determine el coeficiente de restitución  $e$ . No tome en cuenta el tamaño de la pelota. *Sugerencia:* Muestre que durante el impacto, los impulsos promedio y las direcciones  $x$  y  $y$  se relacionan mediante  $I_x = \mu I_y$ . Como el instante del impacto es el mismo,  $F_x \Delta t = \mu F_y \Delta t$  o  $F_x = \mu F_y$ .

**15-85.** Se lanza una pelota sobre un piso áspero a un ángulo  $\theta = 45^\circ$ . Si rebota al mismo ángulo  $\phi = 45^\circ$ , determine el coeficiente de fricción cinética entre el piso y la pelota. El coeficiente de restitución es  $e = 0.6$ . *Sugerencia:* Muestre que durante el impacto, los impulsos promedio en la direcciones  $x$  y  $y$  están relacionados por  $I_x = \mu I_y$ . Como el instante del impacto es el mismo,  $F_x \Delta t = \mu F_y \Delta t$  o  $F_x = \mu F_y$ .



Probs. 15-84/85

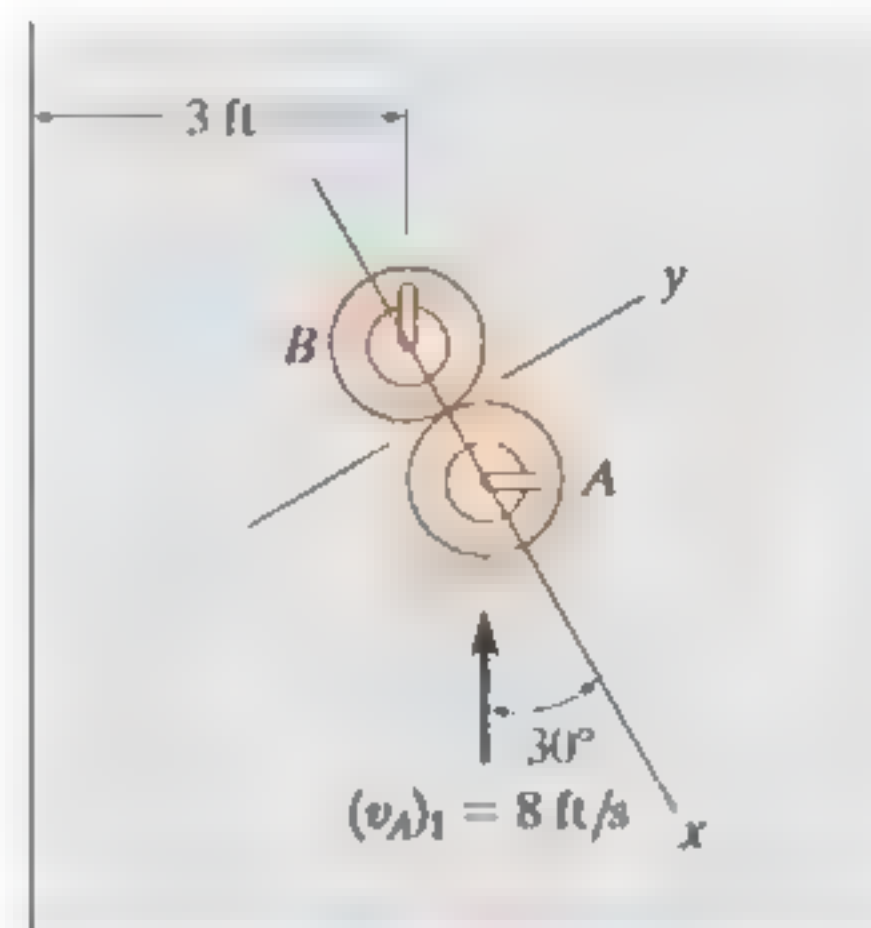
**15-86.** Dos bolas de billar lisas  $A$  y  $B$  tienen una masa de 200 g cada una. Si  $A$  golpea a  $B$  con una velocidad  $(v_A)_1 = 1.5 \text{ m/s}$  como se muestra, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. La bola  $B$  está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es  $e = 0.85$ . Desprecie el tamaño de cada bola.



Prob. 15-86

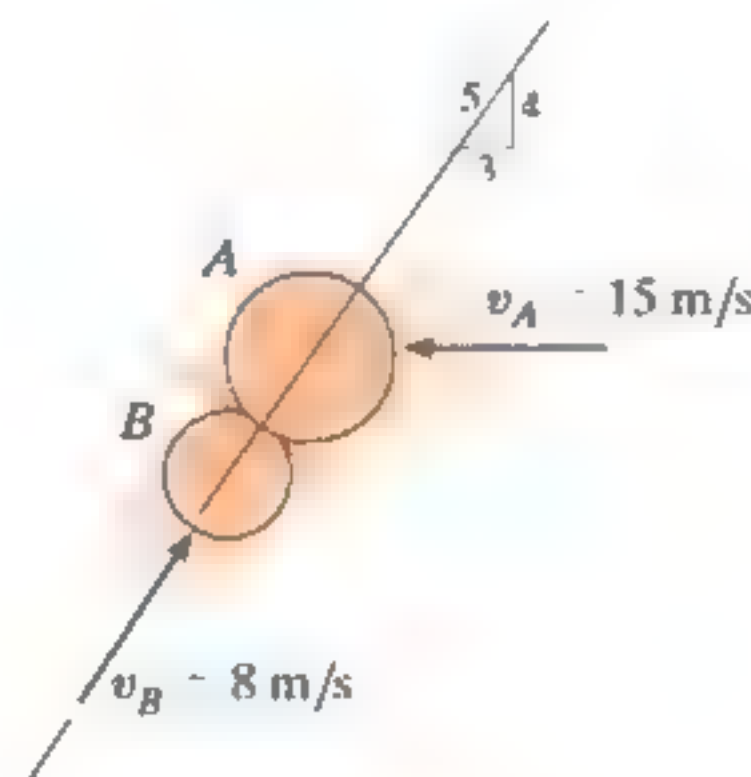
**15-87.** La "piedra"  $A$  usada en el deporte del curling se desliza sobre la pista de hielo y golpea otra "piedra"  $B$  como se indica. Si cada "piedra" es lisa y tiene un peso de 47 lb, y el coeficiente de restitución entre las "piedras" es  $e = 0.8$ , determine su velocidad justo después de la colisión. Inicialmente  $A$  tiene una velocidad de 8 ft/s y  $B$  está en reposo. Desprecie la fricción.

**\*15-88.** La "piedra"  $A$  usada en el deporte del curling se desliza sobre la pista de hielo y golpea otra "piedra"  $B$  como se muestra. Si cada "piedra" es lisa y tiene un peso de 47 lb, y el coeficiente de restitución entre las "piedras" es  $e = 0.8$ , determine el tiempo requerido justo después de la colisión para que  $B$  se deslice fuera de la pista. Esto requiere que la componente horizontal del desplazamiento sea de 3 ft.



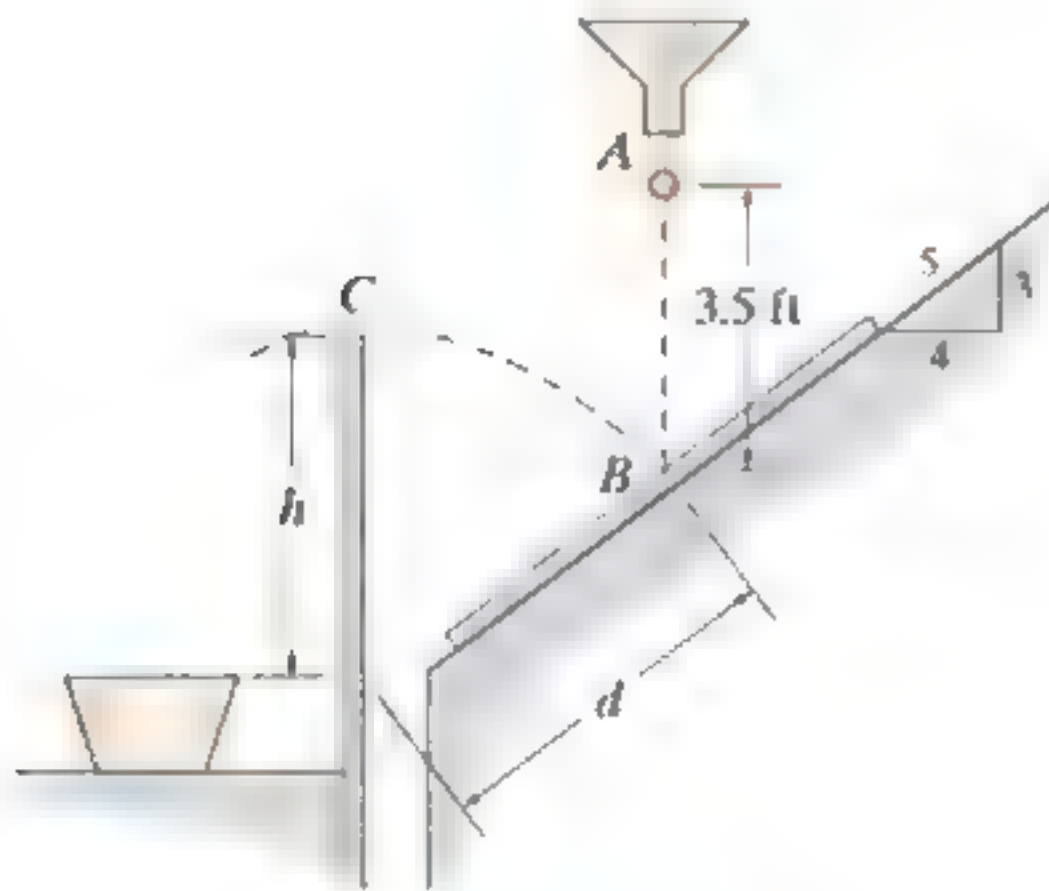
Probs. 15-87/88

**15-89.** Dos discos lisos  $A$  y  $B$  tienen las velocidades iniciales mostradas justo antes de chocar uno contra otro. Si tienen masas  $m_A = 4 \text{ kg}$  y  $m_B = 2 \text{ kg}$ , determine la rapidez de cada uno de ellos justo después del impacto. El coeficiente de restitución es  $e = 0.8$ .



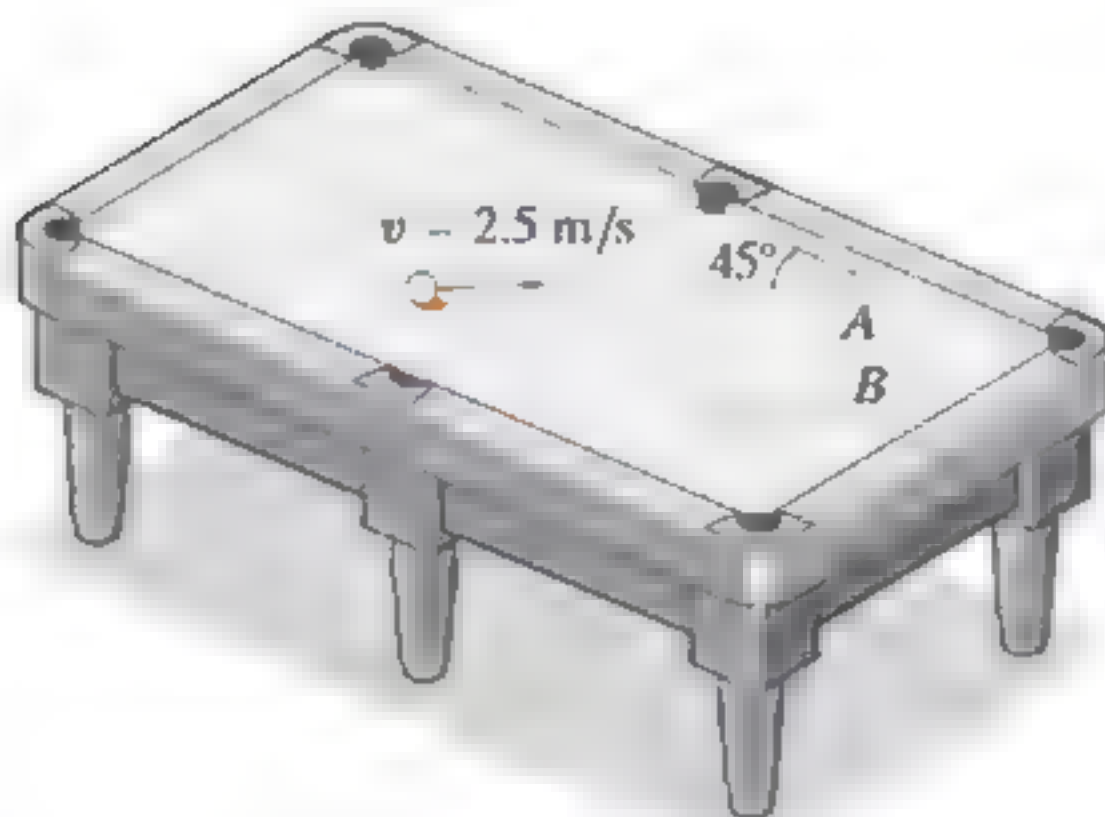
Prob. 15-89

**15-90.** Antes de que un arándano pueda llegar a su plato de comida, debe pasar una prueba de rebote que califica su calidad. Si se aceptan los arándanos que tienen un  $e \geq 0.8$ , determine las dimensiones  $d$  y  $h$  para la barrera, de modo que cuando un arándano caiga desde el reposo en  $A$  golpee la pendiente en  $B$  y rebote por encima de la barrera en  $C$ .



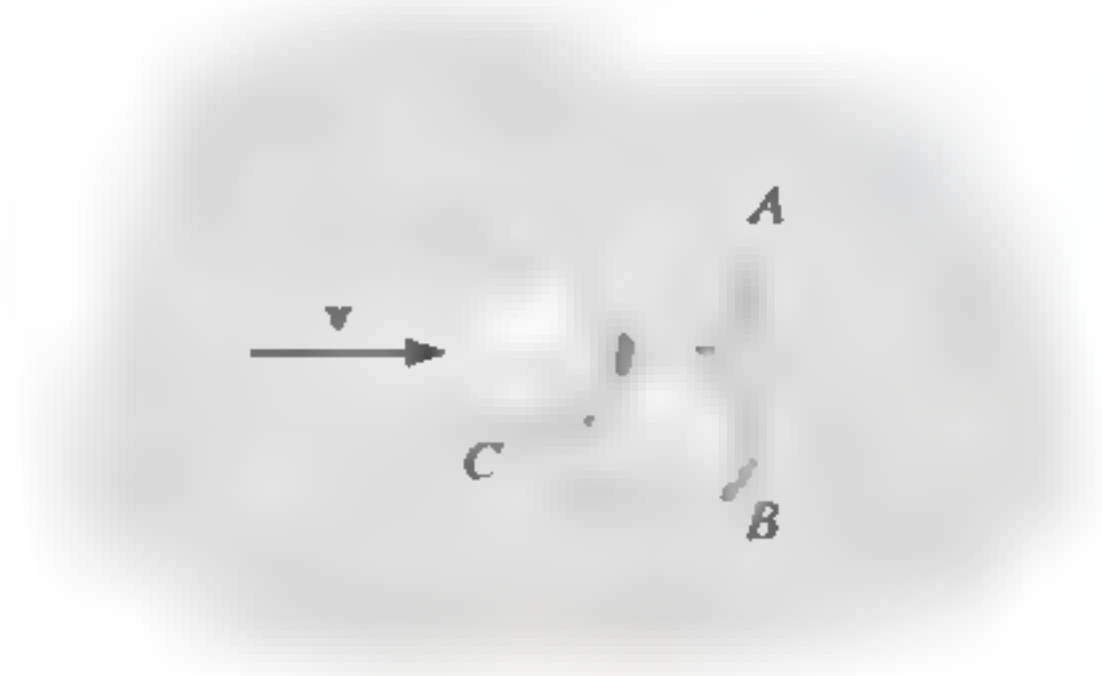
Prob. 15-90

**15-91.** La bola de billar de 200 g se mueve con una rapidez de 2.5 m/s cuando golpea el lado de la mesa de billar en  $A$ . Si el coeficiente de restitución entre la bola y el lado de la mesa es  $e = 0.6$ , determine la rapidez de la bola justo después de golpear la mesa dos veces, es decir, en  $A$  y luego en  $B$ . Desprecie el tamaño de la bola.



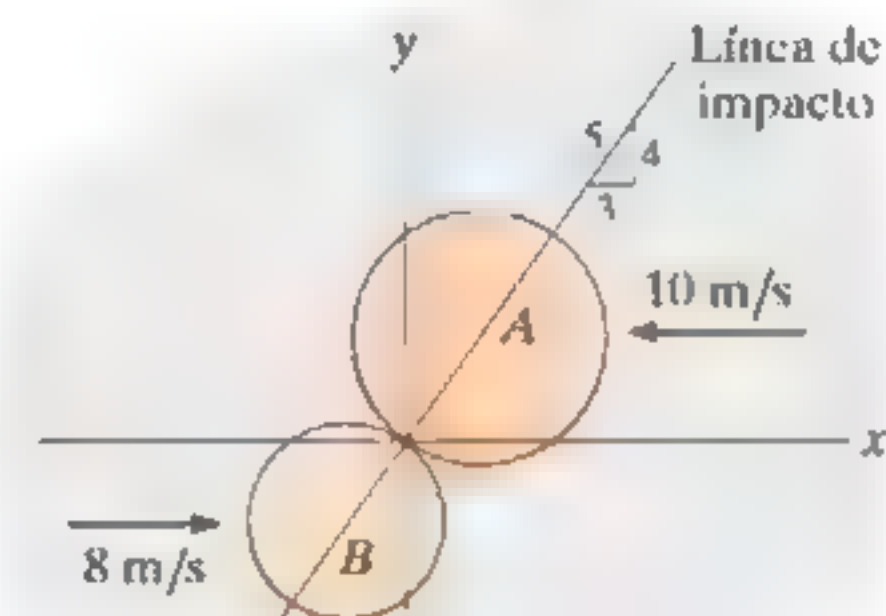
Prob. 15-91

**15-92.** Las dos bolas de billar  $A$  y  $B$  están originalmente en contacto entre sí, cuando una tercera bola  $C$  golpea cada una de ellas al mismo tiempo, como se indica en la figura. Si la bola  $C$  permanece en reposo después de la colisión, determine el coeficiente de restitución. Todas las bolas tienen la misma masa. Desprecie el tamaño de las bolas.



Prob. 15-92

**15-93.** Los discos  $A$  y  $B$  tienen una masa de 15 kg y 10 kg, respectivamente. Si se deslizan sobre un plano horizontal liso con las velocidades mostradas, determine la rapidez de cada disco justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre ellos es  $e = 0.8$ .



Prob. 15-93

## 15.5 Cantidad de movimiento angular

La *cantidad de movimiento angular* de una partícula con respecto a un punto  $O$  se define como el “momento” de la cantidad de movimiento lineal de la partícula con respecto a  $O$ . Como este concepto es similar a determinar el momento de una fuerza con respecto a un punto, la cantidad de movimiento angular,  $\mathbf{H}_O$ , en ocasiones se conoce como el *momento de cantidad de movimiento*.

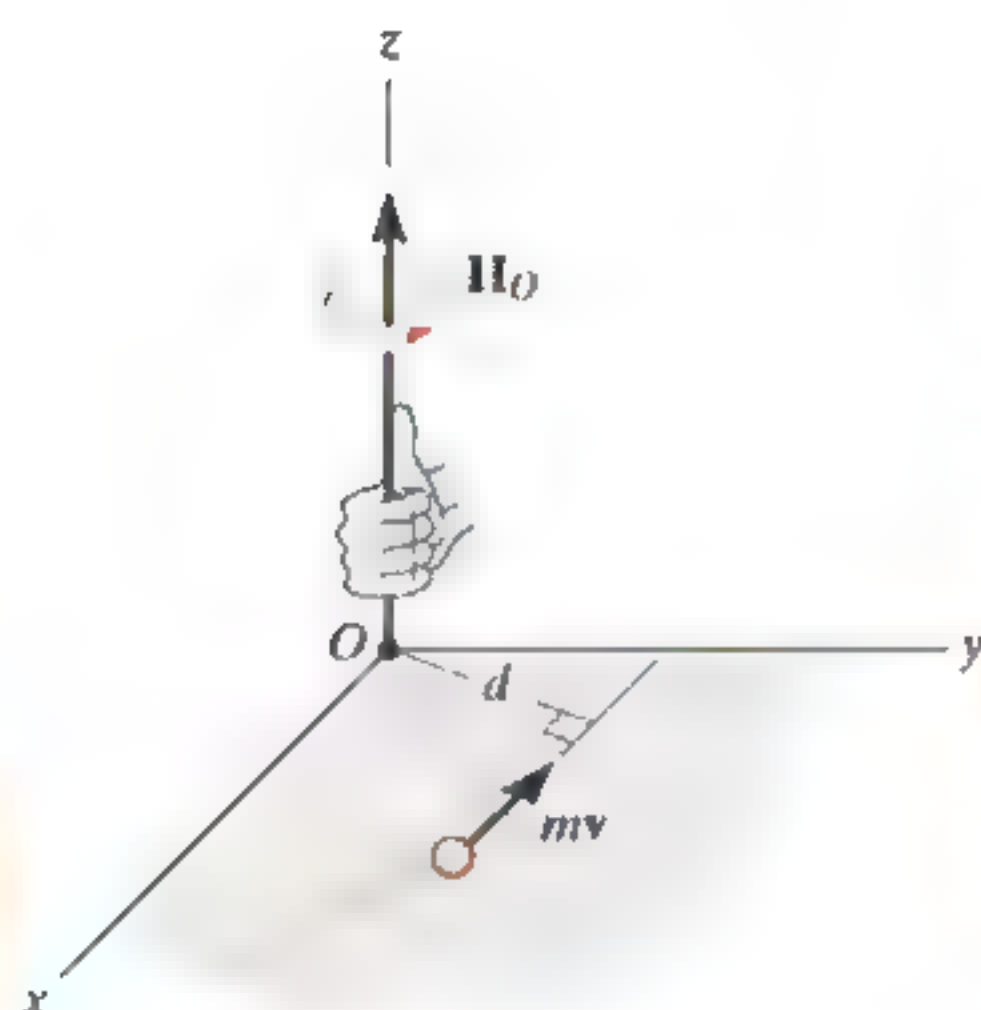


Fig. 15-19

**Ejemplo 15-1** Si una partícula se mueve a lo largo de una curva situada en el plano  $x$ - $y$  (fig. 15-19), la cantidad de movimiento angular en cualquier instante se determina con respecto al punto  $O$  (en realidad el eje  $z$ ) por medio de una formulación escalar. La *magnitud* de  $\mathbf{H}_O$  es

$$(H_O)_z = (d)(mv) \quad (15-12)$$

Aquí,  $d$  es el brazo de momento o distancia perpendicular de  $O$  a la línea de acción de  $mv$ . Unidades comunes para  $(H_O)_z$  son  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  o  $\text{slug} \cdot \text{ft}^2/\text{s}$ . La *dirección* de  $\mathbf{H}_O$  se define con la regla de la mano derecha. Como se muestra, la curva de los dedos de la mano derecha indica el sentido de rotación de  $mv$  con respecto a  $O$ , de manera que, en este caso, el pulgar (o  $\mathbf{H}_O$ ) está dirigido perpendicular al plano  $x$ - $y$  a lo largo del eje  $+z$ .

**Ejemplo 15-2** Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial (fig. 15-20), el producto vectorial (o producto cruz) puede utilizarse para determinar la *cantidad de movimiento angular* con respecto a  $O$ . En este caso,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (15-13)$$

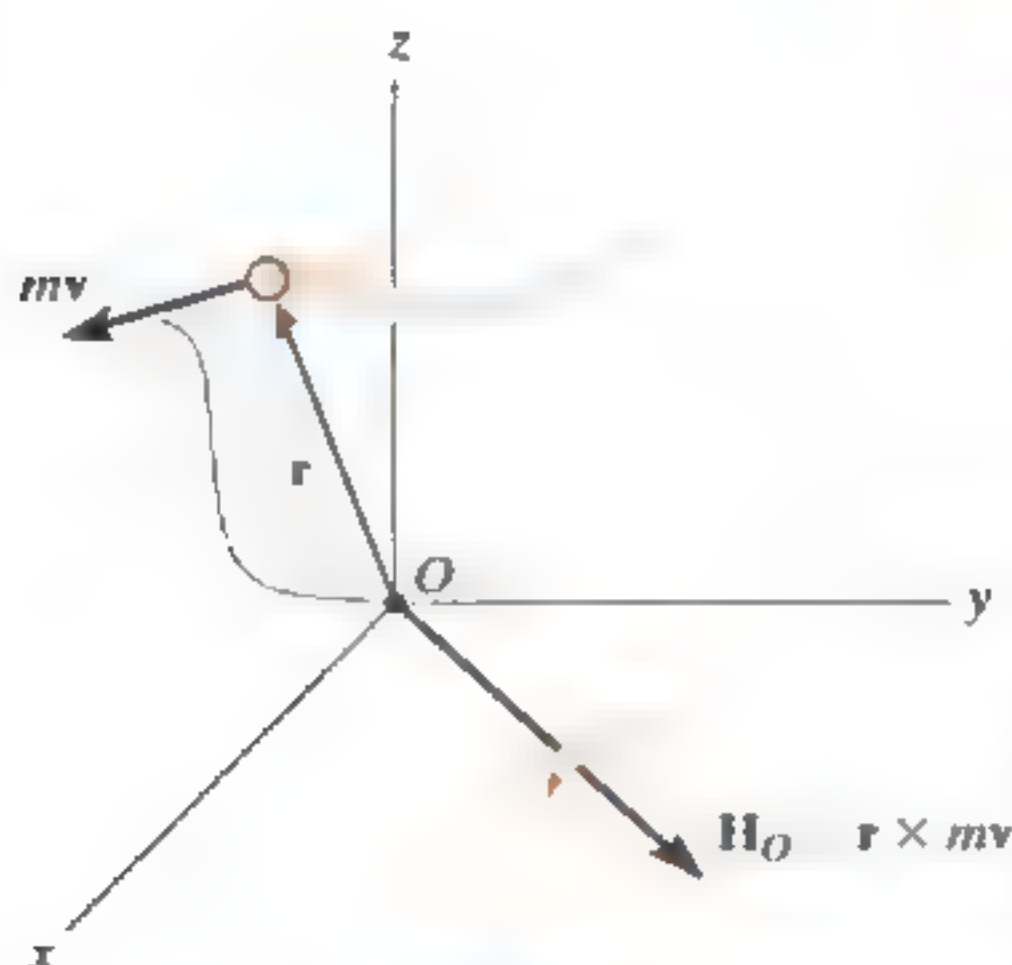


Fig. 15-20

Aquí,  $\mathbf{r}$  denota un vector de posición trazado del punto  $O$  a la partícula. Como se muestra en la figura,  $\mathbf{H}_O$  es *perpendicular* al plano sombreado que contiene  $\mathbf{r}$  y  $m\mathbf{v}$ .

Para evaluar el producto vectorial,  $\mathbf{r}$  y  $m\mathbf{v}$  deberán expresarse en función de sus componentes cartesianas, de modo que la cantidad de movimiento angular se obtiene al evaluar el determinante:

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (15-14)$$

## 15.6 Relación entre el momento de una fuerza y la cantidad de movimiento angular

Los momentos con respecto al punto  $O$  de todas las fuerzas que actúan en la partícula de la figura 15-21a pueden relacionarse con su cantidad de movimiento angular aplicando la ecuación de movimiento. Si la masa de la partícula es constante, podemos escribir

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{\dot{v}}$$

Los momentos de las fuerzas con respecto al punto  $O$  se obtienen mediante una multiplicación de producto vectorial, en ambos lados de esta ecuación, por el vector de posición  $\mathbf{r}$ , el cual se mide con respecto al marco de referencia inercial  $x, y, z$ . Tenemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{\dot{v}}$$

Según el apéndice B, la derivada de  $\mathbf{r} \times m\mathbf{\dot{v}}$  se escribe como

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{\dot{v}}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{\dot{v}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{v}}$$

El primer término del lado derecho,  $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{\dot{v}} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$ , puesto que el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero. Por consiguiente, la ecuación anterior se escribe como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (15-15)$$

la cual establece que *el momento resultante con respecto al punto  $O$ , de todas las fuerzas que actúan en la partícula, es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula con respecto al punto  $O$* . Este resultado es similar a la ecuación 15-1, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (15-16)$$

Aquí  $\mathbf{L} = m\mathbf{\dot{v}}$ , de modo que *la fuerza resultante que actúa en la partícula es igual al cambio con respecto de su cantidad de movimiento angular*.

Por las derivaciones, se observa que las ecuaciones 15-15 y 15-16 en realidad son otra forma de formular la segunda ley de Newton del movimiento. En otras secciones de este libro se demostrará que estas ecuaciones tienen muchas aplicaciones prácticas cuando se amplían y aplican a problemas que incluyen ya sea un sistema de partículas o un cuerpo rígido.

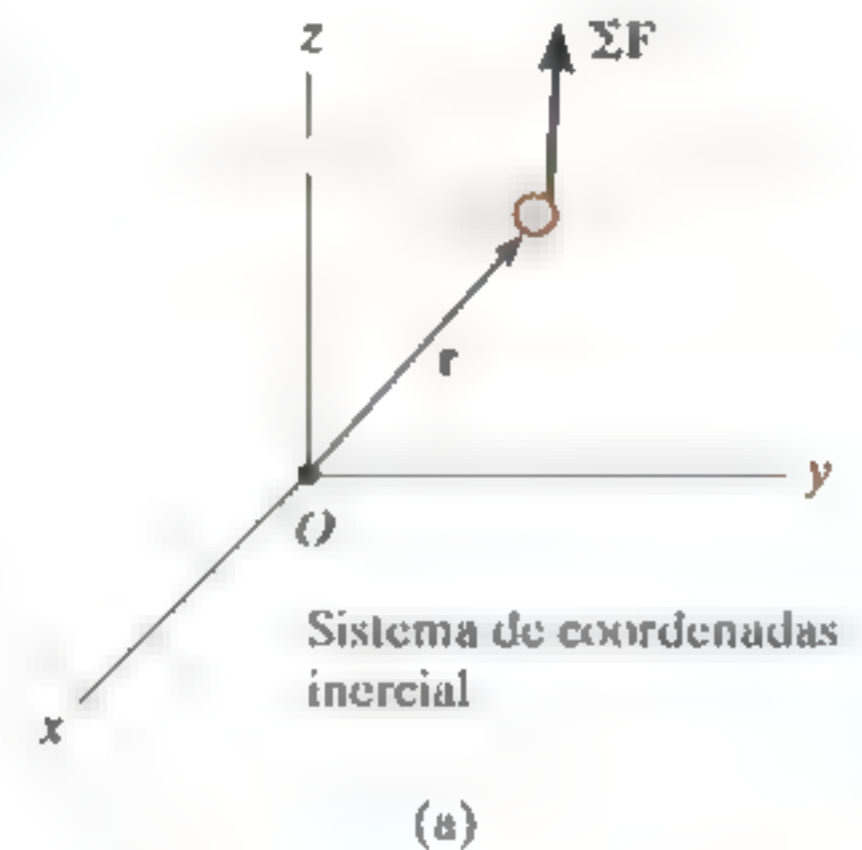


Fig. 15-21

**Sistema de partículas.** Puede derivarse una ecuación con la misma forma que la ecuación 15-15 para el sistema de partículas que se muestra en la figura 15-21b. Las fuerzas que actúan en la partícula  $i$ ésima arbitraria del sistema son una *fuerza externa* resultante  $\mathbf{F}_i$  y una *fuerza interna* resultante  $\mathbf{f}_i$ . Al expresar los momentos de estas fuerzas con respecto al punto  $O$  y con la ecuación 15-15, tenemos

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

Aquí  $(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$  es el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula  $i$ ésima con respecto al punto  $O$ . Pueden escribirse ecuaciones similares para cada una de las demás partículas del sistema. Cuando los resultados se suman vectorialmente, se obtiene

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

El segundo término es cero ya que las fuerzas internas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y, por consiguiente, el momento de cada par con respecto al punto  $O$  es cero. Si no se aplica la notación indexada, la ecuación anterior se escribe en forma simplificada como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (15-17)$$

la cual establece que la *suma de los momentos con respecto al punto  $O$ , de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema de partículas, es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total del sistema con respecto al punto  $O$* . Aunque, en este caso,  $O$  se eligió como el origen de las coordenadas, en realidad puede representar cualquier *punto fijo* en el marco de referencia inercial.

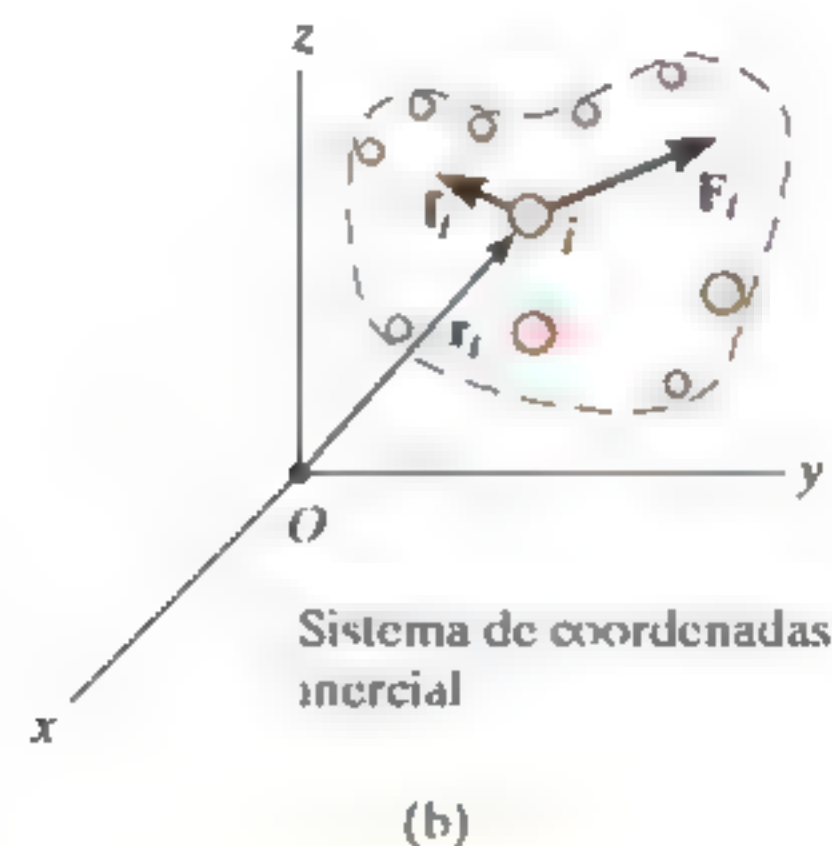


Fig. 15-21 (cont.)

## EJEMPLO

La caja de la figura 15-22a tiene una masa  $m$  y desciende por la rampa circular lisa, de modo que cuando está en el ángulo  $\theta$  su rapidez es  $v$ . Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto  $O$  en este instante y la tasa de incremento de su rapidez, es decir,  $a_t$ .

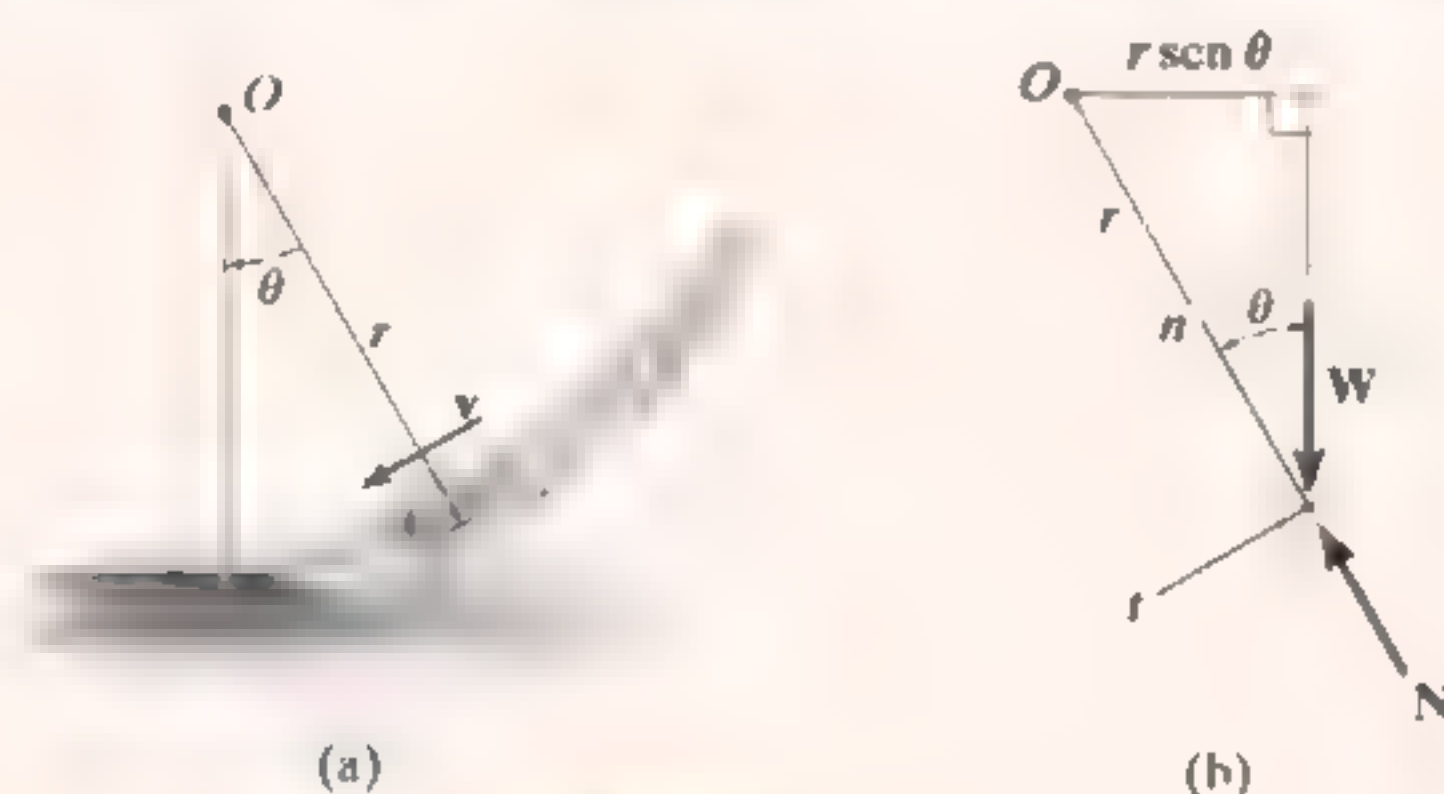


Fig. 15-22

## SOLUCIÓN

Como  $\mathbf{v}$  es tangente a la trayectoria, al aplicar la ecuación 15-12 la cantidad de movimiento angular es

$$H_O = r m v \quad \text{Resp.}$$

La tasa de incremento de su velocidad ( $dv/dt$ ) se determina con la ecuación 15-15. En el diagrama de cuerpo libre de la caja (fig. 15-22b), se observa que sólo el peso  $W = mg$  contribuye con un momento con respecto al punto  $O$ . Entonces,

$$\zeta + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \quad mg(r \sin \theta) = \frac{d}{dt}(r m v)$$

Como  $r$  y  $m$  son constantes,

$$\begin{aligned} mgr \sin \theta &= r m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= g \sin \theta \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

**NOTA:** Este mismo resultado se obtiene, desde luego, con la ecuación de movimiento aplicada en la dirección tangencial (fig. 15-22b), es decir,

$$\begin{aligned} +\zeta \Sigma F_t &= ma_t; \quad mg \sin \theta = m \left( \frac{dv}{dt} \right) \\ \frac{dv}{dt} &= g \sin \theta \end{aligned}$$

## 15.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

**Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares.** Si la ecuación 15-15 se reescribe en la forma  $\Sigma \mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$  y se integra, al suponer que en el instante  $t = t_1$ ,  $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$  y en el instante  $t = t_2$ ,  $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$ , tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

o bien,

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (15-18)$$

Esta ecuación se conoce como el *principio de impulso y cantidad de movimiento angulares*. Los momentos angulares inicial y final  $(\mathbf{H}_O)_1$  y  $(\mathbf{H}_O)_2$  se definen como el momento de la cantidad de movimiento lineal de la partícula ( $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ ) en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente. El segundo término del lado izquierdo,  $\Sigma \int \mathbf{M}_O dt$ , se llama *impulso angular*. Se determina al integrar, con respecto al tiempo, los momentos de todas las fuerzas que actúan en la partícula durante el lapso de tiempo  $t_1$  a  $t_2$ . Como el momento de una fuerza con respecto al punto  $O$  es  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , el impulso angular se expresa en forma vectorial como

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt \quad (15-19)$$

Aquí  $\mathbf{r}$  es un vector de posición que se extiende desde el punto  $O$  hasta cualquier punto de la línea de acción de  $\mathbf{F}$ .

Asimismo, al utilizar la ecuación 15-18, el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares para un sistema de partículas se escribe como

$$\Sigma (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \Sigma (\mathbf{H}_O)_2 \quad (15-20)$$

El primero y tercer términos de esta ecuación representan las cantidades de movimiento angular de todas las partículas  $[\Sigma \mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i)]$  en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . El segundo término es la suma de los impulsos angulares dados a todas las partículas de  $t_1$  a  $t_2$ . Recuerde que estos impulsos son creados sólo por los momentos de las fuerzas externas que actúan en el sistema donde, para la partícula  $i$ ésima,  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ .

**Formulación vectorial.** Con los principios de impulso y cantidad de movimiento es posible, por consiguiente, escribir dos ecuaciones que definan el movimiento de la partícula, es decir, las ecuaciones 15-3 y las ecuaciones 15-18, reformuladas como

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt &= m\mathbf{v}_2 \\ (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt &= (\mathbf{H}_O)_2 \end{aligned} \quad (15-21)$$

**Formulación escalar.** En general, las ecuaciones anteriores pueden expresarse en su forma de componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Si la partícula está limitada a moverse en el plano  $x$ - $y$ , entonces es posible escribir tres ecuaciones escalares para expresar el movimiento, es decir,

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_y)_2 \\ (H_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O dt &= (H_O)_2 \end{aligned} \quad (15-22)$$

Las dos primeras de estas ecuaciones representan el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales en las direcciones  $x$  y  $y$ , que se analizó en la sección 15.1, y la tercera ecuación representa el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al eje  $z$ .

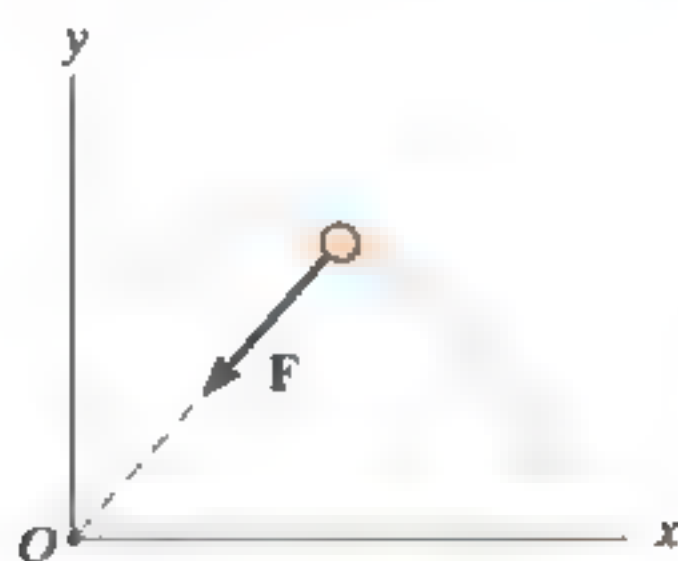


Fig. 15-23

**Conservación de la cantidad de movimiento angular.** Cuando todos los impulsos angulares que actúan en la partícula son cero durante el tiempo  $t_1$  a  $t_2$ , la ecuación 15-18 se reduce a la siguiente forma simplificada:

$$(H_O)_1 = (H_O)_2 \quad (15-23)$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento angular* y establece que de  $t_1$  a  $t_2$  la cantidad de movimiento angular de la partícula permanece constante. Evidentemente, sin ningún impulso externo aplicado a la partícula, se conservarán tanto la cantidad de movimiento lineal como la cantidad de movimiento angular. En algunos casos, sin embargo, la cantidad de movimiento angular de la partícula se conservará, no así la cantidad de movimiento lineal. Un ejemplo de esto ocurre cuando la partícula se somete *sólo* a una *fuerza central* (vea la sección 13.7). Como se muestra en la figura 15-23, la fuerza central impulsora  $F$  siempre está dirigida hacia el punto  $O$  a medida que la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria. Por consiguiente, el impulso (momento) angular creado por  $F$  con respecto al eje  $z$  siempre es cero y, entonces, la cantidad de movimiento angular de la partícula se conserva con respecto a este eje.

De acuerdo con la ecuación 15-20, también podemos escribir la conservación de la cantidad de movimiento angular para un sistema de partículas como

$$\Sigma(H_O)_1 = \Sigma(H_O)_2 \quad (15-24)$$

En este caso la suma debe incluir las cantidades de movimiento angular de todas las partículas del sistema.

### Procedimiento para el análisis

Cuando se aplican los principios de impulso y cantidad de movimiento angulares, o la conservación de la cantidad de movimiento angular, se sugiere que se utilice el siguiente procedimiento.

#### Diagrama de cuerpo libre

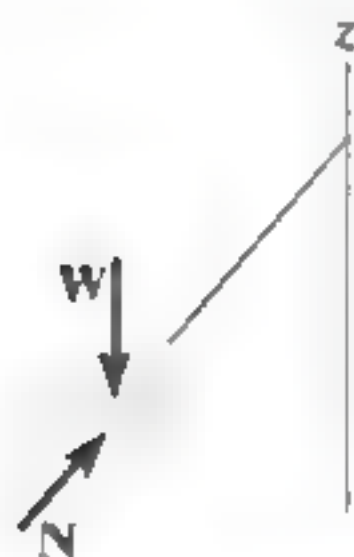
- Trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula para determinar cualquier eje con respecto al cual se pueda conservar la cantidad de movimiento angular. Para que esto ocurra, los momentos de todas las fuerzas (o impulsos) deben ser paralelos o pasar a través del eje para crear un momento cero durante todo el periodo  $t_1$  a  $t_2$ .
- También deben establecerse la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de la partícula.
- Un procedimiento alternativo sería trazar los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la partícula.

#### Ecuaciones de cantidad de movimiento

- Aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares,  $(H_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = (H_O)_2$ , o si es apropiado, la conservación de la cantidad de movimiento angular  $(H_O)_1 = (H_O)_2$ .



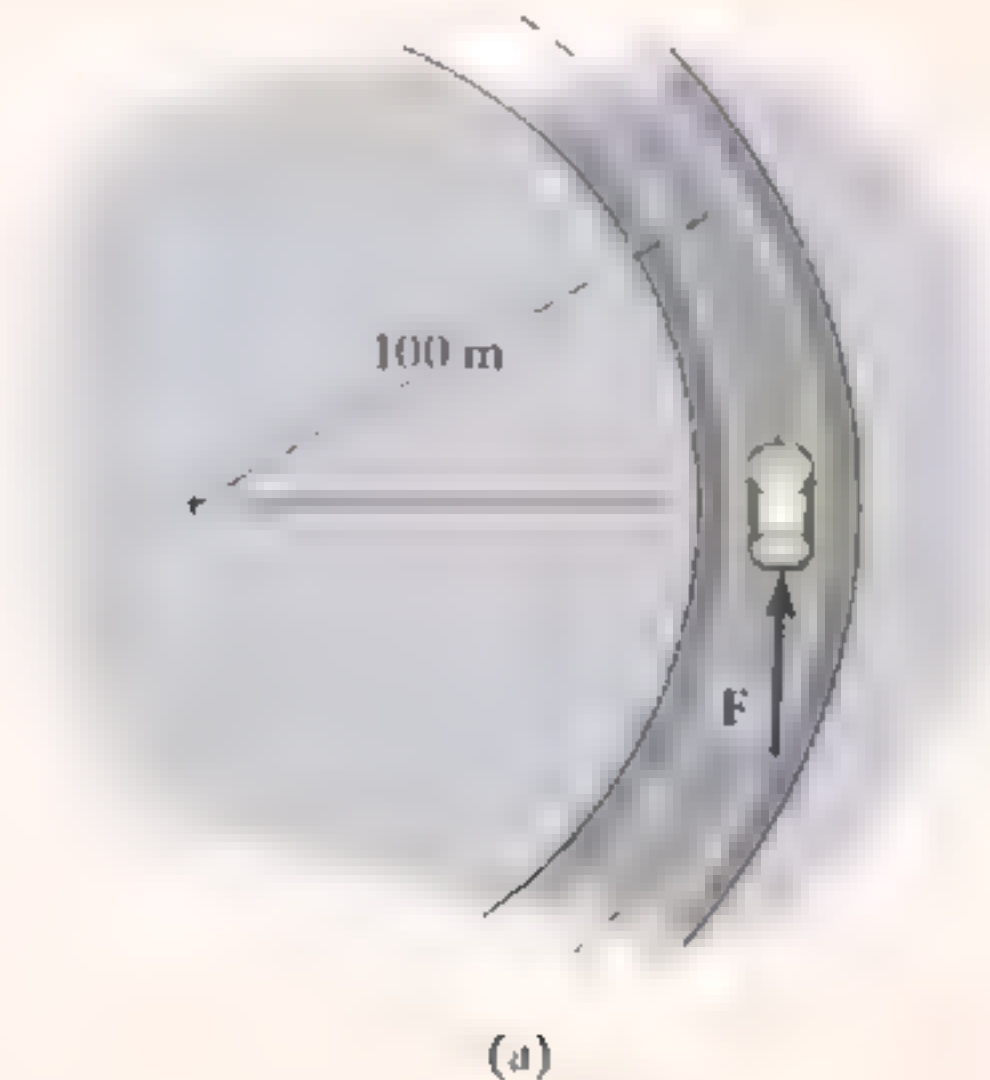
(© Petra Hilke/Fotolia)



Siempre que se omita la resistencia del aire, los pasajeros de este juego mecánico se ven sometidos a una conservación del momento angular con respecto al eje de rotación  $z$ . Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, la línea de acción de la fuerza normal  $N$  del asiento que actúa en el pasajero pasa por este eje y el peso del pasajero  $W$  es paralelo a él. Por lo tanto, alrededor del eje  $z$  no actúa ningún impulso.

## EJEMPLO

El automóvil de 1.5 Mg se desplaza por la curva como se muestra en la figura 15-24a. Si la fuerza de tracción de las ruedas en la carretera es  $F = (150t^2)$  N, donde  $t$  está en segundos, determine la rapidez del automóvil cuando  $t = 5$  s. En un principio el automóvil viaja a una rapidez de 5 m/s. Desprecie el tamaño del automóvil.



**Diagrama de cuerpo libre.** El diagrama de cuerpo libre del automóvil se muestra en la figura 15-24b. Si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al eje  $z$ , entonces se eliminarán el impulso angular creado por el peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción radial, ya que actúan paralelas al eje o pasan a través de él.

## Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

$$\begin{aligned}
 (H_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z dt &= (H_z)_2 \\
 r m_c (v_c)_1 + \int_{t_1}^{t_2} r F dt &= r m_c (v_c)_2 \\
 (100 \text{ m})(1500 \text{ kg})(5 \text{ m/s}) + \int_0^{5 \text{ s}} (100 \text{ m})(150t^2 \text{ N}) dt &= (100 \text{ m})(1500 \text{ kg})(v_c)_2 \\
 750(10^3) + 5000t^3 \Big|_0^{5 \text{ s}} &= 150(10^3)(v_c)_2 \\
 (v_c)_2 &= 9.17 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

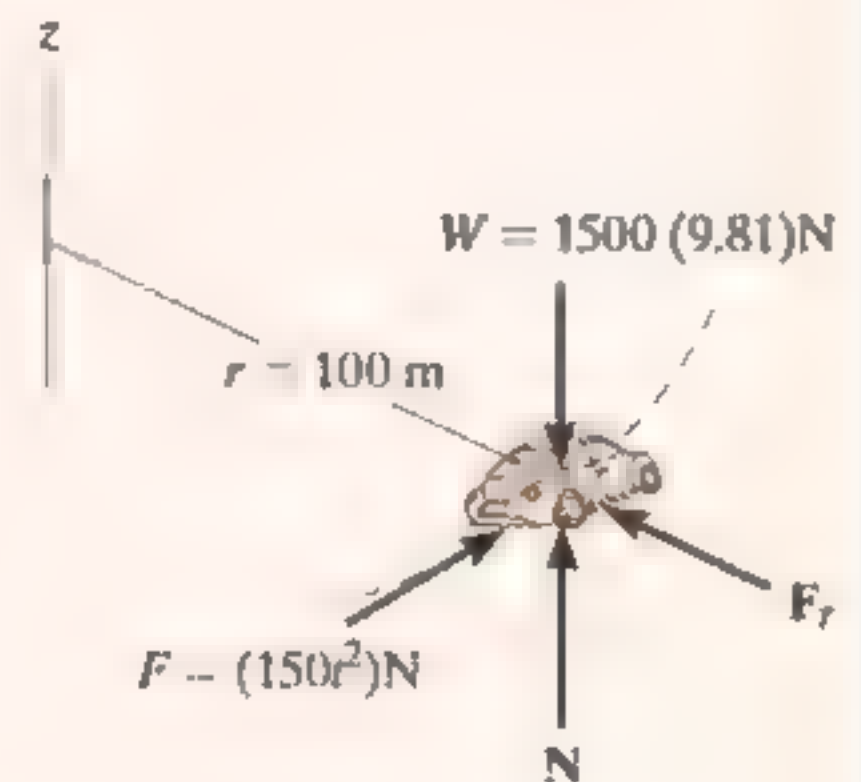


Fig. 15-24

## EJEMPLO 15.12



(a)

La bola  $B$  de 0.8 lb, que se muestra en la figura 15-25a, está sujeta a una cuerda, la cual pasa a través del orificio  $A$  en una mesa lisa. Cuando la bola está a  $r_1 = 1.75$  ft del orificio, gira alrededor de un círculo de modo que su rapidez es  $v_1 = 4$  ft/s. Al aplicar la fuerza  $F$  la cuerda se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante  $v_c = 6$  ft/s. Determine (a) la velocidad de la bola en el instante en que está a  $r_2 = 0.6$  ft del orificio, y (b) la cantidad de trabajo realizada por  $F$  al acortarse la distancia radial de  $r_1$  a  $r_2$ . Ignore el tamaño de la bola.

## SOLUCIÓN

Conforme la bola se mueve de  $r_1$  a  $r_2$  (fig. 15-25b), la fuerza  $F$  de la cuerda que actúa en la bola siempre pasa a través del eje  $z$  y el peso y  $N_B$  son paralelos a ella. De ahí que los momentos, o impulsos angulares creados por estas fuerzas, sean *cero* con respecto a este eje. Por consiguiente, la cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al eje  $z$ .

**Conservación de la cantidad de movimiento angular.** La velocidad de la bola  $v_2$  se divide en dos componentes. Se conoce la componente radial, 6 ft/s; sin embargo, produce una cantidad de movimiento angular *cero* con respecto al eje  $z$ . Por lo tanto,

$$H_1 = H_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_2'$$

$$1.75 \text{ ft} \left( \frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) 4 \text{ ft/s} = 0.6 \text{ ft} \left( \frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) v_2'$$

$$v_2' = 11.67 \text{ ft/s}$$

La rapidez de la bola es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{(11.67 \text{ ft/s})^2 + (6 \text{ ft/s})^2} \\ &= 13.1 \text{ ft/s} \end{aligned}$$

**Parte (b).** La única fuerza que realiza trabajo en la bola es  $F$ . (La fuerza normal y el peso no se desplazan verticalmente.) Las energías cinéticas inicial y final de la bola se determinan, de manera que con el principio del trabajo y energía, tenemos

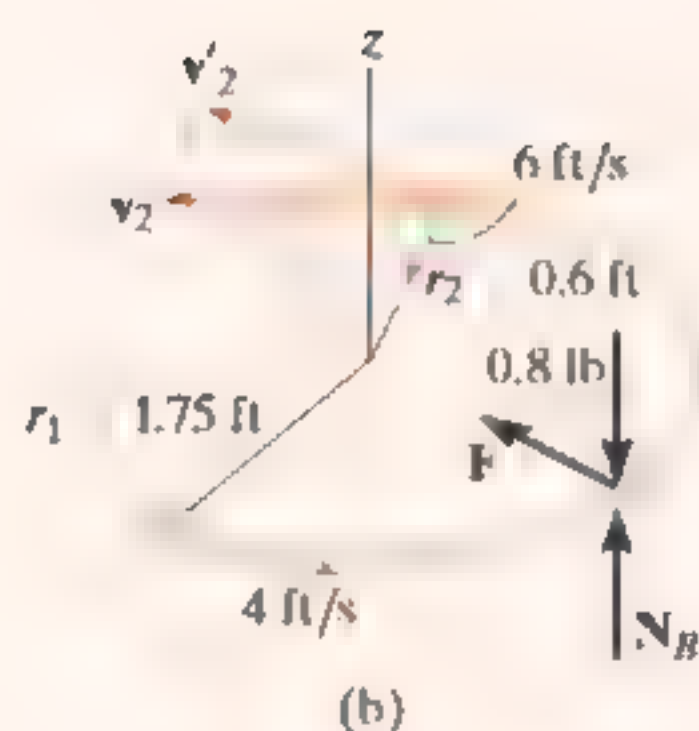
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (4 \text{ ft/s})^2 + U_F = \frac{1}{2} \left( \frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (13.1 \text{ ft/s})^2$$

$$U_F = 1.94 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

*Resp.*

**NOTA:** La fuerza  $F$  no es constante porque la componente normal de aceleración,  $a_n = v^2/r$ , cambia a medida que  $r$  cambia.



(b)

Fig. 15-25

## EJEMPLO

El disco de 2 kg de la figura 15-26a descansa sobre una superficie horizontal lisa y está sujeto a una cuerda elástica, cuya rigidez es  $k_c = 20 \text{ N/m}$ , e inicialmente no está estirada. Si al disco se le imparte una velocidad dada  $(v_D)_1 = 1.5 \text{ m/s}$ , perpendicular a la cuerda, determine la razón a la cual la cuerda se estira y la rapidez del disco en el instante en que la cuerda se alarga es 0.2 m.

## SOLUCIÓN

Después de que se lanza el disco, se desliza a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 15-26b. Por inspección, se *conserva* la cantidad de movimiento angular con respecto al punto  $O$  (o el eje  $z$ ), ya que ninguna de las fuerzas produce un impulso angular con respecto a este eje. Además, cuando la distancia es de 0.7 m, sólo la componente transversal  $(v'_D)_2$  produce cantidad de movimiento angular del disco con respecto a  $O$ .

**Conservación de la cantidad de movimiento angular.** La componente  $(v'_D)_2$  se obtiene aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje  $O$  (el eje  $z$ ).

$$\begin{aligned} (H_O)_1 &= (H_O)_2 \\ r_1 m_D (v_D)_1 &= r_2 m_D (v'_D)_2 \\ 0.5 \text{ m} (2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) &= 0.7 \text{ m}(2 \text{ kg})(v'_D)_2 \\ (v'_D)_2 &= 1.071 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Conservación de la energía.** La rapidez del disco se obtiene mediante la ecuación de conservación de la energía en el punto donde se lanzó el disco y en el punto donde la cuerda se alargó 0.2 m.

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\ \frac{1}{2} m_D (v_D)_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 &= \frac{1}{2} m_D (v_D)_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \\ \frac{1}{2} (2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s})^2 + 0 &= \frac{1}{2} (2 \text{ kg})(v_D)_2^2 + \frac{1}{2} (20 \text{ N/m})(0.2 \text{ m})^2 \\ (v_D)_2 &= 1.360 \text{ m/s} = 1.36 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Resp.

Ya determinado  $(v_D)_2$  y su componente  $(v'_D)_2$ , la tasa de alargamiento de la cuerda, o componente radial,  $(v''_D)_2$  se determina con el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} (v''_D)_2 &= \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2} \\ &= \sqrt{(1.360 \text{ m/s})^2 - (1.071 \text{ m/s})^2} \\ &= 0.838 \text{ m/s} \end{aligned}$$

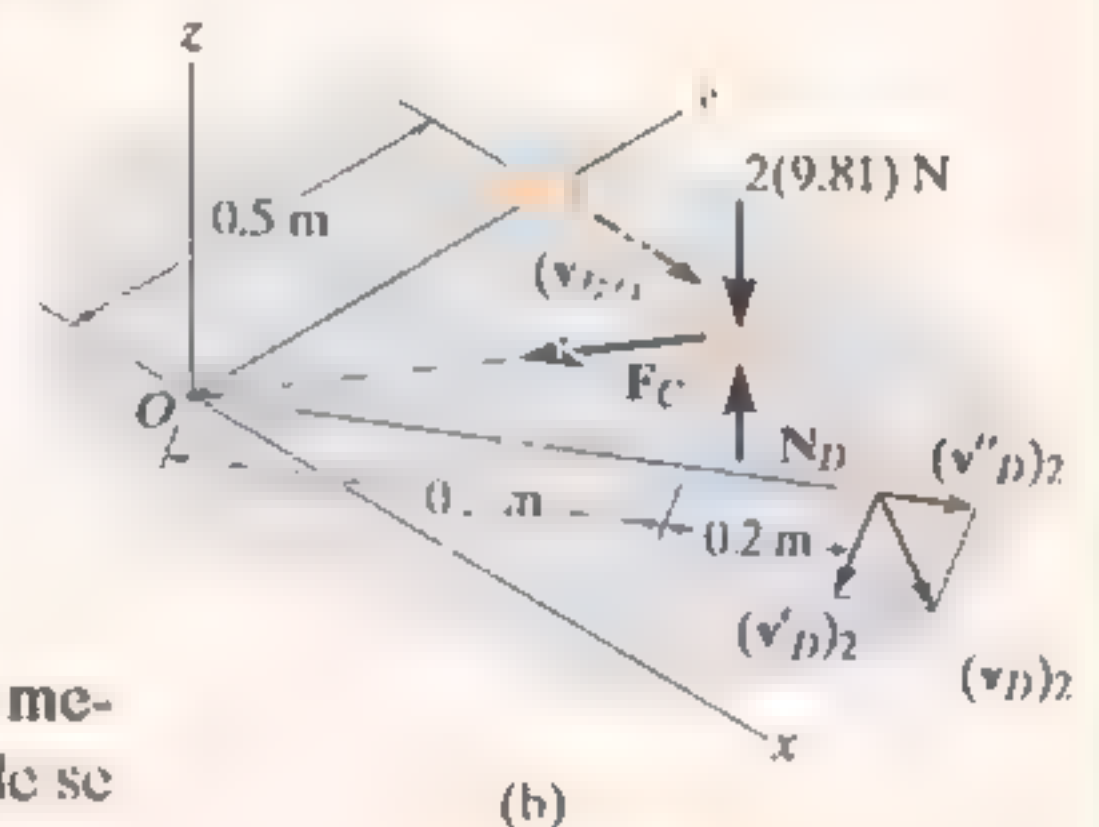
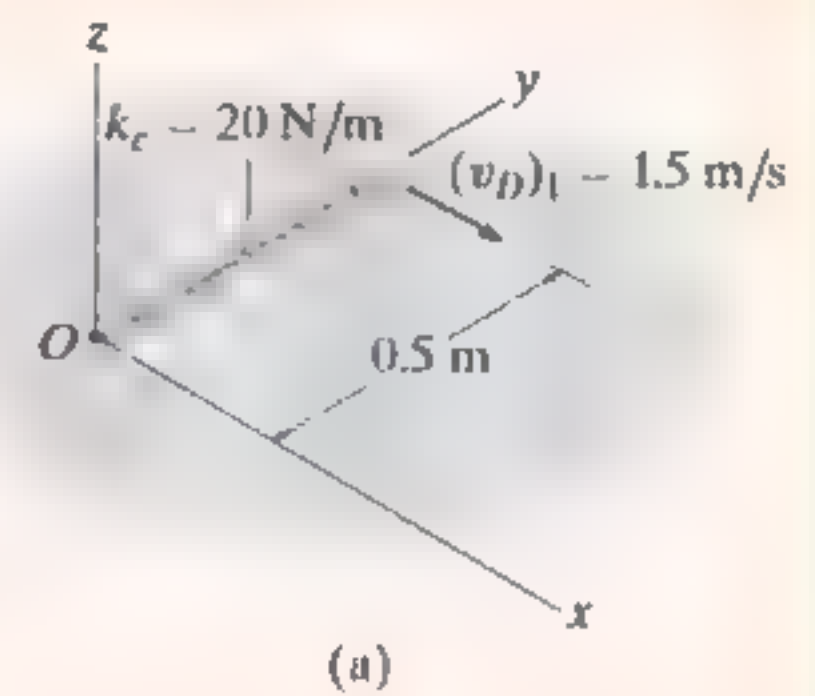
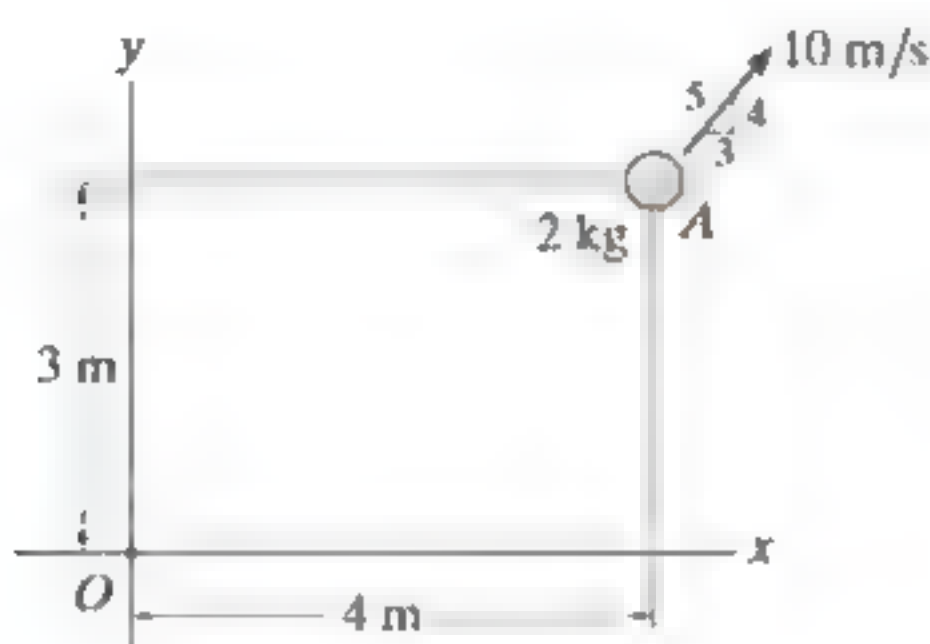


Fig. 15-26

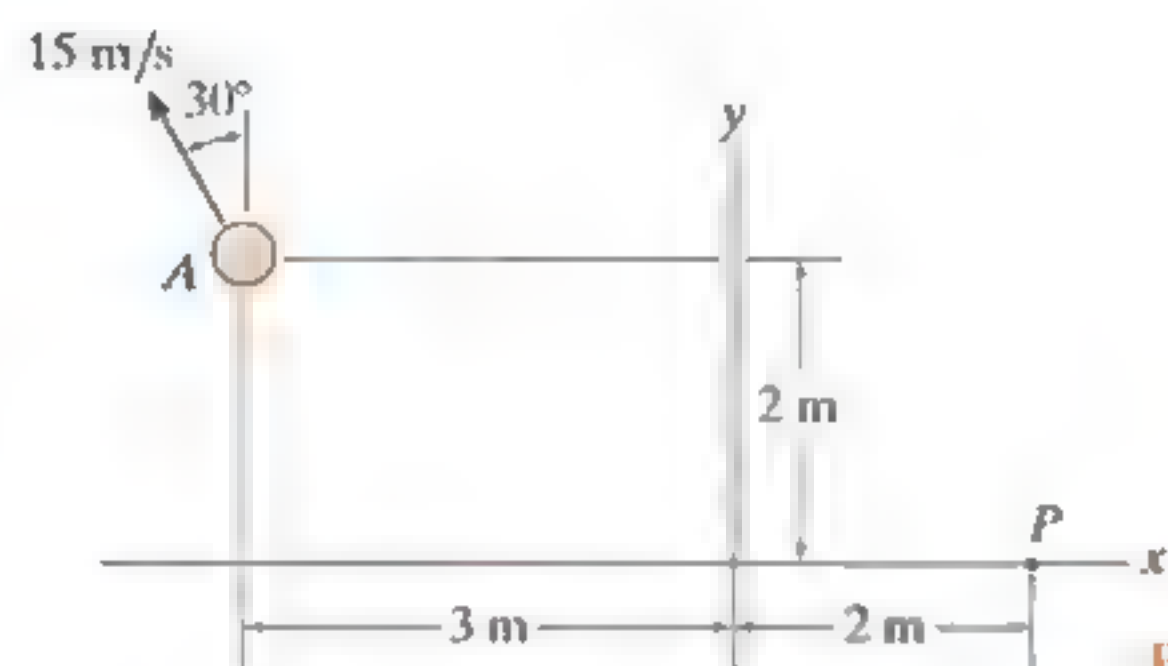
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F15-19.** La partícula  $A$  de 2 kg tiene la velocidad que se muestra. Determine su cantidad de movimiento angular  $H_O$  con respecto al punto  $O$ .



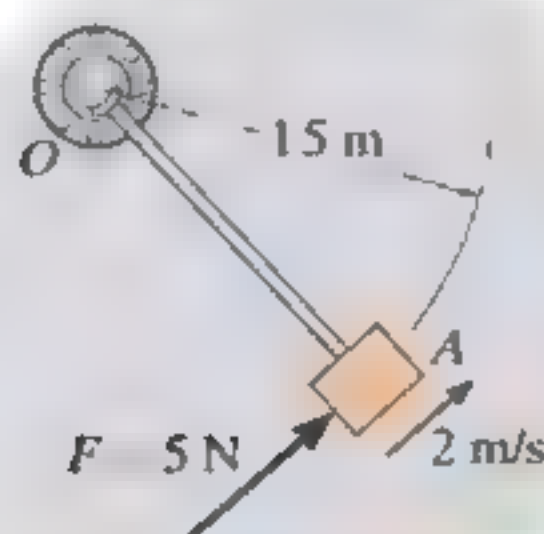
Prob. F15-19

**F15-20.** La partícula  $A$  de 2 kg tiene la velocidad que se muestra. Determine su cantidad de movimiento angular  $H_P$  con respecto al punto  $P$ .



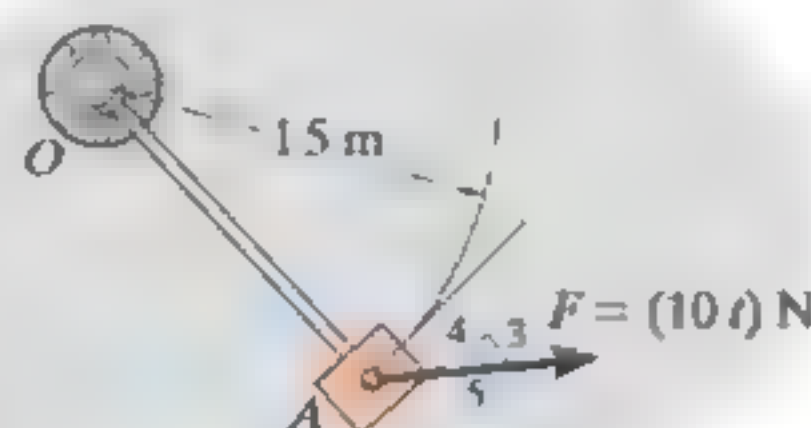
Prob. F15-20

**F15-21.** Inicialmente, el bloque de 5 kg gira con una velocidad constante de 2 m/s alrededor de la trayectoria circular con centro en  $O$  sobre el plano horizontal liso. Si se aplica una fuerza tangencial constante  $F = 5$  N al bloque, determine su rapidez cuando  $t = 3$  s. Ignore el tamaño del bloque.



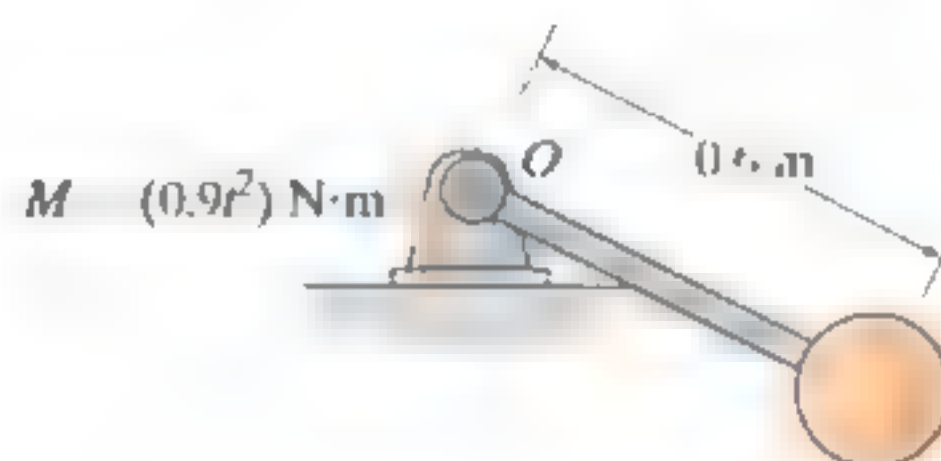
Prob. F15-21

**F15-22.** El bloque de 5 kg se mueve alrededor de la trayectoria circular con centro en  $O$  sobre el plano horizontal liso, cuando se somete a la fuerza  $F = (10t)$  N, donde  $t$  está en segundos. Si el bloque comienza a moverse a partir del punto de reposo, determine su rapidez cuando  $t = 4$  s. Ignore el tamaño del bloque. La fuerza mantiene el mismo ángulo constante tangente a la trayectoria.



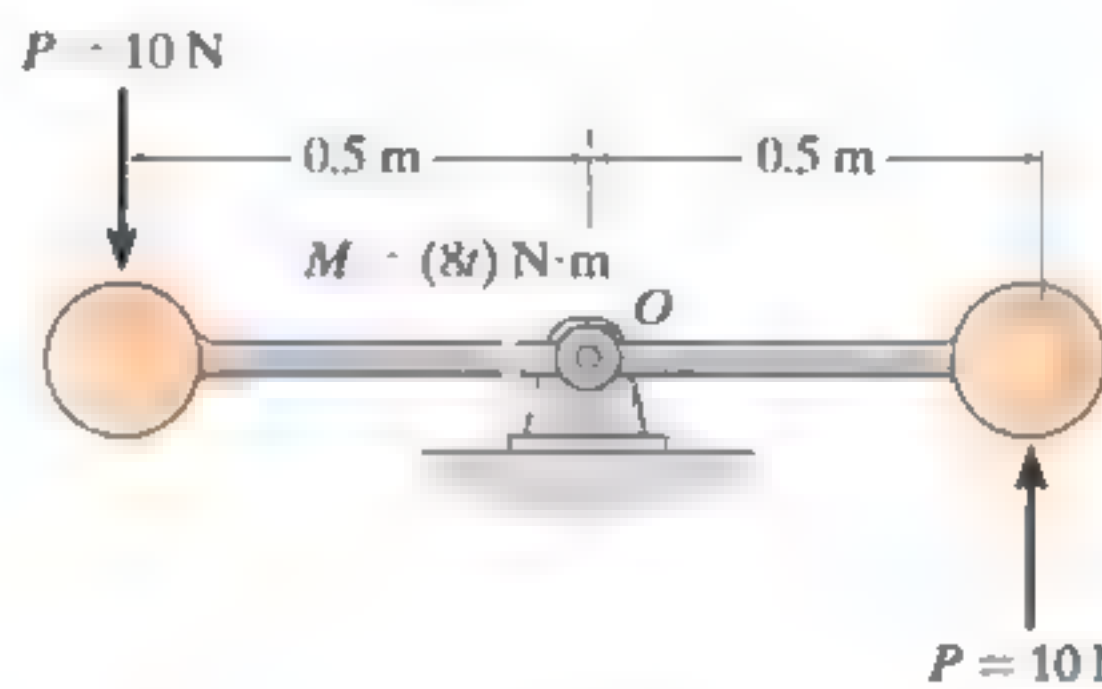
Prob. F15-22

**F15-23.** La esfera de 2 kg está unida a la varilla rígida ligera, la cual gira en el plano horizontal con centro en  $O$ . Si el sistema se somete a un momento de par  $M = (0.9t^2)$  N · m, donde  $t$  está en segundos, determine la rapidez de la esfera en el instante  $t = 5$  s a partir del punto de reposo.



Prob. F15-23

**F15-24.** Dos esferas idénticas de 10 kg están unidas a la varilla rígida ligera, la cual gira en el plano horizontal con centro en  $O$ . Si las esferas se someten a fuerzas tangenciales de  $P = 10$  N y la varilla se somete a un momento de par  $M = (0.8t)$  N · m, donde  $t$  está en segundos, determine la rapidez de las esferas en el instante  $t = 4$  s. El sistema comienza a moverse a partir del punto de reposo. Ignore el tamaño de las esferas.

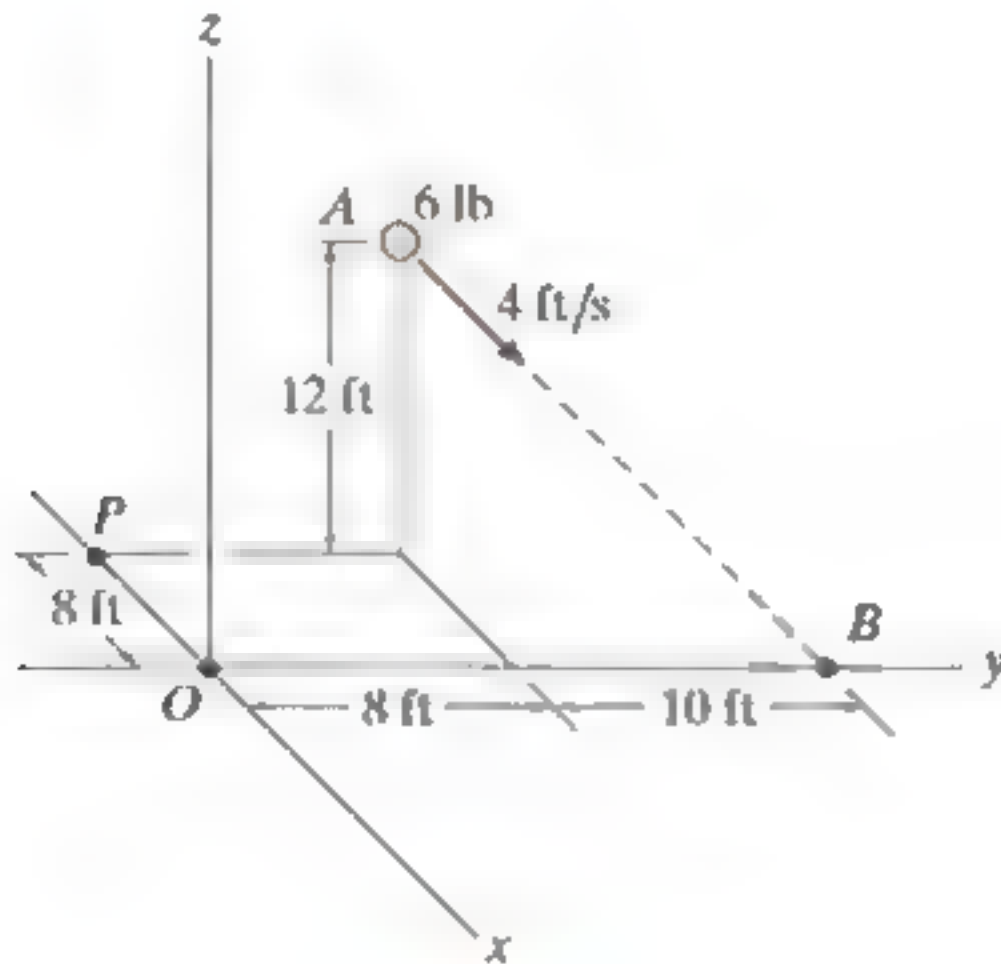


Prob. F15-24

## PROBLEMAS

15-94. Determine el momento angular  $H_O$  de la partícula de 6 lb con respecto al punto  $O$ .

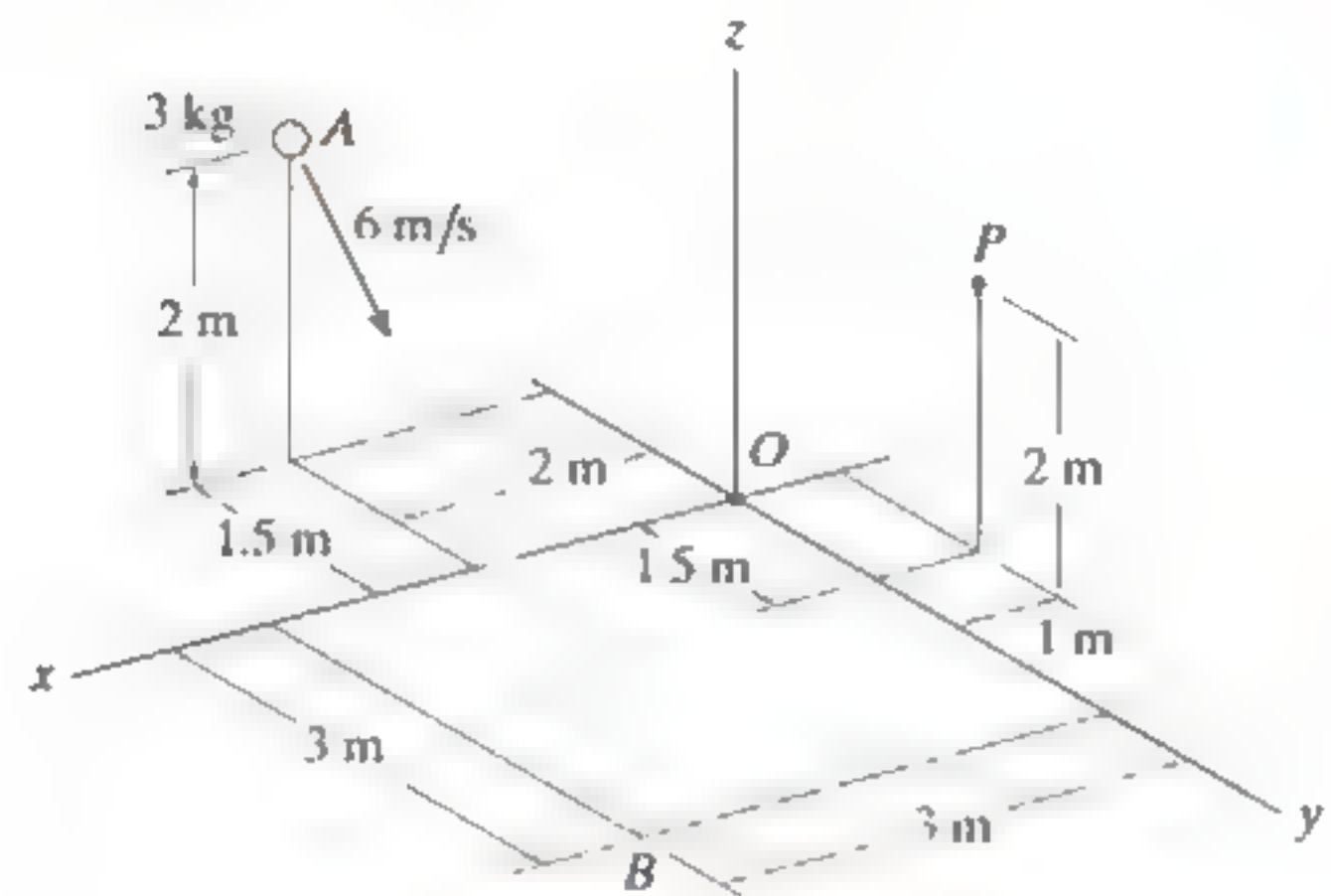
15-95. Determine el momento angular  $H_P$  de la partícula de 6 lb con respecto al punto  $P$ .



Probs. 15-94/95

15-98. Determine el momento angular  $H_O$  de la partícula de 3 kg con respecto al punto  $O$ .

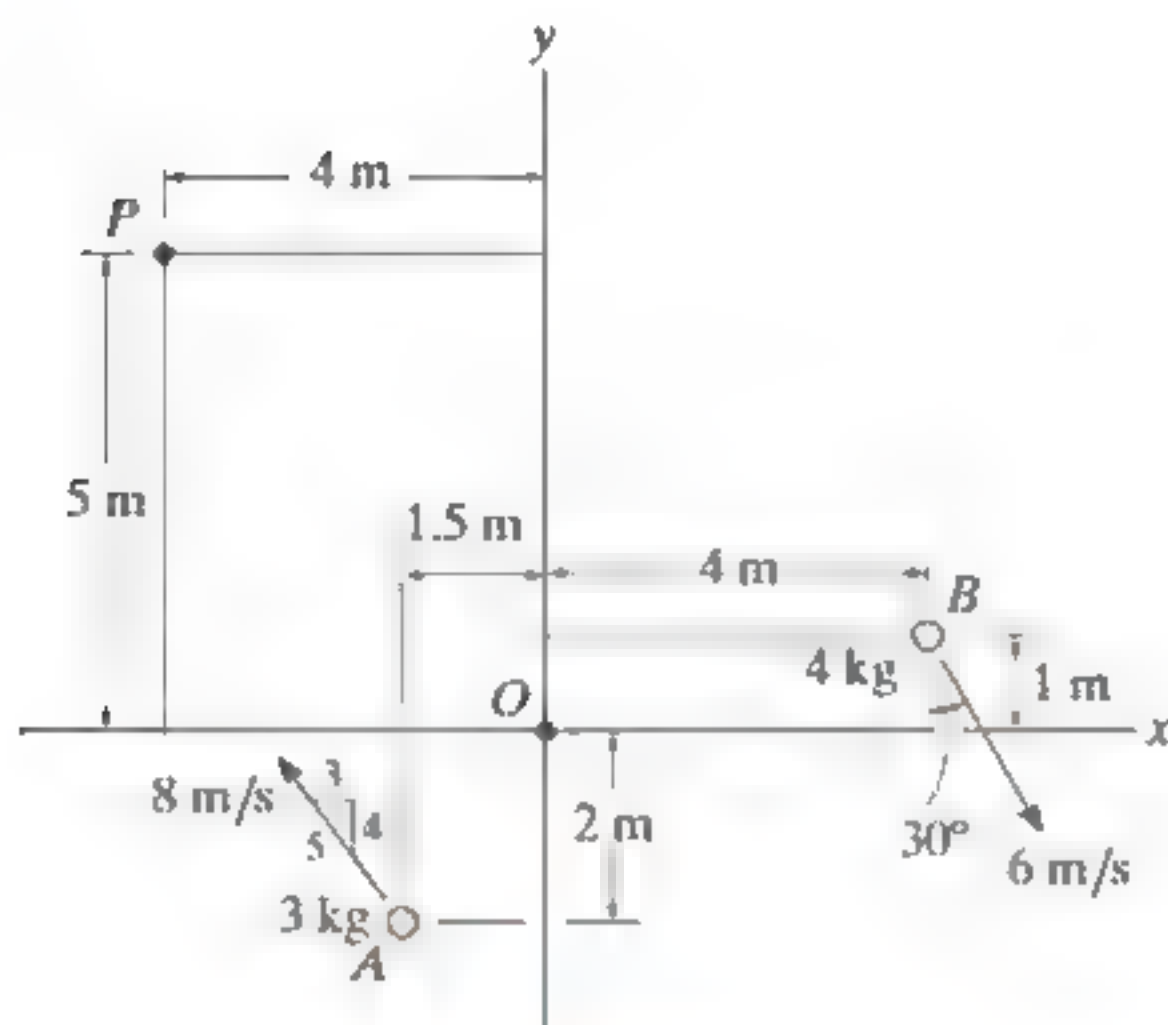
15-99. Determine el momento angular  $H_P$  de la partícula de 3 kg con respecto al punto  $P$ .



Probs. 15-98/99

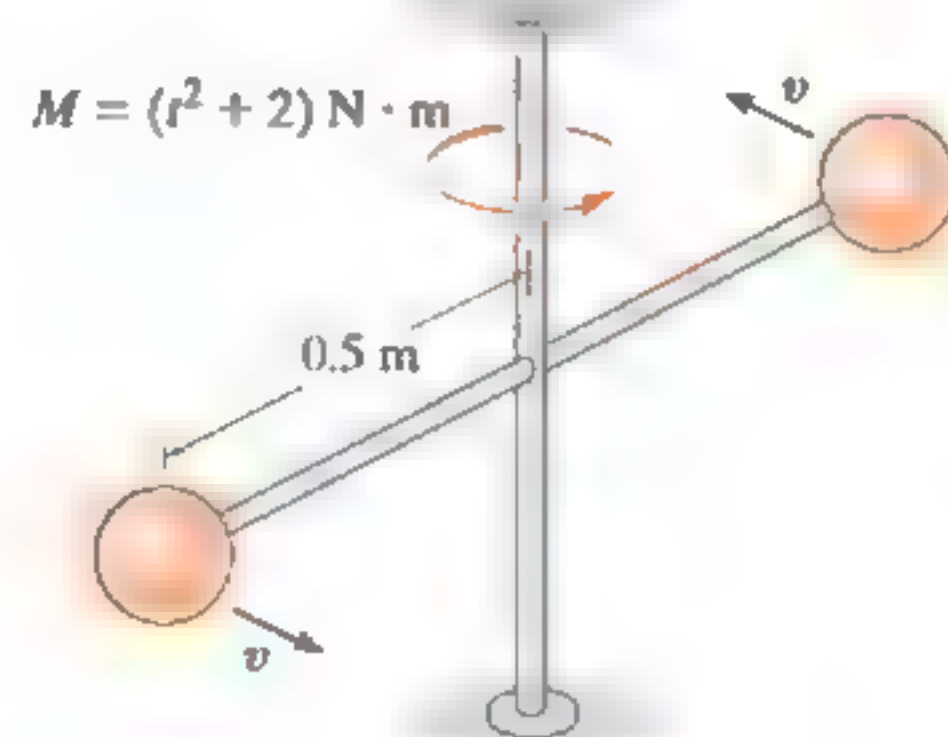
\*15-96. Determine el momento angular  $H_O$  de cada una de las dos partículas con respecto al punto  $O$ .

15-97. Determine el momento angular  $H_P$  de cada una de las dos partículas con respecto al punto  $P$ .



Probs. 15-96/97

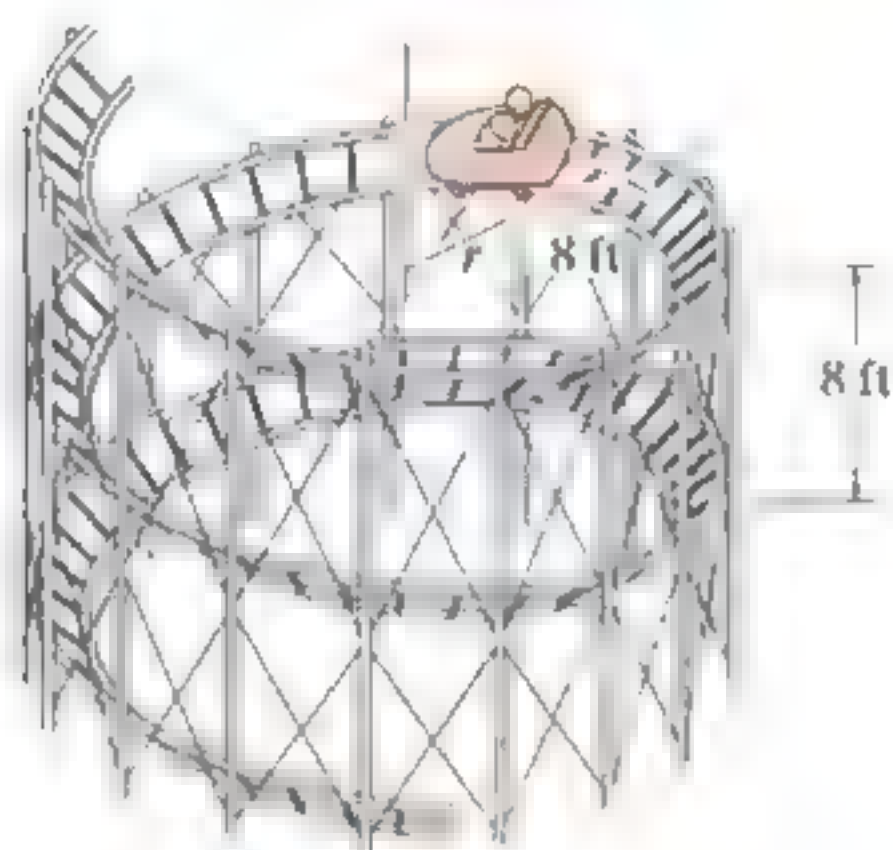
15-100. Cada una de las bolas tiene un tamaño insignificante y una masa de 10 kg, y está unida al extremo de una varilla cuya masa puede considerarse insignificante. Si la varilla se somete a un par de torsión  $M = (t^2 + 2) \text{ N} \cdot \text{m}$ , donde  $t$  se da en segundos, determine la rapidez de cada bola cuando  $t = 3 \text{ s}$ . Cada bola tiene una rapidez  $v = 2 \text{ m/s}$  cuando  $t = 0$ .



Prob. 15-100

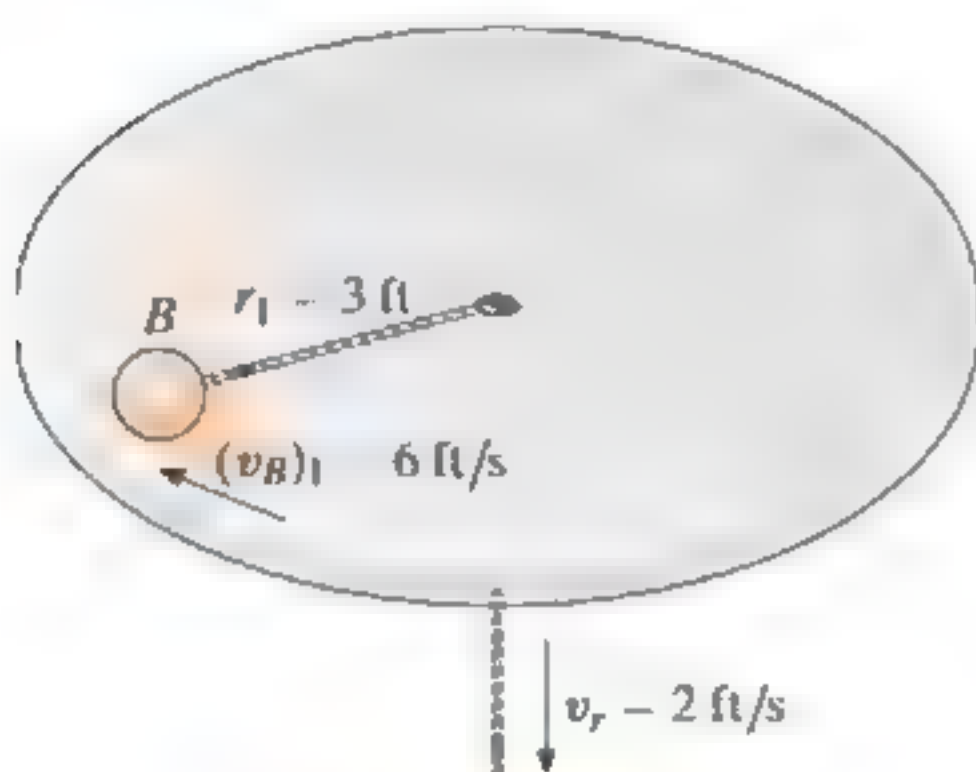
**15-101.** El carro de montaña rusa de 800 lb parte del reposo sobre la pista, que tiene la forma de una hélice cilíndrica. Si la hélice desciende 8 ft por cada vuelta, determine la rapidez del carro cuando  $t = 4$  s. Además, ¿hasta qué punto ha descendido el carro en este instante? Desprecie la fricción y el tamaño del carro.

**15-102.** El carro de montaña rusa de 800 lb parte del reposo sobre la pista, que tiene la forma de una hélice cilíndrica. Si la hélice desciende 8 ft por cada vuelta, determine el tiempo requerido para que el carro alcance una rapidez de 60 ft/s. Desprecie la fricción y el tamaño del carro.



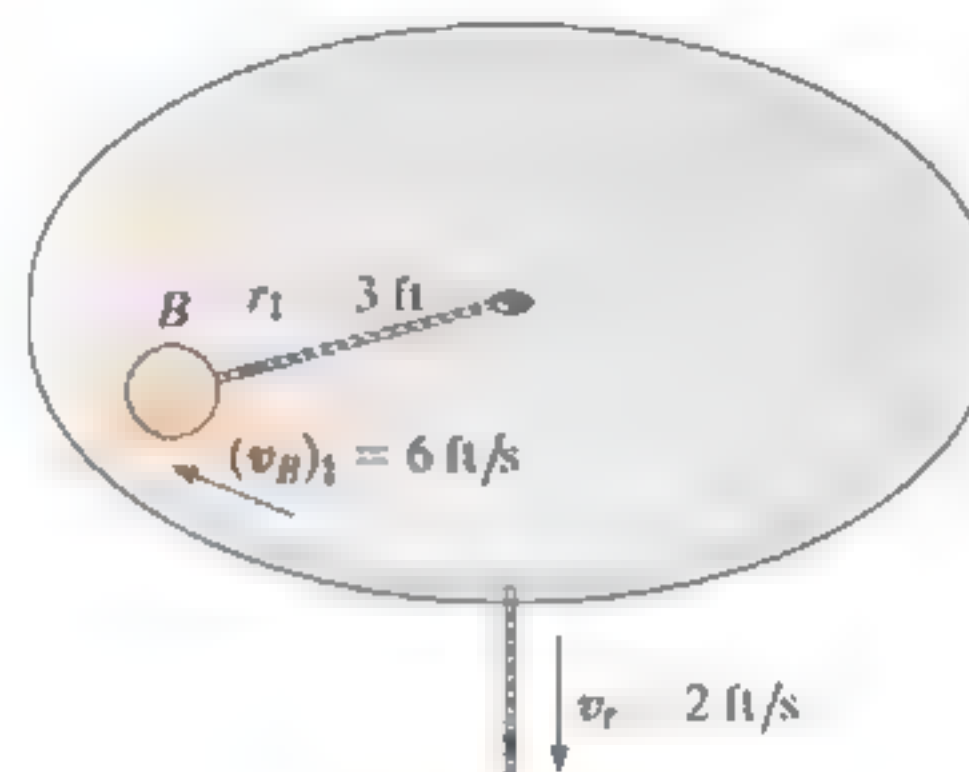
Probs. 15-101/102

**15-103.** Una bola  $B$  de 4 lb se desplaza formando un círculo de radio  $r_1 = 3$  ft con una rapidez  $(v_B)_1 = 6$  ft/s. Si el cable adjunto se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante  $v_r = 2$  ft/s, determine la rapidez de la bola en el instante  $r_2 = 2$  ft. ¿Cuánto trabajo se debe hacer para jalar el cable hacia abajo? Desprecie la fricción y el tamaño de la bola.



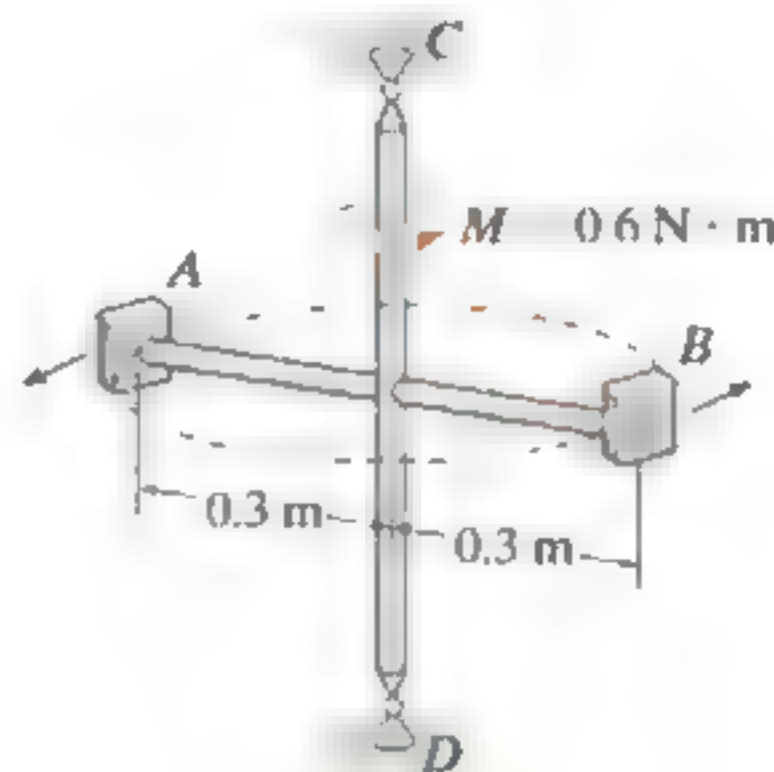
Prob. 15-103

**\*15-104.** Una bola  $B$  de 4 lb se desplaza formando un círculo de radio  $r_1 = 3$  ft con una rapidez  $(v_B)_1 = 6$  ft/s. Si el cable adjunto se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante  $v_r = 2$  ft/s, determine cuánto tiempo se requiere para que la bola alcance una rapidez de 12 ft/s. ¿A qué distancia  $r_2$  está la bola del orificio cuando esto ocurre? Desprecie la fricción y el tamaño de la bola.



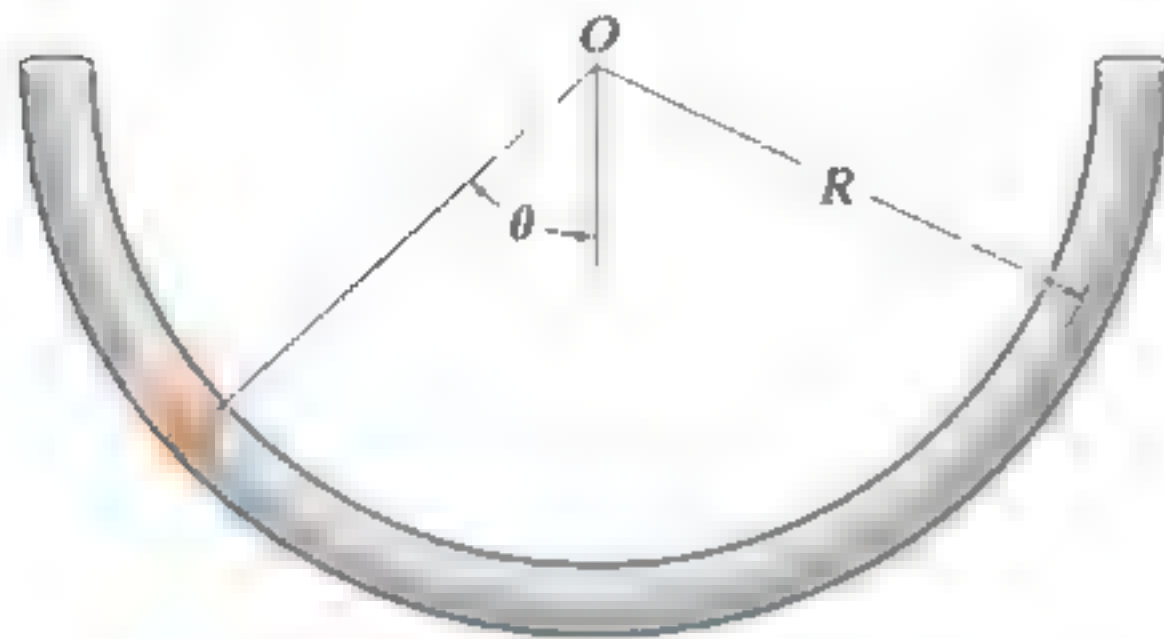
Prob. 15-104

**15-105.** Cada uno de los dos bloques  $A$  y  $B$  tiene una masa de 400 g. Los bloques están fijos a las varillas horizontales, y su velocidad inicial a lo largo de la trayectoria circular es de 2 m/s. Si se aplica un momento de par  $M = (0.6)$  N·m con respecto a la varilla  $CD$  de la estructura, determine la rapidez de los bloques cuando  $t = 3$  s. La masa de la estructura es despreciable y gira libremente alrededor de  $CD$ . No tome en cuenta el tamaño de los bloques.



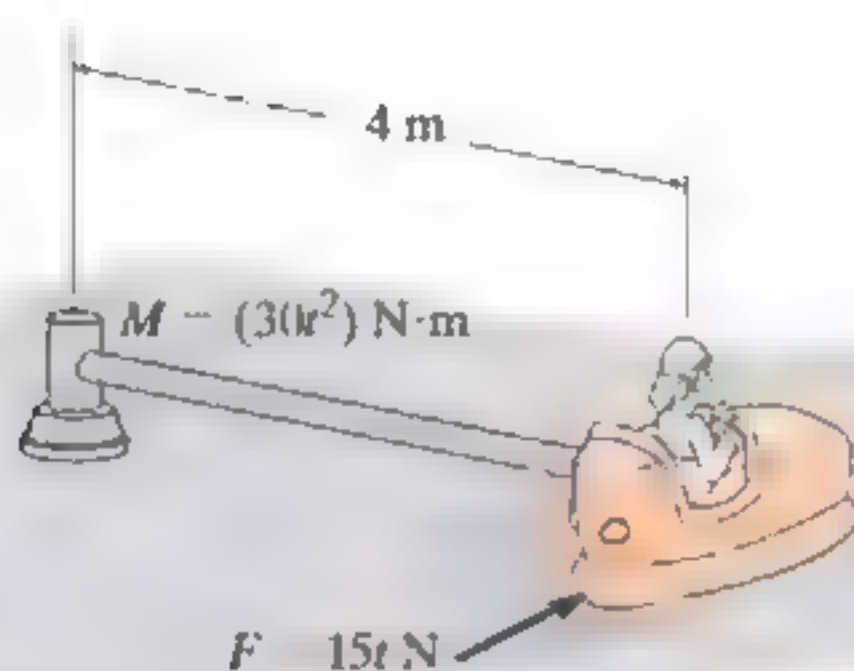
Prob. 15-105

**15-106.** Una partícula pequeña que tiene una masa  $m$  se coloca dentro del tubo semicircular. La partícula se ubica en la posición mostrada y se libera. Aplique el principio de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto  $O$  ( $\Sigma M_O = H_O$ ) y demuestre que el movimiento de la partícula se rige por la ecuación diferencial  $\ddot{\theta} + (g/R) \sin \theta = 0$ .



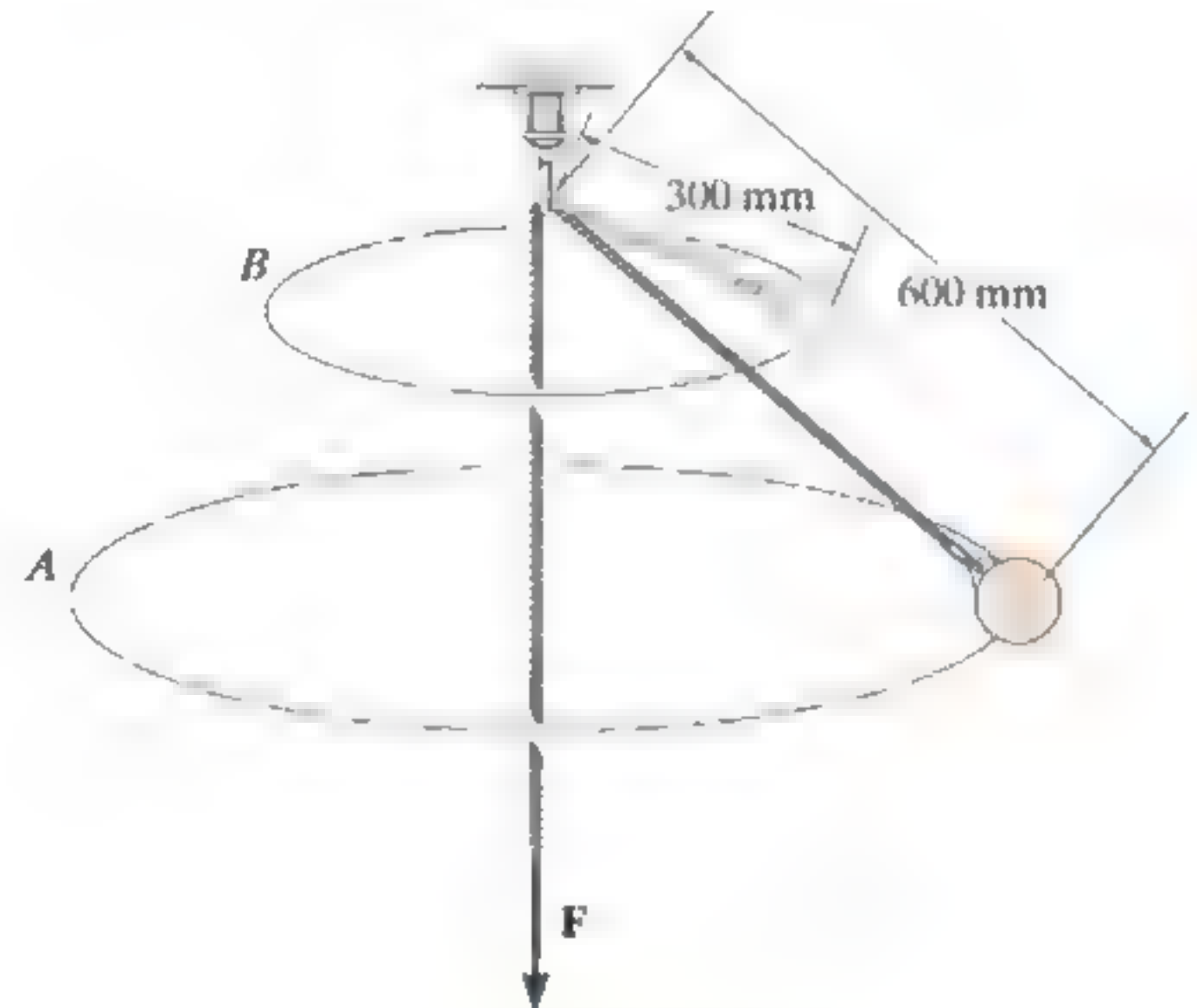
Prob. 15-106

**15-107.** Si la varilla de masa despreciable se somete a un momento de par de  $M = (30t^2) \text{ N} \cdot \text{m}$ , y el motor del automóvil suministra una fuerza de tracción de  $F = (15t) \text{ N}$  a las ruedas, donde  $t$  se da en segundos, determine la rapidez del auto en el instante  $t = 5 \text{ s}$ . El auto parte del reposo. La masa total del auto y el piloto es de  $150 \text{ kg}$ . No tome en cuenta el tamaño del automóvil.



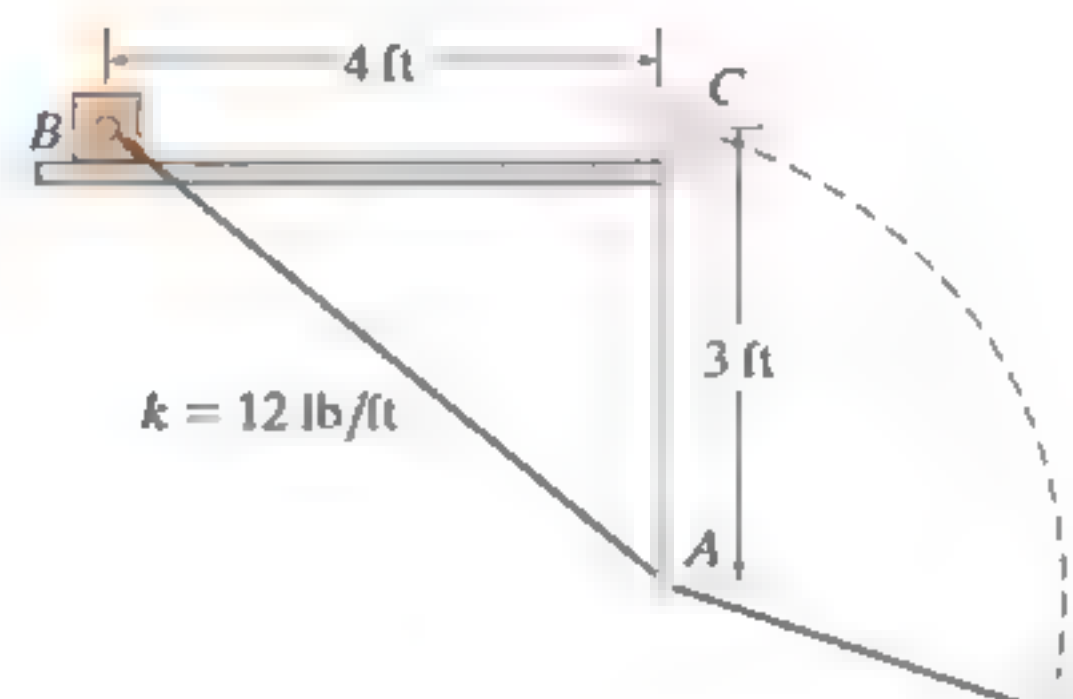
Prob. 15-107

**\*15-108.** Cuando a la bola de  $2 \text{ kg}$  se le da una rapidez horizontal de  $1.5 \text{ m/s}$ , comienza a moverse sobre la trayectoria circular horizontal  $A$ . Si se incrementa la fuerza  $F$  sobre la cuerda, la bola se eleva y luego se mueve alrededor de la trayectoria circular horizontal  $B$ . Determine la rapidez de la bola alrededor de la trayectoria  $B$ . Además, encuentre el trabajo realizado por la fuerza  $F$ .



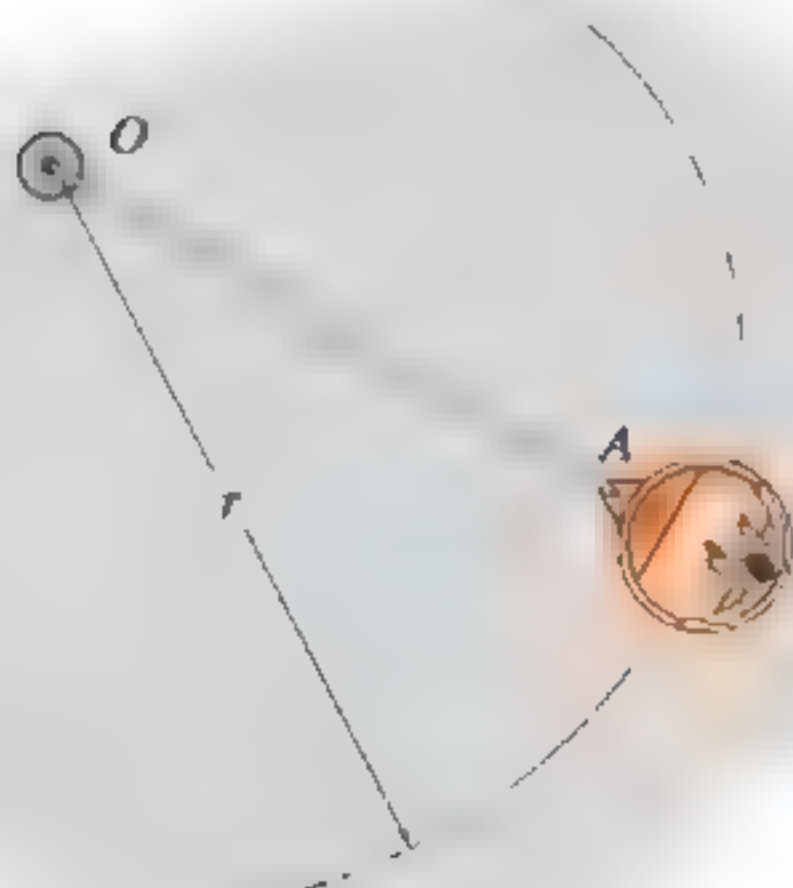
Prob. 15-108

**15-109.** La cuerda elástica tiene una longitud no estirada  $l_0 = 1.5 \text{ ft}$  y una rigidez  $k = 12 \text{ lb/ft}$ . Está conectada en  $A$  a un punto fijo y en  $B$  a un bloque, que tiene un peso de  $2 \text{ lb}$ . Si el bloque se libera del reposo desde la posición mostrada, determine su rapidez cuando alcanza el punto  $C$  luego de deslizarse a lo largo de la guía lisa. Después de salir de la guía, se desplaza sobre el plano horizontal liso. Determine si la cuerda llega a su longitud no estirada. Además, calcule la cantidad de movimiento angular del bloque sobre el punto  $A$ , en cualquier instante después de pasar el punto  $C$ .



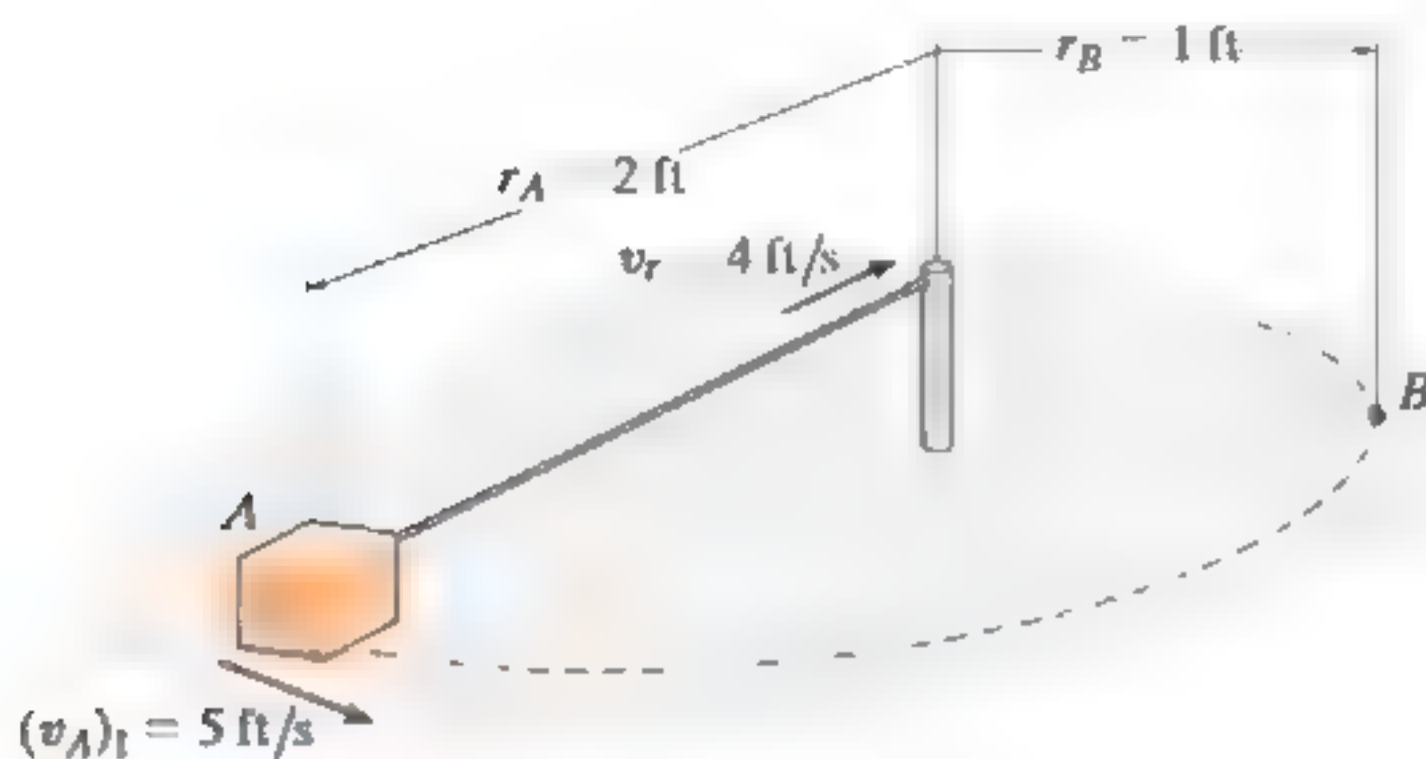
Prob. 15-109

**15-110.** La atracción del parque de diversiones consta de un carro de 200 kg y de pasajeros que viajan a 3 m/s en una trayectoria circular con un radio de 8 m. Si en  $t = 0$ , el cable  $OA$  es jalado hacia  $O$  a 0.5 m/s, determine la rapidez del carro cuando  $t = 4$  s. Además, determine el trabajo realizado para jalar el cable.



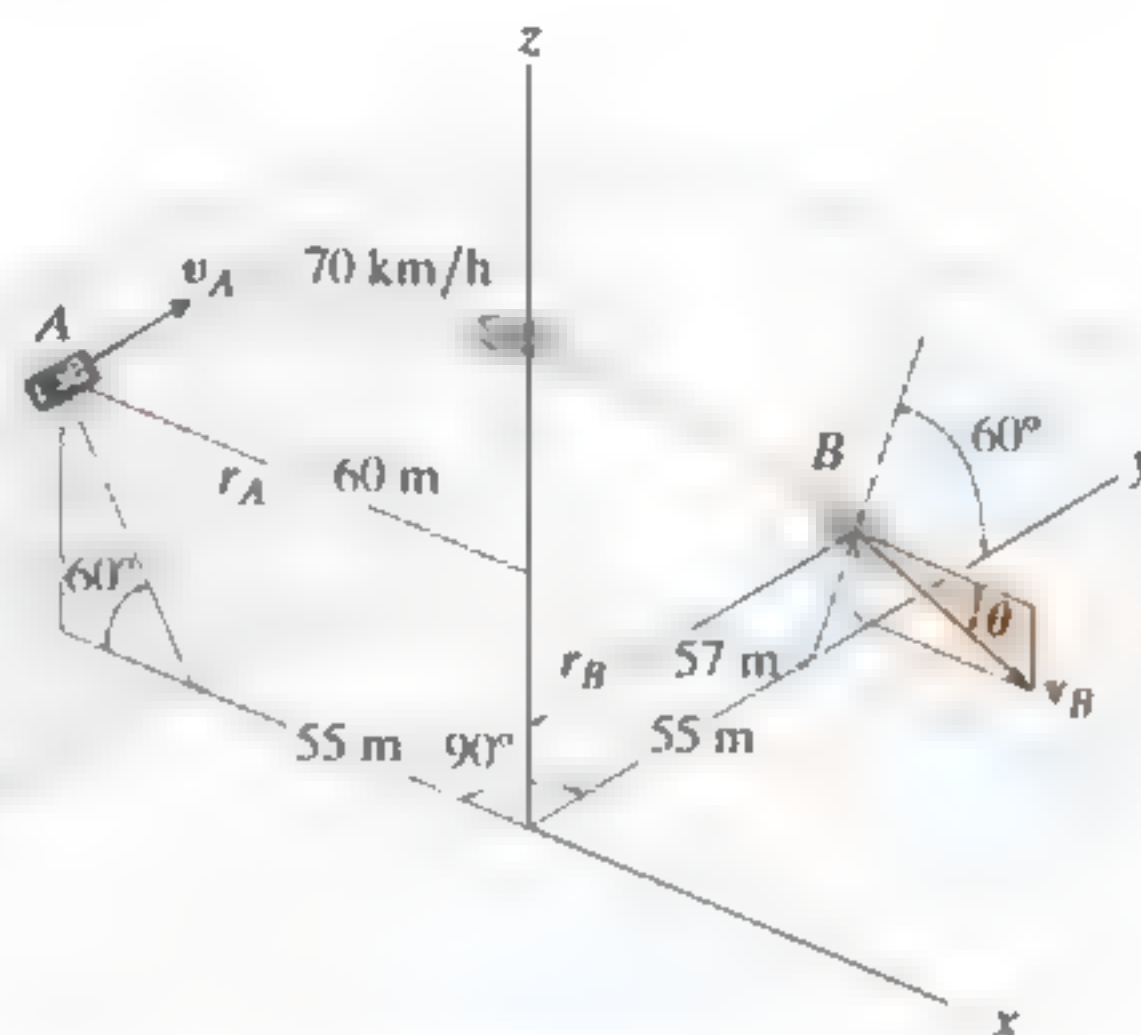
Prob. 15-110

**15-111.** Una caja con un peso de 8 lb se mueve alrededor de un círculo con radio  $r_A = 2$  ft con una rapidez de  $(v_A)_t = 5$  ft/s mientras está conectado al extremo de una cuerda. Si la cuerda se jala hacia adentro con una rapidez constante de  $v_r = 4$  ft/s, determine la rapidez de la caja en el instante  $r_B = 1$  ft. ¿Cuánto trabajo se realiza después de jalar la cuerda desde  $A$  hasta  $B$ ? Desprecie la fricción y el tamaño de la caja.



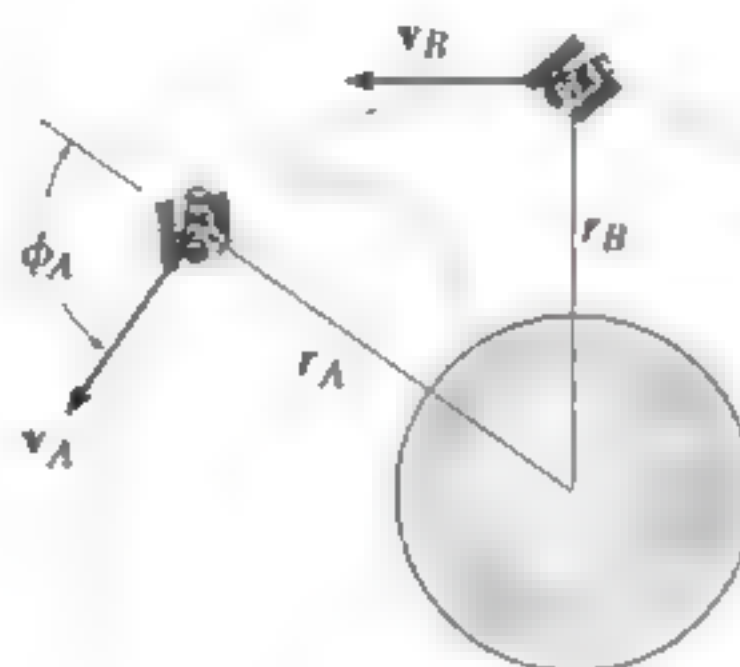
Prob. 15-111

**\*15-112.** Un trineo y su tripulante, con una masa total de 150 kg, entran en tangente horizontal a una curva circular de  $90^\circ$  con una velocidad de  $v_A = 70$  km/h. Si la pista es plana y se inclina en un ángulo de  $60^\circ$ , determine la rapidez  $v_B$  y el ángulo  $\theta$  de “descenso”, medido desde la horizontal en un plano vertical  $x-z$ , al que existe el trineo en  $B$ . Para el cálculo, desprecie la fricción.



Prob. 15-112

**15-113.** Se lanza un satélite de 700 kg de masa a una trayectoria de vuelo libre alrededor de la Tierra con una rapidez inicial de  $v_A = 10$  km/s, cuando la distancia al centro de la Tierra es  $r_A = 15$  Mm. Si el ángulo de lanzamiento en esta posición es  $\phi_A = 70^\circ$ , determine la rapidez  $v_B$  del satélite y su distancia más cercana  $r_B$  al centro de la tierra. La masa de ésta es  $M_e = 5.976(10^{24})$  kg. *Sugerencia:* En estas condiciones, el satélite se somete sólo a la fuerza gravitacional terrestre,  $F = GM_em/r^2$ , ecuación 13-1. En una parte de la solución, use la conservación de la energía.

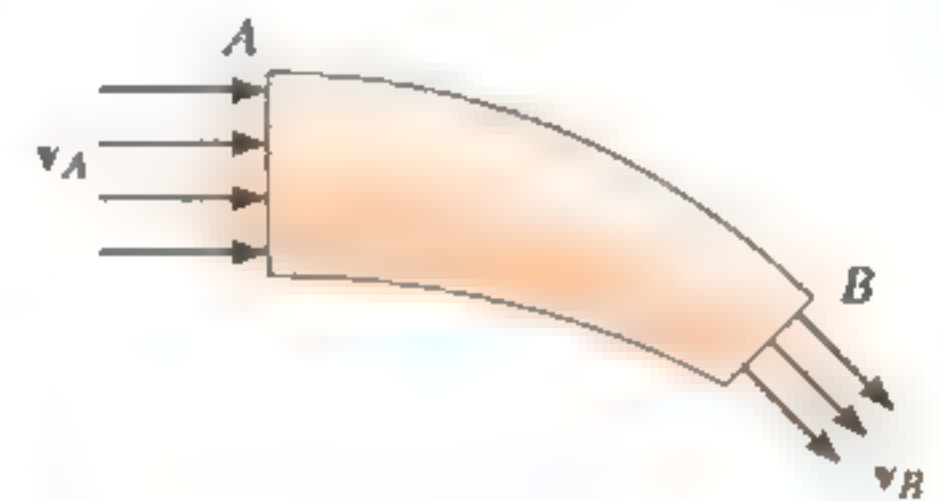


Prob. 15-113

## 15.8 Flujo continuo de una corriente de fluido de fluido

Hasta este punto hemos limitado nuestro estudio de los principios de impulso y cantidad de movimiento a un sistema de partículas contenidas dentro de un *volumen cerrado*. En esta sección, sin embargo, aplicaremos el principio de impulso y cantidad de movimiento al flujo de masa constante de partículas de fluido que entran a un *volumen de control* y salen de éste, el cual se define como una región en el espacio donde partículas de fluido pueden fluir hacia dentro o hacia afuera de la región. Con frecuencia se hace que el tamaño y la forma del volumen de control coincidan con los límites sólidos y aberturas de un tubo, turbina o bomba. Siempre que el flujo del fluido hacia dentro del volumen de control sea igual al de salida, entonces el flujo puede clasificarse como *flujo continuo*.

**Principio de impulso y cantidad de movimiento.** Considere el flujo continuo de una corriente de fluido en la figura 15-27a que circula a través de un tubo. La región dentro del tubo y sus aberturas se considerarán como el volumen de control. Como se indica, el fluido fluye hacia dentro y hacia afuera del volumen de control con velocidades  $v_A$  y  $v_B$ , respectivamente. El cambio de la dirección del fluido dentro del volumen de control lo provoca el impulso de la fuerza externa resultante ejercida en la superficie de control por la pared del tubo. Esta fuerza resultante se determina al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control.

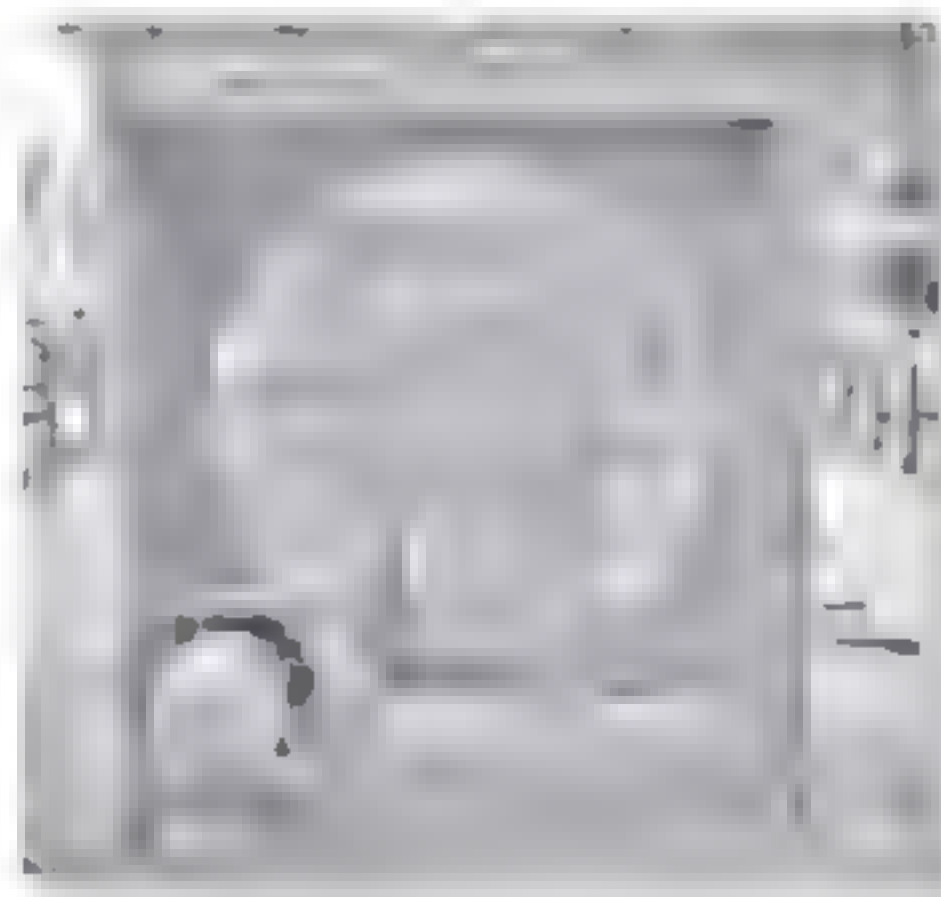


(a)

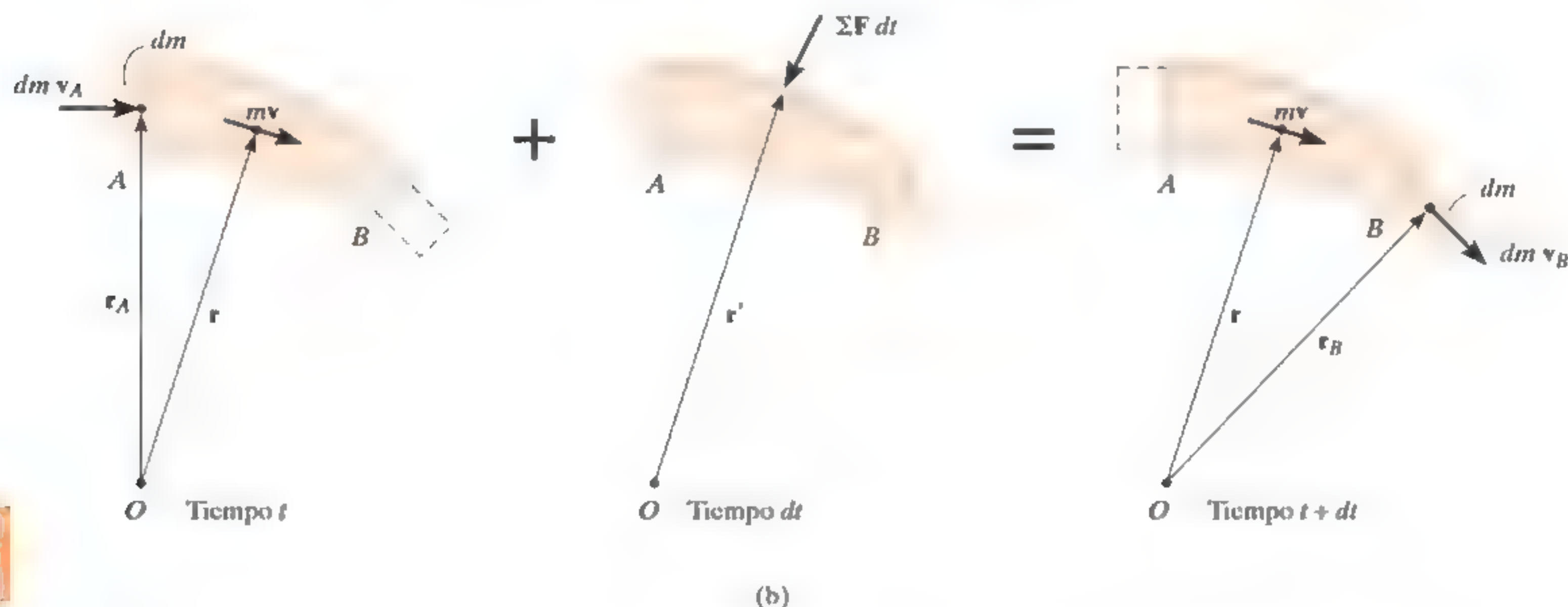
Fig. 15-27



La banda transportadora debe suministrar fuerzas de fricción a la grava que cae sobre ella para cambiar la cantidad de movimiento de la corriente de grava, de modo que comience a desplazarse a lo largo de la banda. (© R. C. Hibbeler)



En principio, el aire de un lado de este ventilador está en reposo y conforme pasa a través de las aspas se incrementa su cantidad de movimiento. Para cambiar la cantidad de movimiento del flujo de aire de esta manera, las aspas deben ejercer un empuje horizontal en la corriente de aire. A medida que las aspas giran más rápido, el empuje igual pero opuesto del aire en las aspas podría vencer la resistencia al rodamiento de las ruedas en el suelo y comenzar a mover la estructura del ventilador. (© R. C. Hibbeler)



Como se indica en la figura 15-27b, una pequeña cantidad de flujo de masa  $dm$  está a punto de entrar al volumen de control por la abertura  $A$  a una velocidad de  $v_A$  en el instante  $t$ . Como el flujo se considera continuo, en el instante  $t + dt$ , la misma cantidad de fluido saldrá del volumen de control por la abertura  $B$  a una velocidad  $v_B$ . Las cantidades de movimiento de fluido que entran al volumen de control y salen de éste son, por consiguiente,  $dm v_A$  y  $dm v_B$ , respectivamente. Además, durante el instante  $dt$ , la cantidad de movimiento de la masa de fluido dentro del volumen de control permanece constante y se denota como  $mv$ . Como se muestra en el diagrama central, la fuerza externa resultante ejercida en el volumen de control produce el impulso  $\Sigma F dt$ . Si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, tenemos

$$dm v_A + mv + \Sigma F dt = dm v_B + mv$$

Si  $r, r_A, r_B$  son vectores de posición medidos desde el punto  $O$  a los centros geométricos del volumen de control y las aberturas en  $A$  y  $B$  (fig. 15-27b), entonces el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto a  $O$  se vuelve

$$r_A \times dm v_A + r \times mv + r' \times \Sigma F dt = r \times mv + r_B \times dm v_B$$

Si dividimos ambos lados de las dos ecuaciones anteriores entre  $dt$  y simplificamos, tenemos

$$\Sigma F = \frac{dm}{dt} (v_B - v_A) \quad (15-25)$$

$$\Sigma M_O = \frac{dm}{dt} (r_B \times v_B - r_A \times v_A) \quad (15-26)$$

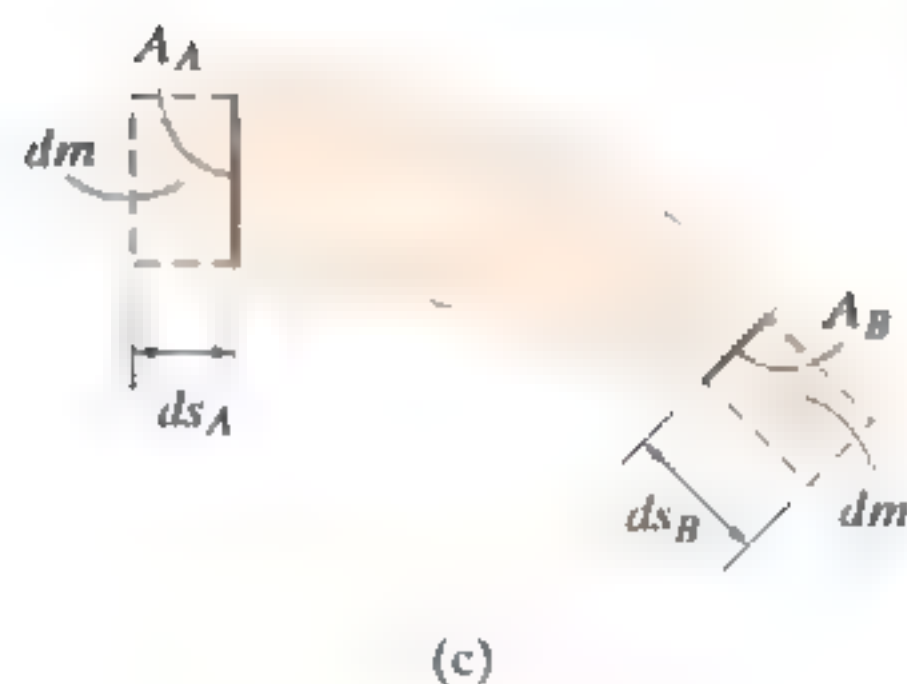


Fig. 15-27 (cont.)

El término  $dm/dt$  se llama *flujo de masa* e indica la cantidad constante de fluido que se dirige hacia dentro o hacia fuera del volumen de control por unidad de tiempo. Si las áreas de sección transversal y densidades del fluido a la entrada  $A$  son  $A_A$ ,  $\rho_A$  y a la salida  $B$ ,  $A_B$  y  $\rho_B$  (fig. 15-27c), entonces, para un fluido incompresible, la *continuidad de masa* requiere que  $dm = \rho dV = \rho_A(ds_A A_A) = \rho_B(ds_B A_B)$ . Por lo tanto, durante el instante  $dt$ , como  $v_A = ds_A/dt$  y  $v_B = ds_B/dt$ , tenemos  $dm/dt = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B$  o, por lo general,

$$\left| \frac{dm}{dt} = \rho v A = \rho Q \right| \quad (15-27)$$

El término  $Q = vA$  mide el volumen de fluido por unidad de tiempo y se conoce como *descarga* o *flujo volumétrico*.

### Procedimiento para el análisis

Los problemas que implican flujo continuo se resuelven por el siguiente procedimiento.

#### Diagrama cinemático

- Identifique el volumen de control. Si está en *movimiento*, un *diagrama cinemático* puede ayudar a determinar las velocidades de entrada y salida del fluido que va hacia dentro y hacia fuera de sus aberturas, puesto que se realizará un *análisis de movimiento relativo*.
- Un observador fijo debe medir las velocidades  $v_A$  y  $v_B$  en un marco de referencia inercial.
- Una vez que se determina la velocidad del fluido que entra al volumen de control, el flujo de masa se calcula con la ecuación 15-27.

#### Diagrama de cuerpo libre

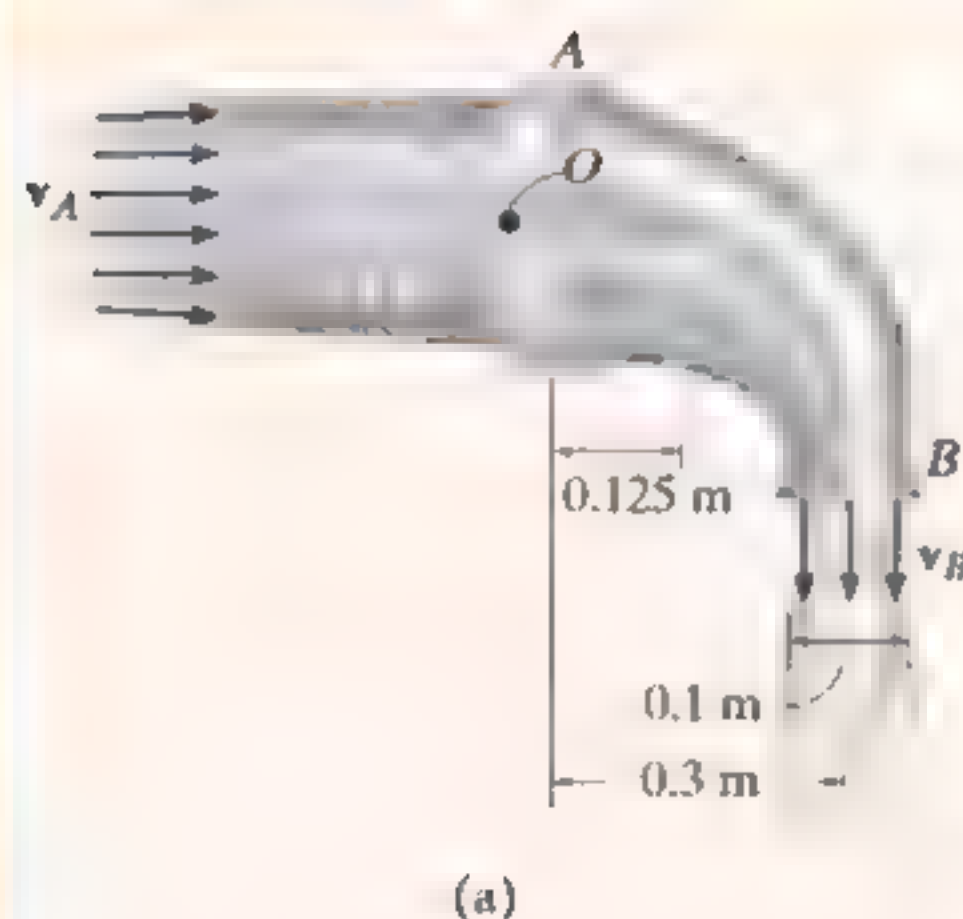
- Trace el diagrama de cuerpo libre del volumen de control para establecer las fuerzas  $\Sigma F$  que actúan en él. Estas fuerzas incluirán las reacciones de los apoyos, el peso de todas las partes sólidas y del fluido contenido en el volumen de control, y las fuerzas producidas por la presión manométrica estática del fluido en las secciones de entrada y salida\*. La presión manométrica es la presión medida por encima de la presión atmosférica y, por lo tanto, si una abertura se expone a la atmósfera, en ésta la presión manométrica será cero.

#### Ecuaciones de flujo continuo

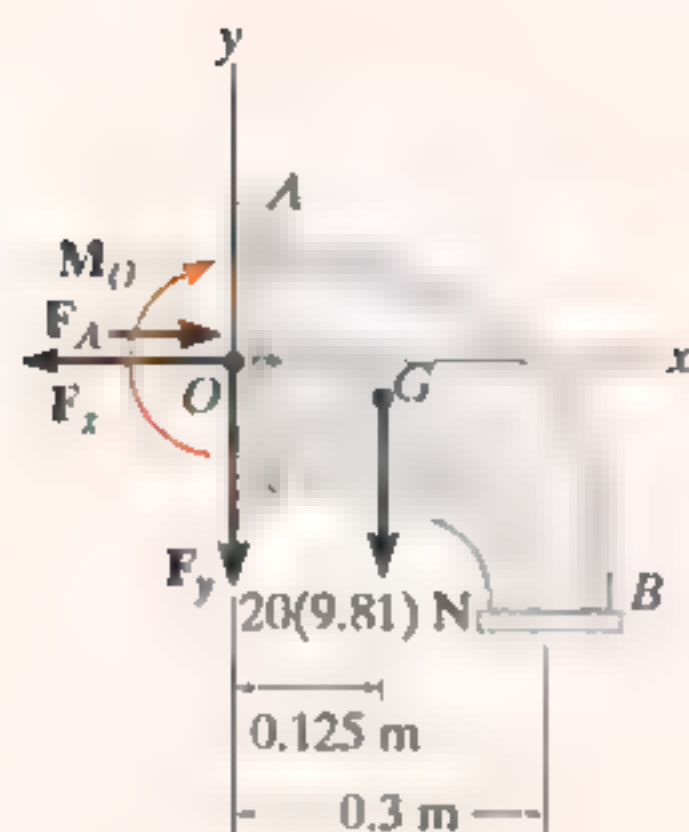
- Aplique las ecuaciones de flujo continuo, ecuaciones 15-25 y 15-26, usando las componentes de velocidad y fuerza apropiadas, las cuales se muestran en los diagramas de cuerpo libre y cinemática.

\*En el sistema SI, la presión se mide con el pascal (Pa), donde  $1\text{ Pa} = 1\text{ N/m}^2$ .

## EJEMPLO 15.18



(a)



(b)

Fig. 15-28

Determine las componentes de reacción que la junta  $A$  fija del tubo ejerce en el codo en la figura 15-28a, si el agua que fluye por el tubo se somete a una presión manométrica estática de 100 kPa en  $A$ . La descarga en  $B$  es  $Q_B = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ . La densidad del agua es  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$  y la masa del codo lleno de agua es de 20 kg con su centro de masa en  $G$ .

## SOLUCIÓN

Consideraremos que el volumen de control es la superficie externa del codo. Con un sistema de coordenadas inercial fijo, la velocidad de flujo en  $A$  y  $B$  y la velocidad de flujo de masa se calculan con la ecuación 15-27. Como la densidad del agua es constante,  $Q_B = Q_A = Q$ . Por consiguiente,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w Q = (1000 \text{ kg/m}^3)(0.2 \text{ m}^3/\text{s}) = 200 \text{ kg/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.2 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.05 \text{ m})^2} = 25.46 \text{ m/s} \downarrow$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.2 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.1 \text{ m})^2} = 6.37 \text{ m/s} \rightarrow$$

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del volumen de control (codo) (fig. 15-28b), la conexión fija en  $A$  ejerce un momento de par resultante  $M_O$  y componentes de fuerza  $F_x$  y  $F_y$  en el codo. Debido a la presión estática del agua en el tubo, la fuerza producida por la presión que actúa en la superficie de control abierta en  $A$  es  $F_A = p_A A_A$ . Como  $1 \text{ kPa} = 1000 \text{ N/m}^2$ ,

$$F_A = p_A A_A = [100(10^3) \text{ N/m}^2][\pi(0.1 \text{ m})^2] = 3141.6 \text{ N}$$

En  $B$  no actúa ninguna presión estática, puesto que el agua se descarga a la presión atmosférica, es decir, la presión medida por un manómetro en  $B$  es igual a cero,  $p_B = 0$ .

## Ecuaciones de flujo continuo

$$\rightarrow \Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax}); -F_x + 3141.6 \text{ N} = 200 \text{ kg/s}(0 - 6.37 \text{ m/s})$$

$$F_x = 4.41 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay}); -F_y - 20(9.81) \text{ N} = 200 \text{ kg/s}(-25.46 \text{ m/s} - 0)$$

$$F_y = 4.90 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Si se suman los momentos con respecto al punto  $O$  (fig. 15-28b), entonces  $F_x$ ,  $F_y$  y la presión estática  $F_A$  se eliminan, así como el momento de la cantidad de movimiento del agua que entra por  $A$  (fig. 15-28a). Por consiguiente,

$$\zeta + \Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}v_B - d_{OA}v_A)$$

$$M_O + 20(9.81) \text{ N}(0.125 \text{ m}) = 200 \text{ kg/s}[(0.3 \text{ m})(25.46 \text{ m/s}) - 0]$$

$$M_O = 1.50 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

## EJEMPLO

Un chorro de agua de 2 in de diámetro que sale con una velocidad de 25 ft/s choca con una aspa en movimiento (fig. 15-29a). Si el aspa se aleja del chorro a una velocidad constante de 5 ft/s, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el aspa ejerce en el agua. ¿Qué potencia genera el agua en el aspa? El peso específico del agua es  $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$ .

## SOLUCIÓN

**Diagrama cinemático.** En este caso, el volumen de control es la corriente de agua sobre el aspa. Con respecto a un sistema de coordenadas inercial fijo (fig. 15-29b), la velocidad a la cual entra el agua al volumen de control por A es

$$\mathbf{v}_A = \{25\mathbf{i}\} \text{ ft/s}$$

La *velocidad de flujo relativa* dentro del volumen de control es  $\mathbf{v}_{w/cv} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_{cv} = 25\mathbf{i} - 5\mathbf{i} = \{20\mathbf{i}\} \text{ ft/s}$ . Como el volumen de control se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}_{cv} = \{5\mathbf{i}\} \text{ ft/s}$ , la velocidad de flujo en B medida con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  fijos es la suma vectorial, mostrada en la figura 15-29b. Donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{cv} + \mathbf{v}_{w/cv} \\ &= \{5\mathbf{i} + 20\mathbf{j}\} \text{ ft/s}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la masa del flujo de agua *sobre* el volumen de control que experimenta un cambio de cantidad de movimiento es

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w(v_{w/cv})A_A = \left(\frac{62.4}{32.2}\right)(20)\left[\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = 0.8456 \text{ slug/s}$$

**Diagrama de cuerpo libre.** El diagrama de cuerpo libre del volumen de control se muestra en la figura 15-29c. El peso del agua se omitirá en el cálculo, ya que esta fuerza es mínima comparada con las componentes de reacción  $\mathbf{F}_x$  y  $\mathbf{F}_y$ .

## Ecuaciones de flujo continuo

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \\ -F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} &= 0.8456(5\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 25\mathbf{i})\end{aligned}$$

Poner en la ecuación las componentes  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  respectivas resulta

$$F_x = 0.8456(20) = 16.9 \text{ lb} \leftarrow \text{Resp.}$$

$$F_y = 0.8456(20) = 16.9 \text{ lb} \uparrow \text{ Resp.}$$

El agua ejerce fuerzas iguales pero opuestas en el aspa.

Como la fuerza del agua que hace que el aspa se mueva hacia delante en sentido horizontal con una velocidad de 5 ft/s es  $F_x = 16.9 \text{ lb}$ , entonces, de acuerdo con la ecuación 14-10, la potencia es

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}; \quad P = \frac{16.9 \text{ lb}(5 \text{ ft/s})}{550 \text{ hp/(ft} \cdot \text{lb/s)}} = 0.154 \text{ hp}$$

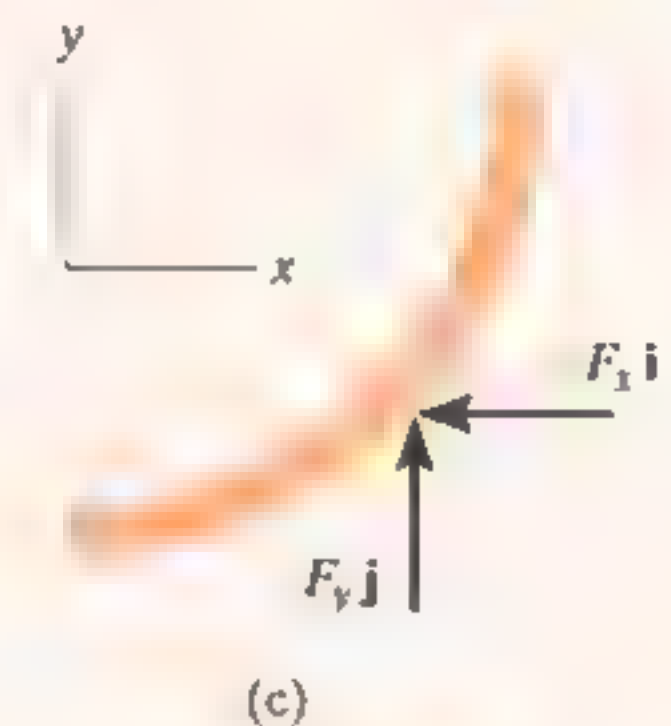
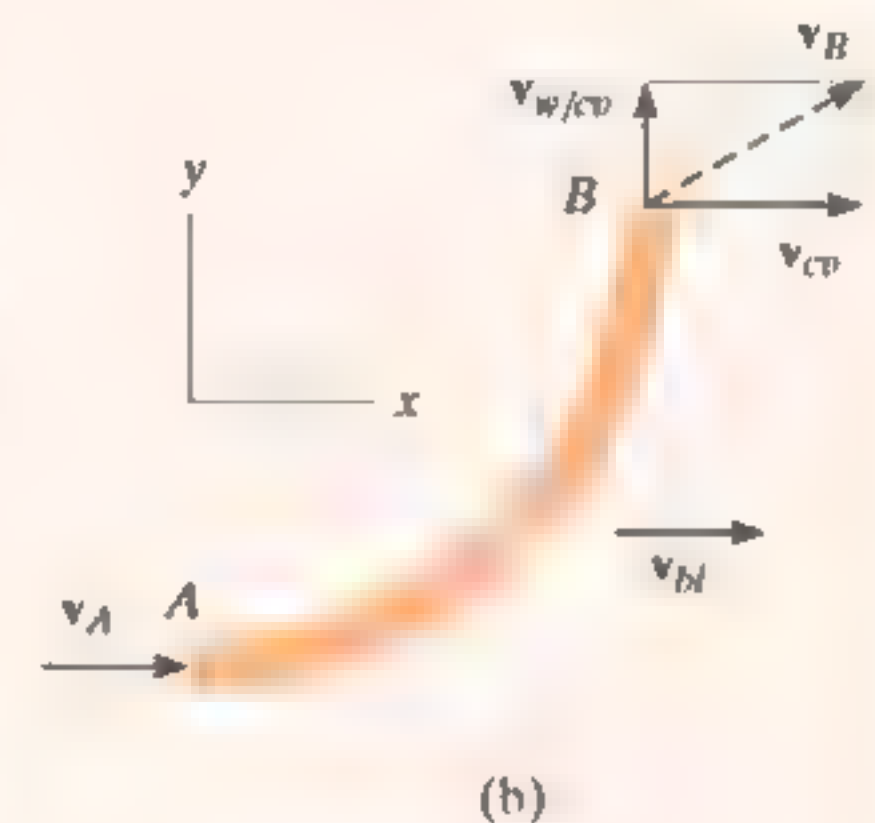
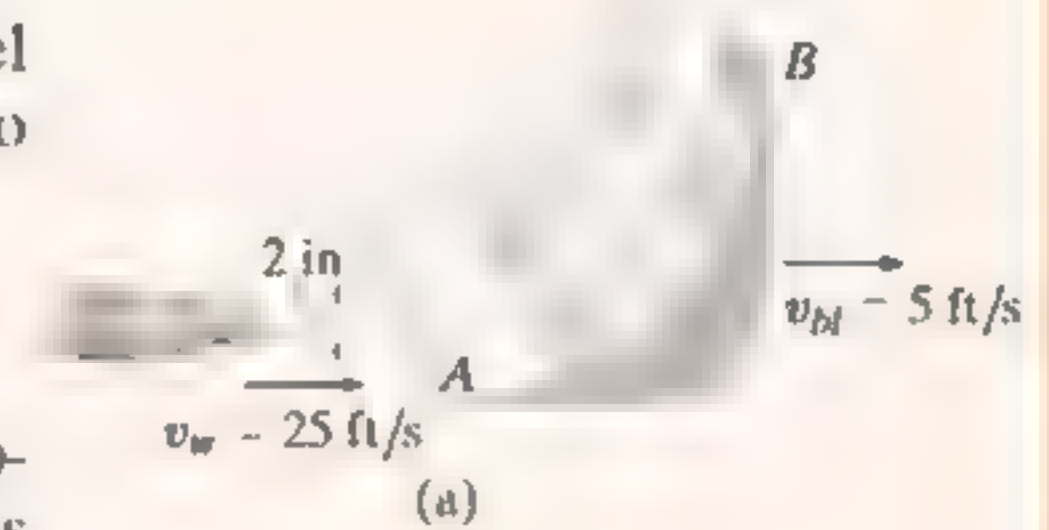
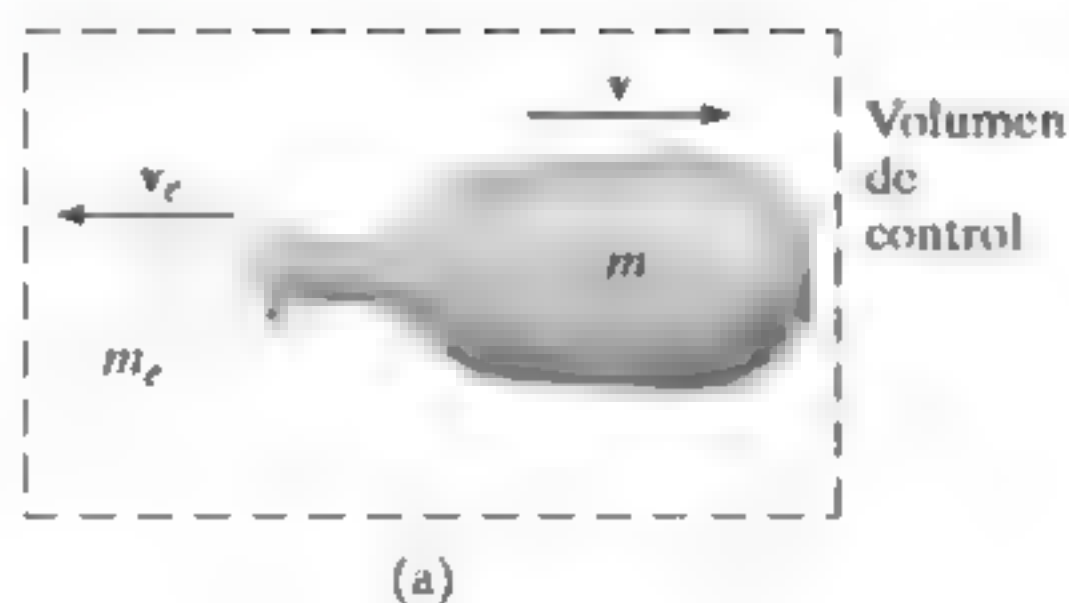


Fig. 15-29

## \*15.9 Propulsión con masa variable

**Una propulsión con masa variable.** Considere un dispositivo, un cohete, por ejemplo, que en un momento dado tiene una masa  $m$  y que se desplaza hacia delante con una velocidad  $v$  (fig. 15-30a). En ese mismo instante, el dispositivo expelle la cantidad de masa  $m_e$  con una velocidad de flujo  $v_e$ . Para el análisis, el volumen de control incluirá *tanto la masa  $m$  del dispositivo como la masa expelida  $m_e$* . Los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del volumen de control se muestran en la figura 15-30b. Durante el tiempo  $dt$ , su velocidad se incrementa de  $v$  a  $v + dv$  puesto que se expulsó una cantidad de masa  $dm_e$  y, por lo tanto, se incrementó el escape. Este incremento de la velocidad hacia delante, sin embargo, no cambia con la velocidad  $v_e$  de la masa expelida, como lo vería un observador fijo, ya que la masa se mueve a una velocidad constante una vez que ha sido expulsada. Los impulsos son creados por  $\Sigma F_{cv}$ , que representa la resultante de todas las fuerzas externas, como resistencia al avance y peso, que *actúan en el volumen de control* en la dirección del movimiento. Esta resultante de fuerzas *no incluye* la fuerza que impulsa al volumen de control hacia delante, pues esta fuerza (llamada *empuje*) es *interna al volumen de control*; es decir, el empuje actúa con magnitud igual pero dirección opuesta en la masa  $m$  del dispositivo y la masa expelida  $m_e$ .\* Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control (fig. 15-30b), tenemos



$$\left( \frac{\pm}{\rightarrow} \right) \quad mv - m_e v_e + \Sigma F_{cv} dt = (m - dm_e)(v + dv) - (m_e + dm_e)v_e$$

o

$$\Sigma F_{cv} dt = -v dm_e + m dv - dm_e dv - v_e dm_e$$

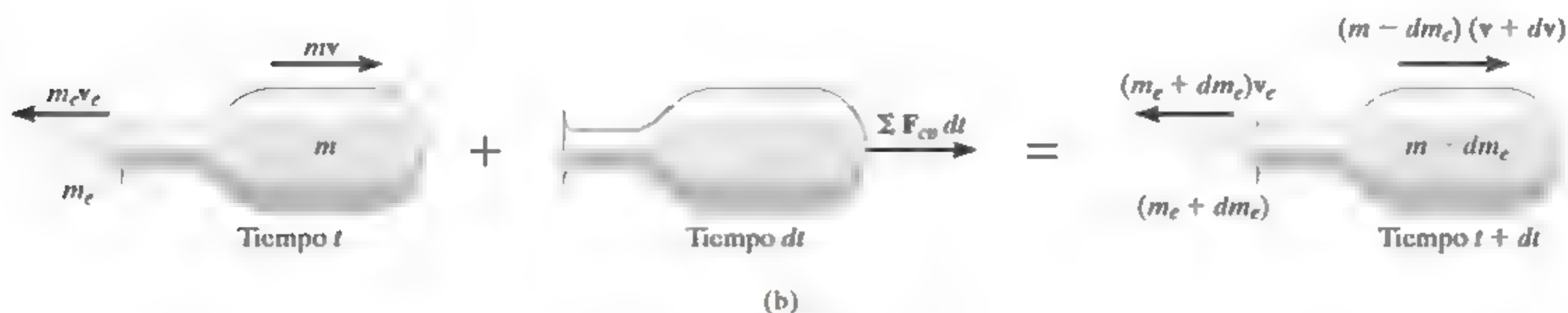


Fig. 15-30

\* $\Sigma F$  representa la fuerza resultante **externa** que *actúa en el volumen de control*, el cual es diferente de  $F$ , la fuerza resultante que actúa sólo en el dispositivo.

Sin perder precisión, se puede omitir el tercer término del lado derecho, ya que es una diferencial de “segundo grado”. Al dividir entre  $dt$  se obtiene

$$\Sigma F_{cv} = m \frac{dv}{dt} - (v - v_e) \frac{dm_e}{dt}$$

La velocidad del dispositivo vista por un observador que se mueve junto con las partículas de la masa expulsada es  $v_{D/e} = (v + v_e)$  y, por lo tanto, el resultado final puede escribirse como

$$\Sigma F_{cv} = m \frac{dv}{dt} - v_{D/e} \frac{dm_e}{dt} \quad (15-28)$$

Aquí el término  $dm_e/dt$  representa la tasa a la cual se expulsará la masa.

Para ilustrar una aplicación de la ecuación 15-28, considere el cohete en la figura 15-31 cuyo peso es  $W$  y que asciende contra una fuerza de resistencia atmosférica  $F_D$ . El control de volumen que se considerará se compone de la masa del cohete y de la masa del gas expulsado,  $m_e$ . Al aplicar la ecuación 15-28 se obtiene

$$(+\uparrow) \quad -F_D - W = \frac{W}{g} \frac{dv}{dt} - v_{D/e} \frac{dm_e}{dt}$$

El último término de esta ecuación representa el *empuje*  $T$  que el escape del motor ejerce en el cohete (fig. 15-31). Si reconocemos que  $dv/dt = a$ , entonces escribimos

$$(+\uparrow) \quad T - F_D - W = \frac{W}{g} a$$

Si se traza un diagrama de cuerpo libre del cohete, es evidente que esta ecuación representa una aplicación de  $\Sigma F = ma$  para el cohete.

**Un volumen de control que gana masa.** Un dispositivo, como un cucharón o una pala, pueden ganar masa al moverse hacia delante. Por ejemplo, el dispositivo que se ilustra en la figura 15-32a tiene una masa  $m$  y se mueve hacia delante con una velocidad  $v$ . En este momento, el dispositivo recopila una corriente de partículas de masa  $m_i$ . La velocidad de flujo  $v_i$  de esta masa inyectada es constante e independiente de la velocidad  $v$  de modo que  $v > v_i$ . El volumen de control que se considerará aquí incluye tanto la masa del dispositivo como la masa de las partículas inyectadas.

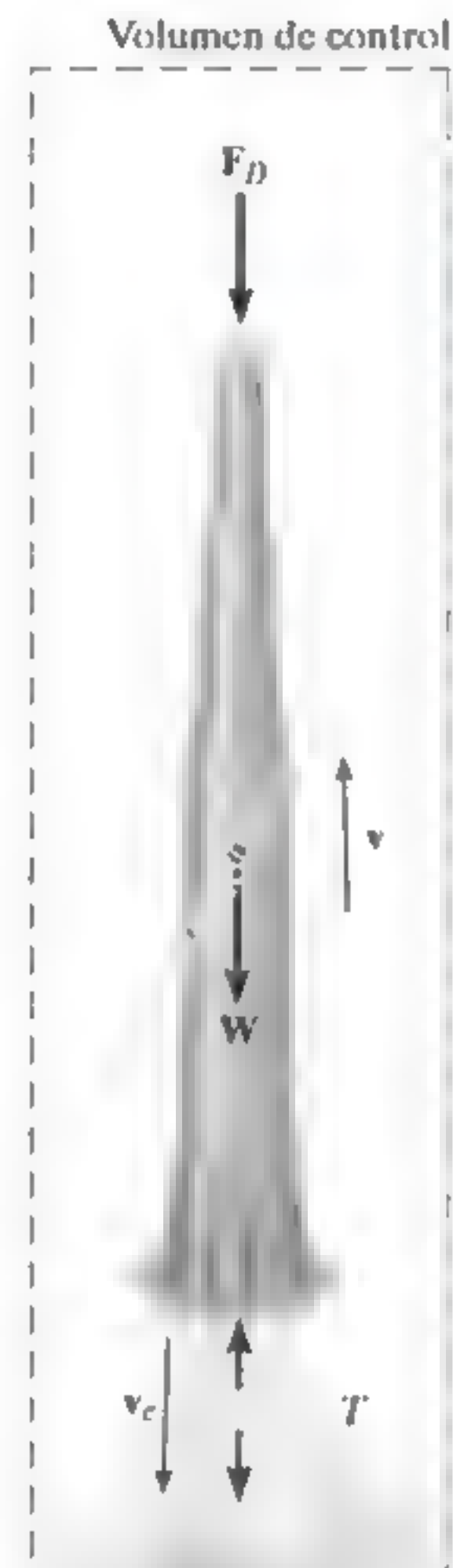
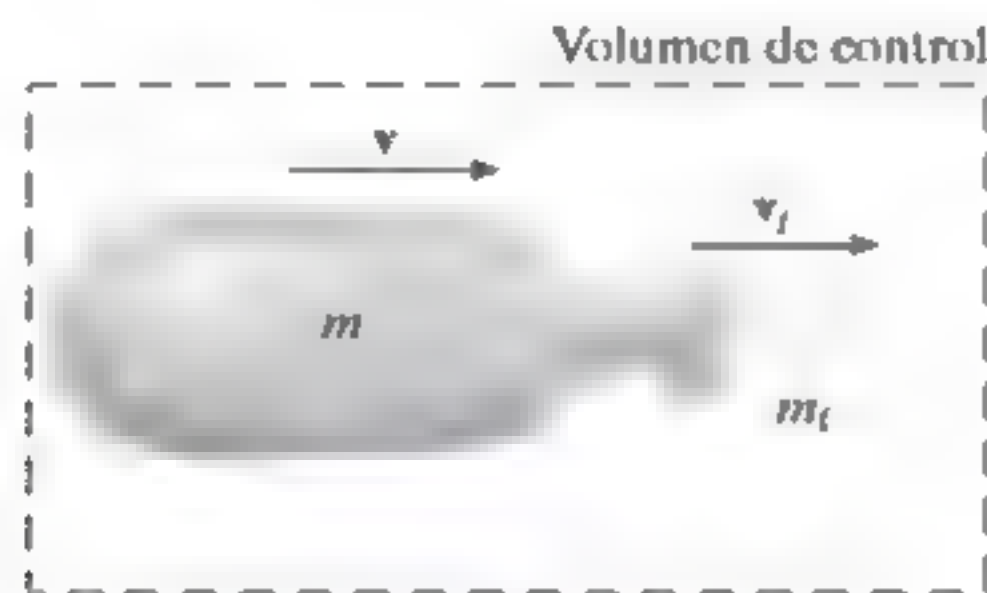


Fig. 15-31

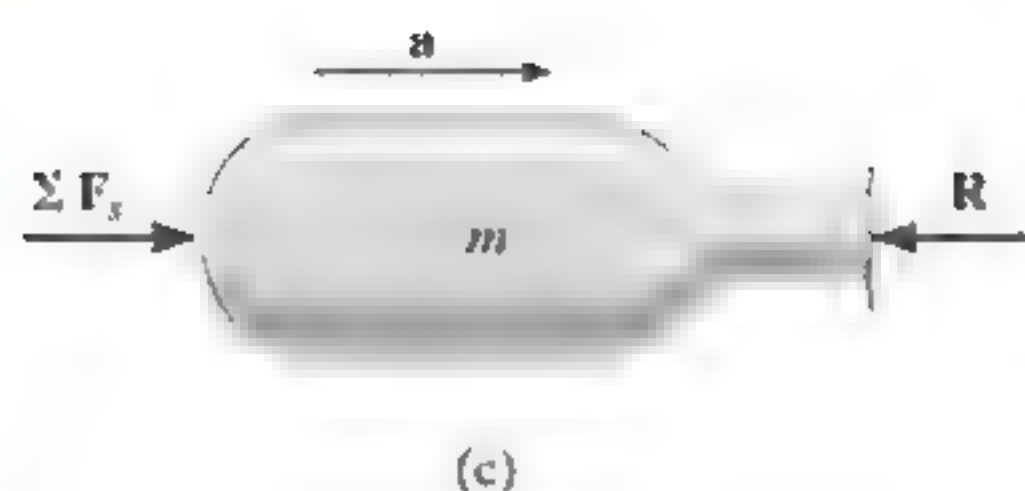


(a)

Fig. 15-32



Fig. 15-32 (cont.)



Los diagramas de impulso y cantidad de movimiento se muestran en la figura 15-32b. Junto con un incremento de masa  $dm_i$  adquirido por el dispositivo, existe un supuesto incremento de la velocidad  $dv$  durante el intervalo de tiempo  $dt$ . Este incremento lo causa el impulso creado por  $\Sigma F_{cv}$ , la resultante de todas las fuerzas externas *que actúan en el volumen de control* en la dirección del movimiento. La suma de las fuerzas no incluye la fuerza de retardo de la masa inyectada que actúa en el dispositivo. ¿Por qué? Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control, tenemos

$$(\pm) \quad mv + m_i v_i + \Sigma F_{cv} dt = (m + dm_i)(v + dv) + (m_i - dm_i)v_i$$

Si utilizamos el mismo procedimiento que en el caso anterior, podemos escribir esta ecuación como

$$\Sigma F_{cv} = m \frac{dv}{dt} + (v - v_i) \frac{dm_i}{dt}$$

Como la velocidad del dispositivo vista por un observador que se mueve junto con las partículas de la masa inyectada es  $v_{D/i} = (v - v_i)$ , el resultado final puede escribirse como

$$\Sigma F_{cv} = m \frac{dv}{dt} + v_{D/i} \frac{dm_i}{dt} \quad (15-29)$$

donde  $dm_i/dt$  es la proporción de masa inyectada al dispositivo. El último término de esta ecuación representa la magnitud de la fuerza  $R$ , que la masa inyectada *ejerce en el dispositivo* (fig. 15-32c). Como  $dv/dt = a$ , la ecuación 15-29 se escribe

$$\Sigma F_{cv} - R = ma$$

Ésta es la aplicación de  $\Sigma F = ma$ .

Como en el caso de problemas de flujo continuo que se resuelven con las ecuaciones 15-28 y 15-29 deberían ir acompañados por un volumen de control identificado y el diagrama de cuerpo libre necesario. Con el diagrama podemos determinar entonces  $\Sigma F_{cv}$  y aislar la fuerza ejercida en el dispositivo por la corriente de partículas.

El cajón rascador detrás de este tractor representa un dispositivo que gana masa. Si el tractor mantiene una velocidad constante  $v$ , entonces  $dv/dt = 0$  y, como la tierra originalmente está en reposo,  $v_{D/i} = v$ . Al aplicar la ecuación 15-29, la fuerza de remolque horizontal en el cajón rascador es por ende  $T = 0 + v(dm/dt)$ , donde  $dm/dt$  es la cantidad de tierra acumulada en el cajón. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

La masa inicial combinada de un cohete y su combustible es  $m_0$ . Una masa total  $m_f$  de combustible se consume a una proporción constante de  $dm_e/dt = c$  y se expelle a una tasa constante de  $u$  con respecto al cohete. Determine la velocidad máxima de éste, es decir, en el instante en que el combustible se agota. Ignore el cambio del peso del cohete con la altitud y la resistencia al avance del aire. El cohete se lanza verticalmente desde el punto de reposo.

## SOLUCIÓN

Como el cohete pierde masa al ascender, para la solución puede utilizarse la ecuación 15-28. La única *fuerza externa* que actúa en el *volumen de control* compuesto del cohete y una parte de la masa expelida es el peso  $W$  (fig. 15-33). Por consiguiente,

$$+\uparrow \Sigma F_{cv} = m \frac{dv}{dt} - v_{D/c} \frac{dm_e}{dt}, \quad -W = m \frac{dv}{dt} - uc \quad (1)$$

La velocidad del cohete se obtiene integrando esta ecuación.

En cualquier momento dado  $t$  durante el vuelo, la masa de cohete puede expresarse como  $m = m_0 - (dm_e/dt)t = m_0 - ct$ . Si  $W = mg$ , la ecuación 1 se escribe de la siguiente manera:

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct) \frac{dv}{dt} - uc$$

Al separar las variables e integrarlas, así como al tener en cuenta que  $v = 0$  cuando  $t = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^v dv &= \int_0^t \left( \frac{uc}{m_0 - ct} - g \right) dt \\ v &= -u \ln(m_0 - ct) - gt \Big|_0^t = u \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - ct} \right) - gt \end{aligned} \quad (2)$$

Observe que el despegue requiere que el primer término de la derecha sea mayor que el segundo durante la fase inicial del movimiento. El tiempo  $t'$  requerido para consumir todo el combustible es

$$m_f = \left( \frac{dm_e}{dt} \right) t' = ct'$$

Por consiguiente,

$$t' = m_f/c$$

Si sustituimos en la ecuación 2, tenemos

$$v_{\max} = u \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) - \frac{gm_f}{c}$$



(© NASA)

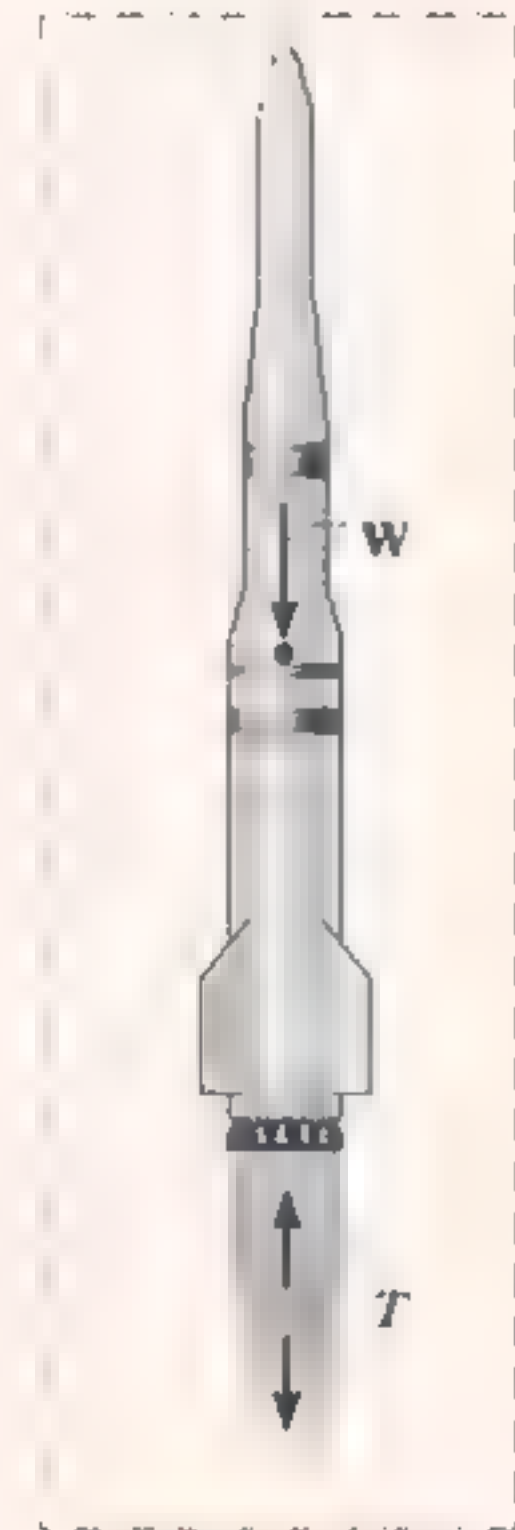
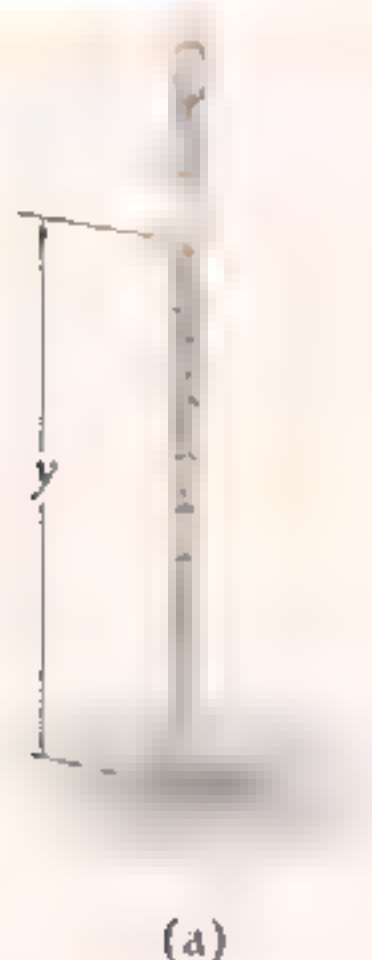
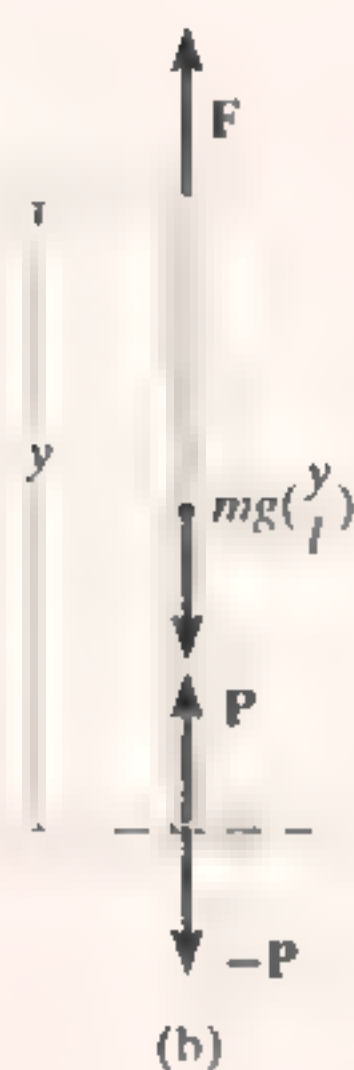


Fig. 15-33

## EJEMPLO 15.17



(a)



(b)



(c)

Una cadena de longitud  $l$  (fig. 15-34a) tiene una masa  $m$ . Determine la magnitud de la fuerza  $F$  requerida para (a) subir la cadena con una rapidez constante  $v_c$ , a partir del reposo cuando  $y = 0$ ; y (b) bajarla con una rapidez constante  $v_c$ , a partir del punto de reposo cuando  $y = l$ .

## SOLUCIÓN

**Parte (a).** A medida que sube la cadena, todos los eslabones suspendidos experimentan un impulso repentino hacia abajo por cada eslabón adicional que se levanta del suelo. Por lo tanto, la *parte suspendida* de la cadena puede considerarse como un dispositivo que *está ganando masa*. El volumen de control que se considerará es la longitud de la cadena y suspendida por  $F$  en cualquier instante, incluido el siguiente eslabón que está a punto de ser agregado pero que aún está en reposo (fig. 15-34b). Las fuerzas que actúan en el volumen de control *excluyen* las fuerzas internas  $P$  y  $-P$ , las cuales actúan entre el eslabón agregado y la parte suspendida de la cadena. Por consiguiente,  $\Sigma F_{cv} = F - mg(y/l)$ .

Para aplicar la ecuación 15-29, también es necesario determinar la razón a la cual se está agregando masa al sistema. La velocidad  $v_c$  de la cadena equivale a  $v_{D/l}$ . ¿Por qué? Como  $v_c$  es constante,  $dv_c/dt = 0$  y  $dy/dt = v_c$ . Hay que integrar, con la condición inicial de que  $y = 0$  cuando  $t = 0$ , con lo que se obtiene  $y = v_c t$ . Por lo tanto, la masa del volumen de control en cualquier instante es  $m_{cv} = m(y/l) = m(v_c t/l)$  y, por consiguiente, la *razón* a la cual se *agrega* masa a la cadena suspendida es

$$\frac{dm_1}{dt} = m \left( \frac{v_c}{l} \right)$$

Al aplicar la ecuación 15-29 con estos datos, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_{cv} = m \frac{dv_c}{dt} + v_{D/l} \frac{dm_1}{dt}$$

$$F - mg \left( \frac{y}{l} \right) = 0 + v_c m \left( \frac{v_c}{l} \right)$$

Por consiguiente,

$$F = (m/l)(gy + v_c^2)$$

*Resp.*

**Parte (b).** Cuando se baja la cadena, los eslabones expelidos (a los que se imparte una velocidad cero) *no imparten* un impulso a los eslabones suspendidos *restantes*. ¿Por qué? En consecuencia, no se considerará el volumen de control de la parte (a). En su lugar se utilizará la ecuación de movimiento para obtener la solución. En el instante  $t$ , la parte de la cadena que aún se va a levantar del suelo es  $y$ . El diagrama de cuerpo libre de la parte suspendida de una cadena se muestra en la figura 15-34c. Por lo tanto,

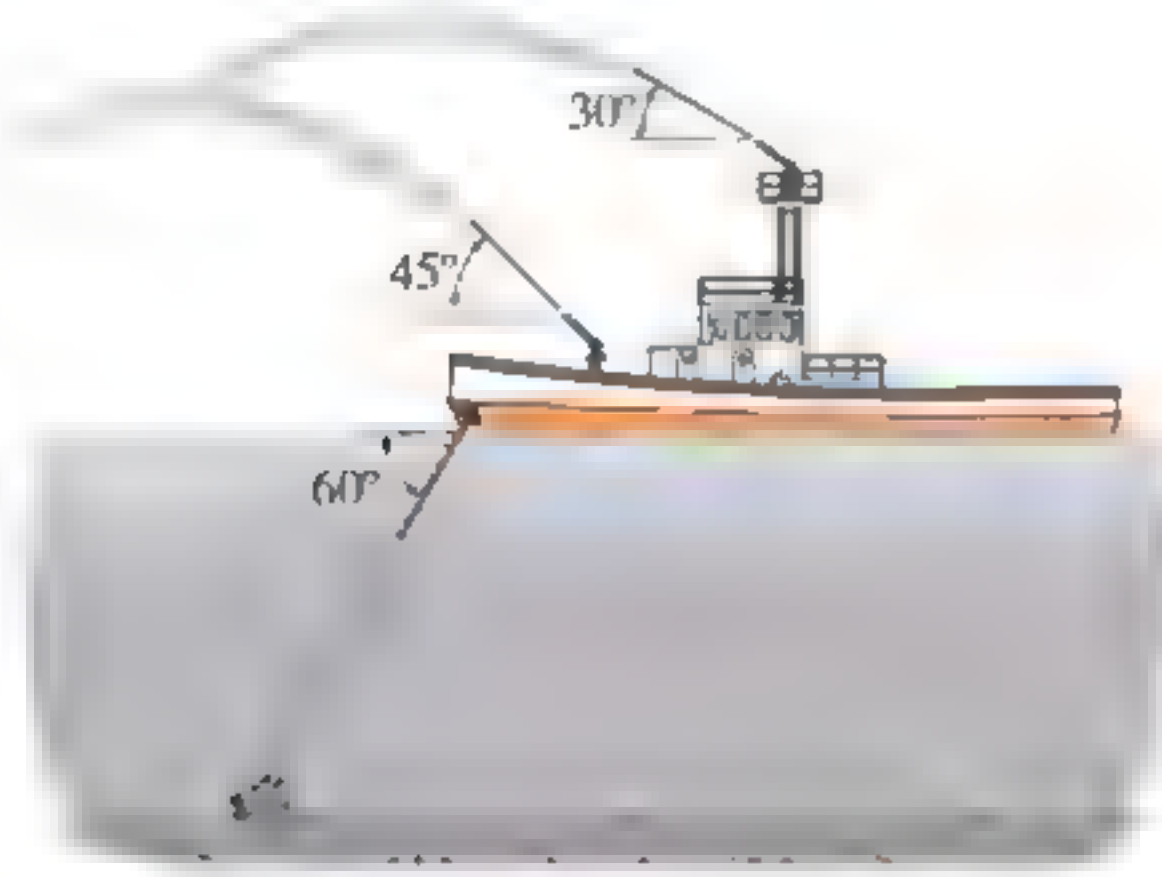
$$+\uparrow \Sigma F = ma, \quad F - mg \left( \frac{y}{l} \right) = 0$$

$$F = mg \left( \frac{y}{l} \right)$$

Fig. 15-34

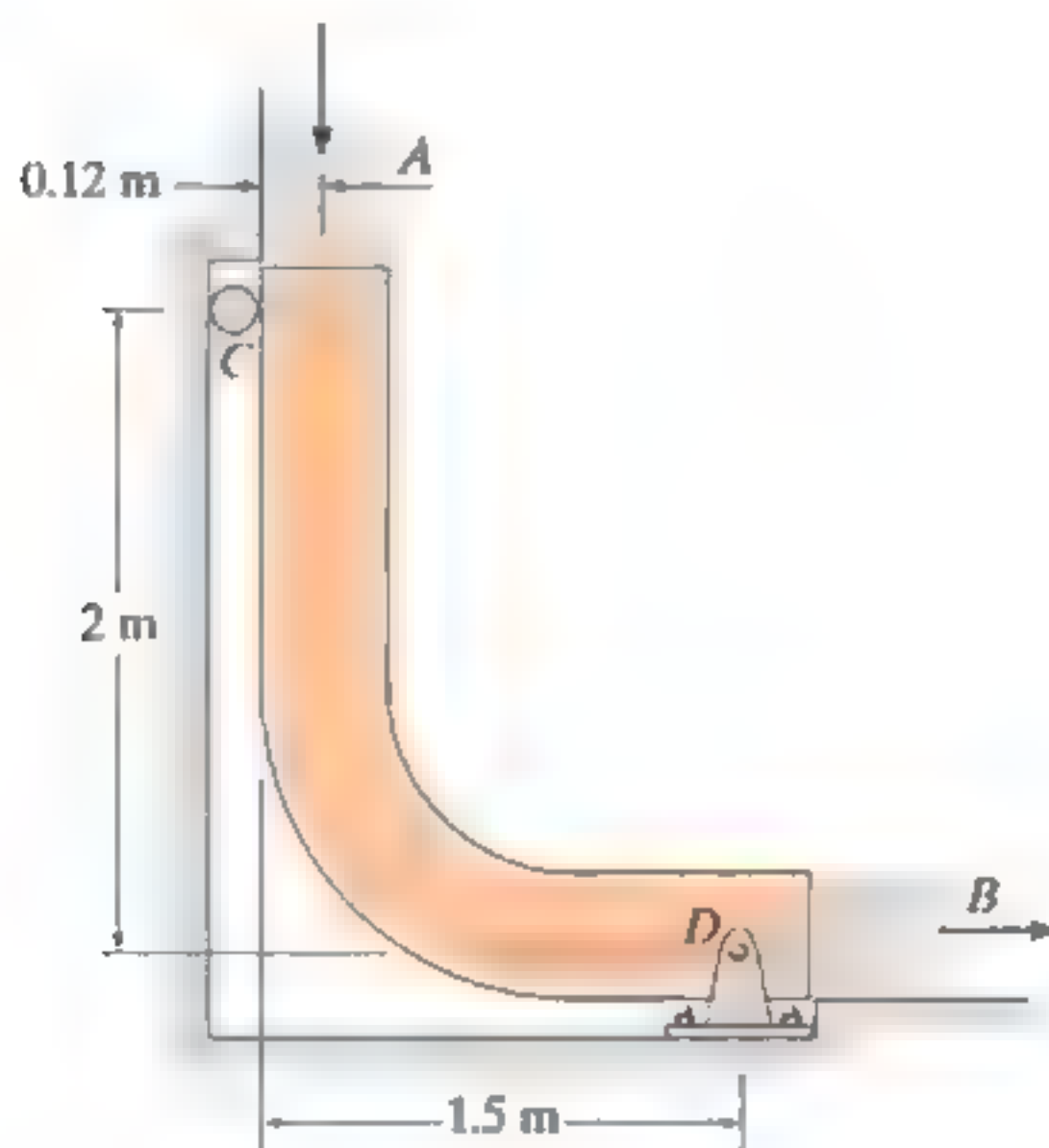
## PROBLEMAS

**15-114.** El buque bomba descarga dos chorros de agua de mar, cada uno con un flujo de  $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$  y con una velocidad en la boquilla de  $50 \text{ m/s}$ . Determine la tensión desarrollada en la cadena del ancla, necesaria para asegurar el buque. La densidad del agua de mar es  $\rho_w = 1020 \text{ kg/m}^3$ .



Prob. 15-114

**15-115.** El conducto se utiliza para desviar el flujo de agua,  $Q = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$ . Si el agua tiene una área de sección transversal de  $0.05 \text{ m}^2$ , determine las componentes de fuerza en el pasador  $D$  y el rodillo  $C$  necesarias para el equilibrio. Desprecie el peso del conducto y el peso del agua.  $\rho_w = 1 \text{ Mg/m}^3$ .



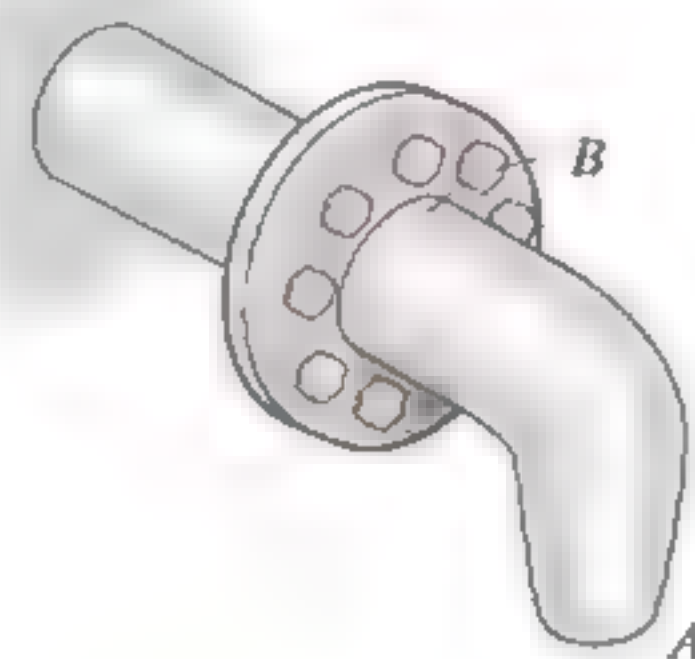
Prob. 15-115

**15-116.** El bote de  $200 \text{ kg}$  se impulsa mediante el ventilador que desarrolla una corriente deslizante con un diámetro de  $0.75 \text{ m}$ . Si el ventilador expulsa aire con una rapidez de  $14 \text{ m/s}$ , medidos con respecto al bote, determine la aceleración inicial de la embarcación, si está inicialmente en reposo. Suponga que el aire tiene una densidad constante de  $\rho_w = 1.22 \text{ kg/m}^3$  y que el aire entrante está esencialmente en reposo. Desprecie la resistencia de arrastre del agua.



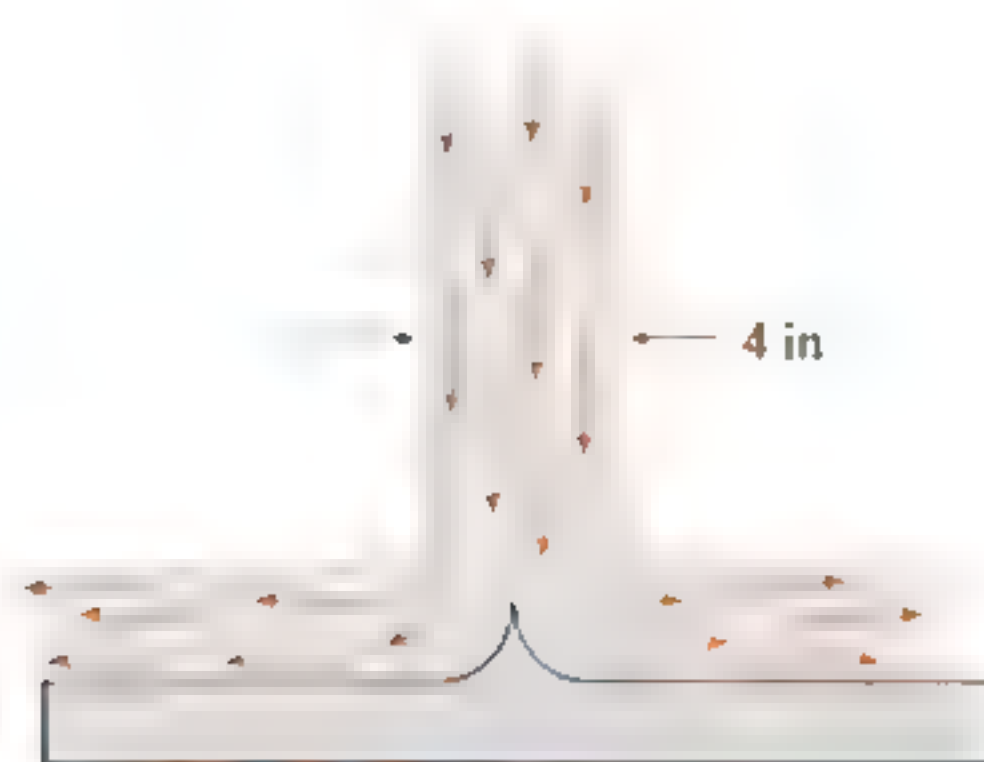
Prob. 15-116

**15-117.** La boquilla descarga agua a razón constante de  $2 \text{ ft}^3/\text{s}$ . El área de sección transversal de la boquilla en  $A$  es  $4 \text{ in}^2$ , y en  $B$  el área de sección transversal es  $12 \text{ in}^2$ . Si la presión manométrica estática debida al agua en  $B$  es  $2 \text{ lb/in}^2$ , determine la magnitud de la fuerza que debe aplicar el acoplamiento en  $B$  para mantener la boquilla en su sitio. Desprecie el peso de la boquilla y el agua dentro de ella.  $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$ .



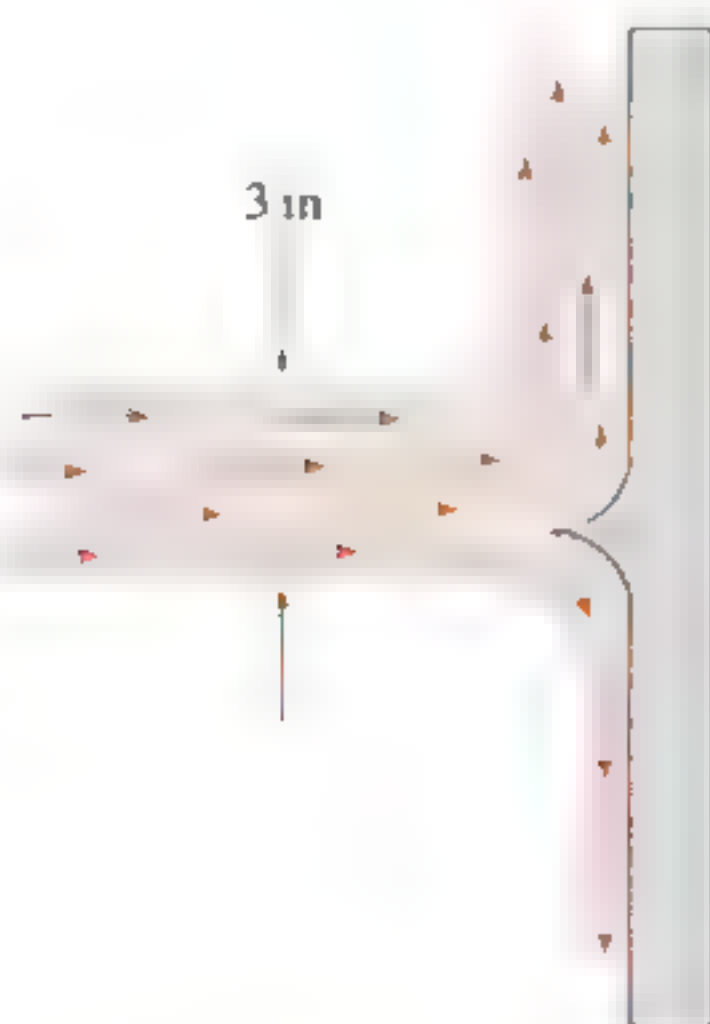
Prob. 15-117

**15-118.** El aspa divide el chorro de agua de 4 in de diámetro. Si la mitad del agua fluye hacia la derecha, en tanto que la otra mitad lo hace hacia la izquierda, y el flujo total es  $Q = 1.5 \text{ ft}^3/\text{s}$ , determine la fuerza vertical ejercida en el aspa por el chorro.  $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$ .



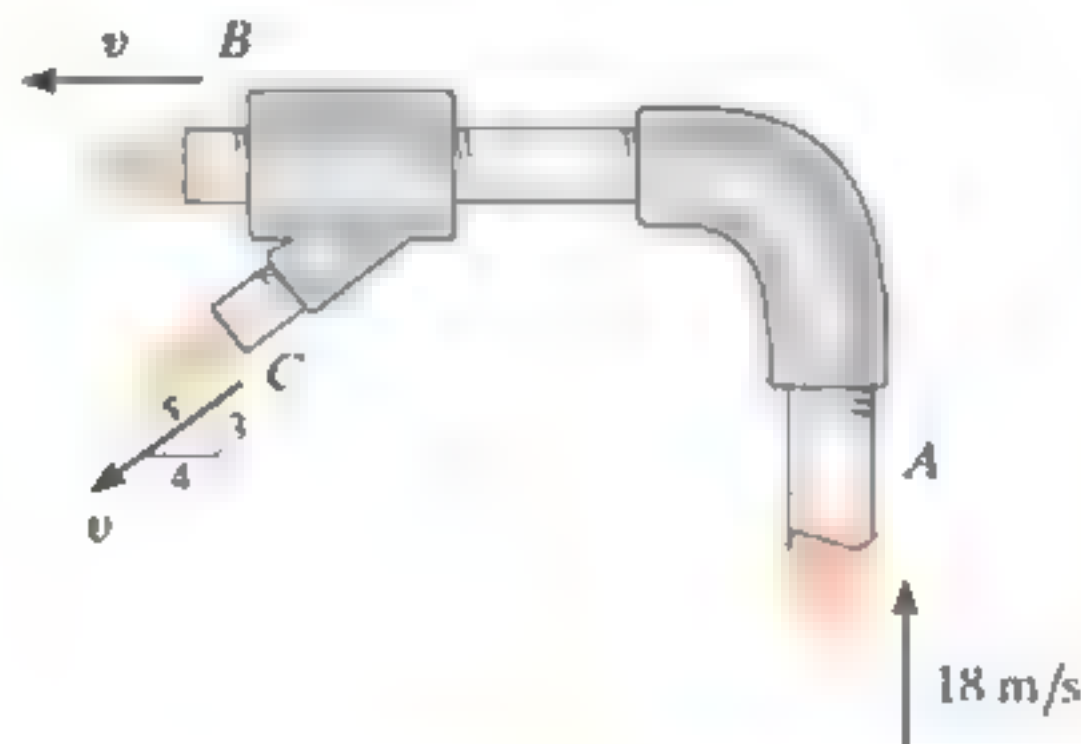
Prob. 15-118

**15-119.** El aspa divide el chorro de agua de 3 in de diámetro. Si un cuarto del agua fluye hacia abajo en tanto que los otros tres cuartos lo hacen hacia arriba y el flujo total es  $Q = 0.5 \text{ ft}^3/\text{s}$ , determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida en el aspa por el chorro.  $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$ .



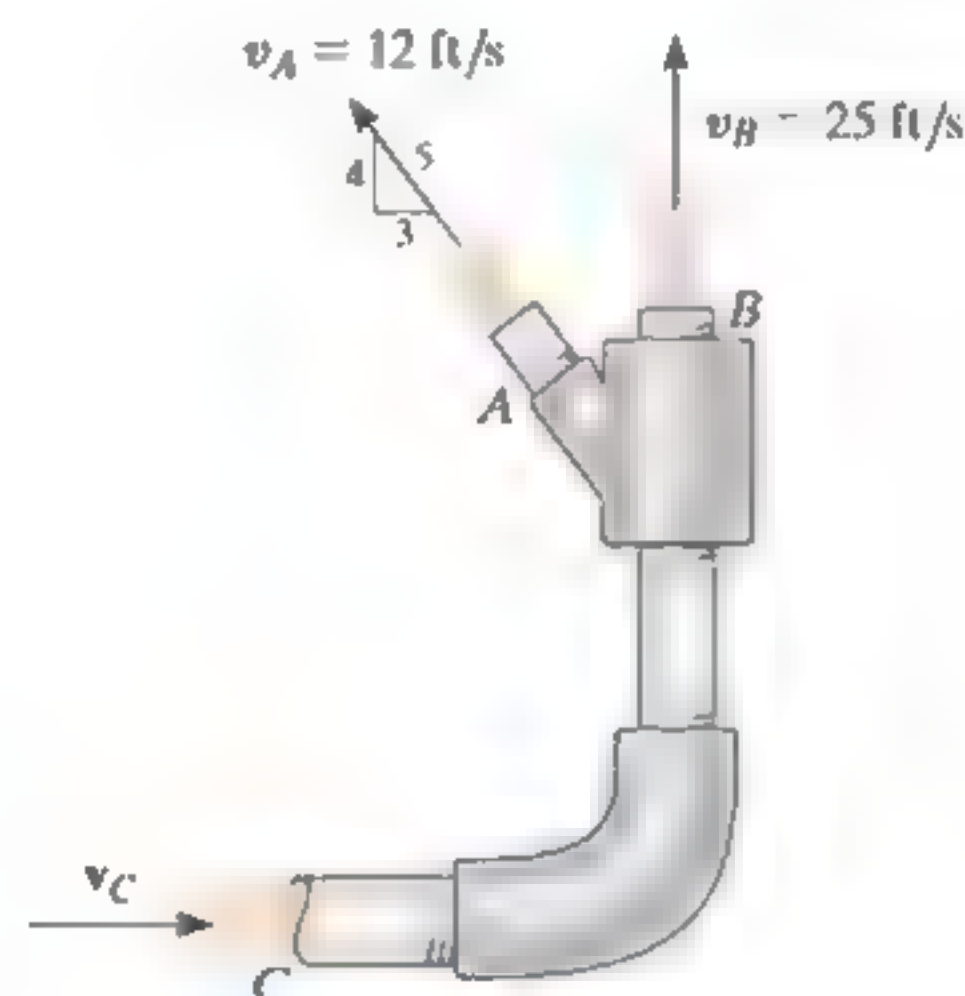
Prob. 15-119

**\*15-120.** La presión manométrica del agua en  $A$  es  $150.5 \text{ kPa}$ . El agua fluye a través del tubo en  $A$  con una velocidad de  $18 \text{ m/s}$ , y sale de la tubería en  $B$  y  $C$  con la misma velocidad  $v$ . Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el codo, necesaria para sostener el ensamble de tubos en equilibrio. Desprecie el peso del agua dentro de la tubería y el peso de los tubos. La tubería tiene un diámetro de  $50 \text{ mm}$  en  $A$ , y en  $B$  y  $C$  el diámetro es de  $30 \text{ mm}$ .  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ .



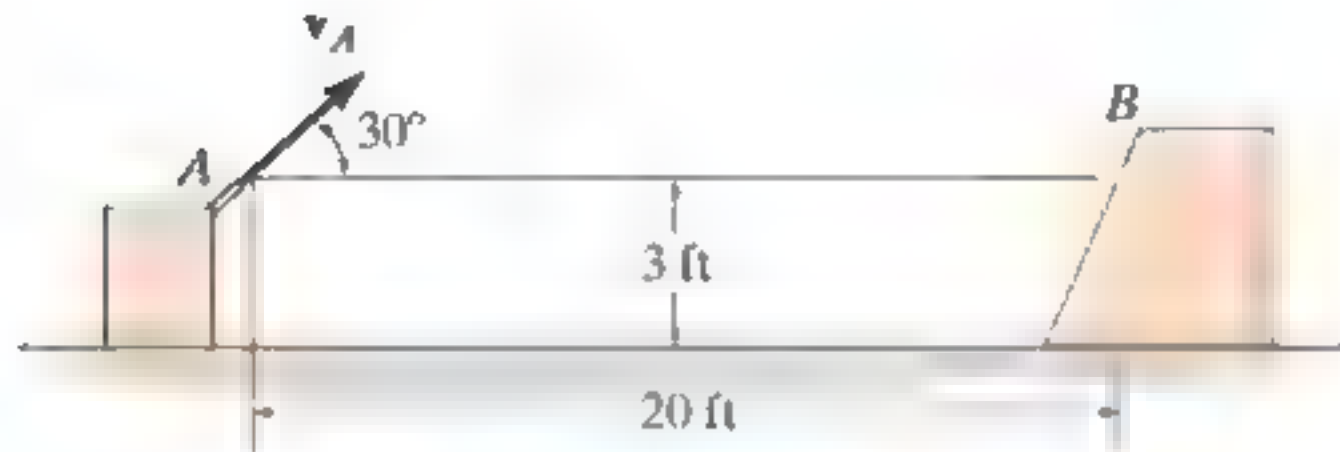
Prob. 15-120

**15-121.** La presión manométrica del agua en  $C$  es  $40 \text{ lb/in}^2$ . Si el agua fluye hacia afuera de la tubería en  $A$  y  $B$  con velocidades  $v_A = 12 \text{ ft/s}$  y  $v_B = 25 \text{ ft/s}$ , determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el codo, necesaria para mantener el ensamble de tubos en equilibrio. Desprecie el peso del agua dentro de la tubería y el peso de los tubos. La tubería tiene un diámetro de  $0.75 \text{ in}$  en  $C$ , y en  $A$  y  $B$  el diámetro es de  $0.5 \text{ in}$ .  $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$ .



Prob. 15-121

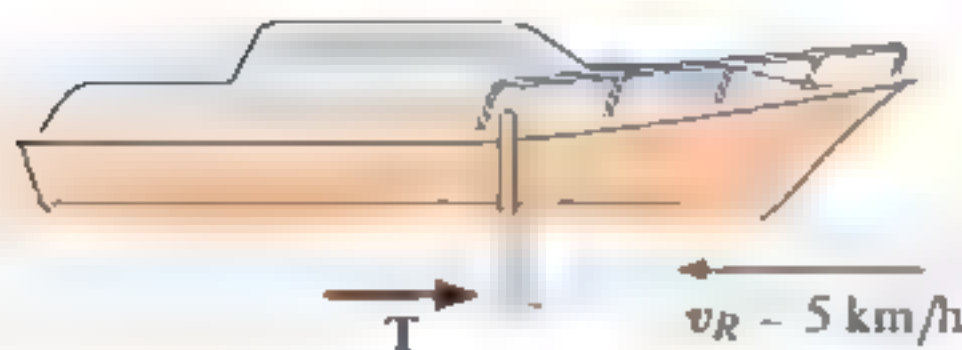
**15-122.** La fuente dispara agua en la dirección mostrada. Si el agua se descarga a  $30^\circ$  desde la horizontal, y el área de la sección transversal del chorro de agua es aproximadamente de  $2 \text{ in}^2$ , determine la fuerza que ejerce sobre la pared de concreto en  $B$ .  $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$ .



Prob. 15-122

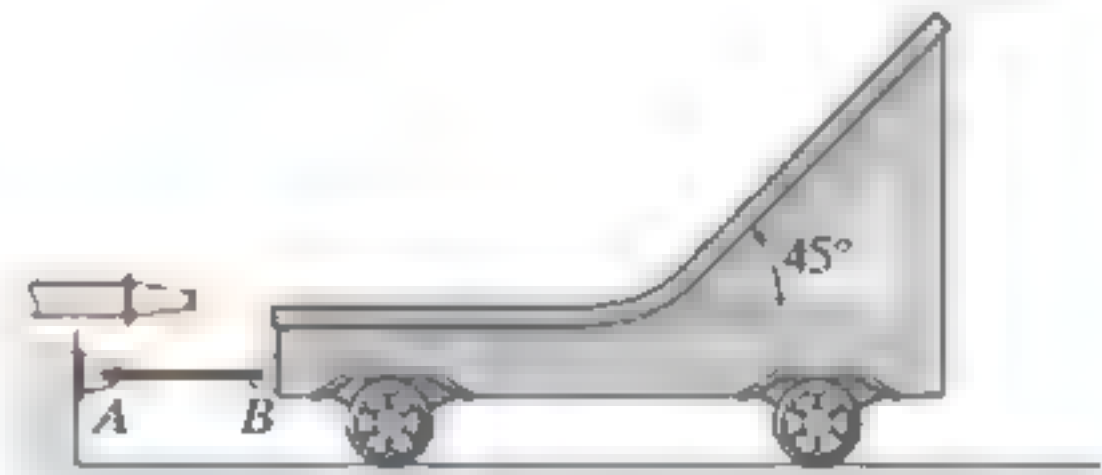
**15-123.** Una cuchilla situada al frente de una locomotora recoge nieve a razón de  $10 \text{ ft}^3/\text{s}$  y la guarda en el tren. Si la locomotora viaja a una rapidez constante de  $12 \text{ ft/s}$ , determine la resistencia al movimiento provocada por la acción de traspaleo. El peso específico de la nieve es  $\gamma_s = 6 \text{ lb/ft}^3$ .

**\*15-124.** La masa del bote es de  $180 \text{ kg}$  y navega por el río a una velocidad constante de  $70 \text{ km/h}$ , medida *con respecto* al río. Éste fluye en la dirección opuesta a  $5 \text{ km/h}$ . Si se coloca un tubo en el agua, como se indica, y recoge  $40 \text{ kg}$  de agua en  $80 \text{ s}$ , determine el empuje horizontal  $T$  en el tubo requerido para vencer la resistencia provocada por la recolección de agua y aun así mantener la rapidez constante del bote.  $\rho_w = 1 \text{ Mg/m}^3$ .



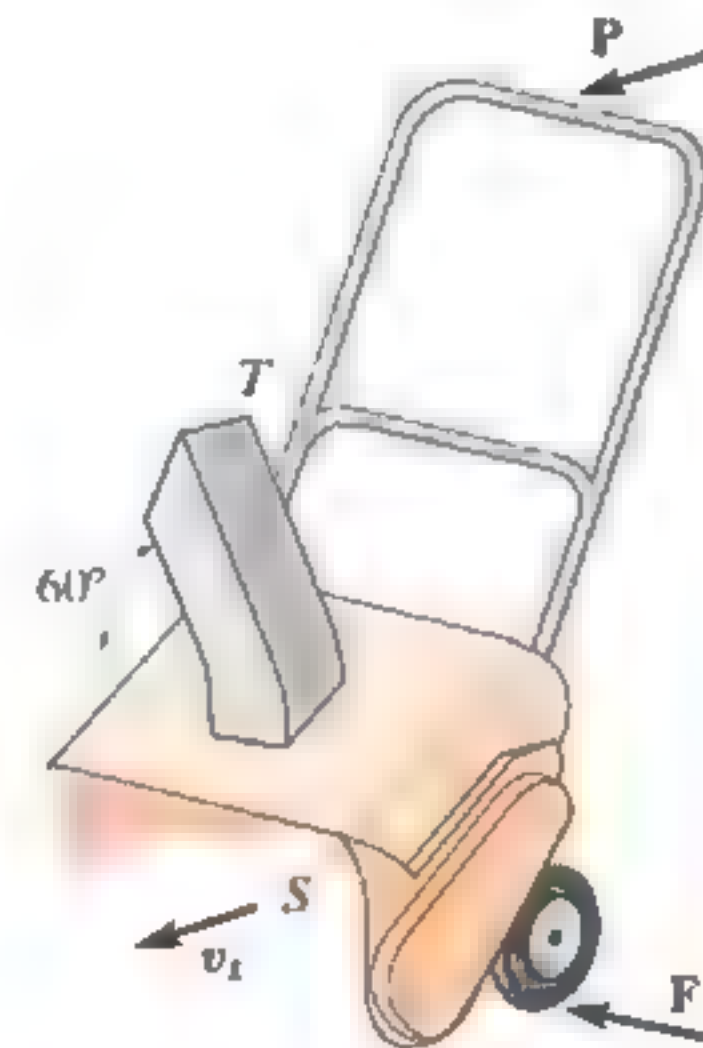
Prob. 15-124

**15-125.** El agua se descarga desde una boquilla con una velocidad de  $12 \text{ m/s}$  y golpea el aspa montada en el carro de  $20 \text{ kg}$ . Determine la tensión desarrollada en la cuerda, necesaria para mantener el carro inmóvil, y la reacción normal de las ruedas en el carro. La boquilla tiene un diámetro de  $50 \text{ mm}$  y la densidad del agua es  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ .



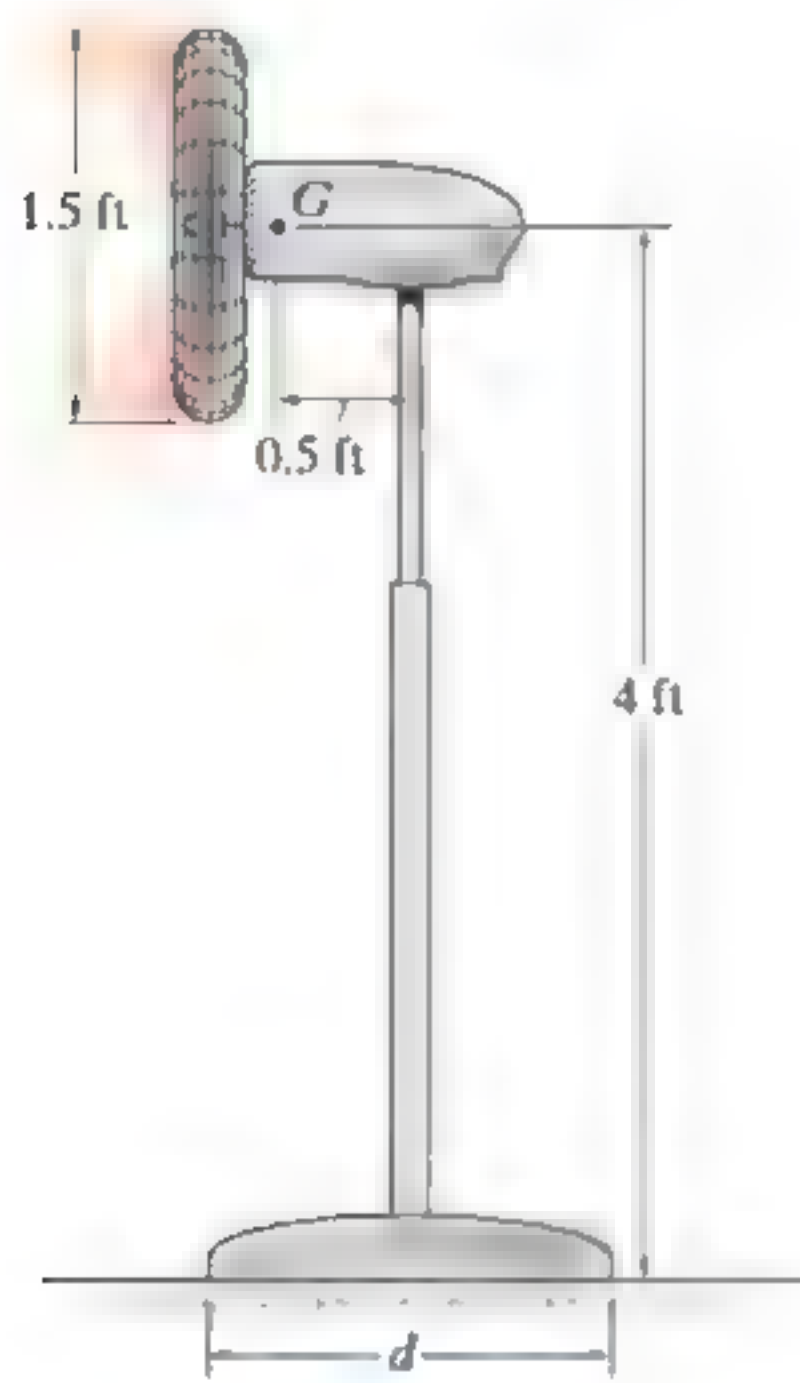
Prob. 15-125

**15-126.** Un soplador de nieve que tiene un cucharón  $S$ , con una área de sección transversal de  $A_s = 0.12 \text{ m}^2$ , es empujado en la nieve con una rapidez de  $v_s = 0.5 \text{ m/s}$ . La máquina descarga la nieve a través de un tubo  $T$  que tiene una área de sección transversal de  $A_T = 0.03 \text{ m}^2$  y se dirige a  $60^\circ$  desde la horizontal. Si la densidad de la nieve es  $\rho_s = 104 \text{ kg/m}^3$ , determine la fuerza horizontal  $P$  requerida para empujar el soplador hacia adelante, y la fuerza de fricción  $F$  resultante de las ruedas sobre el suelo, necesaria para evitar que el soplador se mueva hacia los lados. Las ruedas giran libremente.



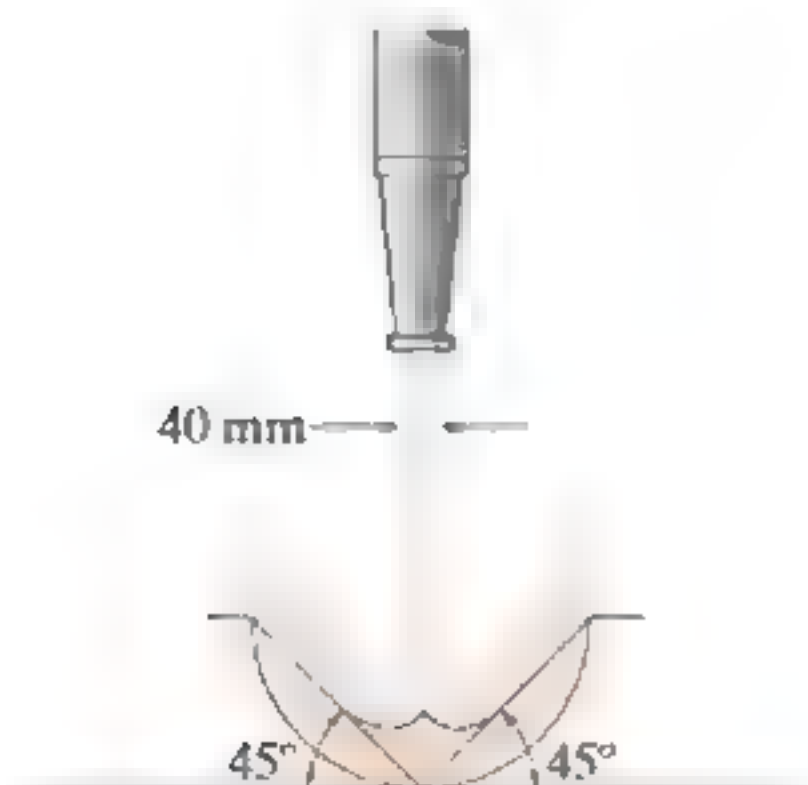
Prob. 15-126

**15-127.** El ventilador sopla aire a  $6000 \text{ ft}^3/\text{min}$ . Si el ventilador tiene un peso de  $30 \text{ lb}$  y un centro de gravedad en  $G$ , determine el diámetro  $d$  mínimo de su base, de modo que no se ladee. El peso específico del aire es  $\gamma = 0.076 \text{ lb/ft}^3$ .



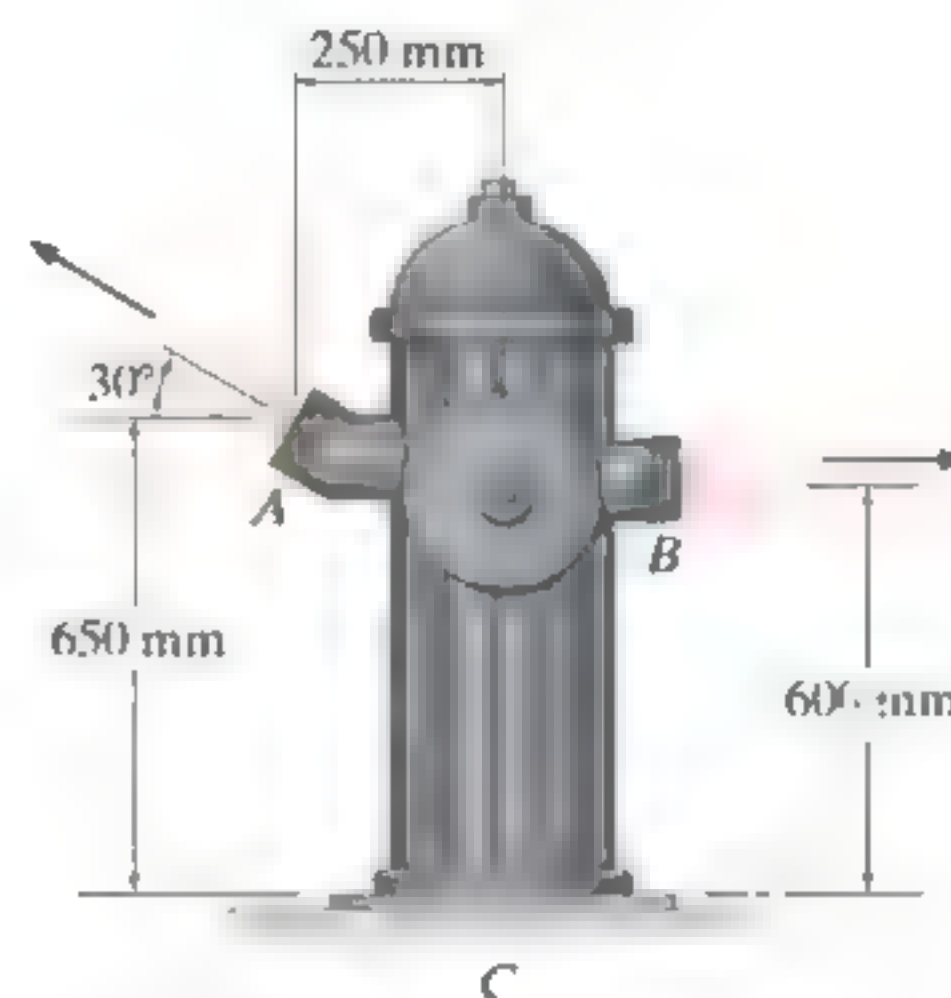
Prob. 15-127

**\*15-128.** La boquilla tiene un diámetro de  $40 \text{ mm}$ . Si descarga agua de manera uniforme con una velocidad hacia abajo de  $20 \text{ m/s}$  contra el aspa fija, determine la fuerza vertical ejercida por el agua sobre el aspa  $\rho_w = 1 \text{ Mg/m}^3$ .



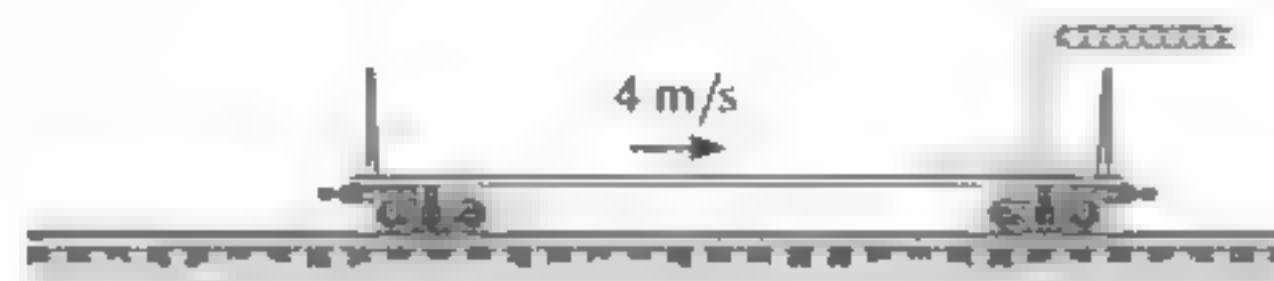
Prob. 15-128

**15-129.** El flujo de agua entra por debajo del hidrante en  $C$  a razón de  $0.75 \text{ m}^3/\text{s}$ . Después, se divide por igual entre las dos salidas en  $A$  y  $B$ . Si la presión manométrica en  $C$  es  $300 \text{ kPa}$ , determine las reacciones de fuerza horizontal y vertical y la reacción de momento sobre el soporte fijo en  $C$ . El diámetro de las dos salidas en  $A$  y  $B$  es  $75 \text{ mm}$ , y el diámetro de la tubería de entrada en  $C$  es  $150 \text{ mm}$ . La densidad del agua es  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Desprecie la masa del agua contenida y del hidrante.



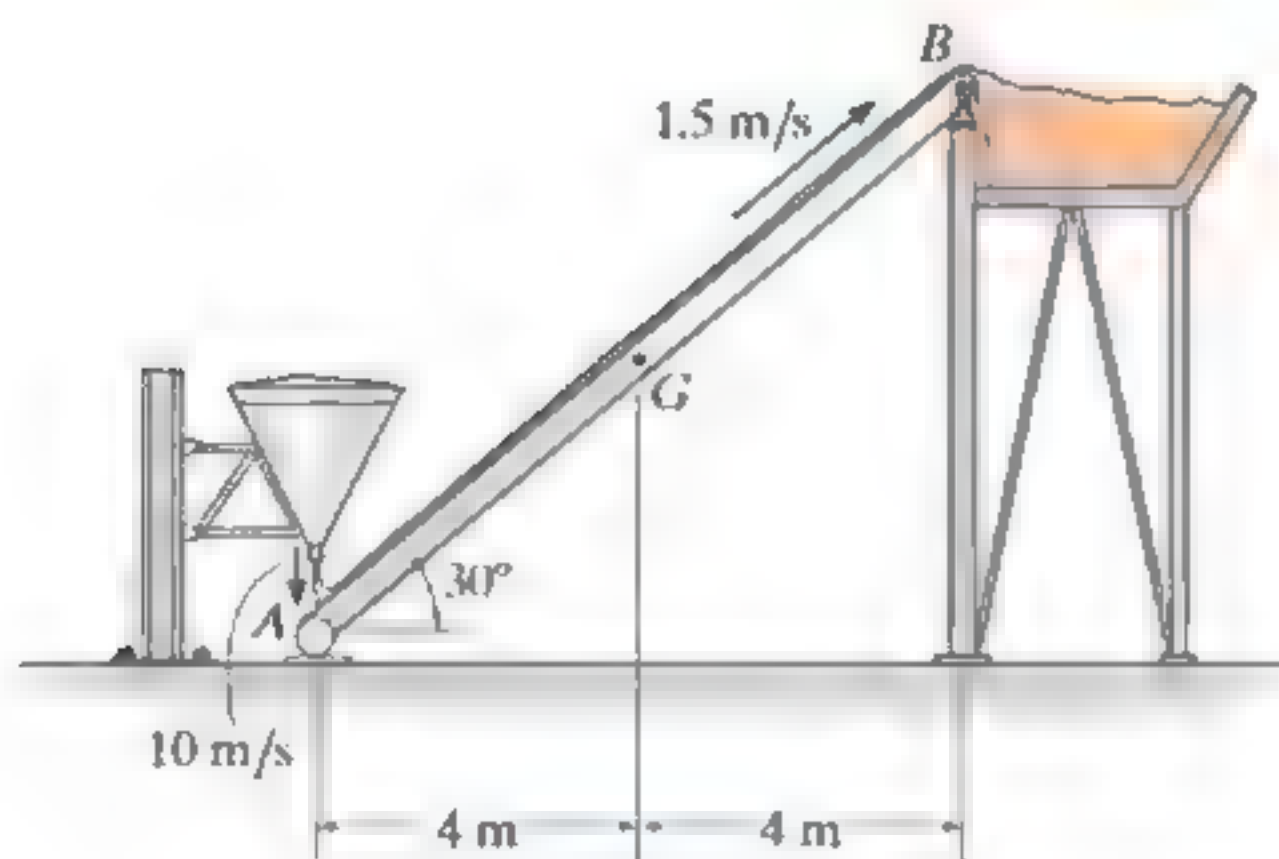
Prob. 15-129

**15-130.** La arena cae sobre el vagón de ferrocarril vacío de  $2 \text{ Mg}$  a  $50 \text{ kg/s}$  desde una banda transportadora. Si el vagón se desplaza inicialmente a  $4 \text{ m/s}$ , determine la rapidez del vagón en función del tiempo.



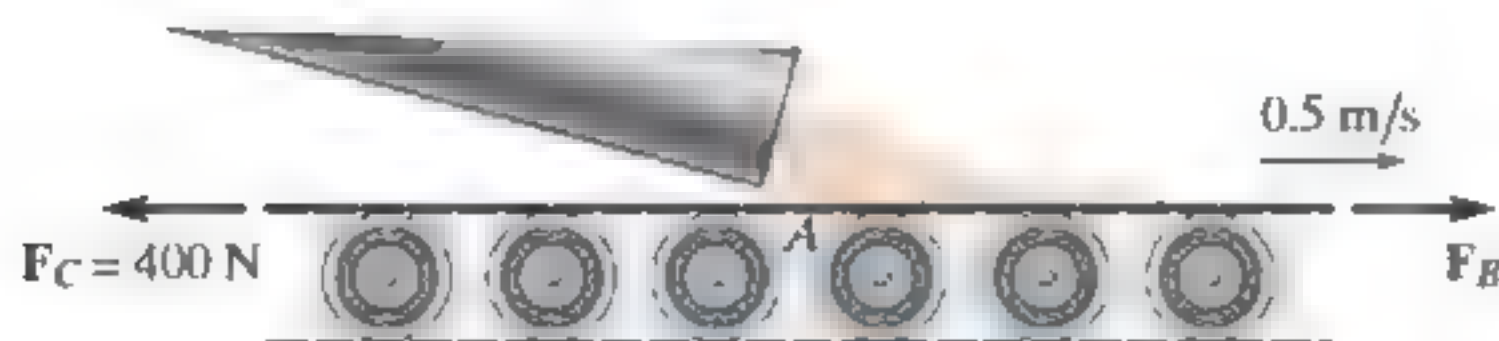
Prob. 15-130

**15-131.** La arena se descarga desde el silo en  $A$  a razón de  $50 \text{ kg/s}$ , con una velocidad vertical de  $10 \text{ m/s}$  sobre la banda transportadora, que se está moviendo con una velocidad constante de  $1.5 \text{ m/s}$ . Si el sistema de transportación y la arena en él tienen una masa total de  $750 \text{ kg}$  y el centro de masa en el punto  $G$ , determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el soporte de pasador  $B$  y el soporte de rodillo  $A$ . Desprecie el espesor de la banda transportadora.



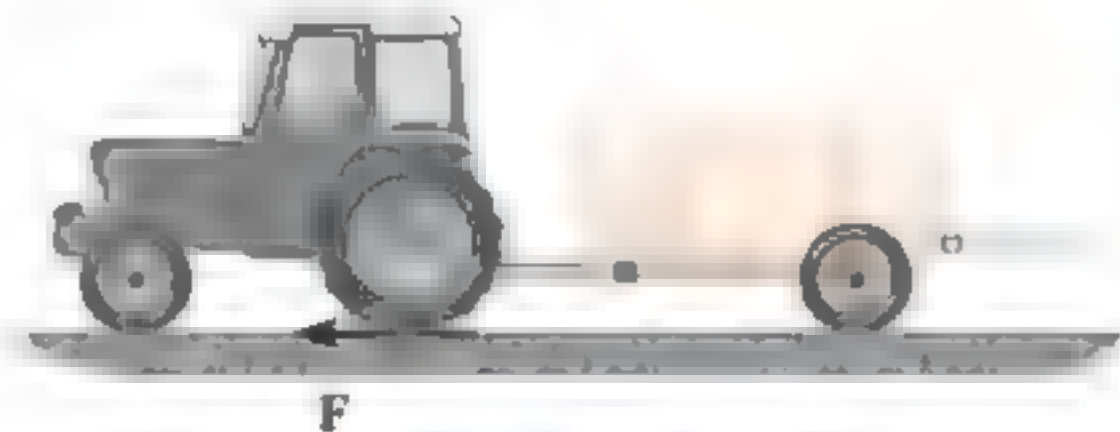
Prob. 15-131

**\*15-132.** La arena se deposita desde un conducto sobre una banda transportadora que se mueve a  $0.5 \text{ m/s}$ . Si se supone que la arena cae verticalmente sobre la cinta en  $A$  a razón de  $4 \text{ kg/s}$ , determine la tensión  $F_B$  de la banda a la derecha de  $A$ . La banda se mueve libremente sobre los rodillos transportadores y su tensión a la izquierda de  $A$  es  $F_C = 400 \text{ N}$ .



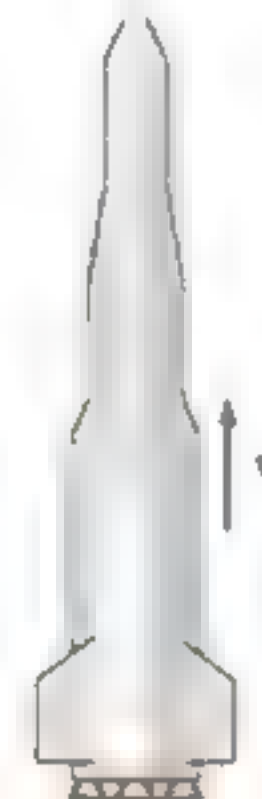
Prob. 15-132

**15-133.** El tractor junto con el tanque vacío tiene una masa total de  $4 \text{ Mg}$ . El tanque se llena con  $2 \text{ Mg}$  de agua. El agua se descarga a una razón constante de  $50 \text{ kg/s}$  a una velocidad constante de  $5 \text{ m/s}$ , medida con respecto al tractor. Si éste arranca desde el punto de reposo y las ruedas traseras generan una fuerza de tracción resultante de  $250 \text{ N}$ , determine la velocidad y aceleración del tractor en el instante que se vacía el tanque.



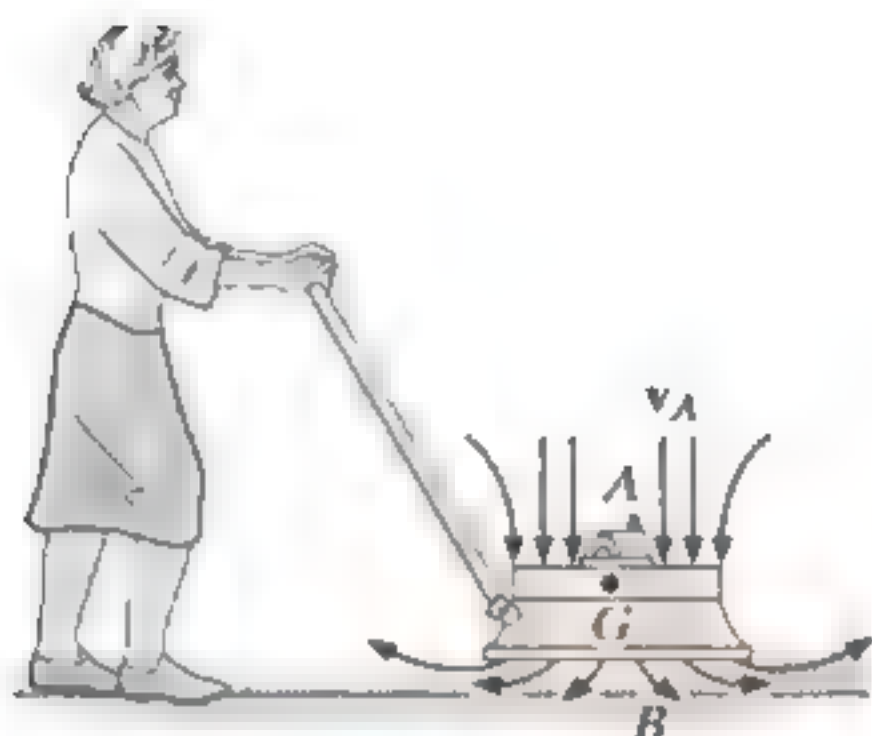
Prob. 15-133

**15-134.** Un cohete tiene un peso en vacío de  $500 \text{ lb}$  y carga  $300 \text{ lb}$  de combustible. Si el combustible se quema a razón de  $15 \text{ lb/s}$  y se expulsa con una velocidad relativa de  $4400 \text{ ft/s}$ , determine la rapidez máxima alcanzada por el cohete si parte desde el reposo. Desprecie el efecto de la gravitación sobre el cohete.



Prob. 15-134

**15-135.** Una cortadora de césped eléctrica flota muy cerca del suelo. Esto se hace al pasar aire a una rapidez de  $6 \text{ m/s}$  a través de una unidad de admisión  $A$ , que tiene una área en su sección transversal de  $A_A = 0.25 \text{ m}^2$  para, luego, descargarlo en el suelo,  $B$ , donde el área de sección transversal es  $A_B = 0.35 \text{ m}^2$ . Si el aire en  $A$  está sujeto solamente a la presión atmosférica, determine la presión del aire que ejerce la cortadora de césped sobre el suelo, cuando el peso de la podadora está libremente apoyado y no se coloca ninguna carga en la manija. La cortadora de césped tiene una masa de  $15 \text{ kg}$  con centro de masa en  $G$ . Suponga que el aire tiene una densidad constante de  $\rho_a = 1.22 \text{ kg/m}^3$ .



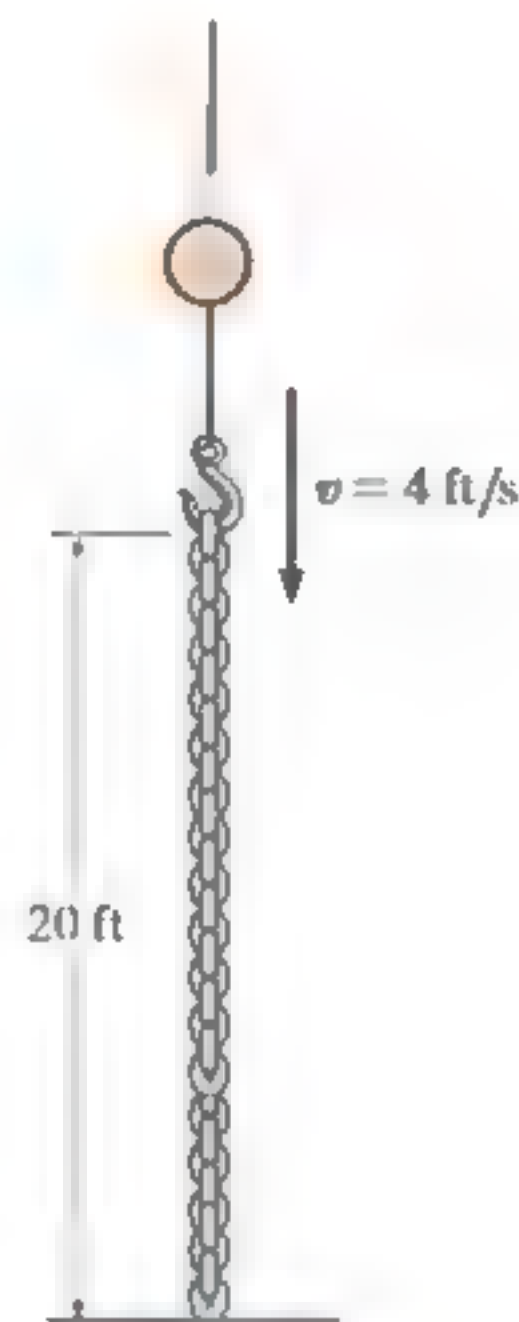
Prob. 15-135

**\*15-136.** El auto a propulsión tiene una masa de  $2 \text{ Mg}$  (vacío) y carga  $120 \text{ kg}$  de combustible. Si el combustible se consume a razón constante de  $6 \text{ kg/s}$  y es expulsado del auto con una velocidad relativa de  $800 \text{ m/s}$ , determine la rapidez máxima alcanzada por el auto si parte del reposo. La resistencia a la fricción debida a la atmósfera es  $F_D = (6.8v^2) \text{ N}$ , donde  $v$  es la rapidez en  $\text{m/s}$ .



Prob. 15-136

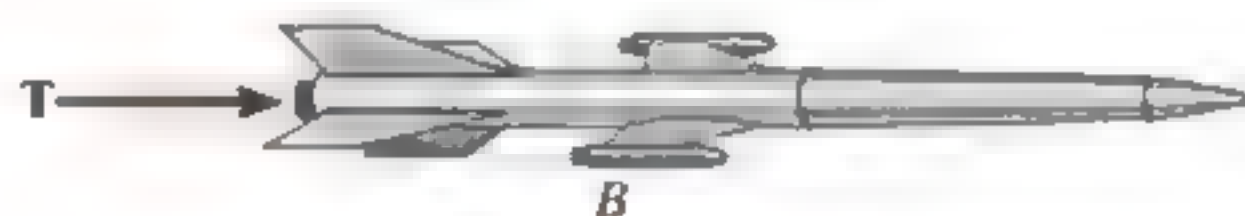
**15-137.** Si la cadena se baja con una rapidez constante  $v = 4 \text{ ft/s}$ , determine la reacción normal ejercida sobre el piso como una función del tiempo. La cadena tiene un peso de  $5 \text{ lb/ft}$  y una longitud total de  $20 \text{ ft}$ .



Prob. 15-137

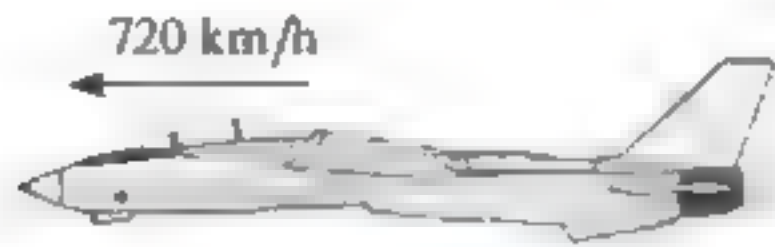
**15-138.** La segunda etapa de un cohete de dos etapas pesa  $2000 \text{ lb}$  (vacío) y se lanza desde la primera etapa con una velocidad de  $3000 \text{ mi/h}$ . El combustible en la segunda etapa pesa  $1000 \text{ lb}$ . Si se consume a razón de  $50 \text{ lb/s}$  y es expulsado con una velocidad relativa de  $8000 \text{ ft/s}$ , determine la aceleración de la segunda etapa justo después de que el motor se enciende. ¿Cuál es la aceleración del cohete justo antes de que se consuma todo el combustible? Desprecie el efecto de la gravitación.

**15-139.** El misil pesa  $40\,000 \text{ lb}$ . El empuje constante proporcionado por el turborreactor es  $T = 15\,000 \text{ lb}$ . Dos cohetes  $B$  proporcionan empuje adicional. El combustible en cada refuerzo se quema a razón constante de  $150 \text{ lb/s}$ , con una velocidad de escape relativa de  $3000 \text{ ft/s}$ . Si la masa del combustible perdida por el turborreactor es despreciable, determine la velocidad del misil después del tiempo de combustión de  $4 \text{ s}$  de los propulsores. La velocidad inicial del misil es de  $300 \text{ mi/h}$ .



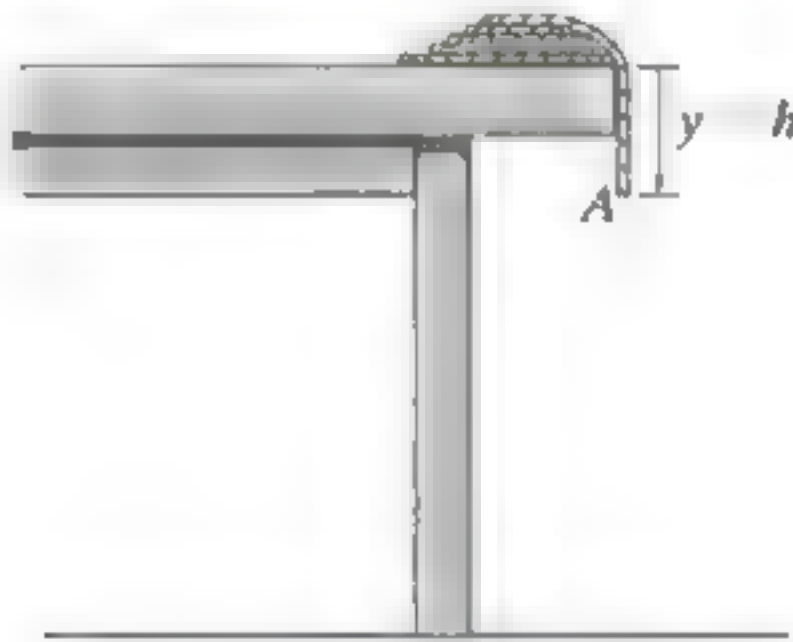
Prob. 15-139

**\*15-140.** El jet vuela a una rapidez de 720 km/h. Si el combustible se consume a 0.8 kg/s y el motor aspira aire a 200 kg/s, mientras el gas de escape (aire y combustible) tiene una rapidez relativa de 12 000 m/s, determine la aceleración del avión en este instante. La resistencia de arrastre del aire es  $F_D = (55 v^2)$ , donde la rapidez se mide en m/s. El jet tiene una masa de 7 Mg.



Prob. 15-140

**15-141.** La cuerda tiene una masa  $m'$  por unidad de longitud. Si la longitud final  $y = h$  se deja caer del borde de la mesa y se libera, determine la velocidad de su extremo  $A$  para cualquier posición  $y$ , a medida que la cuerda se desenrolla y comienza a caer.



Prob. 15-141

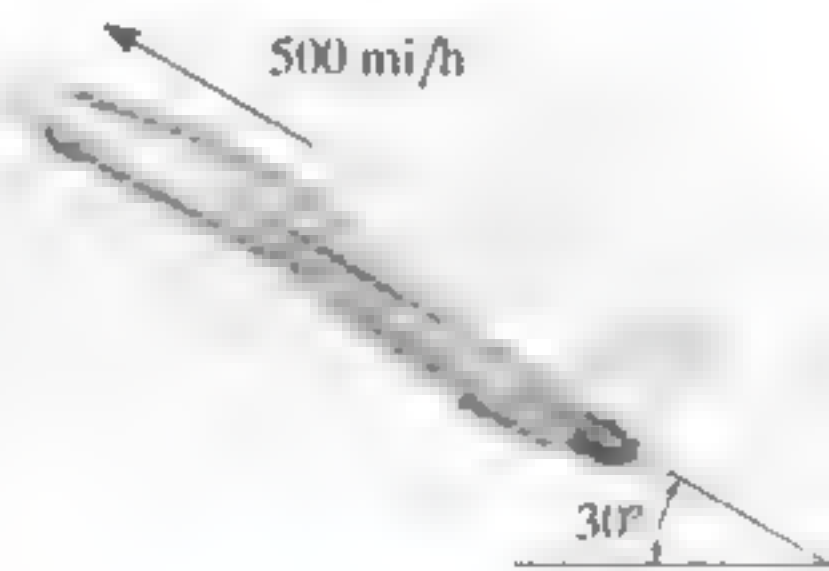
**15-142.** El avión jet de 12 Mg vuela a una rapidez constante de 950 km/h a lo largo de una línea recta horizontal. El aire entra por las cavidades de admisión  $S$  a razón de  $50 \text{ m}^3/\text{s}$ . Si el motor quema el combustible a razón de 0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado con respecto al avión con una rapidez de 450 m/s, determine la fuerza de resistencia al avance ejercida sobre el avión por el aire. Suponga que éste tiene una densidad constante de  $1.22 \text{ kg/m}^3$ . *Sugerencia:* Como la masa tanto entra como sale del avión, las ecuaciones 15-28 y 15-29 deben combinarse para obtener

$$\Sigma F_x = m \frac{dv}{dt} = v_{D/c} \frac{dm_c}{dt} + v_{D/j} \frac{dm_j}{dt}$$



Prob. 15-142

**15-143.** El jet vuela a una rapidez de 500 mi/h, con la horizontal a  $30^\circ$ . Si el combustible se consume a 3 lb/s y el motor aspira aire a 400 lb/s, mientras el gas de escape (aire y combustible) tiene una velocidad relativa de 32 800 ft/s, determine la aceleración del avión en este instante. La resistencia al avance del aire es  $F_D = (0.7 v^2)$  lb, donde la rapidez se mide en ft/s. El jet pesa 15 000 lb. *Sugerencia:* Vea el problema 15-142.



Prob. 15-143

**\*15-144.** Un jet jumbo comercial de cuatro motores vuela a una rapidez crucero de 800 km/h nivelado cuando los cuatro motores están en operación. Cada uno de los motores es capaz de descargar gases de combustión a una velocidad de 775 m/s con respecto al avión. Si durante una prueba dos de los motores, uno en cada lado del avión, se apagan, determine la nueva velocidad crucero del jet. Suponga que la resistencia (el arrastre) del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez, es decir,  $F_D = cv^2$ , donde  $c$  es una constante que debe determinarse. Desprecie la pérdida de masa debida al consumo de combustible.



Prob. 15-144

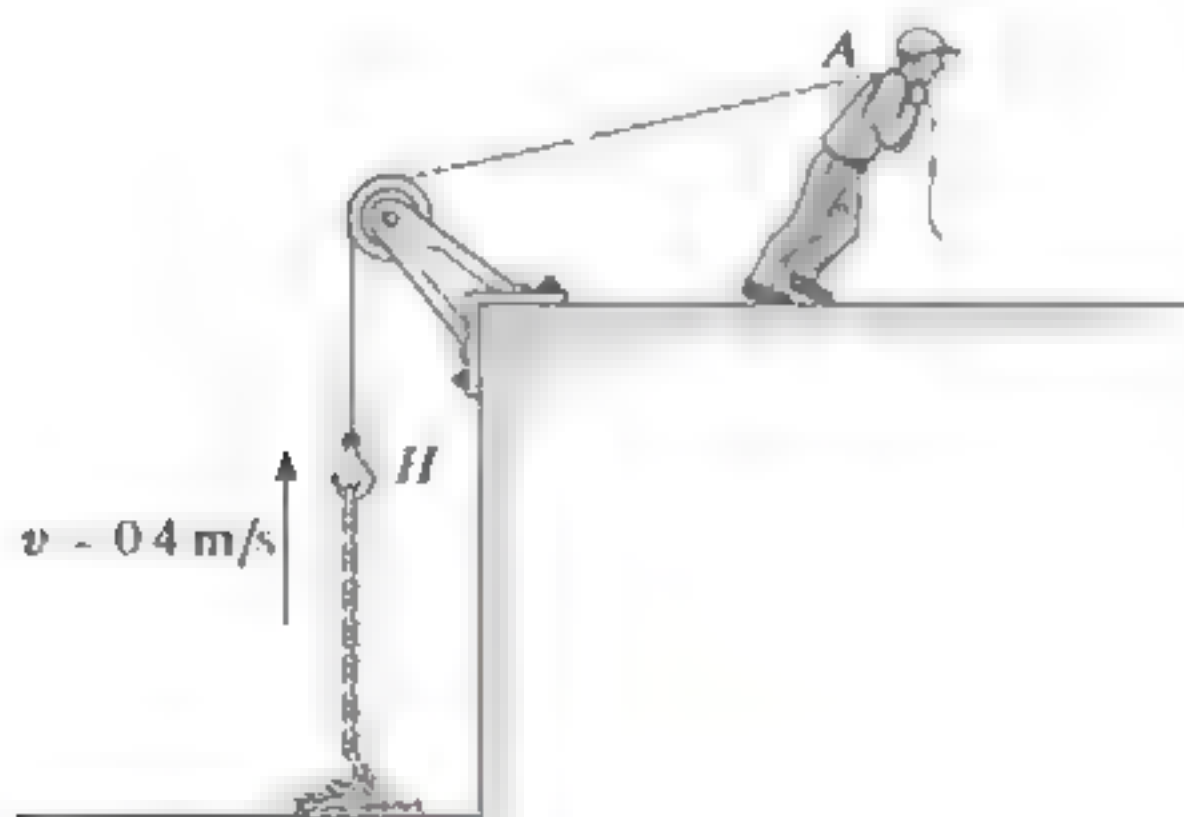
**15-145.** El helicóptero de 10 Mg carga un balde que contiene 500 kg de agua, la cual se utiliza para apagar incendios. Si se mantiene en una posición fija sobre el terreno y luego descarga 50 kg/s de agua a 10 m/s, medidos con respecto al helicóptero, determine la aceleración inicial hacia arriba que el helicóptero experimenta a medida que descarga el agua.



Prob. 15-145

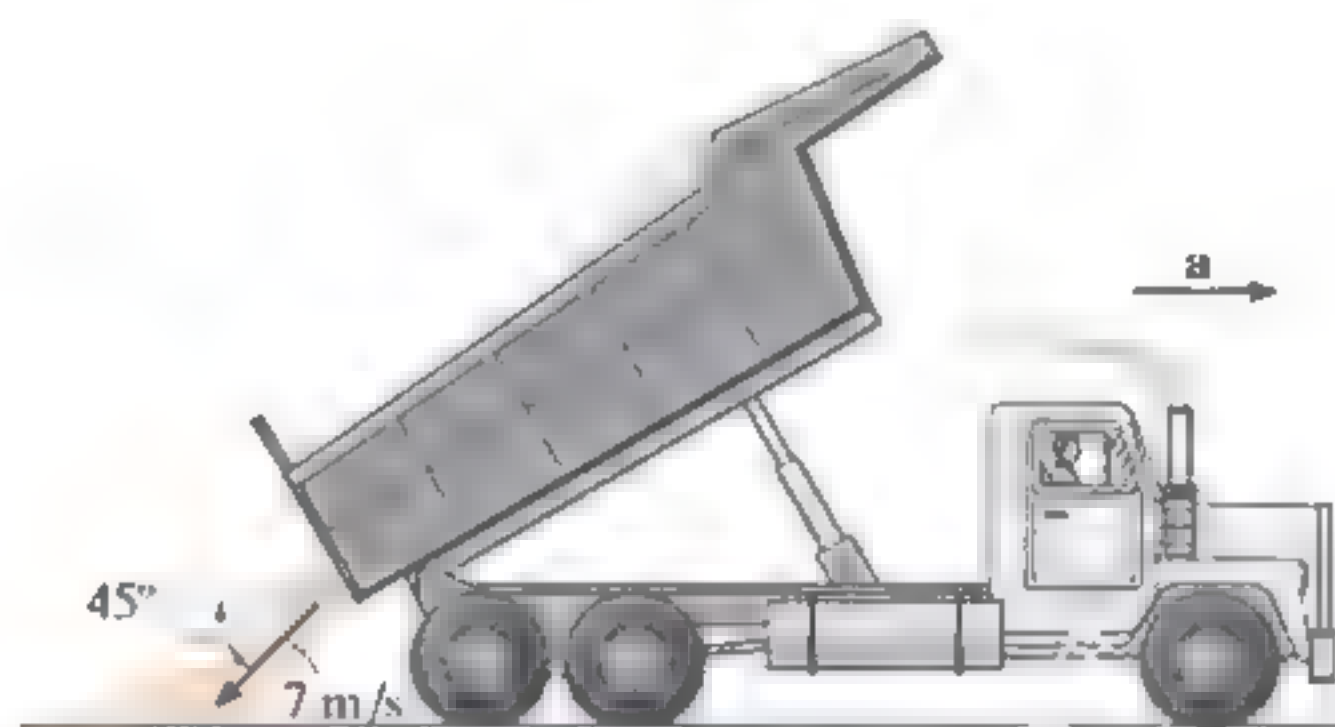
**15-146.** Un cohete tiene un peso en vacío de 500 lb y carga 300 lb de combustible. Si el combustible se quema a una tasa de 1.5 lb/s y se expulsa con una velocidad de 4400 ft/s en relación con el cohete, determine la rapidez máxima alcanzada por el cohete partiendo desde el reposo. Desprecie el efecto de la gravitación sobre el cohete.

**15-147.** Determine la magnitud de la fuerza  $F$  como una función del tiempo, que debe aplicarse al extremo de la cuerda en  $A$  para elevar el gancho  $H$  con una rapidez constante  $v = 0.4$  m/s. Inicialmente la cadena está en reposo en el suelo. Desprecie la masa de la cuerda y el gancho. La cadena tiene una masa de 2 kg/m.



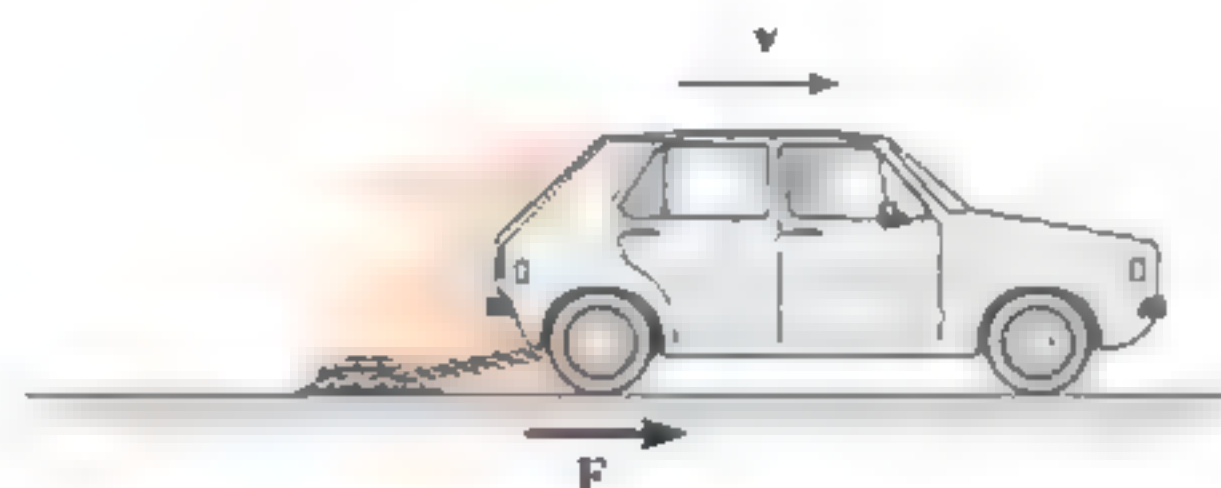
Prob. 15-147

**\*15-148.** La masa del camión es de 50 Mg cuando está vacío. Al descargar 5 m<sup>3</sup> de arena a una razón constante de 0.8 m<sup>3</sup>/s, la arena sale por la parte trasera a una rapidez de 7 m/s, medida con respecto al camión, en la dirección que se muestra. Si el camión rueda libremente, determine su aceleración inicial en el momento en que la arena comienza a caer. Ignore la masa de las ruedas y cualquier resistencia de fricción al movimiento. La densidad de la arena es  $\rho_s = 1520$  kg/m<sup>3</sup>.



Prob. 15-148

**15-149.** El automóvil tiene una masa  $m_0$  y se utiliza para remolcar la cadena lisa que tiene una longitud total de  $l$  y una masa por unidad de longitud  $m'$ . Si en un inicio la cadena está amontonada, determine la fuerza de tracción  $F$  que debe ser suministrada por las ruedas traseras del auto, necesaria para mantener una rapidez constante  $v$  mientras la cadena es jalada.



Prob. 15-149

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**C15-1.** La pelota de béisbol viaja a la izquierda cuando el bate la golpea. Si la pelota luego se mueve horizontalmente a la derecha, determine qué mediciones podría hacer para determinar el impulso neto impartido a la pelota. Use valores numéricos para dar un ejemplo de cómo se puede hacer esto.



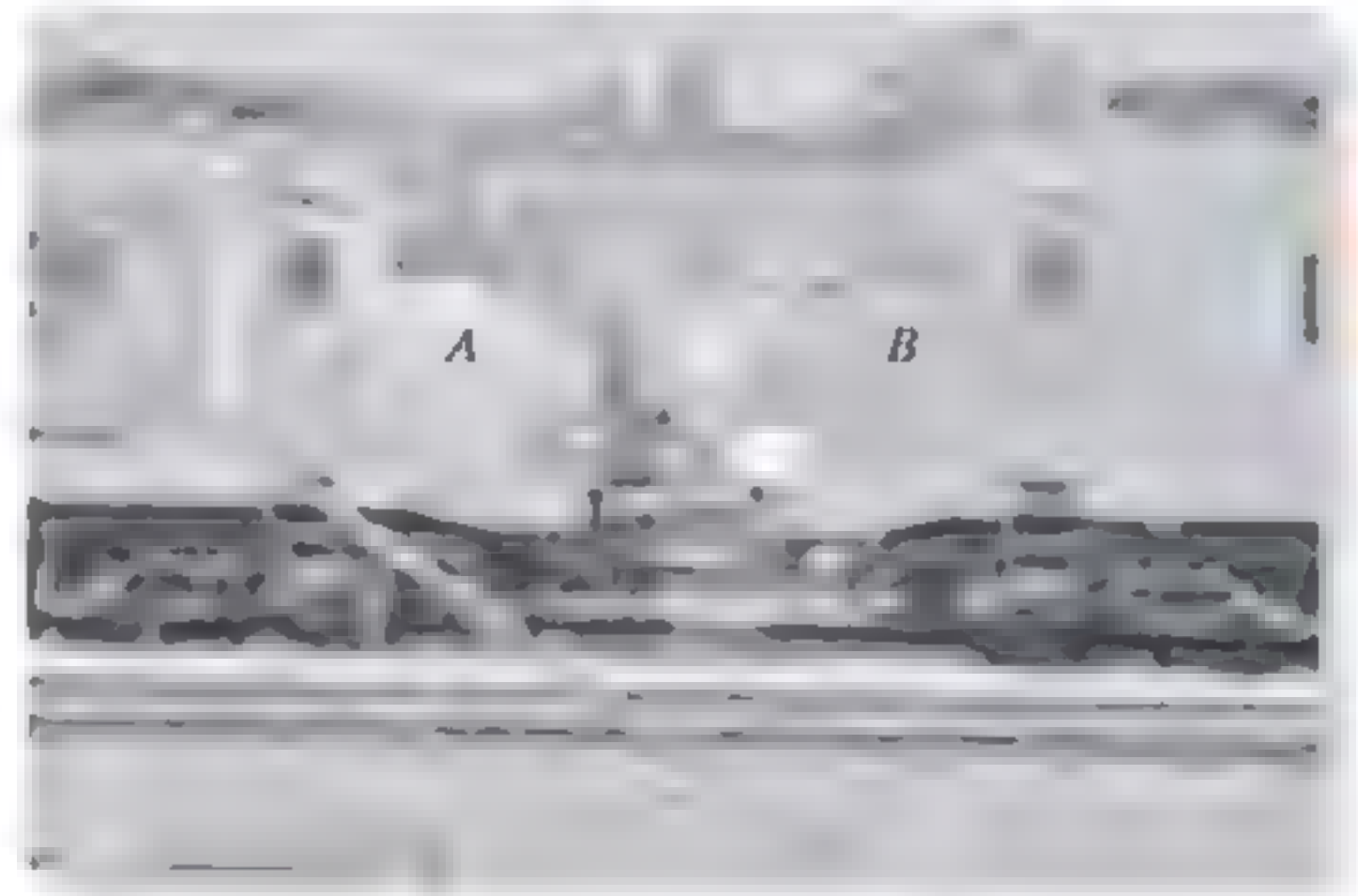
Prob. C15-1 (© R. C. Hibbeler)

**C15-2.** La “bola” de demolición de acero cuelga de la pluma por medio de un neumático viejo  $A$ . El operador de la grúa alza la bola y luego la deja caer libremente para romper el concreto. Explique, con datos numéricos apropiados, por qué es una buena idea utilizar el neumático de caucho en este trabajo.



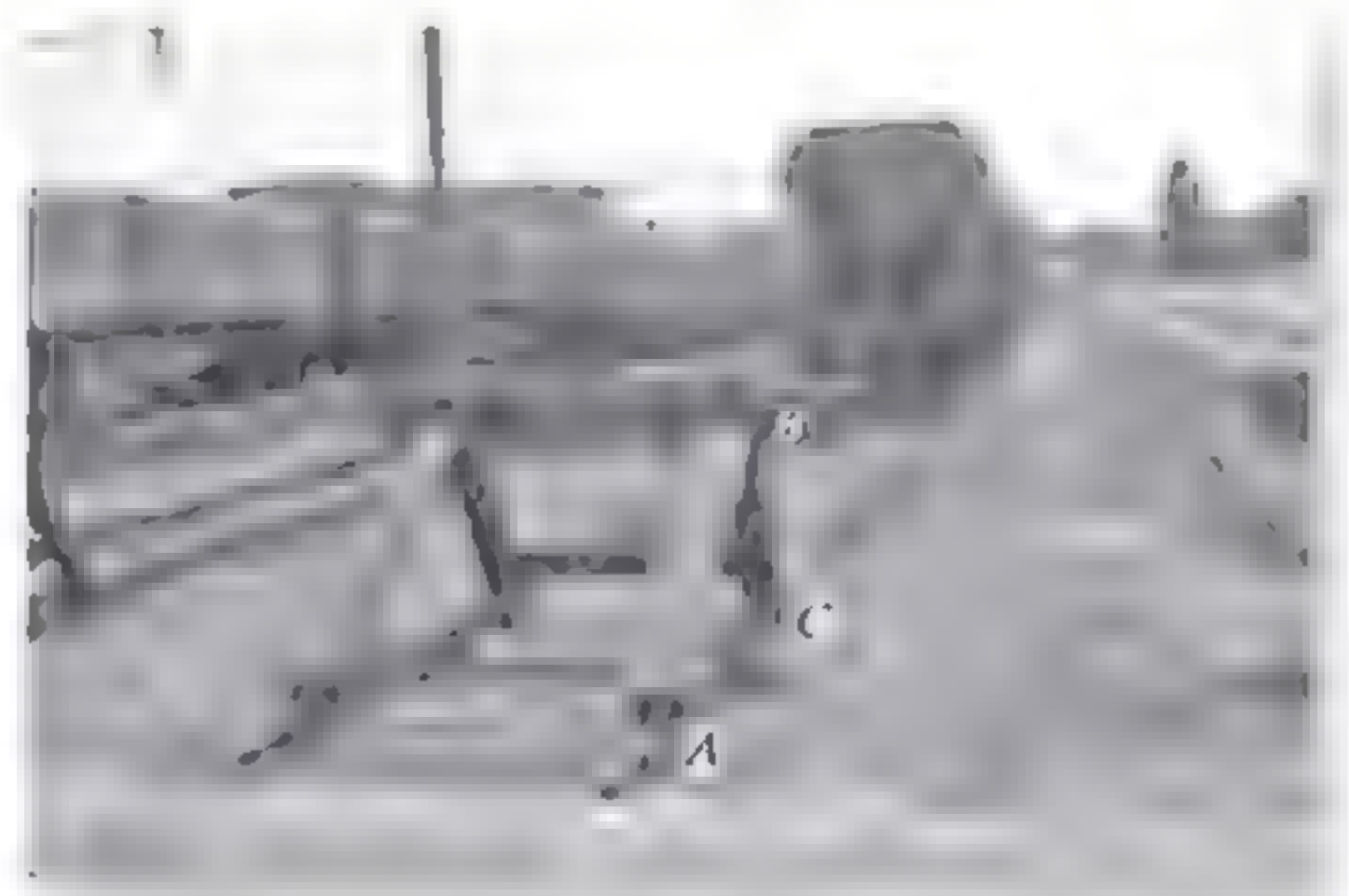
Prob. C15-2 (© R. C. Hibbeler)

**C15-3.** La máquina de tren del lado izquierdo,  $A$ , está en reposo y la del lado derecho,  $B$ , rueda libremente hacia la izquierda. Si las máquinas son idénticas, use valores numéricos para demostrar cómo se determina la compresión máxima en cada uno de los parachoques de resorte montados en el frente de las máquinas. Cada máquina rueda libremente.



Prob. C15-3 (© R. C. Hibbeler)

**C15-4.** Tres carros de ferrocarril tienen la misma masa y ruedan libremente cuando chocan en el parachoques fijo. Las patas  $AB$  y  $BC$  del parachoques están conectadas con pasador en sus extremos; el ángulo  $BAC$  es de  $30^\circ$  y el  $BCA$  es de  $60^\circ$ . Compare el impulso promedio en cada pata necesario para detener los carros si éstos no tienen parachoques o si tienen uno de resorte. Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.

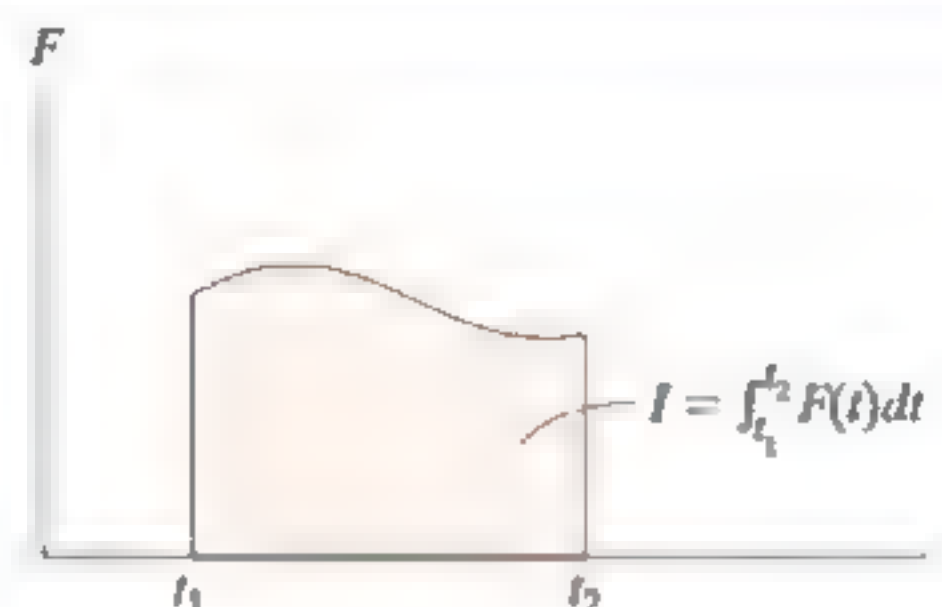


Prob. C15-4 (© R. C. Hibbeler)

## TEMAS DEL CAPÍTULO

### Impulso

Un impulso se define como el producto de fuerza por tiempo. Gráficamente representa el área bajo el diagrama  $F-t$ . Si la fuerza es constante, entonces el impulso es  $I = F_c(t_2 - t_1)$ .



### Principio de impulso y cantidad de movimiento

Cuando combinamos la ecuación de movimiento  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  y la ecuación cinemática,  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , obtenemos el principio de impulso y cantidad de movimiento. Ésta es una ecuación vectorial que puede descomponerse en componentes rectangulares y utilizarse para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Para su aplicación, debería trazarse el diagrama de cuerpo libre para que cuente con todos los impulsos que actúan sobre la partícula.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$$

### Conservación de la cantidad de movimiento lineal

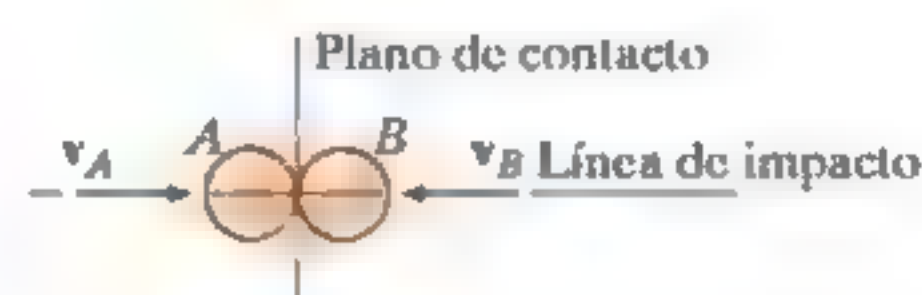
Si se aplica el principio de impulso y cantidad de movimiento a un *sistema de partículas*, entonces las colisiones entre ellas producen impulsos internos que son iguales, opuestos y colineales y, por consiguiente, desaparecen de la ecuación. Además, si un impulso externo es mínimo, es decir, la fuerza es mínima y el tiempo es corto, entonces el impulso puede clasificarse como no impulsor y omitirse. Por consiguiente, se conserva la cantidad de movimiento del sistema de partículas.

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es útil para determinar la velocidad final de una partícula, cuando entre dos partículas se ejercen impulsos internos y se conocen las velocidades iniciales de ellas. Si se va a determinar el impulso interno, entonces se aísla una de las partículas y el principio de impulso y cantidad de movimiento se aplica a esta partícula.

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

### Impacto

Cuando dos partículas  $A$  y  $B$  experimentan un impacto directo, el impulso interno entre ellas es igual, opuesto y colineal. Por consiguiente, la conservación de la cantidad de movimiento para este sistema se aplica a lo largo de la línea de impacto.



$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

Si se desconocen las velocidades finales, para la solución se requiere una segunda ecuación. Debemos utilizar el coeficiente de restitución  $e$ . Este coeficiente determinado experimentalmente depende de las propiedades físicas de las partículas que chocan. Puede expresarse como la relación entre su velocidad relativa después de la colisión y su velocidad relativa antes de la colisión. Si la colisión es elástica, no se pierde energía y  $e = 1$ . Para una colisión plástica  $e = 0$ .

Si el impacto es oblicuo, entonces la conservación de la cantidad de movimiento del sistema y la ecuación del coeficiente de restitución se aplican a lo largo de la línea de impacto. También la conservación de la cantidad de movimiento de cada partícula se aplica perpendicular a esta línea (plano de impacto), porque en esta dirección no actúa ningún impulso en las partículas.

#### Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

El momento de la cantidad de movimiento lineal con respecto a un eje ( $z$ ) se llama cantidad de movimiento angular.

El principio de impulso y cantidad de movimiento angulares se suele utilizar para eliminar impulsos desconocidos, al sumar los momentos con respecto a un eje a través del cual las líneas de acción de estos impulsos no producen ningún momento. Por tal razón, un diagrama de cuerpo libre deberá acompañar a la solución.

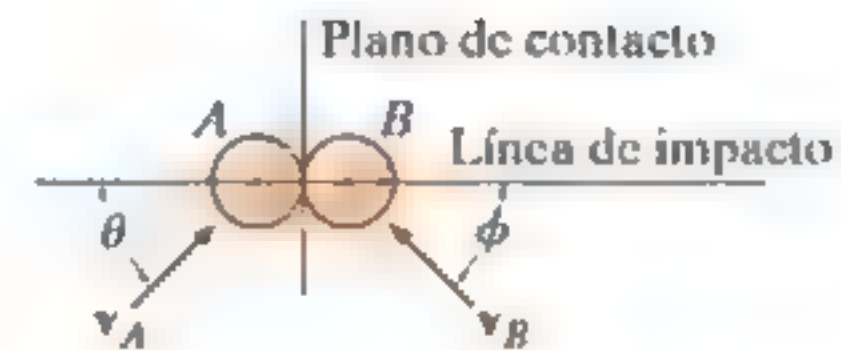
#### Corrientes de fluido continuas

Con frecuencia se utilizan métodos de impulso y cantidad de movimiento para determinar las fuerzas que un dispositivo ejerce en el flujo de masa de un fluido (líquido o gas). Para hacerlo, se traza un diagrama de cuerpo libre de la masa de fluido en contacto con el dispositivo para identificar dichas fuerzas. Además, se calcula la velocidad del fluido cuando entra al volumen de control del dispositivo y cuando sale de éste. Las ecuaciones de flujo continuo implican sumar las fuerzas y los momentos para determinar estas reacciones.

#### Propulsión con masa variable

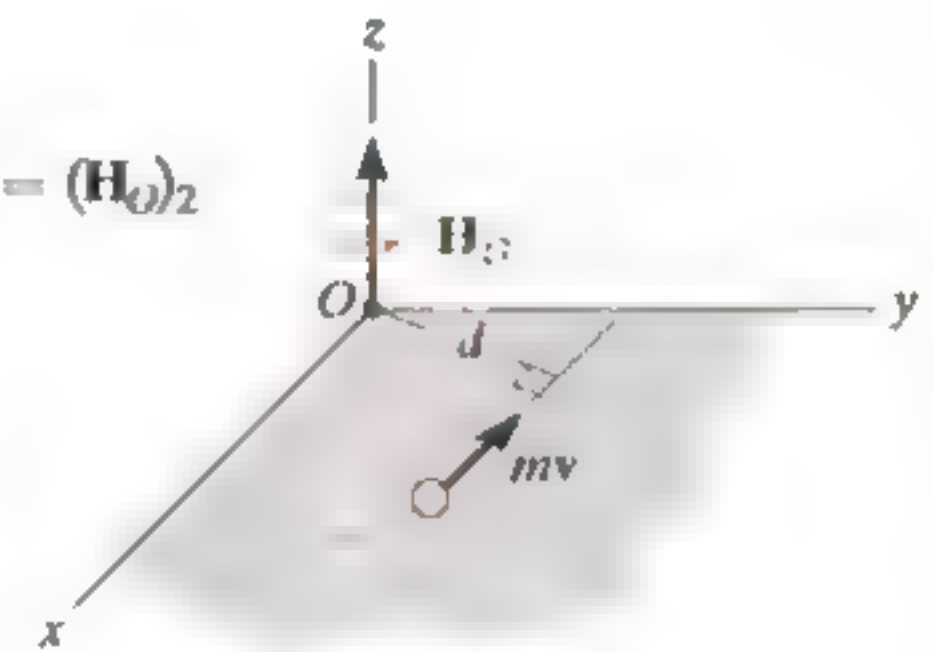
Algunos dispositivos, como un cohete, pierden masa cuando se impulsan hacia delante. Otros ganan masa, por ejemplo, una pala. Podemos tener en cuenta esta pérdida o ganancia de masa si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento a un volumen de control del dispositivo. A partir de esta ecuación puede determinarse la fuerza que el flujo de masa ejerce en el dispositivo.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$



$$(H_O)_1 = (d)(mv)$$

$$(H_O)_1 + \sum \int_1^2 \mathbf{M}_O dt = (H_O)_2$$



$$\sum \mathbf{F} = \frac{dm}{dt} (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$\sum \mathbf{M}_O = \frac{dm}{dt} (\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B - \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A)$$

$$\sum \mathbf{F}_{co} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - v_{D/e} \frac{dm_e}{dt}$$

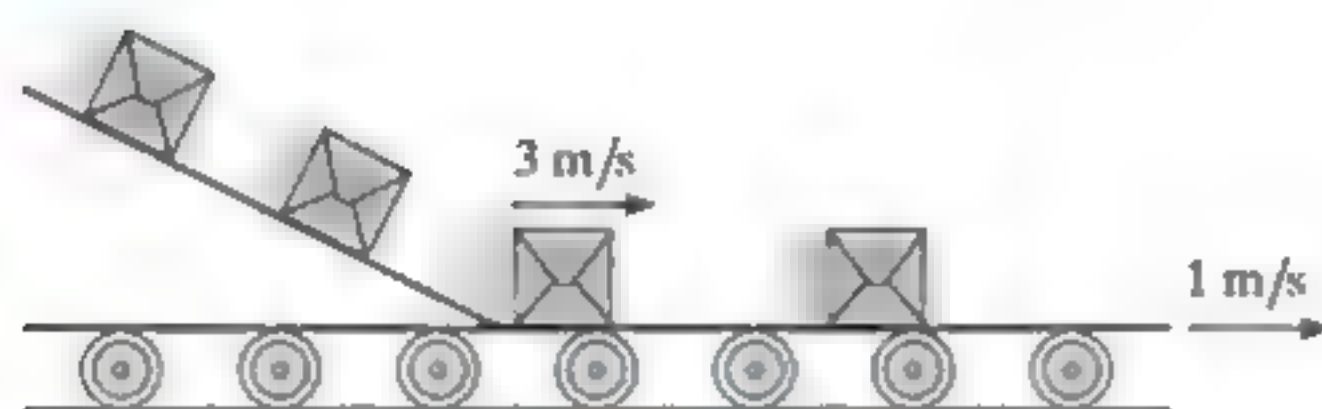
Pierde masa

$$\sum \mathbf{F}_{co} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + v_{D/i} \frac{dm_i}{dt}$$

Gana masa

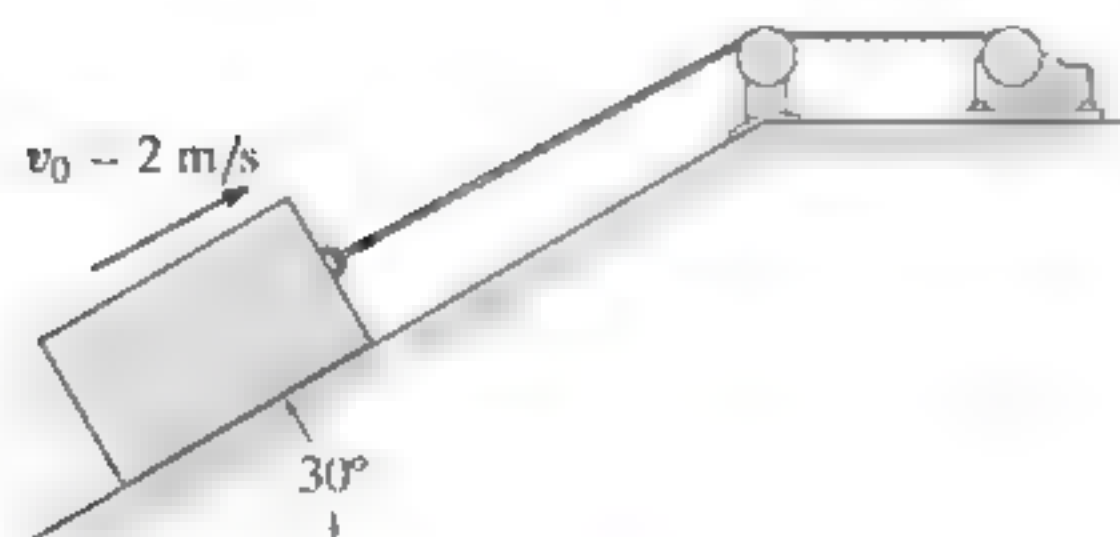
## PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES

**R15-1.** Los paquetes que tienen una masa de 6 kg se deslizan hacia abajo sobre una rampa suave y caen horizontalmente con una velocidad de 3 m/s sobre la superficie de una banda transportadora. Si el coeficiente de fricción cinética entre la banda y un paquete es  $\mu_k = 0.2$ , determine el tiempo necesario para llevar el paquete al reposo sobre la banda, si ésta se mueve en la misma dirección que el paquete con una rapidez de  $v = 1$  m/s.



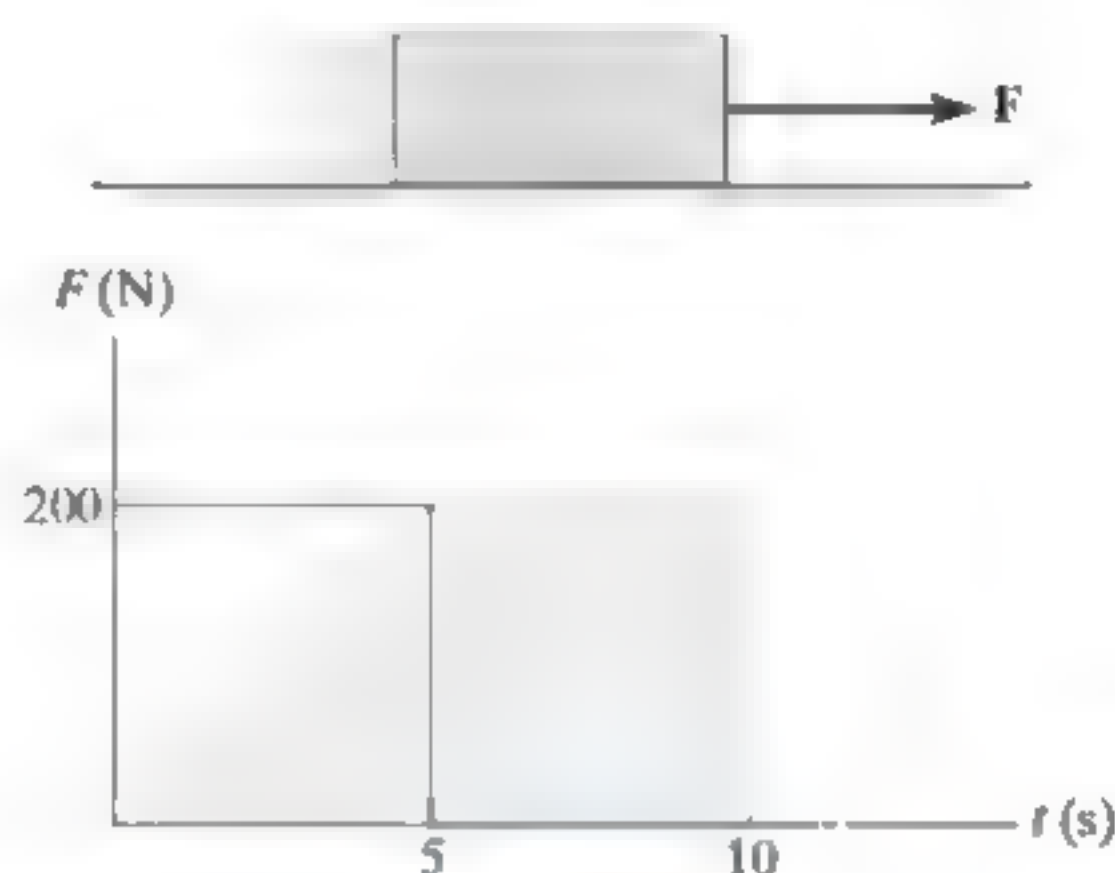
Prob. R15-1

**R15-2.** El bloque de 50 kg se eleva por el plano inclinado utilizando el arreglo de cable y motor indicado. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es  $\mu_k = 0.4$ . Si el bloque se mueve inicialmente hacia arriba sobre el plano a  $v_0 = 2$  m/s, y en este instante ( $t = 0$ ) el motor desarrolla una tensión en la cuerda de  $T = (300 + 120\sqrt{t})$  N donde  $t$  se da en segundos, determine la velocidad del bloque cuando  $t = 2$  s.



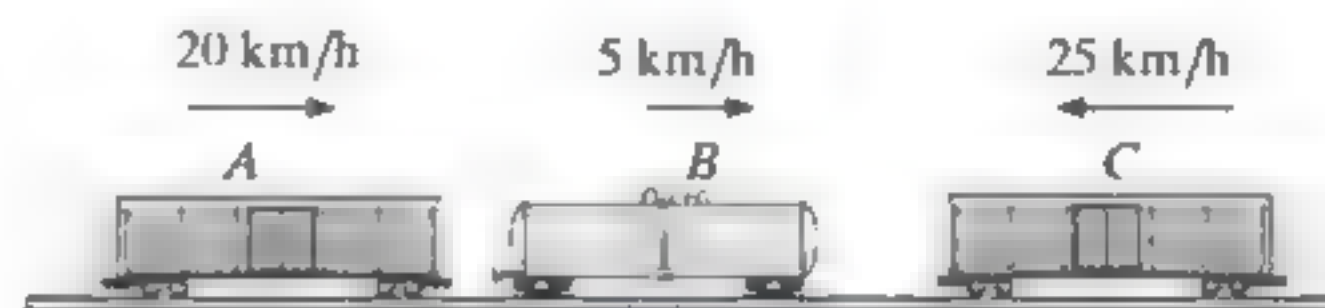
Prob. R15-2

**R15-3.** Un bloque de 20 kg está originalmente en reposo sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción estática es  $\mu_s = 0.6$  y el coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k = 0.5$ . Si se aplica una fuerza horizontal  $F$  tal que varía con el tiempo de la manera indicada, determine la rapidez del bloque en 10 s. *Sugerencia:* Primero determine el tiempo necesario para vencer la fricción e iniciar el movimiento del bloque.



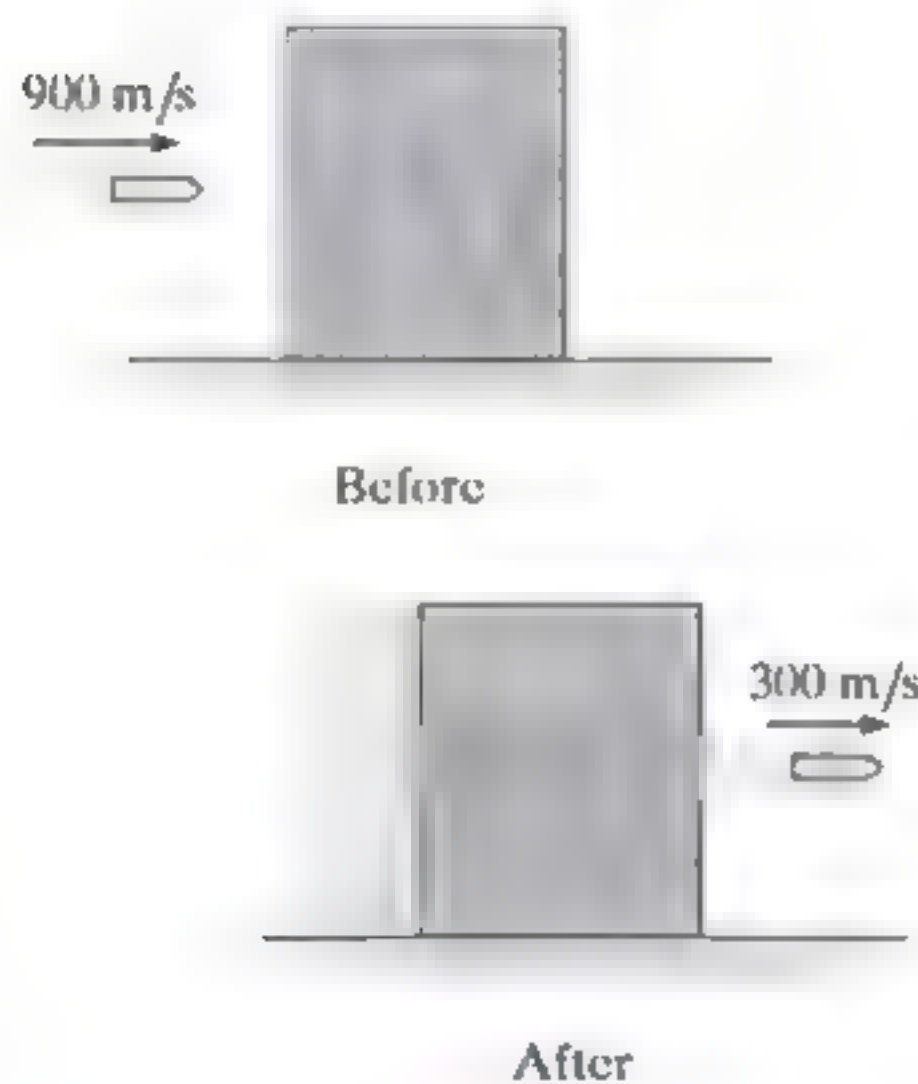
Prob. R15-3

**R15-4.** Los tres vagones de carga  $A$ ,  $B$  y  $C$  tienen masas de 10 Mg, 5 Mg y 20 Mg, respectivamente. Viajan a lo largo de la vía con las velocidades indicadas. El vagón  $A$  choca primero contra el vagón  $B$ , seguido por el vagón  $C$ . Si los tres vagones se acoplan después de la colisión, determine la velocidad común de los vagones después de ocurridas las dos colisiones.



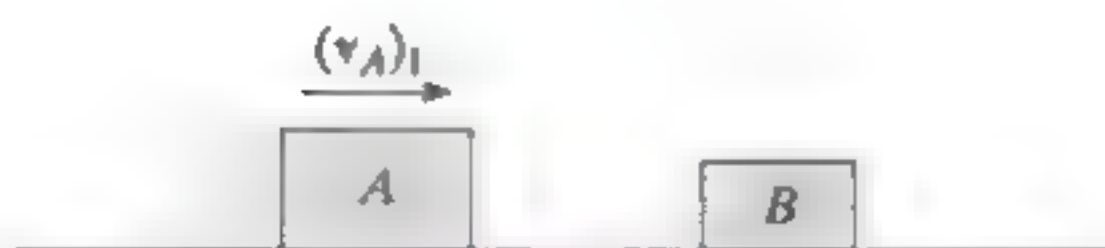
Prob. R15-4

**R15-5.** El proyectil de 200 g se dispara con una velocidad de 900 m/s hacia el centro del bloque de madera de 15 kg, que descansa sobre una superficie rugosa. Si el proyectil penetra al bloque y emerge de éste con una velocidad de 300 m/s, determine la velocidad del bloque justo después de que sale el proyectil. ¿Cuánto tiempo se desliza el bloque sobre la superficie rugosa, después de que sale el proyectil y antes de llegar al reposo? El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el bloque es  $\mu_k = 0.2$ .



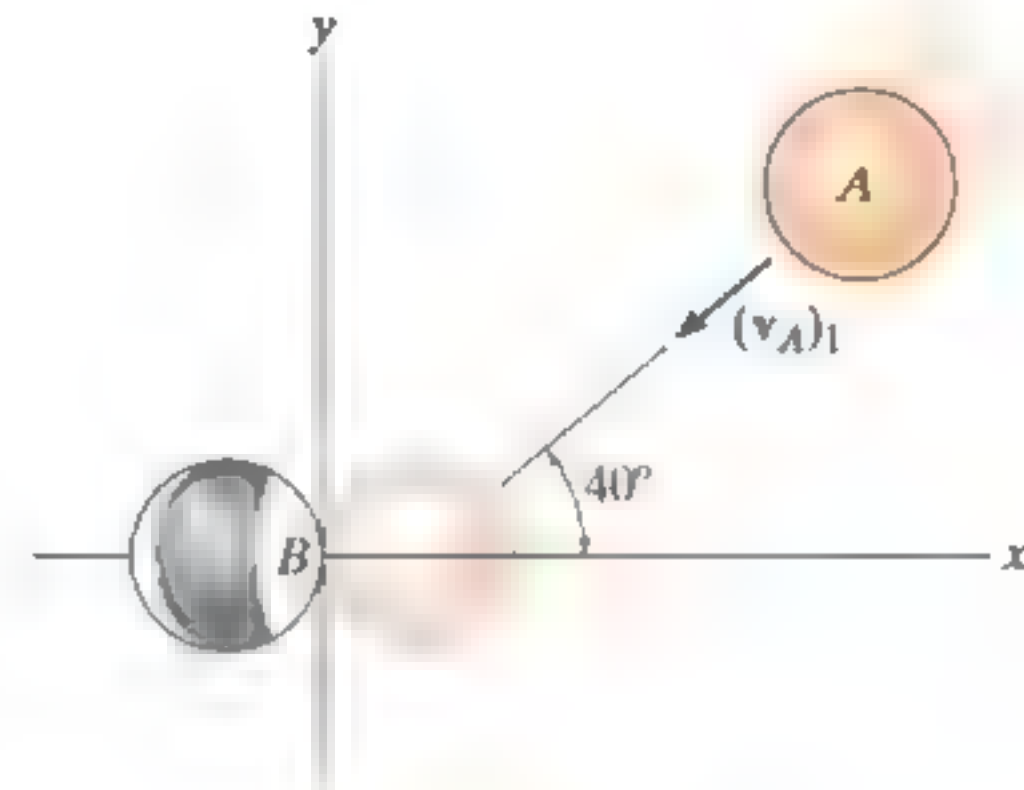
Prob. R15-5

**R15-6.** El bloque  $A$  tiene una masa de 3 kg y se desliza sobre una superficie horizontal rugosa con una velocidad  $(v_A)_1 = 2 \text{ m/s}$  cuando ocurre una colisión directa contra el bloque  $B$ , que tiene una masa de 2 kg y está originalmente en reposo. Si el choque es perfectamente elástico ( $e = 1$ ), determine la velocidad de cada bloque justo después de la colisión y la distancia entre los bloques cuando dejan de deslizarse. El coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el plano es  $\mu_k = 0.3$ .



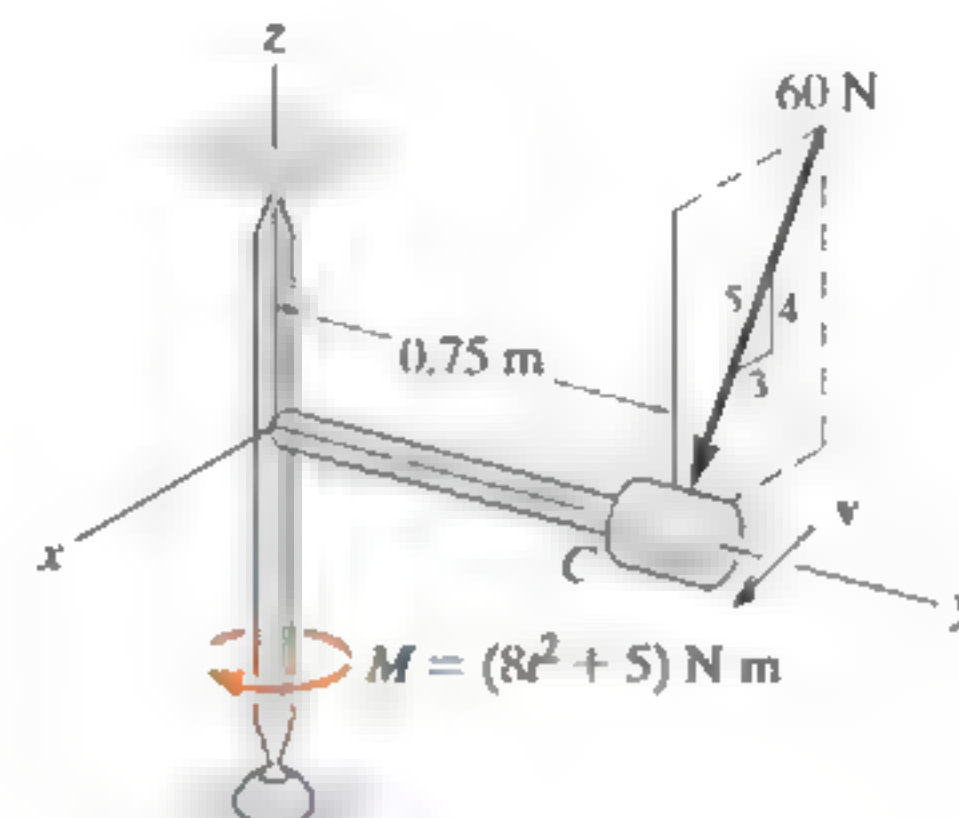
Prob. R15-6

**R15-7.** Dos bolas de billar lisas  $A$  y  $B$  tienen la misma masa  $m = 200 \text{ g}$ . Si  $A$  golpea a  $B$  con una velocidad de  $(v_A)_1 = 2 \text{ m/s}$  como se muestra, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. La bola  $B$  está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es  $e = 0.75$ .



Prob. R15-7

**R15-8.** El pequeño cilindro  $C$  tiene una masa de 10 kg y está unido al extremo de una varilla con masa insignificante. Si la estructura se somete a un par  $M = (8t^2 + 5) \text{ N} \cdot \text{m}$ , donde  $t$  se da en segundos, y el cilindro se somete a una fuerza de 60 N, que siempre se dirige de la manera indicada, determine la rapidez del cilindro cuando  $t = 2 \text{ s}$ . El cilindro tiene una rapidez  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  cuando  $t = 0$ .



Prob. R15-8

# Capítulo 16



(© TFoxFoto/Shutterstock)

La cinemática es importante para el diseño del mecanismo utilizado en este camión de volteo.

# Cinemática plana de un cuerpo rígido

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Clasificar los diversos tipos del movimiento plano de un cuerpo rígido.
- Investigar la traslación y el movimiento angular de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo.
- Estudiar el movimiento plano mediante un análisis del movimiento absoluto.
- Analizar la velocidad y aceleración del movimiento relativo mediante un marco de referencia trasladante.
- Demostrar cómo encontrar el centro instantáneo de velocidad cero y determinar la velocidad de un punto de un cuerpo con este método.
- Analizar la velocidad y aceleración del movimiento relativo mediante un marco de referencia rotatorio.

## 16.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido

En este capítulo se analizará la cinemática plana de un cuerpo rígido, cuyo estudio es importante en el diseño de engranes, levas y mecanismos utilizados en muchas operaciones mecánicas. Una vez que entendamos bien la cinemática, podremos aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas que actúan en el cuerpo con el movimiento de éste.

El *movimiento plano* de un cuerpo rígido ocurre cuando todas sus partículas se desplazan a lo largo de trayectorias equidistantes de un plano fijo. Existen tres tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido, los cuales son, en orden de complejidad creciente,

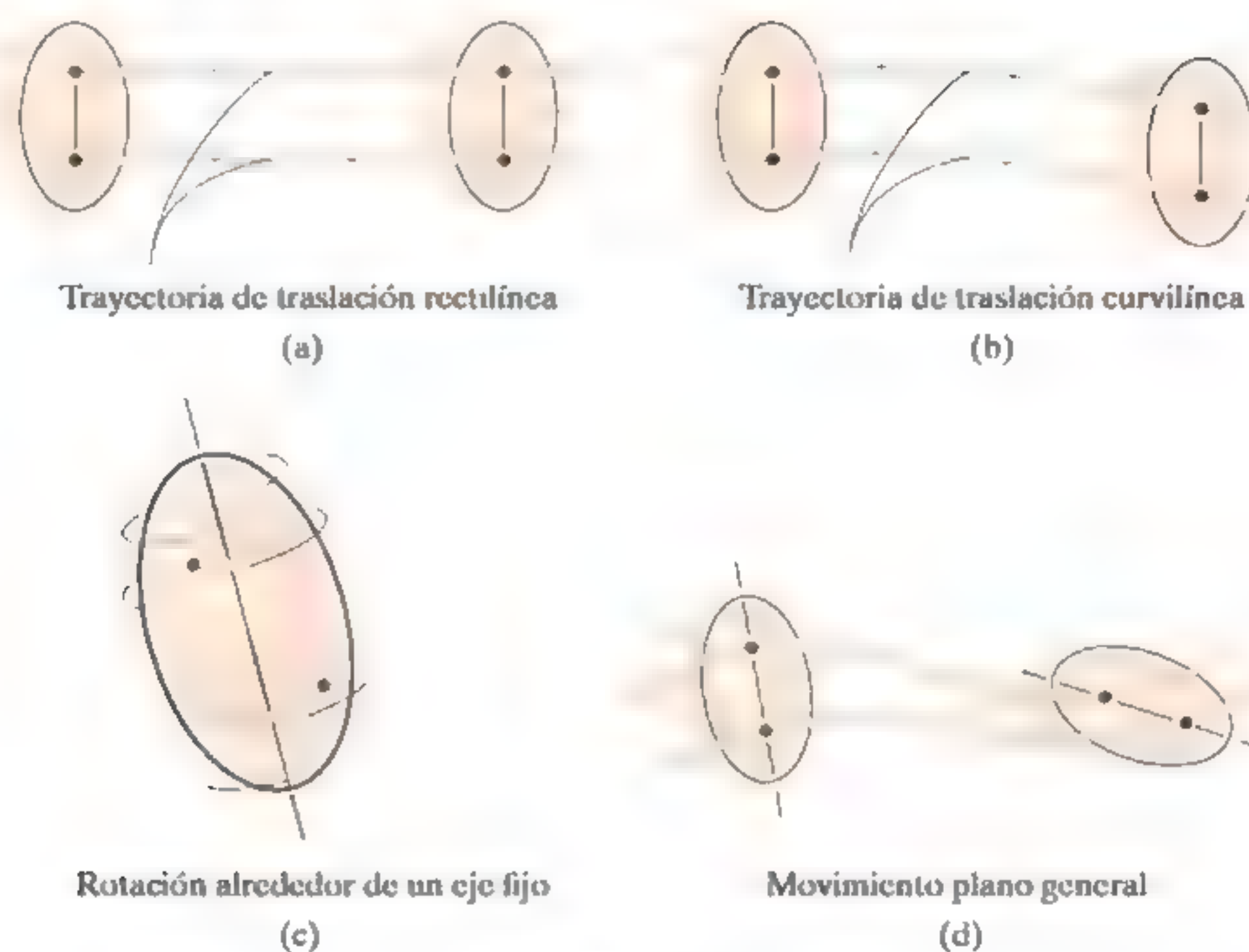


Fig. 16-1

- **Traslación.** Este tipo de movimiento ocurre cuando una línea en el cuerpo permanece paralela a su orientación original durante todo el movimiento. Si las trayectorias del movimiento de dos puntos cualesquiera del cuerpo son líneas paralelas, el movimiento se llama *traslación rectilínea* (fig. 16-1a). Cuando las trayectorias del movimiento se desarrollan a lo largo de líneas curvas, el movimiento se llama *traslación curvilínea* (fig. 16-1b).
- **Rotación alrededor de un eje fijo.** Si un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas, excepto aquellas que quedan en el eje de rotación, se mueven a lo largo de trayectorias circulares (fig. 16-1c).
- **Movimiento plano general.** Cuando un cuerpo se somete a un movimiento plano general, experimenta una combinación de traslación y rotación (fig. 16-1d). La traslación se presenta en un plano de referencia y la rotación ocurre alrededor de un eje perpendicular al plano de referencia.

En las secciones siguientes consideraremos, en detalles, cada uno de estos movimientos. En la figura 16-2 se muestran ejemplos de cuerpos sometidos a estos movimientos.

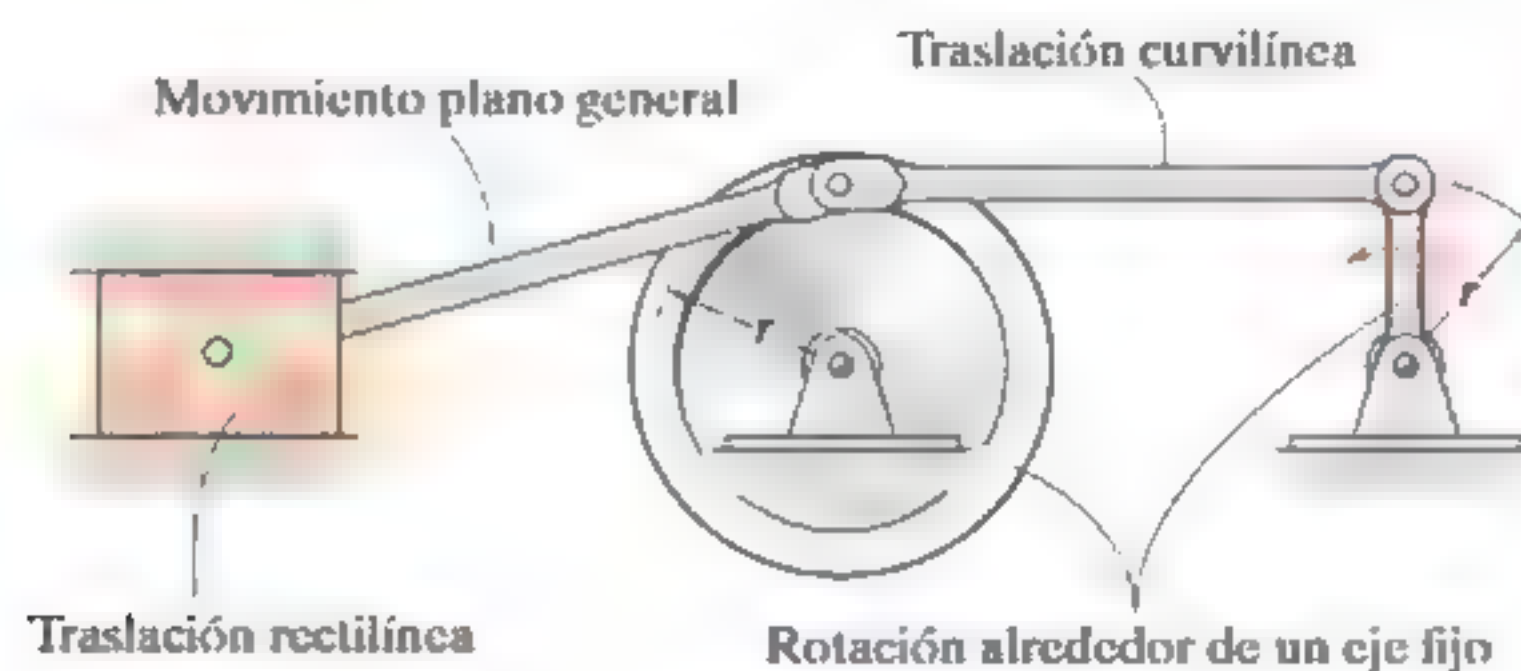


Fig. 16-2

## 16.2 Traslación

Considere un cuerpo rígido sometido a traslación rectilínea o a traslación curvilínea en el plano  $x$ - $y$  (fig. 16-3).

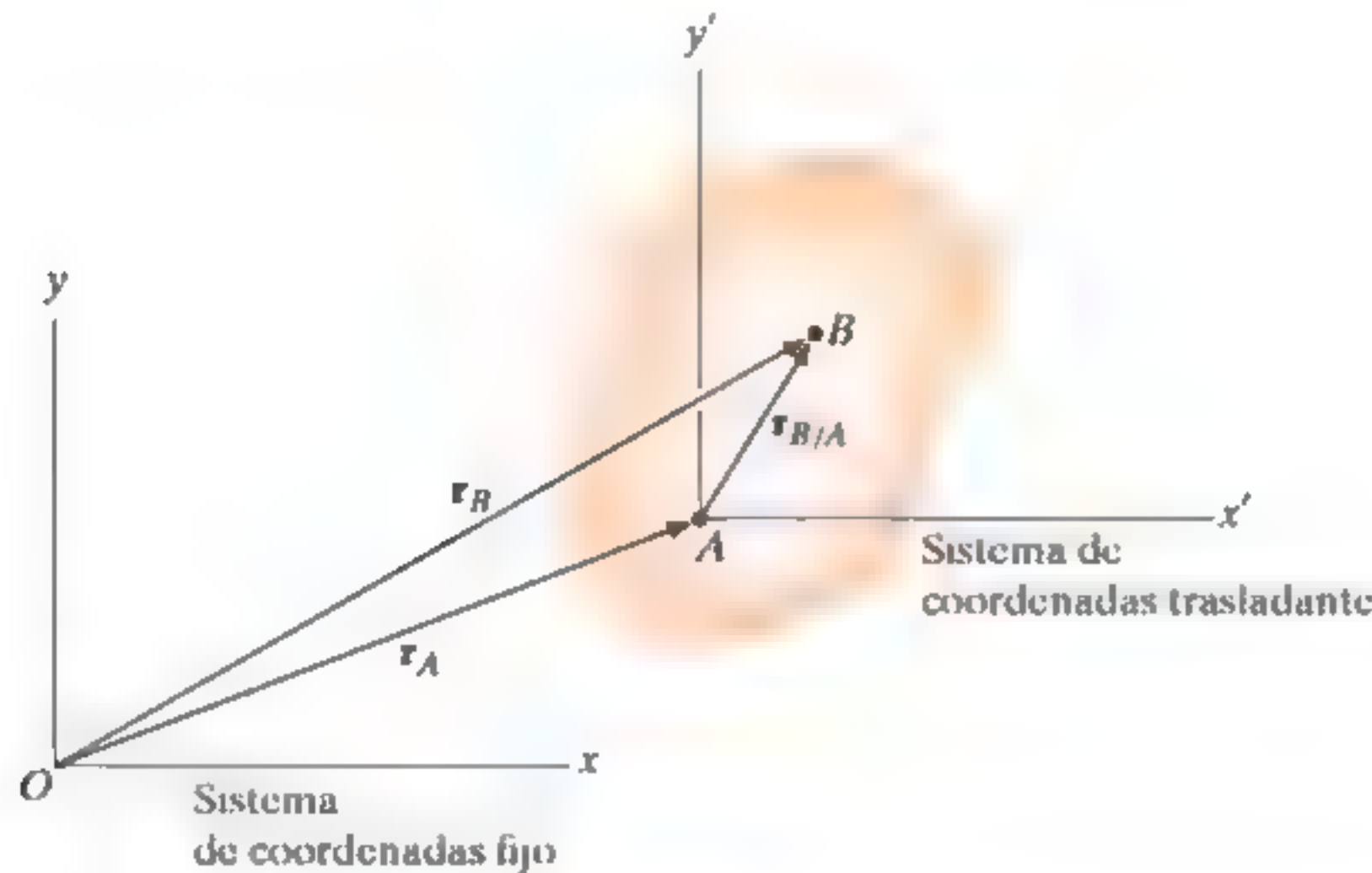


Fig. 16-3

**Posición.** Las ubicaciones de los puntos  $A$  y  $B$  en el cuerpo se definen con respecto a un marco de referencia fijo  $x$ ,  $y$  por medio de *vectores de posición*  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$ . El sistema de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  trasladante permanece fijo en el cuerpo con su origen en  $A$ , en lo sucesivo conocido como *punto base*. La posición de  $B$  con respecto a  $A$  se denota mediante el *vector de posición relativa*  $\mathbf{r}_{B/A}$  ("r de  $B$  con respecto a  $A$ "). Por suma vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

**Velocidad.** Una relación entre las velocidades instantáneas de  $A$  y  $B$  se obtiene mediante la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, de la cual resulta  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ . En este caso,  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{v}_B$  denotan *velocidades absolutas*, ya que estos vectores se miden con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ . El término  $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = \mathbf{0}$ , pues la *magnitud* de  $\mathbf{r}_{B/A}$  es *constante* por definición de un cuerpo rígido y como éste traslada la *dirección* de  $\mathbf{r}_{B/A}$  también es *constante*. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

**Aceleración.** Al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de velocidad, se obtiene una relación similar entre las aceleraciones instantáneas de  $A$  y  $B$ :

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Las dos ecuaciones anteriores indican que *todos los puntos en un cuerpo rígido sometidos a traslación rectilínea o curvilínea se mueven con las mismas velocidad y aceleración*. Por lo tanto, la cinemática del movimiento de una partícula, analizada en el capítulo 12, también puede utilizarse para especificar la cinemática de puntos localizados en un cuerpo rígido trasladante.



Los usuarios de esta rueda de la fortuna se someten a traslación curvilínea, ya que las góndolas describen una trayectoria circular aunque siempre permanecen en posición vertical. (© R. C. Hibbeler)

## 16.3 Rotación alrededor de un eje fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto  $P$  localizado en él se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular*. Para estudiar este movimiento, es necesario analizar primero el movimiento angular del cuerpo alrededor del eje.

**Movimiento angular.** Como un punto no tiene dimensiones, no puede tener movimiento angular. *Solamente las líneas o los cuerpos experimentan movimiento angular.* Por ejemplo, considere el cuerpo de la figura 16-4a y el movimiento angular de una línea radial  $r$  ubicada en el plano sombreado.

**Posición angular.** En el instante que se muestra, la *posición angular* de  $r$  está definida por el ángulo  $\theta$ , medido desde una línea de referencia fija hasta  $r$ .

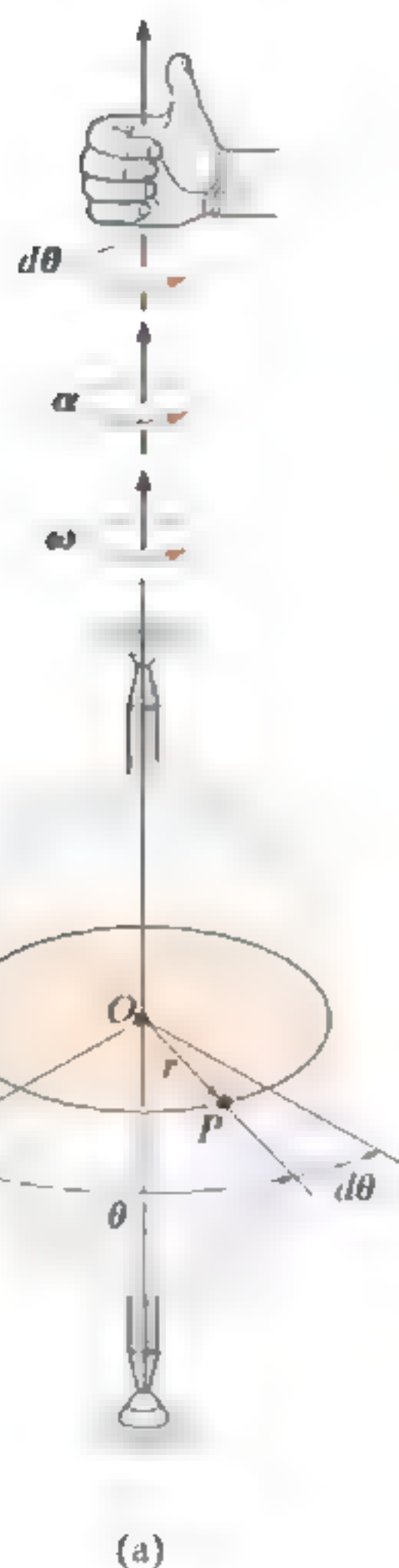
**Desplazamiento angular.\*** El cambio de la posición angular, el cual puede medirse como una diferencial  $d\theta$ , se llama *desplazamiento angular*.<sup>\*</sup> La *magnitud* de este vector es  $d\theta$ , medida en grados, radianes o revoluciones, donde  $1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad}$ . Como el movimiento es en torno a un *eje fijo*, la dirección de  $d\theta$  es *siempre* a lo largo de este eje. Específicamente, la *dirección* se determina con la regla de la mano derecha; es decir, los dedos de la mano derecha se curvan en el sentido de rotación, de modo que en este caso el pulgar, o  $d\theta$ , apunta hacia arriba (fig. 16-4a). En dos dimensiones, como se muestra en la vista desde arriba del plano sombreado (fig. 16-4b) tanto  $\theta$  como  $d\theta$  están en sentido antihorario y, por ende, el pulgar apunta hacia fuera de la página.

**Velocidad angular.** El cambio con respecto al tiempo de la posición angular se conoce como *velocidad angular*  $\omega$  (omega). Como  $d\theta$  ocurre durante un instante de tiempo  $dt$ , entonces,

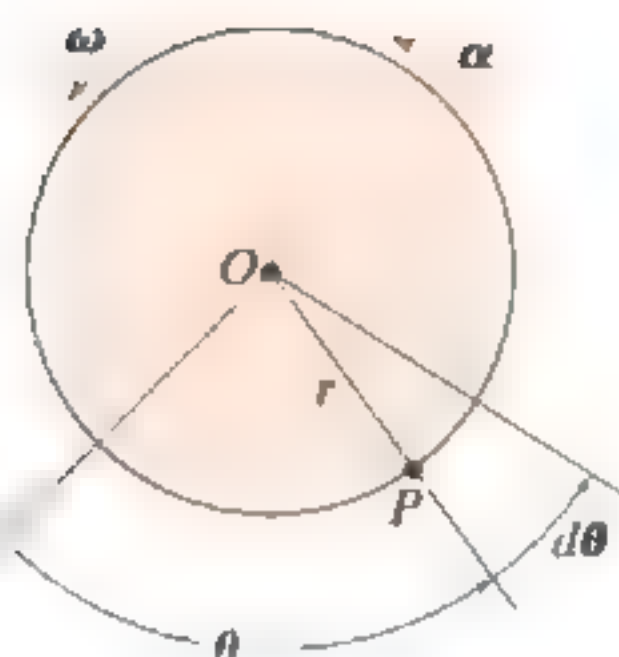
$$(\zeta+) \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (16-1)$$

La *magnitud* de este vector se suele medir en rad/s. Aquí está expresado en forma escalar, ya que su *dirección* también va a lo largo del eje de rotación (fig. 16-4a). Cuando se indica el movimiento angular en el plano sombreado (fig. 16-4b), podemos referirnos al sentido de rotación como en sentido horario o antihorario. En este caso, elegimos *arbitrariamente* las rotaciones en sentido antihorario como *positivas* y esto se indica por medio del bucle que aparece entre paréntesis al lado de la ecuación 16-1. Dese cuenta, sin embargo, que el sentido direccional de  $\omega$  en realidad es hacia fuera de la página.

<sup>\*</sup>En la sección 20.1 se demuestra que las rotaciones finitas o los desplazamientos angulares finitos *no* son cantidades vectoriales, aun cuando las rotaciones diferenciales  $d\theta$  sean vectores.



(a)



(b)

Fig. 16-4

**Definición.** La *aceleración angular*  $\alpha$  (alfa) mide el cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular. La *magnitud* de este vector es

$$(\zeta+) \quad \left| \alpha = \frac{d\omega}{dt} \right| \quad (16-2)$$

Con la ecuación 16-1, también es posible expresar  $\alpha$  como

$$(\zeta+) \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (16-3)$$

La línea de acción de  $\alpha$  es la misma que la de  $\omega$  (fig. 16-4a); sin embargo, su sentido de *dirección* depende de si  $\omega$  se incrementa o decrece. Si decrece, entonces  $\alpha$  se llama *desaceleración angular* y, por consiguiente, su dirección se opone a  $\omega$ .

Al eliminar  $dt$  de las ecuaciones 16-1 y 16-2, obtenemos una relación diferencial entre la aceleración angular, la velocidad angular y el desplazamiento angular, es decir,

$$(\zeta+) \quad \left| \alpha d\theta = \omega d\omega \right| \quad (16-4)$$

La similitud entre las relaciones diferenciales del movimiento angular y las desarrolladas para movimiento rectilíneo de una partícula ( $v = ds/dt$ ,  $a = dv/dt$ , y  $a ds = v dv$ ) debería ser evidente.

**Acilación angular constante.** Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*,  $\alpha = \alpha_c$ , entonces, cuando se integran las ecuaciones 16-1, 16-2 y 16-4, se obtiene un conjunto de fórmulas que relacionan la velocidad angular, la posición angular y el tiempo de un cuerpo. Estas ecuaciones son semejantes a las ecuaciones 12-4 a 12-6 que se utilizaron para movimiento rectilíneo. Los resultados son

$$(\zeta+) \quad \left| \omega = \omega_0 + \alpha_c t \right| \quad (16-5)$$

$$(\zeta+) \quad \left| \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2 \right| \quad (16-6)$$

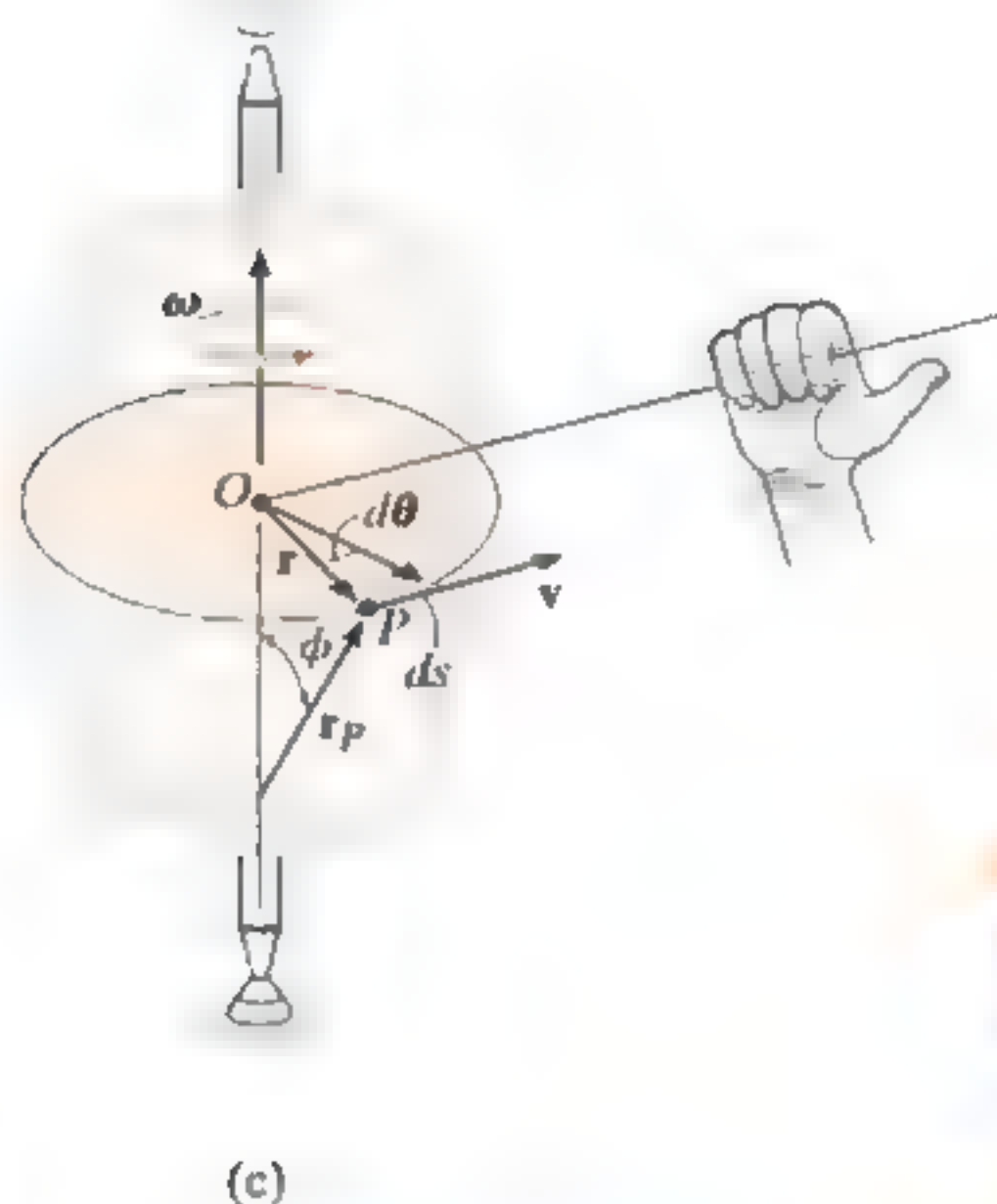
$$(\zeta+) \quad \left| \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \right| \quad (16-7)$$

Acilación angular constante



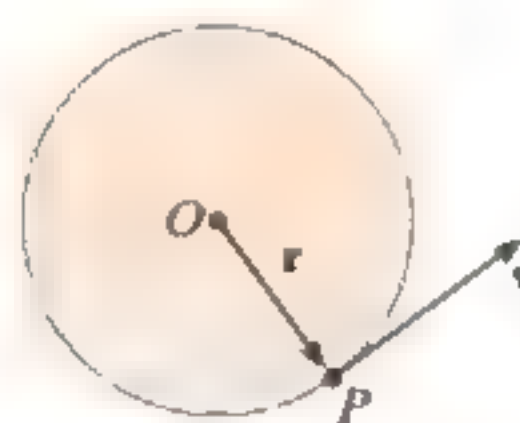
Todos los engranes usados en la operación de una grúa giran alrededor de ejes fijos. Los ingenieros deben ser capaces de relacionar sus movimientos angulares a fin de diseñar de manera adecuada este sistema de engranes. (© R. C. Hibbeler)

En este caso,  $\theta_0$  y  $\omega_0$  son los valores iniciales de la posición angular y la velocidad angular del cuerpo, respectivamente.



(c)

Fig. 16-4 (cont.)



(d)

**Trayectoria de un punto  $P$ .** Cuando el cuerpo rígido de la figura 16-4c gira, el punto  $P$  se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular* de radio  $r$  con centro en el punto  $O$ . Esta trayectoria está contenida en el plano sombreado de la vista superior (fig. 16-4d).

**Desplazamiento.** La posición de  $P$  está definida por el vector de posición  $\mathbf{r}$ , el cual se extiende desde  $O$  hasta  $P$ . Si el cuerpo gira  $d\theta$  entonces  $P$  se desplazará  $ds = r d\theta$ .

**Velocidad.** La magnitud de la velocidad de  $P$  se calcula dividiendo  $ds = r d\theta$  entre  $dt$ , de modo que

$$v = \omega r \quad (16-8)$$

Como se muestra en las figuras 16-4c y 16-4d, la *dirección de  $\mathbf{v}$  es tangente a la trayectoria circular*.

Tanto la magnitud como la dirección de  $\mathbf{v}$  también pueden tenerse en cuenta, si se utiliza el producto vectorial de  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{r}_P$  (vea el apéndice B). En este caso, la dirección  $\mathbf{r}_P$  es de *cualquier punto* sobre el eje de rotación a cualquier punto  $P$  (fig. 16-4c). Tenemos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \quad (16-9)$$

El orden de los vectores en esta formulación es importante, ya que el producto vectorial no es conmutativo, es decir,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \boldsymbol{\omega}$ . Observe en la figura 16-4c cómo se establece la dirección correcta de  $\mathbf{v}$  con la regla de la mano derecha. Los dedos de la mano derecha se enroscan de  $\boldsymbol{\omega}$  hacia  $\mathbf{r}_P$  ( $\boldsymbol{\omega}$  “cruz”  $\mathbf{r}_P$ ). El pulgar indica la dirección correcta de  $\mathbf{v}$ , la cual es tangente a la trayectoria en la dirección del movimiento. De acuerdo con la ecuación B-8, la magnitud de  $\mathbf{v}$  en la ecuación 16-9 es  $v = \omega r_P \sin \phi$ , y puesto que  $r = r_P \sin \phi$  (fig. 16-4c), entonces  $v = \omega r$ , la cual concuerda con la ecuación 16-8. Como un caso especial, el vector de posición  $\mathbf{r}$  puede elegirse para  $\mathbf{r}_P$ . Aquí,  $\mathbf{r}$  queda en el plano del movimiento y de nueva cuenta la velocidad del punto  $P$  es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (16-10)$$

**Aceleración.** La aceleración de  $P$  puede expresarse en función de sus componentes normal y tangencial. Al aplicar las ecuaciones 12-19 y 12-20,  $a_t = dv/dt$  y  $a_n = v^2/\rho$ , donde  $\rho = r$ ,  $v = \omega r$  y  $\alpha = d\omega/dt$ , obtenemos

$$a_t = \alpha r \quad (16-11)$$

$$a_n = \omega^2 r \quad (16-12)$$

La *componente tangencial de la aceleración*, figuras 16-4e y 16-4f, representa el cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad. Si aumenta la rapidez de  $P$ , entonces  $a_t$  actúa en la misma dirección que  $v$ ; si se reduce,  $a_t$  actúa en la dirección opuesta de  $v$ ; y finalmente, si permanece constante,  $a_t$  es cero.

La *componente normal de la aceleración* representa el cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. La *dirección* de  $a_n$  siempre es hacia  $O$ , el centro de la trayectoria circular, figuras 16-4e y 16-4f.

Al igual que la velocidad, la aceleración del punto  $P$  puede expresarse en función del producto vectorial (producto cruz). Si consideramos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-9, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

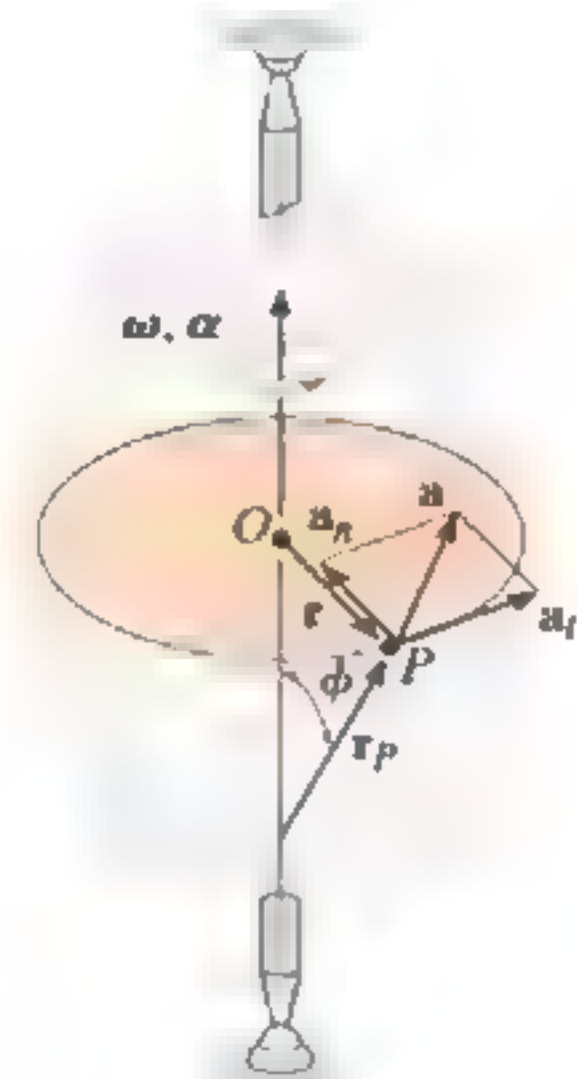
Si se recuerda que  $\alpha = d\omega/dt$  y se utiliza la ecuación 16-9 ( $d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ ), se obtiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \quad (16-13)$$

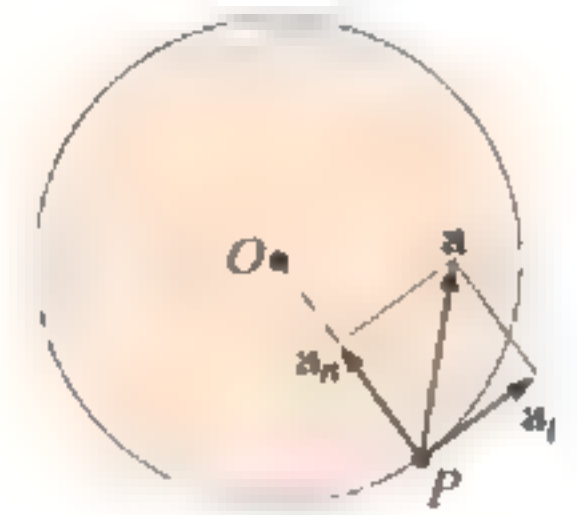
Por la definición del producto vectorial, la magnitud del primer término de la derecha es  $a_t = \alpha r_P \sin \phi = \alpha r$  y, por la regla de la mano derecha,  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$  está en la dirección de  $a_t$  (fig. 16-4e). Asimismo, la magnitud del segundo término es  $a_n = \omega^2 r_P \sin \phi = \omega^2 r$ , y al aplicar dos veces la regla de la mano derecha, primero para determinar el resultado  $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$  y después  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P$ , se observa que este resultado tiene la misma dirección que  $a_n$ , como se muestra en la figura 16-4e. Si nos damos cuenta de que ésta también es la *misma* dirección que  $-\mathbf{r}$ , la cual queda en el plano del movimiento, podemos expresar  $a_n$  en una forma mucho más sencilla que  $a_n = -\omega^2 \mathbf{r}$ . Por consiguiente, la ecuación 16-13 se identifica mediante sus dos componentes como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (16-14)$$

Puesto que  $a_t$  y  $a_n$  son perpendiculares entre sí, si se requiere, la magnitud de la aceleración puede determinarse con el teorema de Pitágoras, es decir,  $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ , (fig. 16-4f).

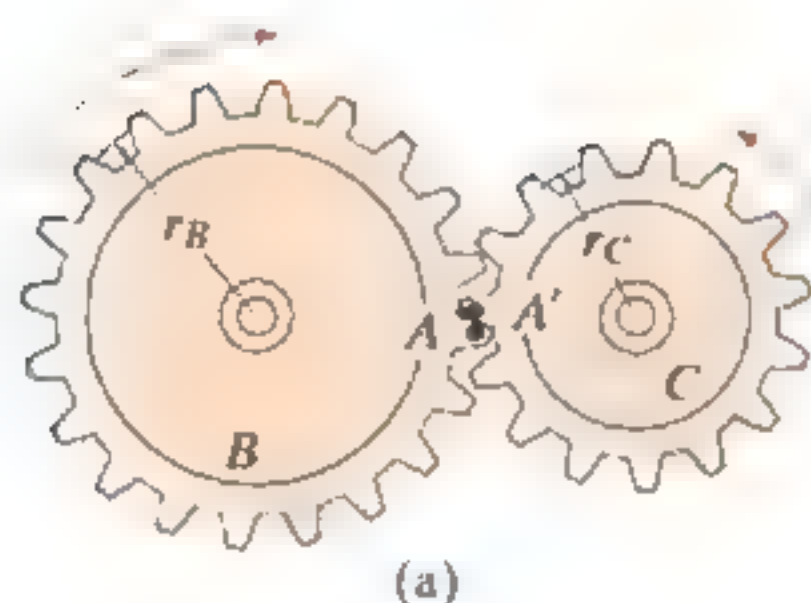


(c)

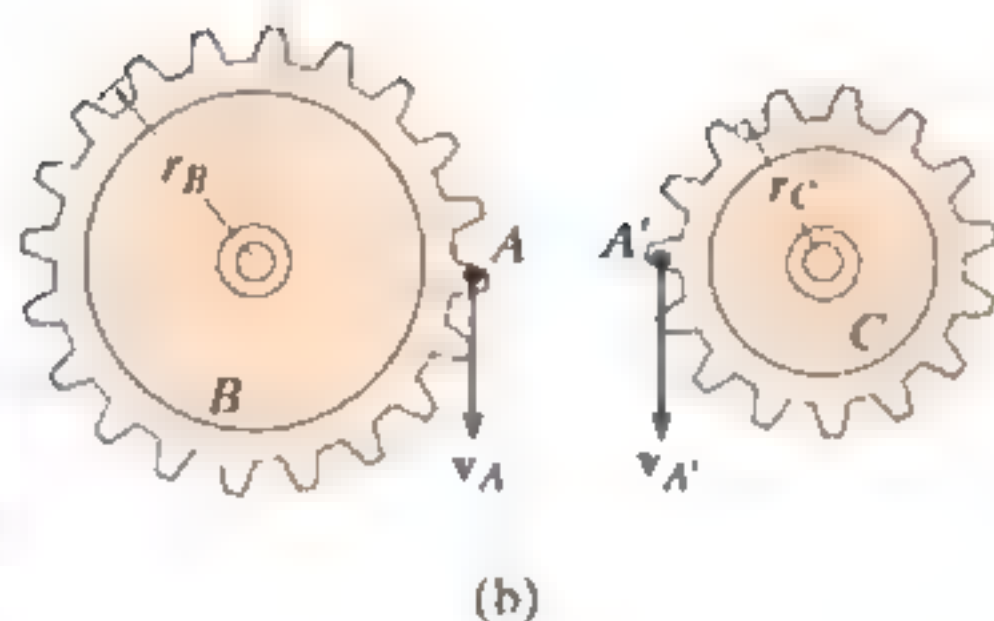


(f)

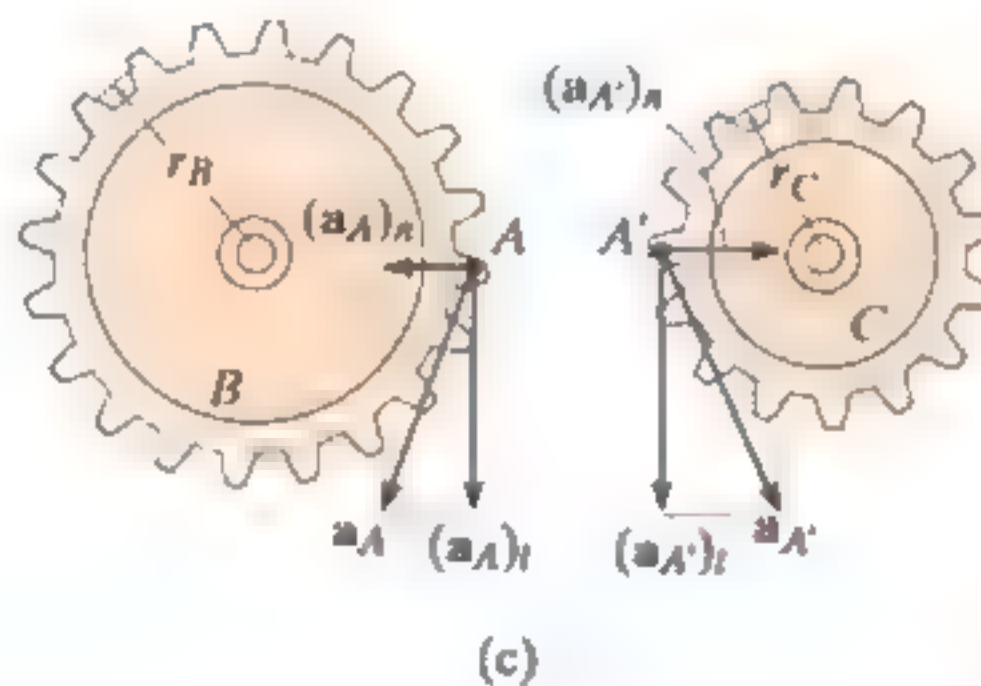
Fig. 16-4 (cont.)



(a)



(b)



(c)

Fig. 16-5

Si dos cuerpos giratorios tienen contacto entre sí, entonces los *puntos en contacto* se mueven a lo largo de *trayectorias circulares diferentes*, y la *velocidad* y las *componentes tangenciales* de la aceleración de los puntos serán la *mismas*; sin embargo, las *componentes normales* de la aceleración *no* serán iguales. Por ejemplo, considere los dos engranes acoplados de la figura 16-5a. El punto *A* se localiza sobre el engrane *B* y un punto coincidente *A'* está situado sobre el engrane *C*. Debido al movimiento de rotación,  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A'}$  (fig. 16-5b), y como resultado,  $\omega_B r_B = \omega_C r_C$  o  $\omega_B = \omega_C (r_C/r_B)$ . Además, a partir de la figura 16-5c,  $(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$ , de modo que  $\alpha_B = \alpha_C (r_C/r_B)$ ; sin embargo, como ambos puntos siguen trayectorias circulares diferentes,  $(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n$  y, por lo tanto, como se indica,  $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$ .

### Puntos importantes

Un cuerpo puede experimentar dos tipos de traslación. Durante la traslación rectilínea todos los puntos siguen trayectorias de línea recta paralelas y, durante la traslación curvilínea, los puntos siguen trayectorias curvas que tienen la misma forma.

Todos los puntos de un cuerpo que se traslada se mueven con las mismas velocidad y aceleración.

Los puntos ubicados en un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo siguen trayectorias circulares.

La relación  $\alpha d\theta = \omega d\omega$  se deriva de  $\alpha = d\omega/dt$  y  $\omega = d\theta/dt$  al eliminar  $dt$ .

Una vez conocidos los movimientos angulares  $\omega$  y  $\alpha$ , pueden determinarse la velocidad y aceleración de cualquier punto del cuerpo.

La velocidad siempre actúa tangente a la trayectoria del movimiento.

La aceleración tiene dos componentes. La aceleración tangencial mide el cambio de la magnitud de la velocidad y se determina con  $a_t = \alpha r$ . La aceleración normal mide el cambio de la dirección de la velocidad y se determina con  $a_n = \omega^2 r$ .

## Procedimiento para el análisis

La velocidad y aceleración de un punto situado en un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo se determinan mediante el siguiente procedimiento.

### Movimiento angular

- Establezca el sentido positivo de rotación alrededor del eje de rotación y muéstrela junto con cada ecuación cinemática conforme se aplique.
- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables  $\alpha, \omega, \theta$  y  $t$ , entonces puede obtenerse una tercera variable al usar una de las siguientes ecuaciones cinemáticas, la cual relaciona las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \alpha d\theta = \omega d\omega$$

- Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, entonces pueden utilizarse las siguientes ecuaciones:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- Una vez que se obtiene la solución, el sentido de  $\theta, \omega$  y  $\alpha$  se determina con el signo algebraico de sus cantidades numéricas.

### Movimiento de un punto $P$

- En la mayoría de los casos, la velocidad de  $P$  y sus dos componentes de aceleración se determinan con las ecuaciones escalares

$$v = \omega r$$

$$a_t = \alpha r$$

$$a_n = \omega^2 r$$

- Si la geometría del problema es difícil de visualizar, deberán utilizarse las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

- En este caso, la dirección de  $\mathbf{r}_P$  es desde cualquier punto sobre el eje de rotación al punto  $P$ , mientras que  $\mathbf{r}$  queda en el plano del movimiento de  $P$ . Cualquiera de estos vectores, junto con  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$ , deberán expresarse en función de sus componentes  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  y, si es necesario, los productos vectoriales determinados al utilizar una expansión determinante (vea la ecuación B-12).

## EJEMPLO 16.1

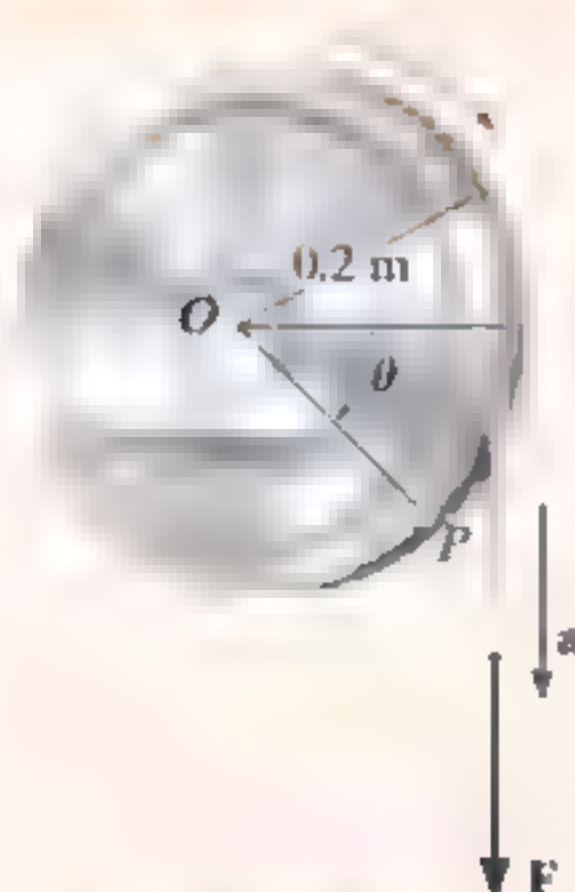


Fig. 16.6

Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura 16-6, la cual inicialmente está en reposo cuando  $\theta = 0$ . Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una aceleración  $a = (4t) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  está en segundos, determine, como una función del tiempo, (a) la velocidad angular de la rueda y (b) la posición angular de la línea  $OP$  en radianes.

## SOLUCIÓN

**Parte (a).** La rueda está sometida a rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el punto  $O$ . Entonces, un punto  $P$  en la rueda describe una trayectoria circular y su aceleración tiene componentes *tanto* tangenciales *como* normales. La componente tangencial es  $(a_P)_t = (4t) \text{ m/s}^2$ , ya que la cuerda está enrollada alrededor de la rueda y se desplaza *tangente* a ella. Por consiguiente, la aceleración angular de la rueda es

$$\begin{aligned} (\curvearrowright+) \quad (a_P)_t &= \alpha r \\ (4t) \text{ m/s}^2 &= \alpha(0.2 \text{ m}) \\ \alpha &= (20t) \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \end{aligned}$$

Con este resultado y  $\alpha = d\omega/dt$ , ahora podemos determinar la velocidad angular de la rueda  $\omega$ , ya que esta ecuación relaciona  $\alpha$ ,  $t$  y  $\omega$ . Al integrar, con la condición inicial de que  $\omega = 0$  cuando  $t = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} (\curvearrowright+) \quad \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = (20t) \text{ rad/s}^2 \\ \int_0^\omega d\omega &= \int_0^t 20t \, dt \\ \omega &= 10t^2 \text{ rad/s} \curvearrowright \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

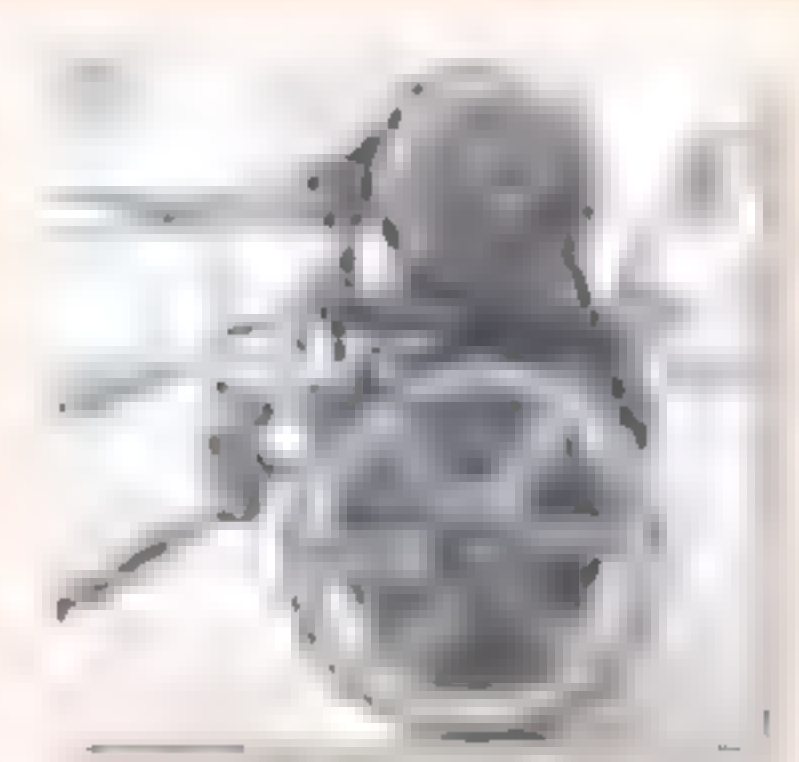
**Parte (b).** Con este resultado y  $\omega = d\theta/dt$ , podemos determinar la posición angular  $\theta$  de  $OP$ , pues esta ecuación relaciona  $\theta$ ,  $\omega$  y  $t$ . Al integrar, con la condición inicial de que  $\theta = 0$  cuando  $t = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} (\curvearrowright+) \quad \frac{d\theta}{dt} &= \omega = (10t^2) \text{ rad/s} \\ \int_0^\theta d\theta &= \int_0^t 10t^2 \, dt \\ \theta &= 3.33t^3 \text{ rad} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

**NOTA:** No podemos utilizar la ecuación de aceleración angular constante, ya que  $\alpha$  es una función del tiempo.

**EJEMPLO**

El motor que se muestra en la fotografía se utiliza para hacer girar un ensamble de rueda y ventilador alojado en la carcasa. Los detalles se muestran en la figura 16-7a. Si la polea  $A$  conectada al motor comienza a girar desde el punto de reposo con una aceleración angular constante de  $\alpha_A = 2 \text{ rad/s}^2$ , determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto  $P$  en la rueda, después de que la polea haya realizado dos revoluciones. Suponga que la banda de transmisión no se resbala en la polea y la rueda.



(© R. C. Hibbeler)

**SOLUCIÓN**

Primero convertiremos las dos revoluciones en radianes. Como una revolución equivale a  $2\pi \text{ rad}$ , entonces

$$\theta_A = 2 \text{ rev} \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) = 12.57 \text{ rad}$$

Como  $\alpha_A$  es constante, la velocidad angular de la polea  $A$  es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} (\zeta+) \quad \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \\ \omega_A^2 &= 0 + 2(2 \text{ rad/s}^2)(12.57 \text{ rad} - 0) \\ \omega_A &= 7.090 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

La banda tiene la misma rapidez y componente tangencial de la aceleración cuando pasa por la polea y la rueda. Por lo tanto,

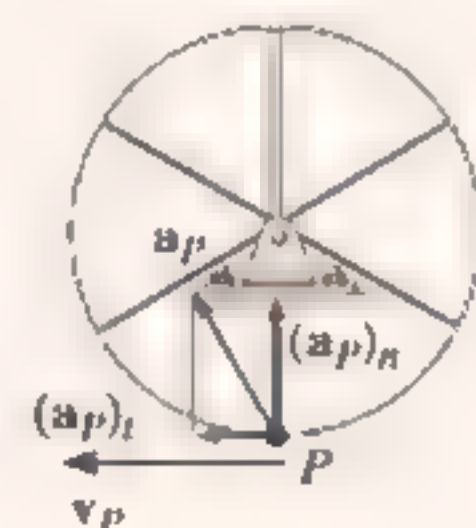
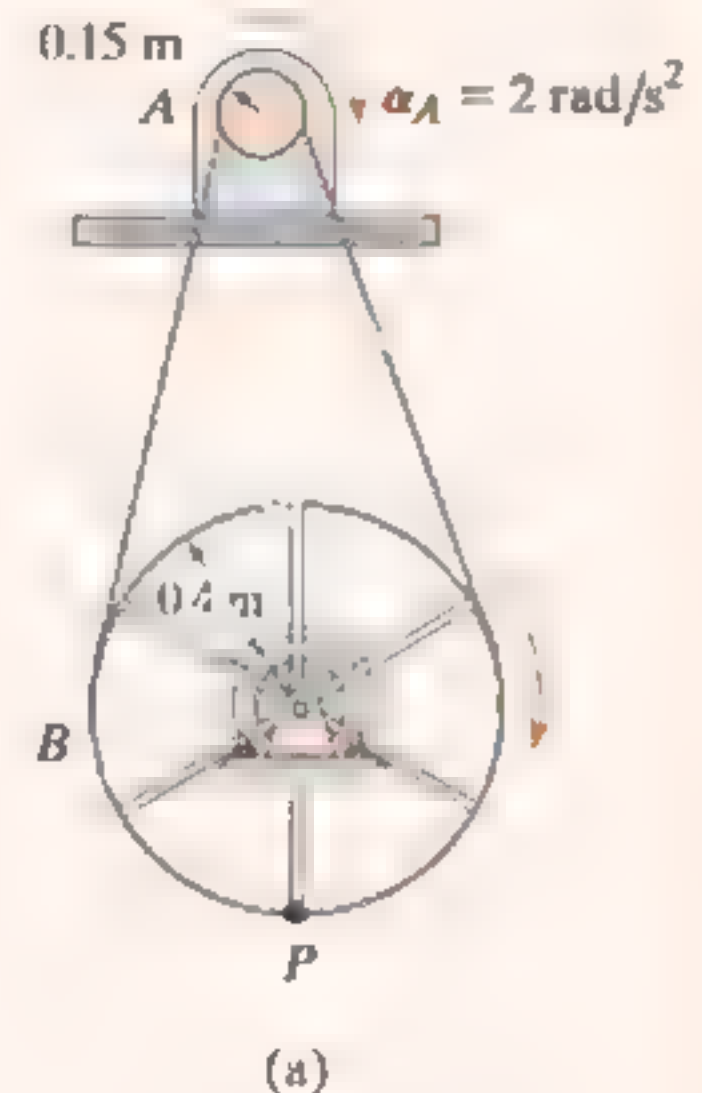
$$\begin{aligned} v &= \omega_A r_A = \omega_B r_B \quad 7.090 \text{ rad/s} (0.15 \text{ m}) = \omega_B (0.4 \text{ m}) \\ \omega_B &= 2.659 \text{ rad/s} \\ a_t &= \alpha_A r_A = \alpha_B r_B \quad 2 \text{ rad/s}^2 (0.15 \text{ m}) = \alpha_B (0.4 \text{ m}) \\ \alpha_B &= 0.750 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

Como se muestra en el diagrama cinemático de la figura 16-7b, tenemos

$$\begin{aligned} v_P &= \omega_B r_B = 2.659 \text{ rad/s} (0.4 \text{ m}) = 1.06 \text{ m/s} \\ (a_P)_t &= \alpha_B r_B = 0.750 \text{ rad/s}^2 (0.4 \text{ m}) = 0.3 \text{ m/s}^2 \\ (a_P)_n &= \omega_B^2 r_B = (2.659 \text{ rad/s})^2 (0.4 \text{ m}) = 2.827 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Por lo tanto,

$$a_P = \sqrt{(0.3 \text{ m/s}^2)^2 + (2.827 \text{ m/s}^2)^2} = 2.84 \text{ m/s}^2$$

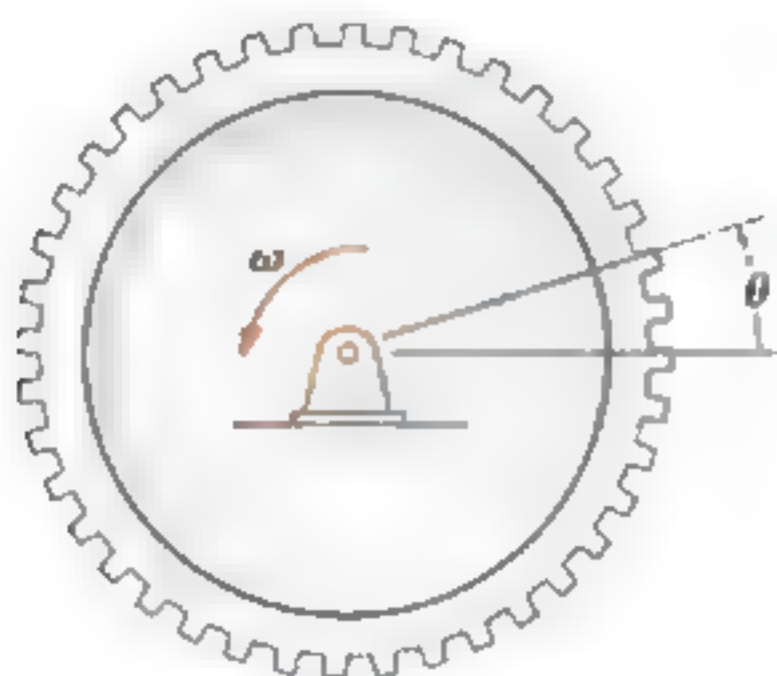


(b)

Fig. 16-7

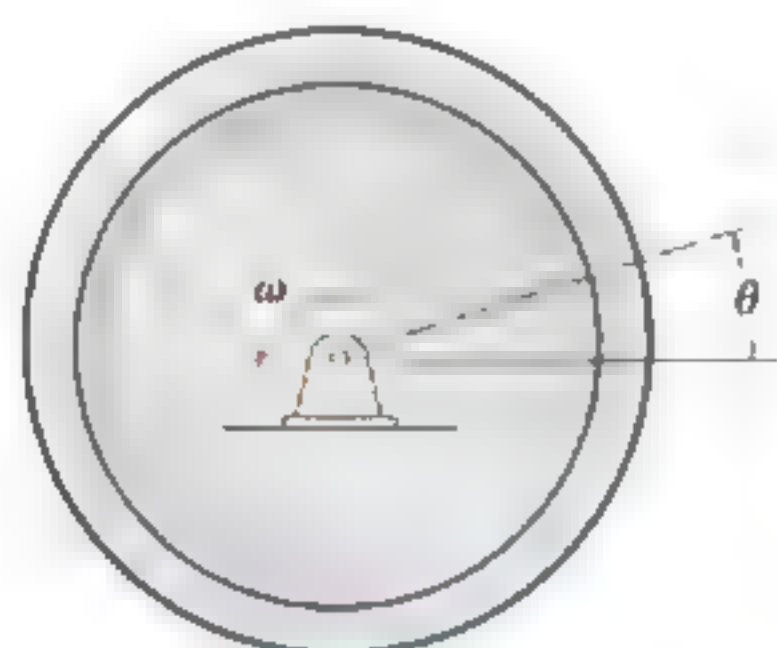
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F16-1.** Cuando el engrane realiza 20 revoluciones, alcanza una velocidad angular de  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ , a partir del punto de reposo. Determine su aceleración angular constante y el tiempo requerido.



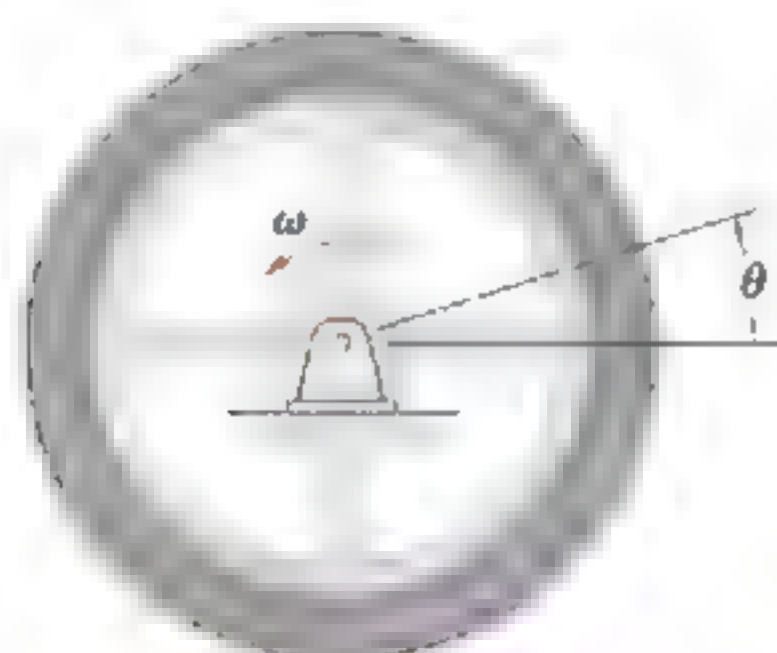
Prob. F16-1

**F16-2.** El volante gira con una velocidad angular de  $\omega = (0.005\theta^2) \text{ rad/s}$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine la aceleración angular cuando haya realizado 20 revoluciones.



Prob. F16-2

**F16-3.** El volante gira con una velocidad angular de  $\omega = (4\theta^{1/2}) \text{ rad/s}$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine el tiempo que requiere para alcanzar una velocidad angular de  $\omega = 150 \text{ rad/s}$ . Cuando  $t = 0, \theta = 1 \text{ rad}$ .



Prob. F16-3

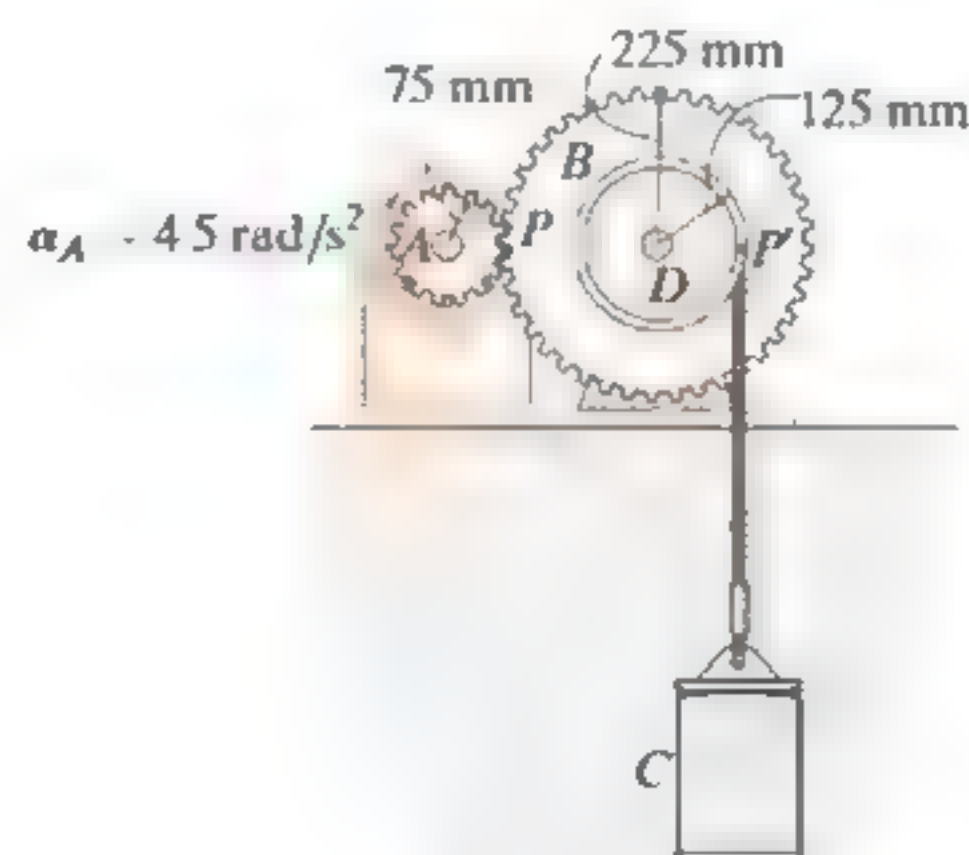
**F16-4.** La cuerda que se enrolla alrededor de una rueda de tambor levanta la cubeta. Si el desplazamiento angular de la rueda es  $\theta = (0.5t^3 + 15t) \text{ rad}$ , donde  $t$  está en segundos, determine la velocidad y la aceleración de la cubeta cuando  $t = 3 \text{ s}$ .



Prob. F16-4

**F16-5.** Una rueda tiene una aceleración angular de  $\alpha = (0.5\theta) \text{ rad/s}^2$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine la magnitud de la velocidad y aceleración de un punto  $P$  localizado en su borde, después de que la rueda haya realizado 2 revoluciones. El radio de la rueda es de  $0.2 \text{ m}$  y comienza a girar a  $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ .

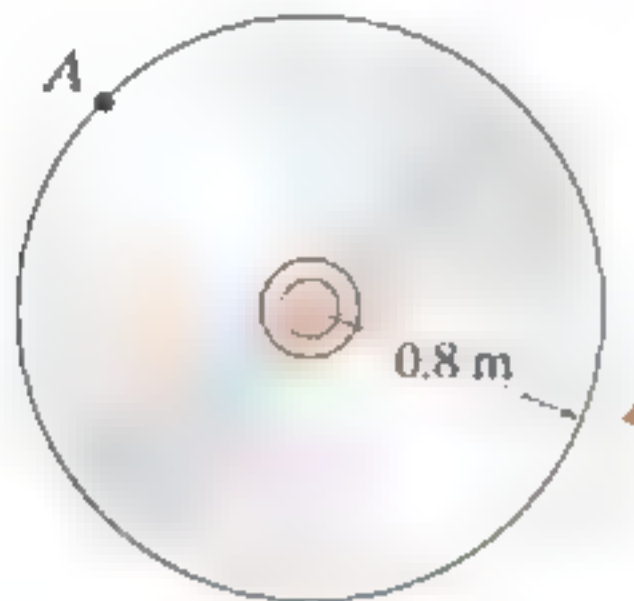
**F16-6.** Durante un breve tiempo, el motor hace girar el engrane  $A$  con una aceleración angular constante de  $\alpha_A = 4.5 \text{ rad/s}^2$ , a partir del punto de reposo. Determine la velocidad del cilindro y la distancia que recorre en tres segundos. La cuerda se enrolla en la polea  $D$ , la cual está sólidamente unida al engrane  $B$ .



Prob. F16-6

## PROBLEMAS

**16-1.** La velocidad angular del disco está definida por  $\omega = (5t^2 + 2)$  rad/s, donde  $t$  se da en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto  $A$  en el disco, cuando  $t = 0.5$  s.

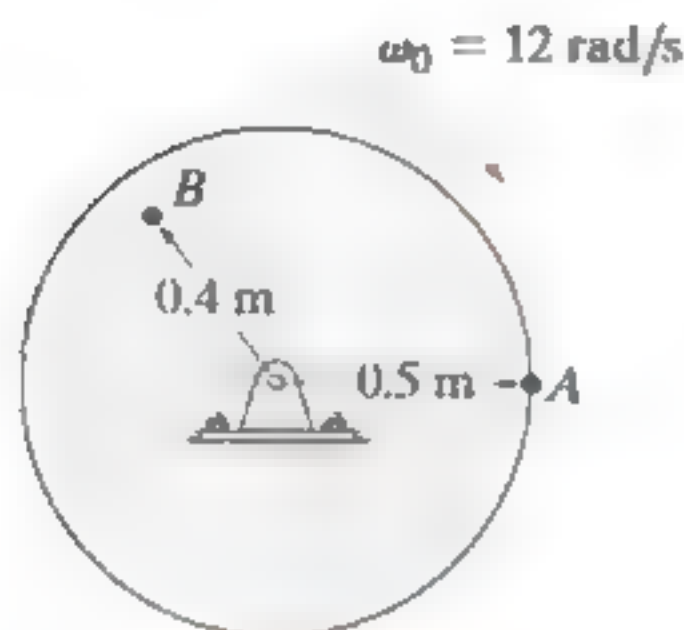


Prob. 16-1

**16-2.** La aceleración angular del disco está definida por  $\alpha = 3t^2 + 12$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $t$  se da en segundos. Si el disco gira originalmente a  $\omega_0 = 12$  rad/s, determine la magnitud de la velocidad y las componentes  $n$  y  $t$  de la aceleración del punto  $A$  sobre el disco cuando  $t = 2$  s.

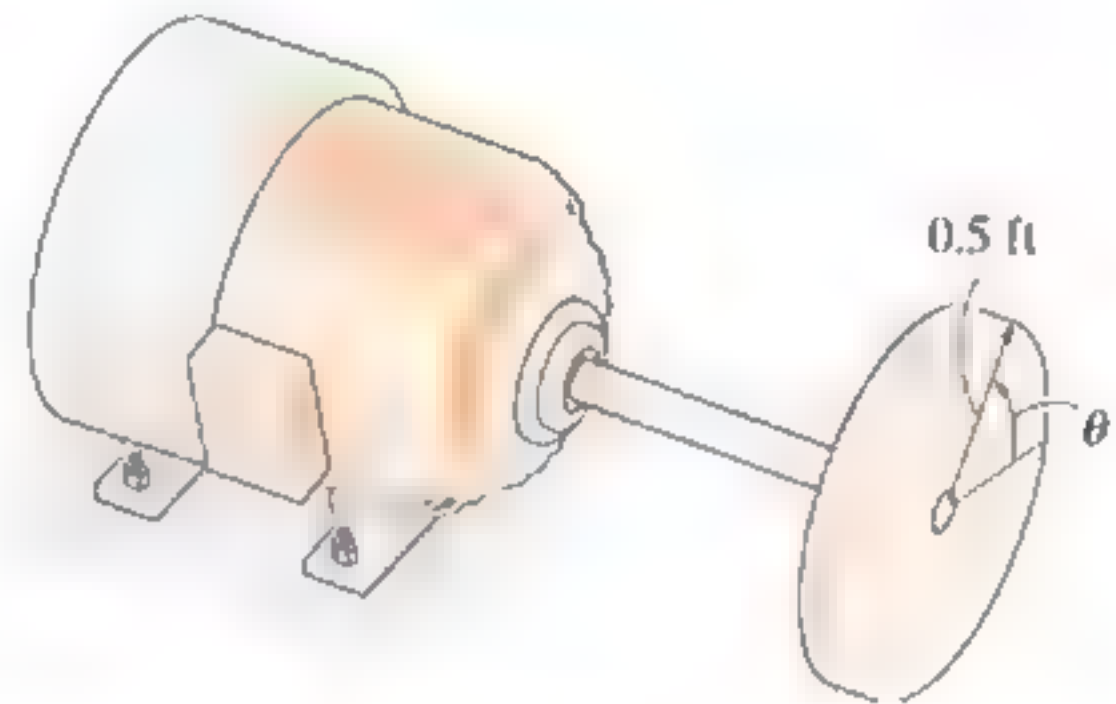
**16-3.** El disco está girando originalmente a  $\omega_0 = 12$  rad/s. Si se somete a una aceleración angular constante de  $\alpha = 20$  rad/s<sup>2</sup>, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes  $n$  y  $t$  de la aceleración del punto  $A$  en el instante  $t = 2$  s.

**\*16-4.** El disco está girando originalmente a  $\omega_0 = 12$  rad/s. Si se somete a una aceleración angular constante de  $\alpha = 20$  rad/s<sup>2</sup>, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes  $n$  y  $t$  de la aceleración del punto  $B$  cuando el disco experimenta 2 revoluciones.



Probs. 16-2/3/4

**16-5.** El disco se impulsa mediante un motor, de modo que la posición angular del disco está definida por  $\theta = (20t + 4t^2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos. Determine el número de revoluciones, la velocidad angular y la aceleración angular del disco, cuando  $t = 90$  s.

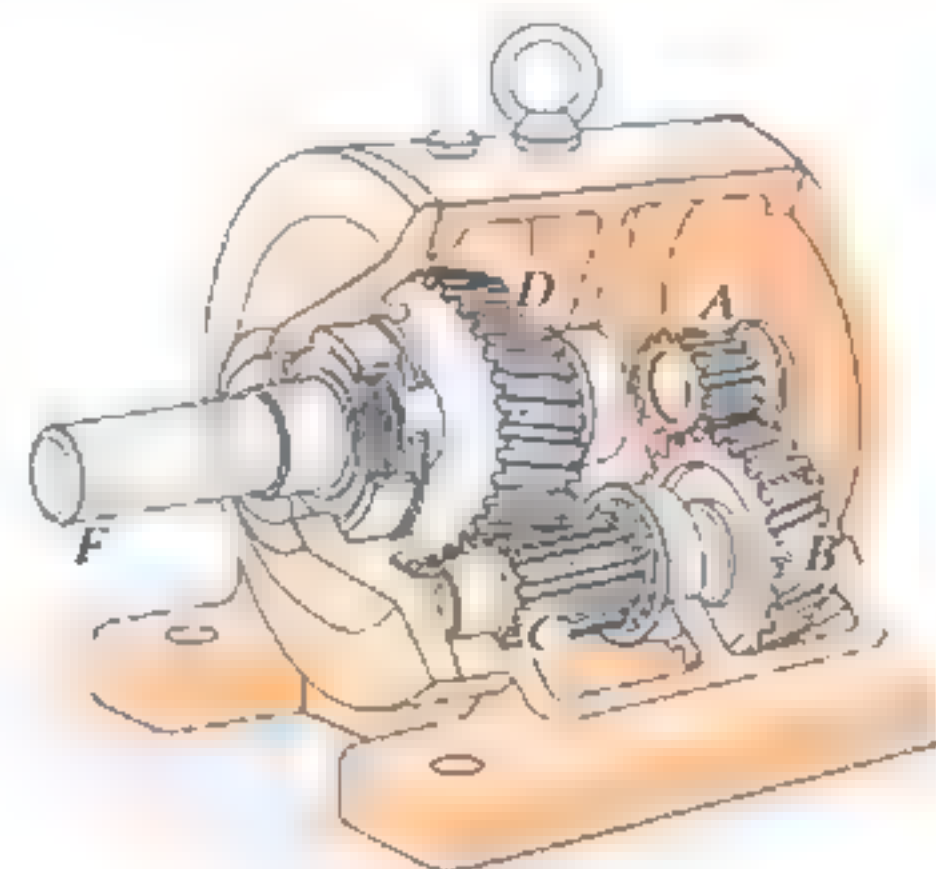


Prob. 16-5

**16-6.** Una rueda tiene una velocidad angular inicial de 10 rad/s en sentido horario y una aceleración angular constante de 3 rad/s<sup>2</sup>. Determine el número de revoluciones que debe experimentar para adquirir una velocidad angular en sentido horario de 15 rad/s. ¿Cuánto tiempo requiere?

**16-7.** Si el engrane  $A$  gira con una aceleración angular constante de  $\alpha_A = 90$  rad/s<sup>2</sup>, partiendo del reposo, determine el tiempo requerido para que el engrane  $D$  alcance una velocidad angular de 600 rpm. También encuentre el número de revoluciones del engrane  $D$  para alcanzar esta velocidad angular. Los engranes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  tienen radios de 15 mm, 50 mm, 25 mm y 75 mm, respectivamente.

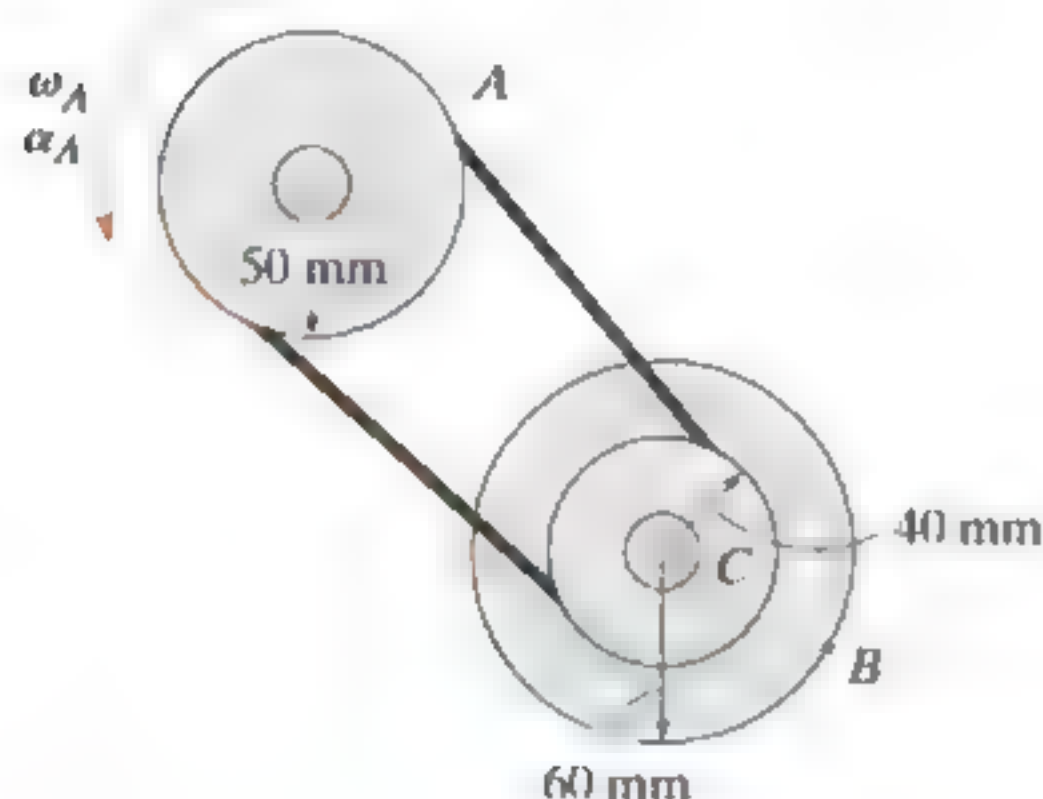
**\*16-8.** Si el engranaje  $A$  gira con una velocidad angular de  $\omega_A = (\theta_A + 1)$  rad/s, donde  $\theta_A$  es el desplazamiento angular del engrane  $A$ , medido en radianes, determine la aceleración angular del engrane  $D$  cuando  $\theta_A = 3$  rad, si parte del reposo. Los engranes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  tienen radios de 15 mm, 50 mm, 25 mm y 75 mm, respectivamente.



Probs. 16-7/8

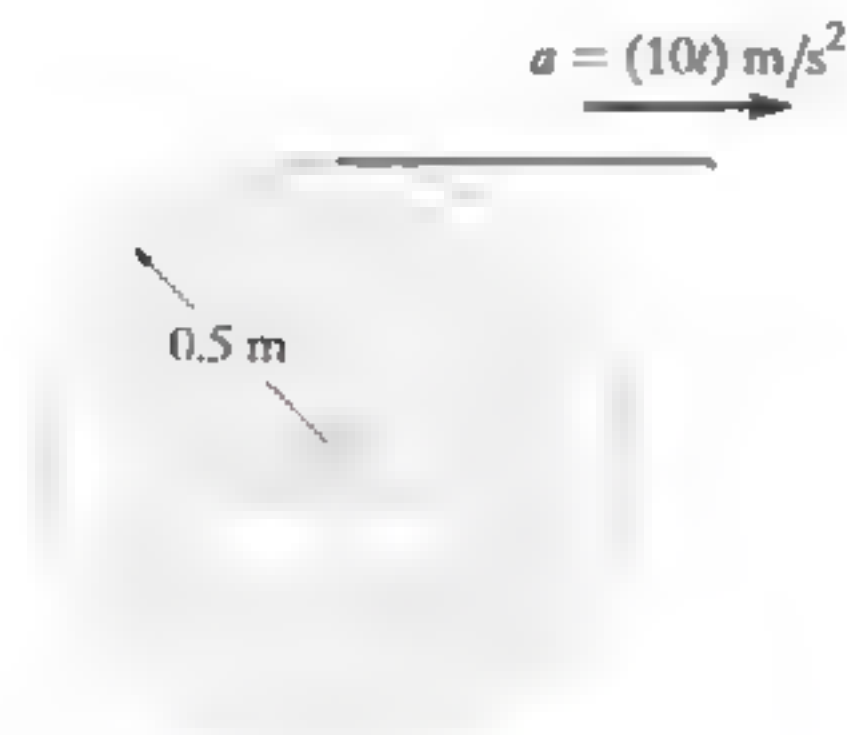
**16-9.** En el instante  $\omega_A = 5 \text{ rad/s}$ , la polea  $A$  tiene una aceleración angular  $\alpha = (0.8\theta) \text{ rad/s}^2$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine la magnitud de la aceleración del punto  $B$  sobre la polea  $C$  cuando  $A$  gira 3 revoluciones. La polea  $C$  tiene un eje interno que está fijo al externo y gira junto con él.

**16-10.** En el instante  $\omega_A = 5 \text{ rad/s}$ , la polea  $A$  tiene una aceleración angular constante  $\alpha_A = 6 \text{ rad/s}^2$ . Determine la magnitud de la aceleración del punto  $B$  sobre la polea  $C$  cuando  $A$  gira 2 revoluciones. La polea  $C$  tiene un eje interno que está fijo al externo y gira junto con él.



Probs. 16-9/10

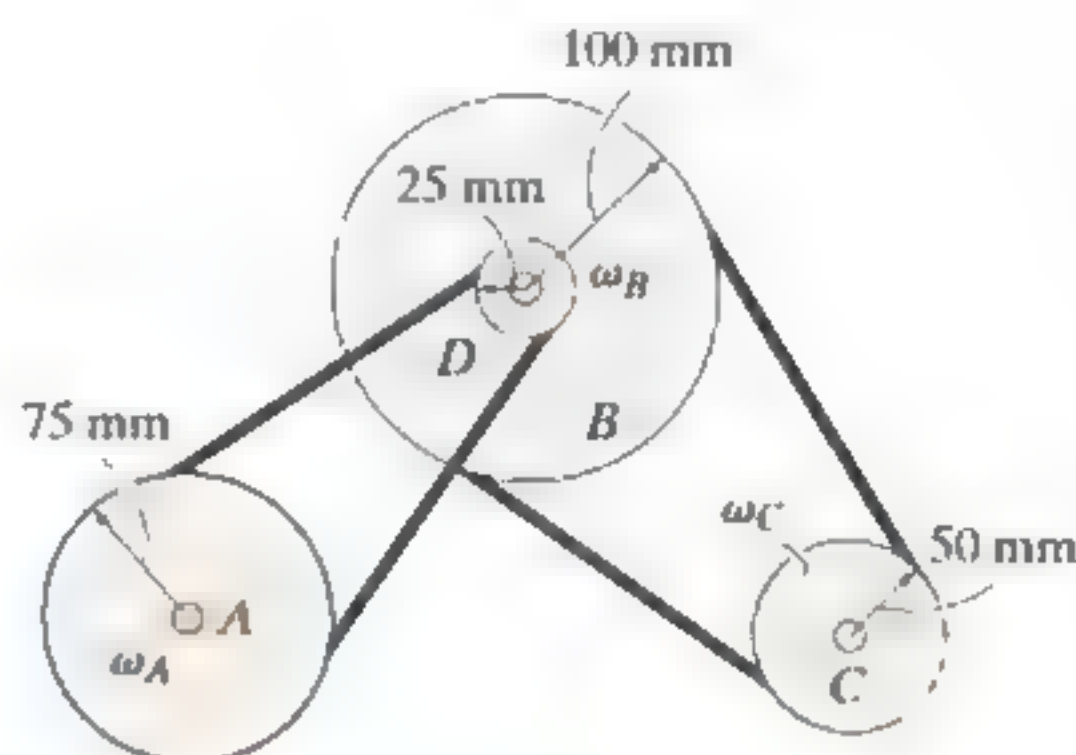
**16-11.** La cuerda, que se enrolla alrededor del disco, recibe una aceleración de  $a = (10t) \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. A partir del reposo, determine el desplazamiento angular, la velocidad angular y la aceleración angular del disco cuando  $t = 3 \text{ s}$ .



Prob. 16-11

**\*16-12.** La potencia de un motor de autobús se transmite utilizando el dispositivo de banda y polea que se ilustra. Si el motor gira la polea  $A$  a  $\omega_A = (20t + 40) \text{ rad/s}$ , donde  $t$  se da en segundos, determine las velocidades angulares de la polea  $B$  del generador y la polea  $C$  del aire acondicionado cuando  $t = 3 \text{ s}$ .

**16-13.** La potencia de un motor de autobús se transmite utilizando el dispositivo de banda y polea que se ilustra. Si el motor gira la polea  $A$  a  $\omega_A = 60 \text{ rad/s}$ , determine las velocidades angulares de la polea  $B$  del generador y la polea  $C$  del aire acondicionado. El eje en  $D$  está conectado rigidamente a  $B$  y gira con ésta.

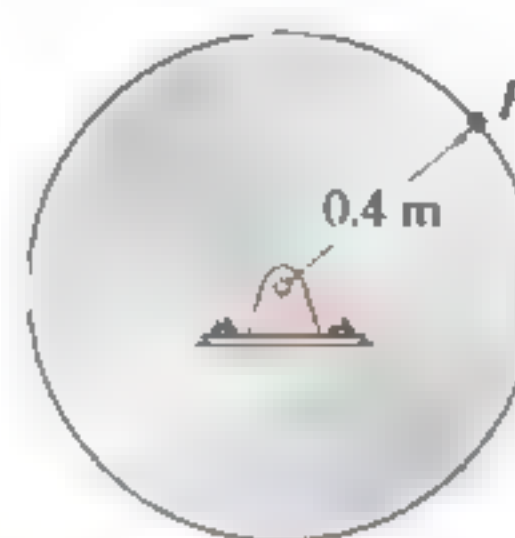


Probs. 16-12/13

**16-14.** El disco parte desde el reposo y se le da una aceleración angular  $\alpha = (2t^2) \text{ rad/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine la velocidad angular del disco y su desplazamiento angular cuando  $t = 4 \text{ s}$ .

**16-15.** El disco parte desde el reposo y se le da una aceleración angular  $\alpha = (5t^{1/2}) \text{ rad/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. Determine las magnitudes de las componentes normal y tangencial de la aceleración de un punto  $P$  sobre el borde del disco cuando  $t = 2 \text{ s}$ .

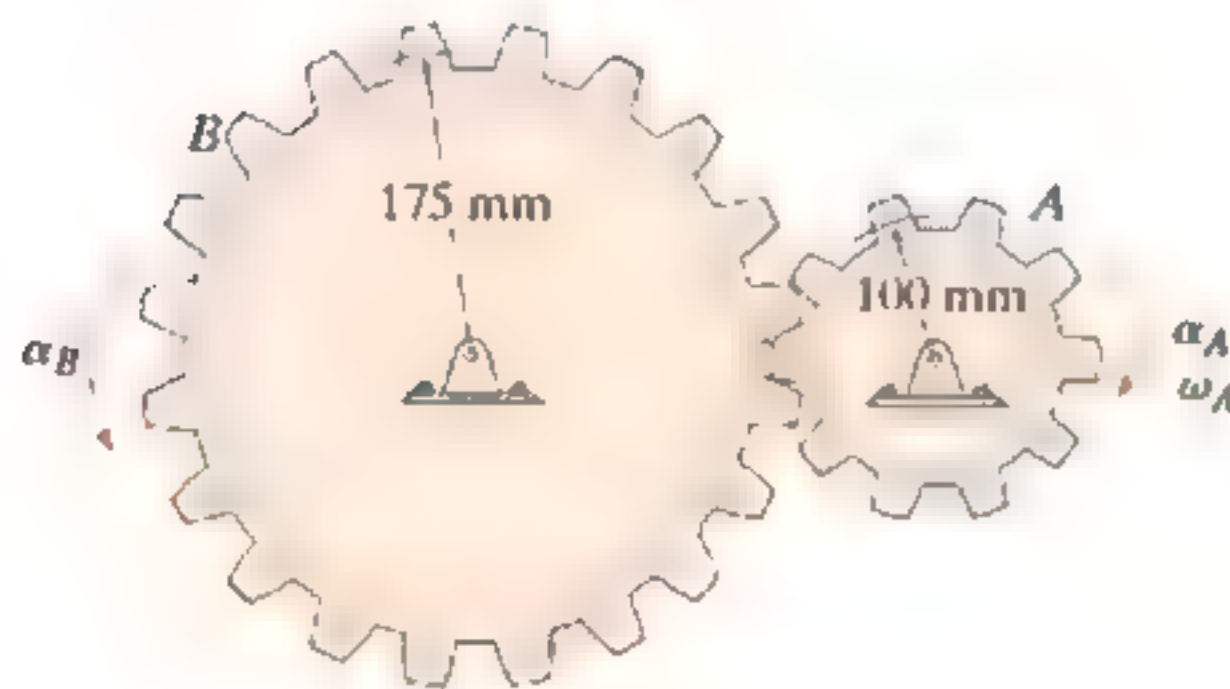
**\*16-16.** El disco inicia en  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  cuando  $\theta = 0$ , y se le da una aceleración angular  $\alpha = (0.3\theta) \text{ rad/s}^2$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine las magnitudes de las componentes normal y tangencial de la aceleración de un punto  $P$  sobre el borde del disco cuando  $\theta = 1 \text{ rev}$ .



Probs. 16-14/15/16

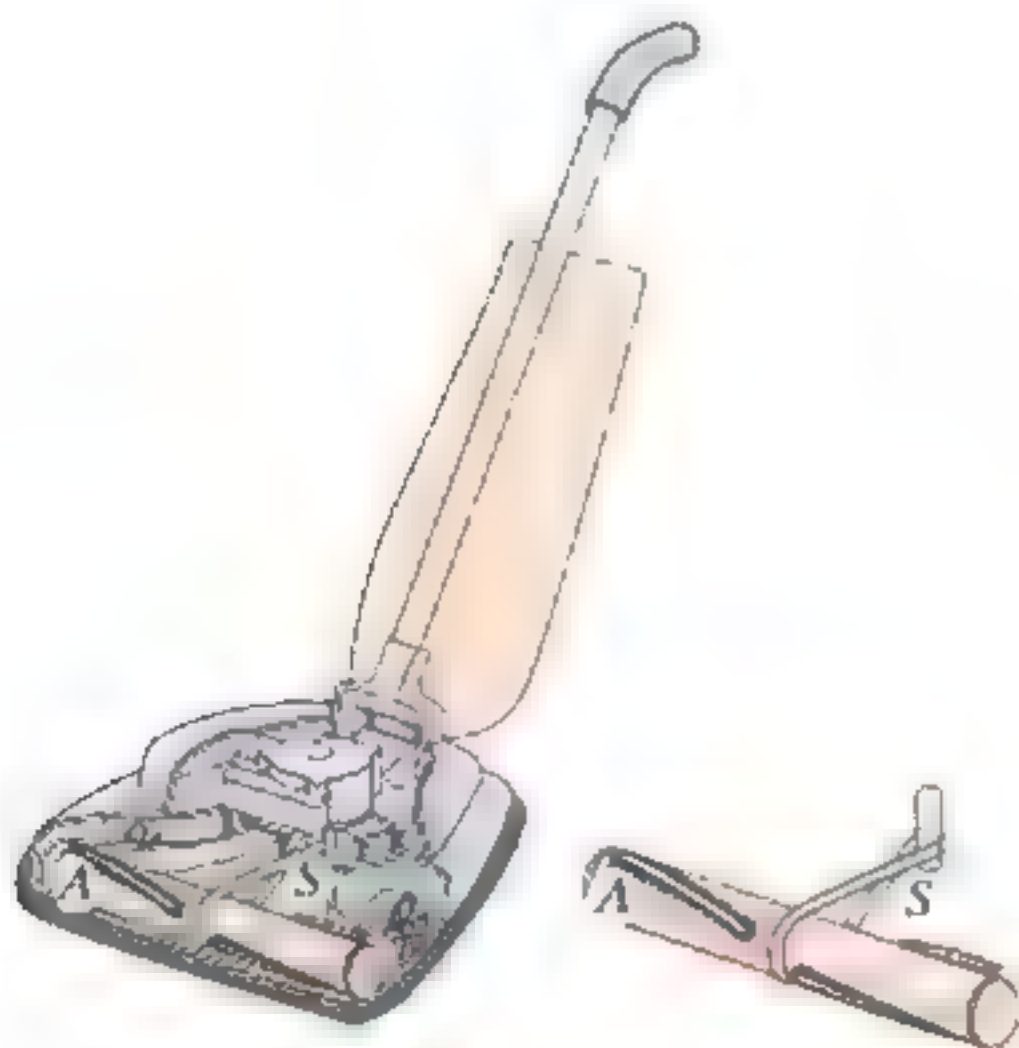
**16-17.** Un motor da al engrane  $A$  una aceleración angular de  $\alpha_A = (2 + 0.006 \theta^2)$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $\theta$  está en radianes. Si este engrane gira inicialmente a  $\omega_A = 15$  rad/s, determine la velocidad angular del engrane  $B$  después de que  $A$  experimenta un desplazamiento angular de 10 rev.

**16-18.** Un motor da al engrane  $A$  una aceleración angular de  $\alpha_A = (2t^3)$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $t$  se da en segundos. Si este engrane gira inicialmente a  $\omega_A = 15$  rad/s, determine la velocidad angular del engrane  $B$  cuando  $t = 3$  s.



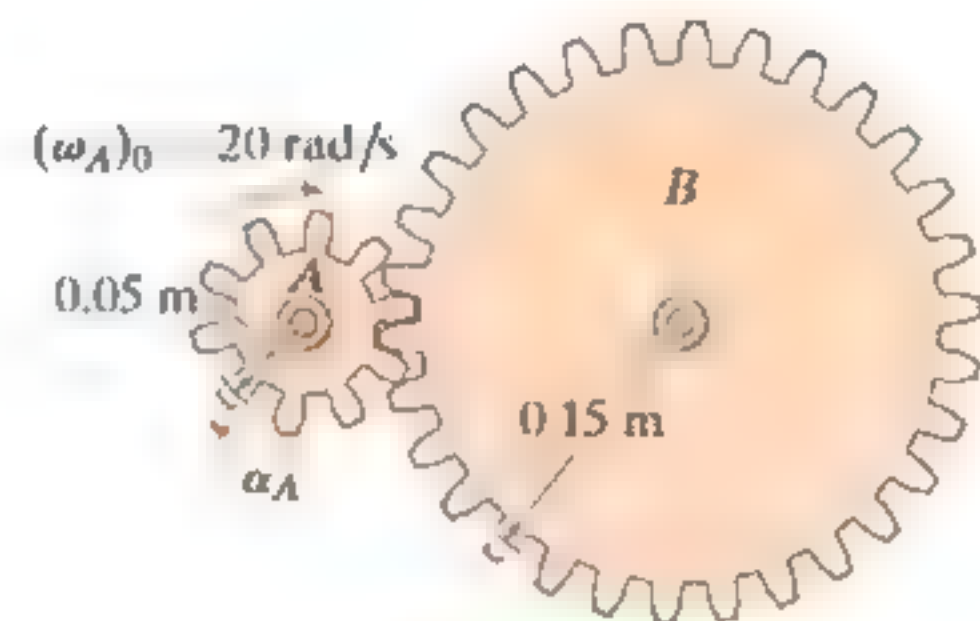
Probs. 16-17/18

**16-19.** La flecha  $S$  de la armadura de la aspiradora gira con una aceleración angular de  $\alpha = 4\omega^{3/4}$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $\omega$  está en rad/s. Determine la velocidad angular del cepillo cuando  $t = 4$  s, a partir de  $\omega_0 = 1$  rad/s en  $\theta = 0$ . Los radios de la flecha y el cepillo son de 0.25 in y 1 in, respectivamente. Desprecie el espesor de la banda motriz.



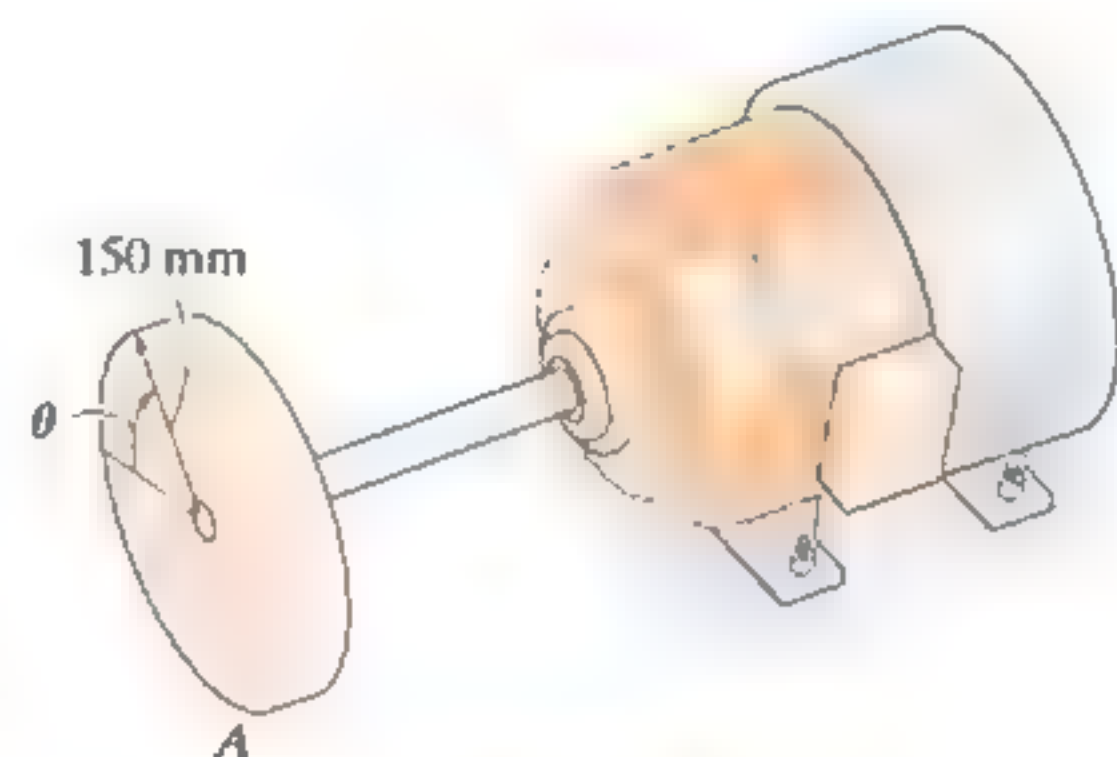
Prob. 16-19

**16-20.** Un motor da al engrane  $A$  una aceleración angular de  $\alpha_A = (4t^3)$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $t$  se da en segundos. Si este engrane gira inicialmente a  $(\omega_A)_0 = 20$  rad/s, determine la velocidad angular del engrane  $B$  cuando  $t = 2$  s.



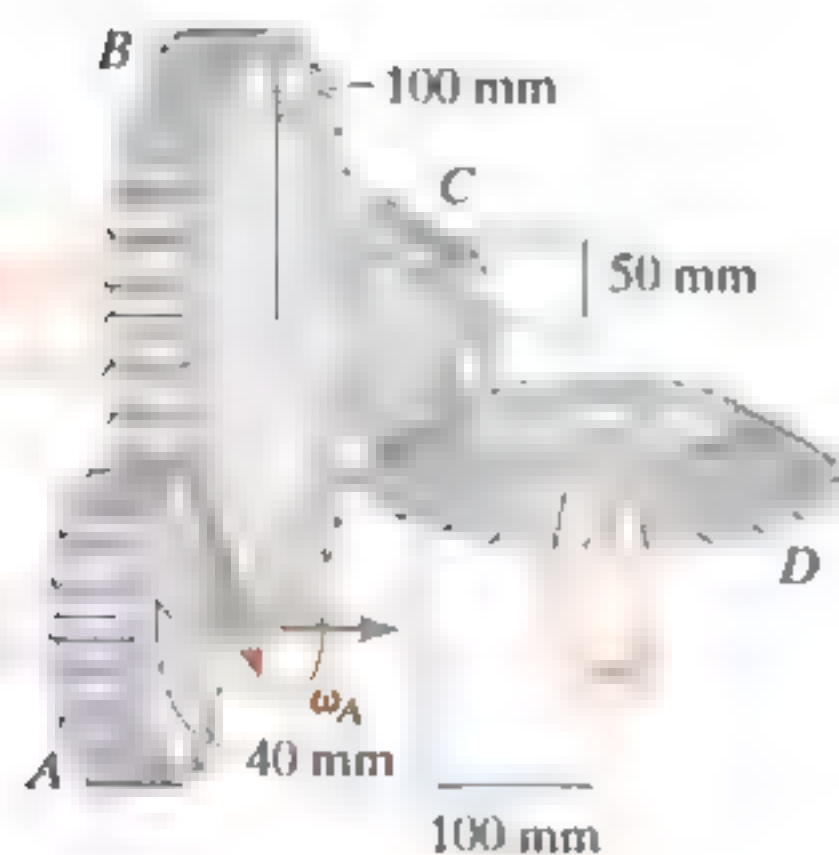
Prob. 16-20

**16-21.** El motor gira el disco con una velocidad angular de  $\omega = (5t^2 + 3t)$  rad/s, donde  $t$  se da en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y las componentes  $n$  y  $t$  de la aceleración del punto  $A$  sobre el disco cuando  $t = 3$  s.



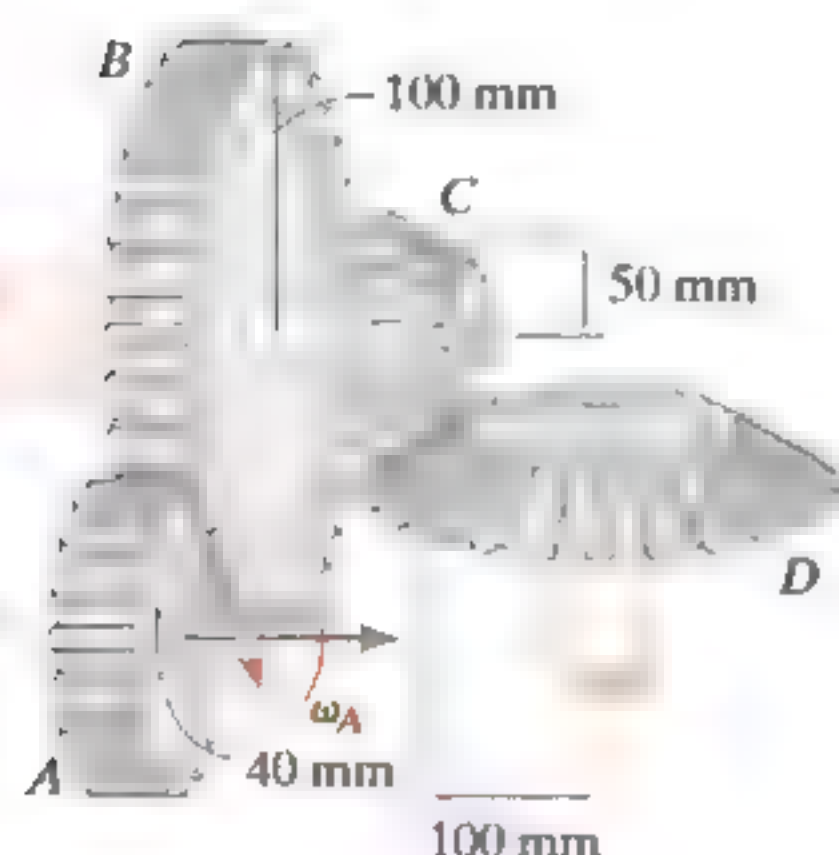
Prob. 16-21

**16-22.** Si el motor gira el engrane  $A$  con una aceleración angular de  $\alpha_A = 2 \text{ rad/s}^2$  cuando la velocidad angular es  $\omega_A = 20 \text{ rad/s}$ , determine la aceleración angular y la velocidad angular del engrane  $D$ .



Prob. 16-22

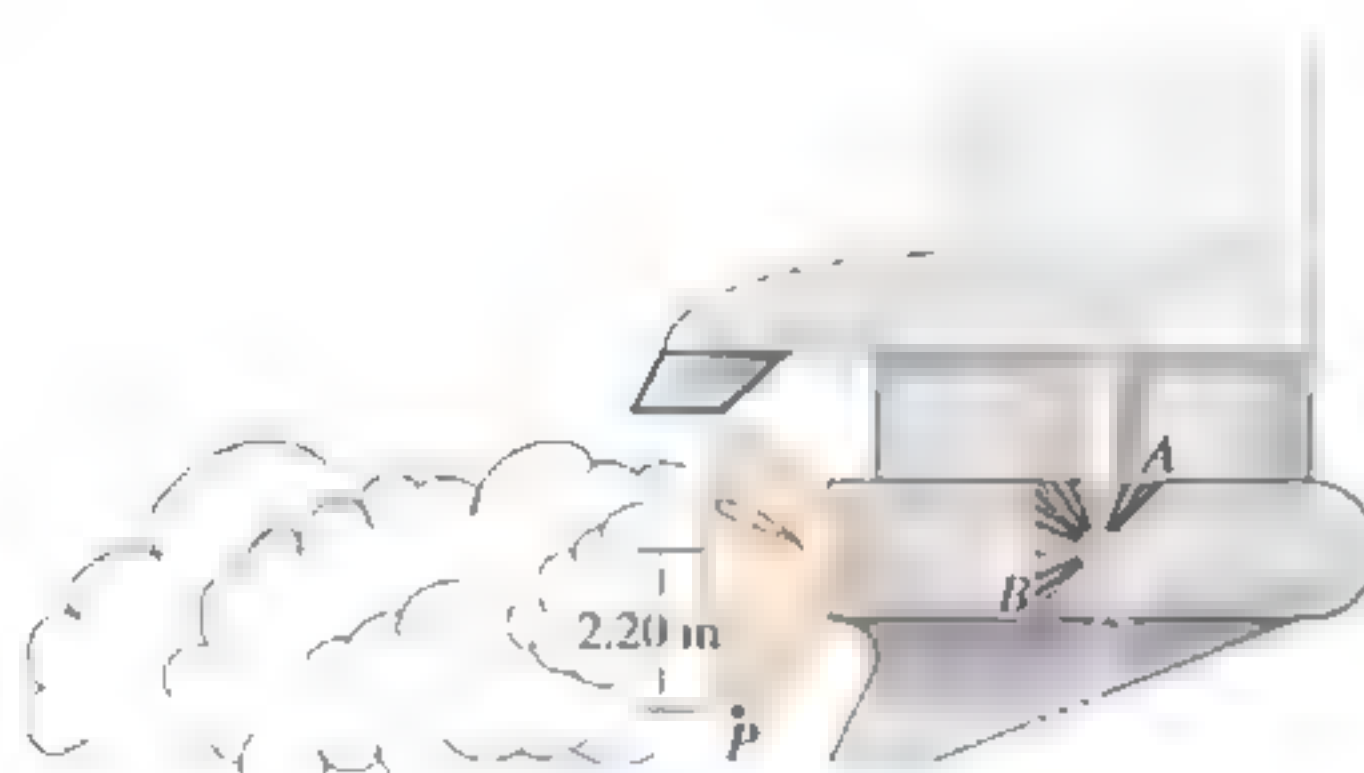
**16-23.** Si el motor gira el engrane  $A$  con una aceleración angular de  $\alpha_A = 3 \text{ rad/s}^2$  cuando la velocidad angular es  $\omega_A = 60 \text{ rad/s}$ , determine la aceleración angular y la velocidad angular del engrane  $D$ .



Prob. 16-23

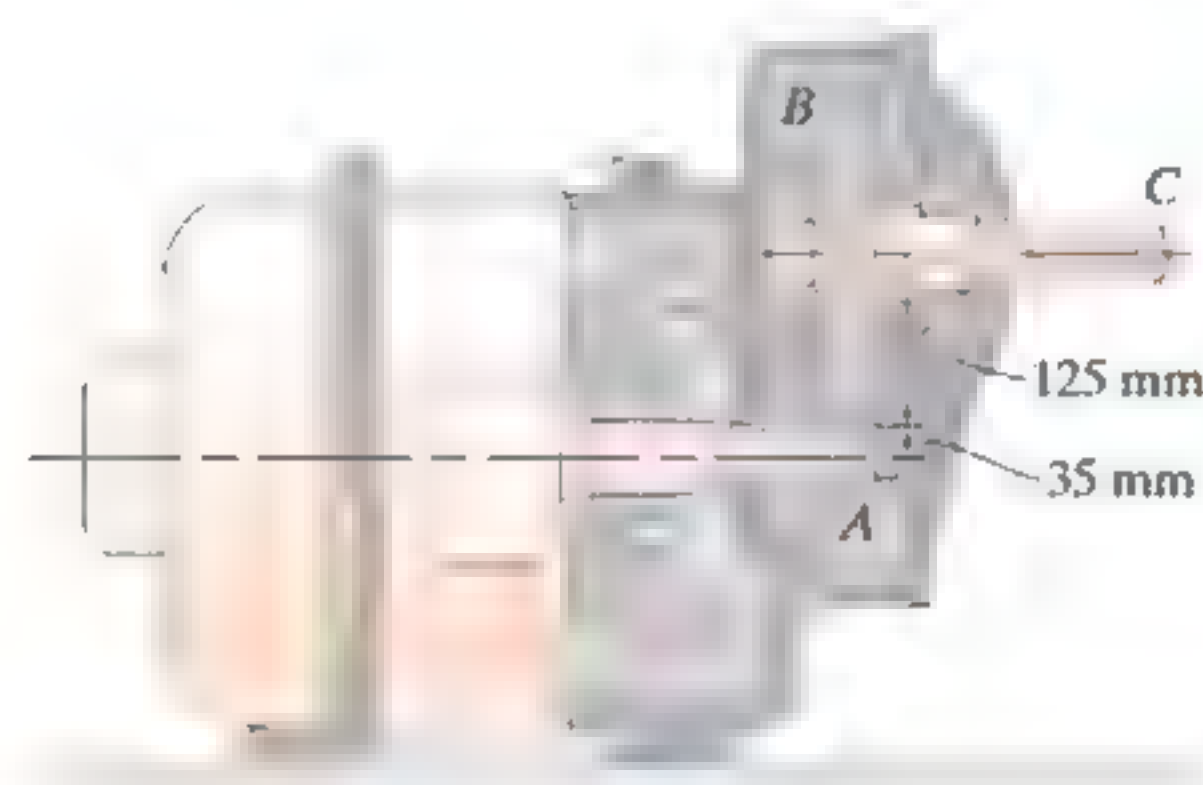
**\*16-24.** El engrane  $A$  sobre la flecha de transmisión del motor fuera de borda tiene un radio  $r_A = 0.5 \text{ in}$  y el engrane de piñón  $B$  sobre el eje de la hélice tiene un radio  $r_B = 1.2 \text{ in}$ . Determine la velocidad angular de la hélice en  $t = 1.5 \text{ s}$ , si la flecha de transmisión gira con una aceleración angular  $\alpha = (400t^3) \text{ rad/s}^2$ , donde  $t$  se da en segundos. La hélice está originalmente en reposo y la carcasa del motor no se mueve.

**16-25.** Para el motor fuera de borda del problema 16-24, determine la magnitud de la velocidad y la aceleración del punto  $P$  situado en la punta de la hélice en el instante  $t = 0.75 \text{ s}$ .



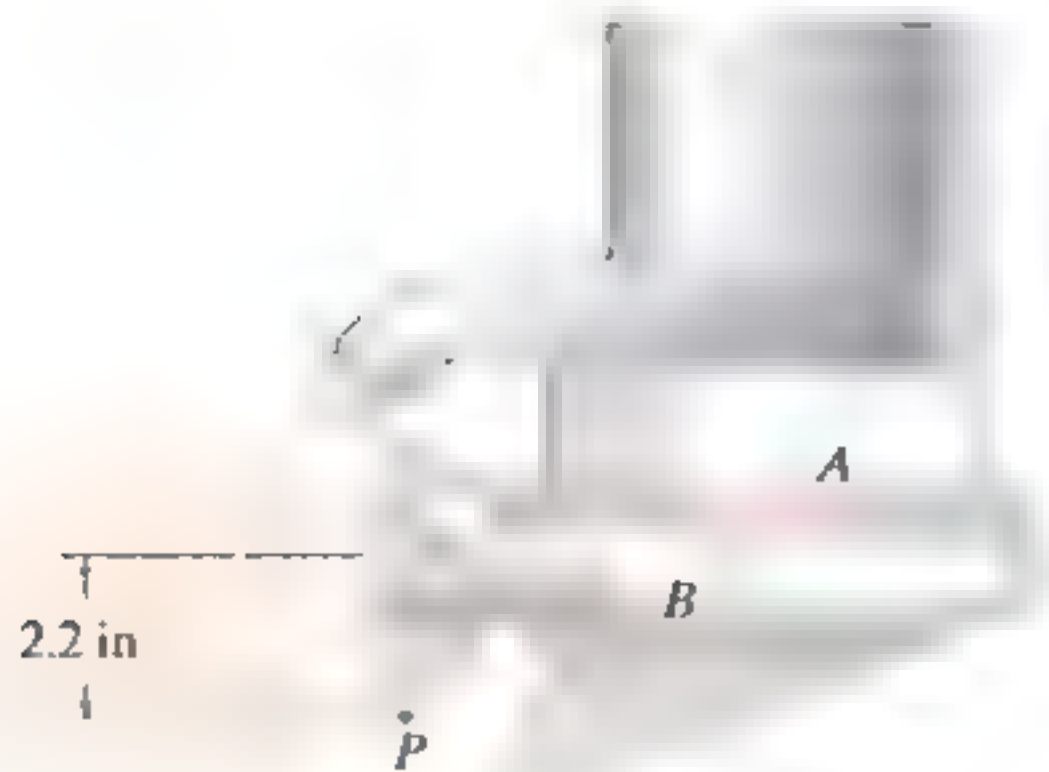
Probs. 16-24-25

**16-26.** El engrane de piñón  $A$  sobre el eje del motor recibe una aceleración angular constante  $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ . Si los engranes  $A$  y  $B$  tienen las dimensiones indicadas, determine la velocidad y el desplazamiento angulares del eje de salida  $C$ , cuando  $t = 2 \text{ s}$ , partiendo del reposo. El eje está fijo a  $B$  y gira con éste.



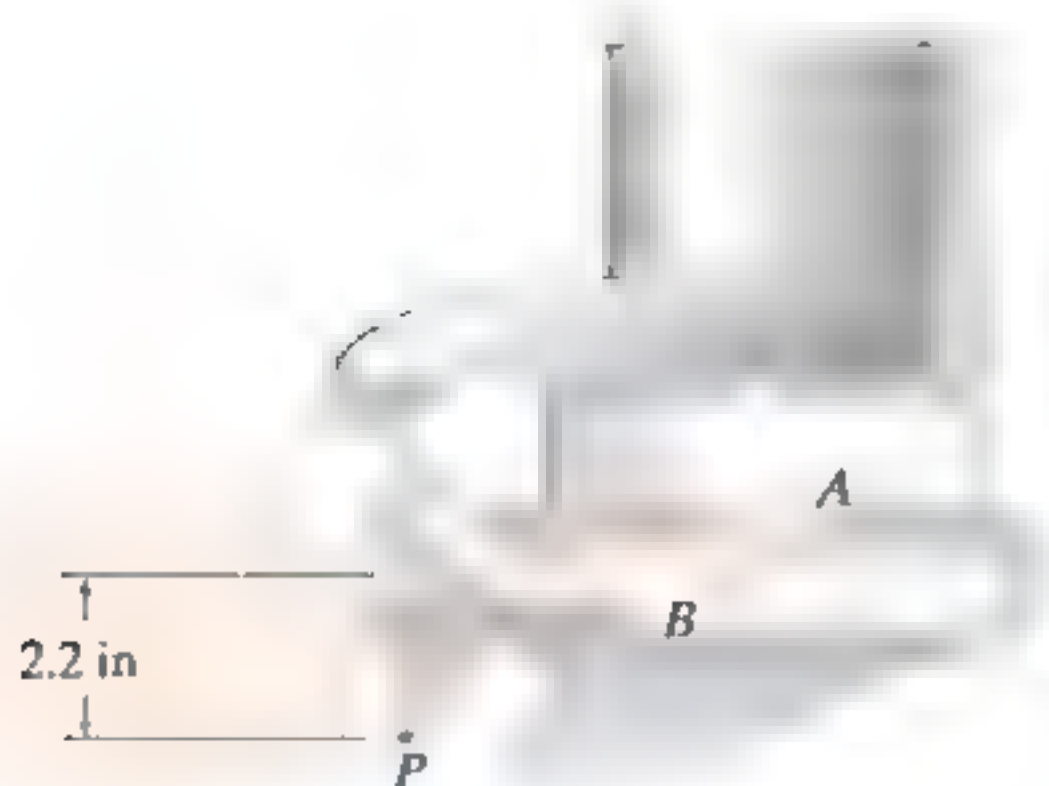
Prob. 16-26

**16-27.** El engrane sobre la flecha de transmisión del motor fuera de borda tiene un radio  $r_A = 0.7$  in y el engrane de piñón  $B$  sobre el eje de la hélice tiene un radio  $r_B = 1.4$  in. Determine la velocidad angular de la hélice en  $t = 1.3$  s, si la flecha de transmisión gira con una aceleración angular  $\alpha = (300\sqrt{t})$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $t$  se da en segundos. La hélice está originalmente en reposo y la carcasa del motor no se mueve.



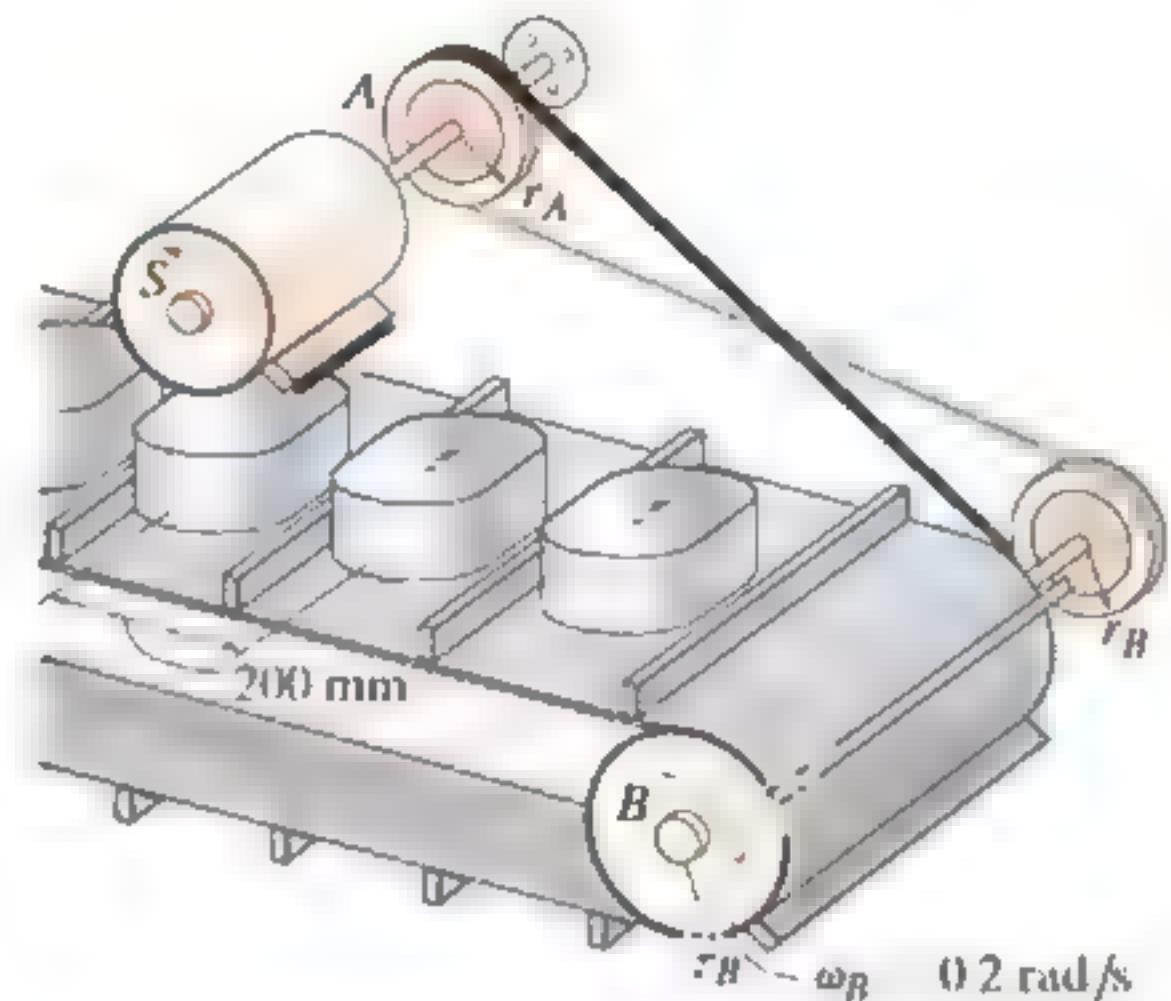
Prob. 16-27

**\*16-28.** El engrane  $A$  sobre la flecha de transmisión del motor fuera de borda tiene un radio  $r_A = 0.7$  in y el engrane de piñón  $B$  sobre el eje de la hélice tiene un radio  $r_B = 1.4$  in. Determine de las magnitudes de la velocidad y la aceleración de un punto  $P$  situado en la punta de la hélice en el instante  $t = 0.75$  s. La flecha de transmisión gira con una aceleración angular  $\alpha = (300\sqrt{t})$  rad/s<sup>2</sup>, donde  $t$  se da en segundos. La hélice está originalmente en reposo y la carcasa del motor no se mueve.



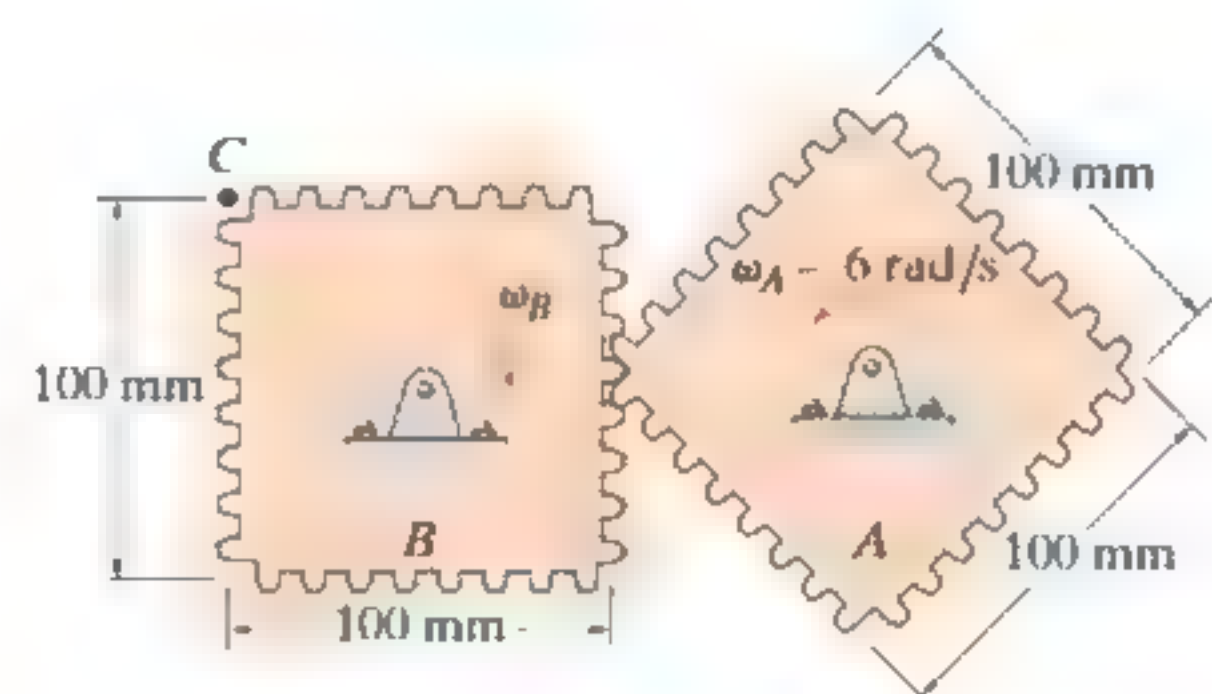
Prob. 16-28

**16-29.** Un sello  $S$ , ubicado en el tambor giratorio, se utiliza para etiquetar recipientes. Si las latas se centran con 200 mm entre sí sobre la banda transportadora, determine el radio  $r_A$  de la rueda impulsora  $A$  y el radio  $r_B$  del tambor de la banda transportadora, de modo que en cada revolución del sello, éste marca la parte superior de una lata. ¿Cuántas latas se marcan por minuto, si el tambor en  $B$  gira a  $\omega_B = 0.2$  rad/s? Note que la banda impulsora se cruza al pasar entre las ruedas.



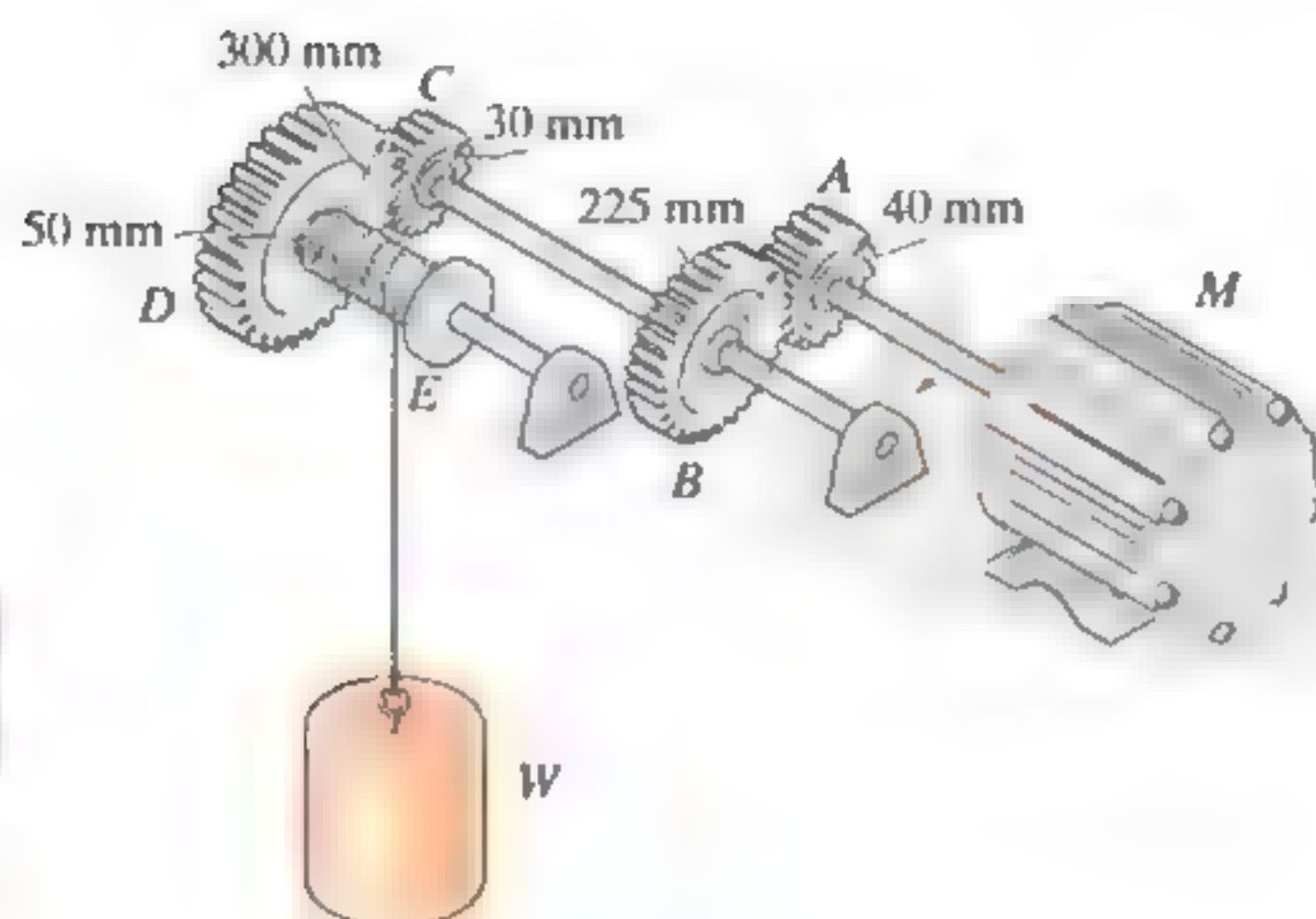
Prob. 16-29

**16-30.** En el instante indicado, el engrane  $A$  gira con una velocidad angular constante de  $\omega_A = 6$  rad/s. Determine la velocidad angular máxima del engrane  $B$  y la velocidad máxima del punto  $C$ .



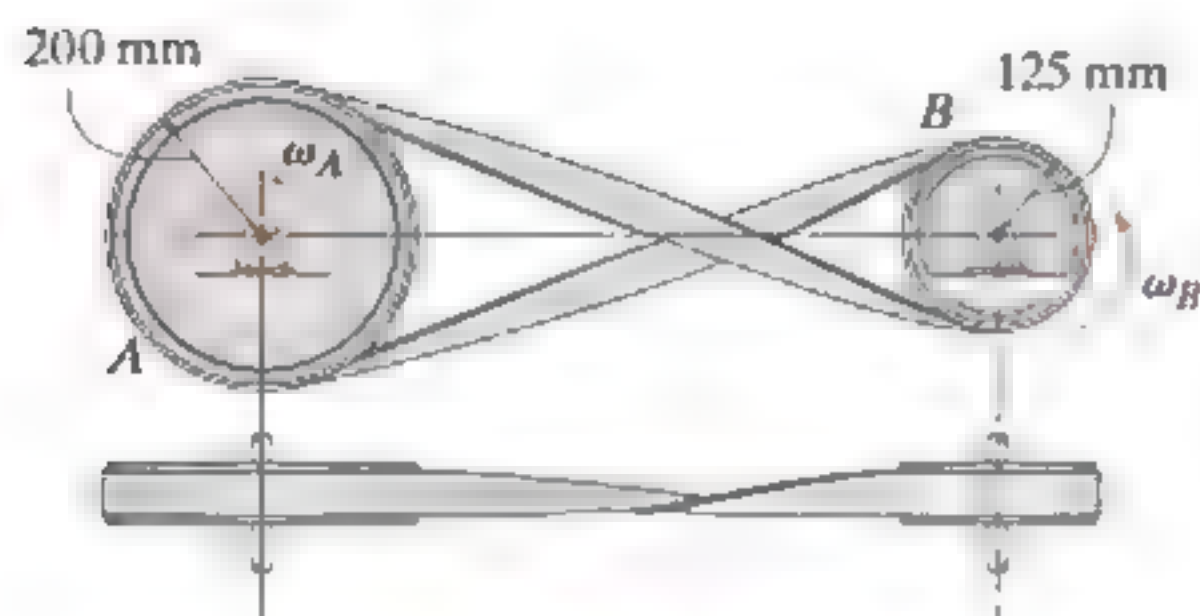
Prob. 16-30

**16-31.** Determine la distancia que se eleva la carga  $W$  se en  $t = 5$  s utilizando el malacate. El eje del motor  $M$  gira con una velocidad angular  $\omega = 100(4 + t)$  rad/s, donde  $t$  se da en segundos.



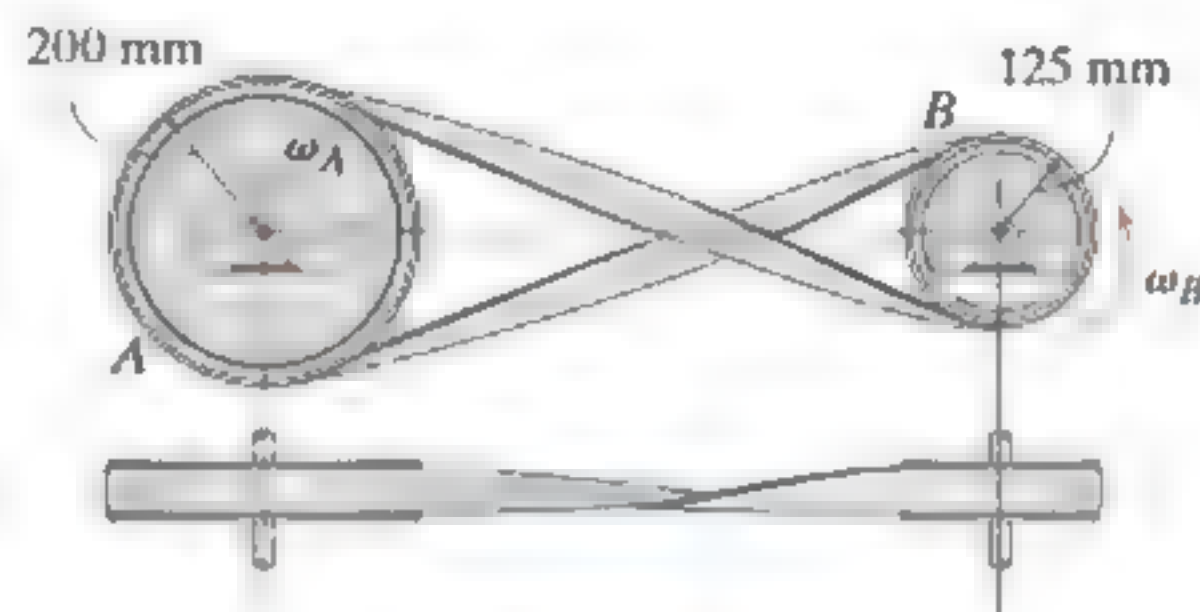
Prob. 16-31

**\*16-32.** La banda de transmisión se cruza de modo que la polea  $B$  gira en sentido opuesto al de la rueda de transmisión  $A$ . Si  $A$  tiene una aceleración angular constante de  $\alpha_A = 30$  rad/s<sup>2</sup>, determine las componentes tangencial y normal de la aceleración de un punto situado en el borde de  $B$  cuando  $t = 3$  s, partiendo del reposo.



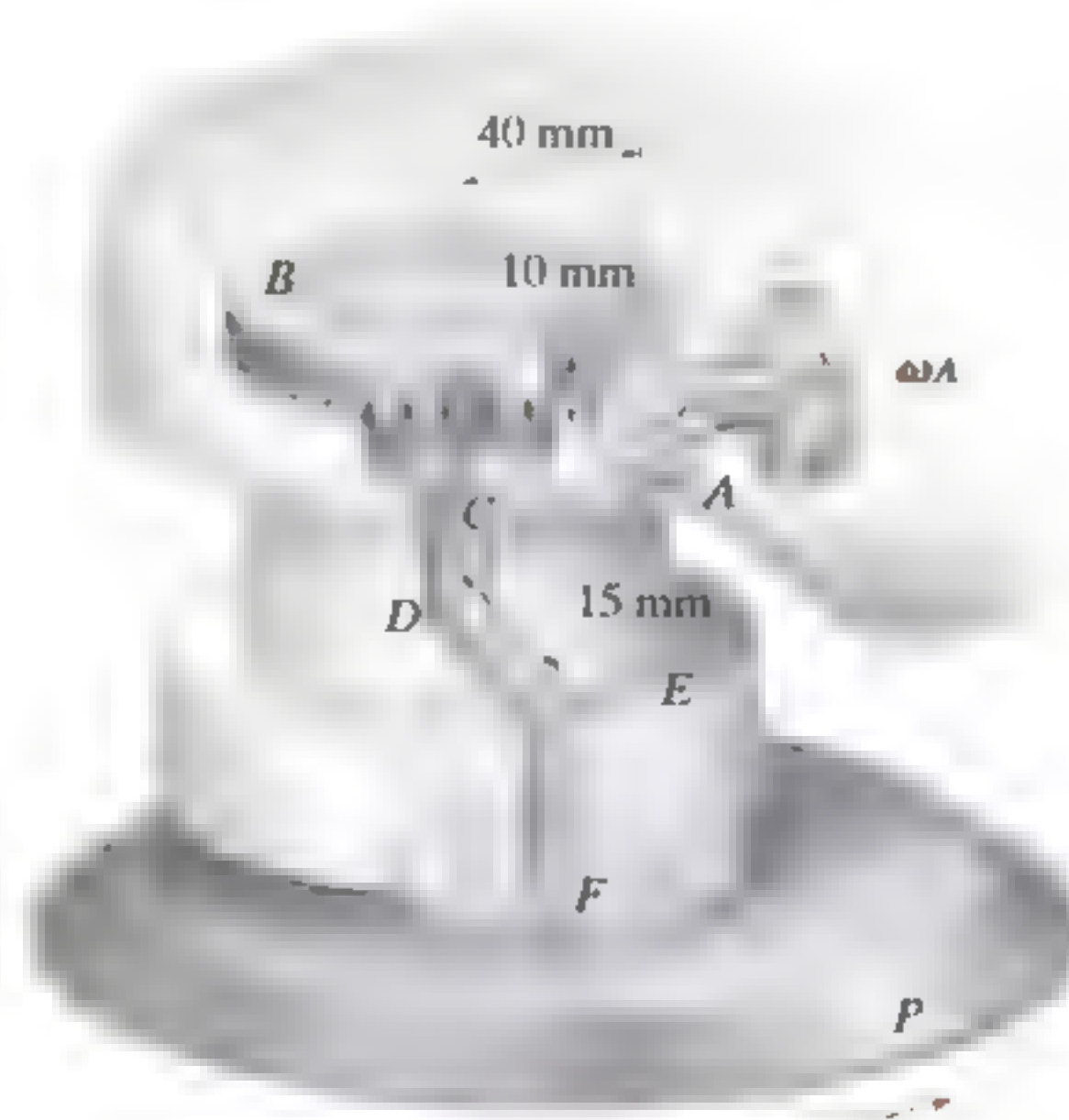
Prob. 16-32

**16-33.** La banda de transmisión se tuerce de modo que la polea  $B$  gira en sentido opuesto al de la rueda de transmisión  $A$ . Si el desplazamiento angular de  $A$  es  $\theta_A = (5t^3 + 10t^2)$  rad, donde  $t$  se da en segundos, determine la velocidad angular y la aceleración angular de  $B$  cuando  $t = 3$  s.



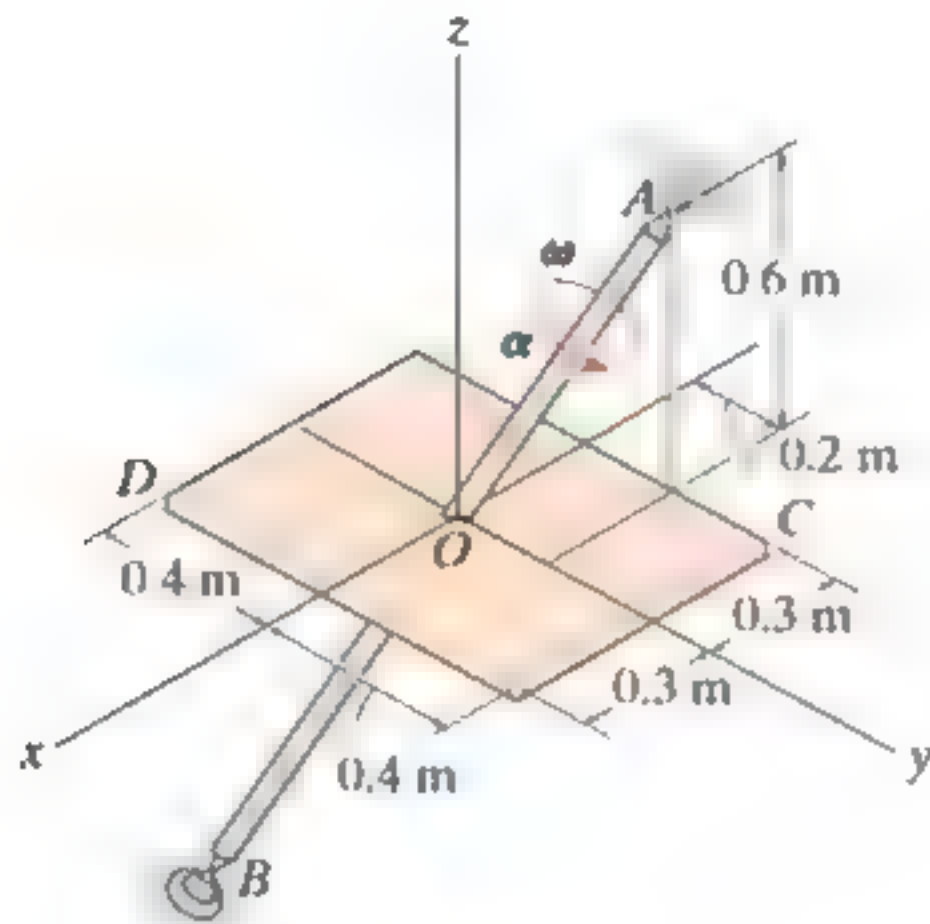
Prob. 16-33

**16-34.** Por un corto tiempo un motor de la lijadora orbital aleatoria acciona el engrane  $A$  con una velocidad angular de  $\omega_A = 40(t^3 + 6t)$  rad/s, donde  $t$  se da en segundos. Este engrane se encuentra conectado al engrane  $B$ , que está conectado fijamente al eje  $CD$ . El extremo de este eje se encuentra conectado al vástago excéntrico  $EF$  y a la almohadilla  $P$ , lo cual provoca que la almohadilla orbite alrededor del eje  $CD$  en un radio de 15 mm. Determine las magnitudes de la velocidad y las componentes tangencial y normal de la aceleración del vástago  $EF$ , cuando  $t = 2$  s después de iniciar desde el reposo.



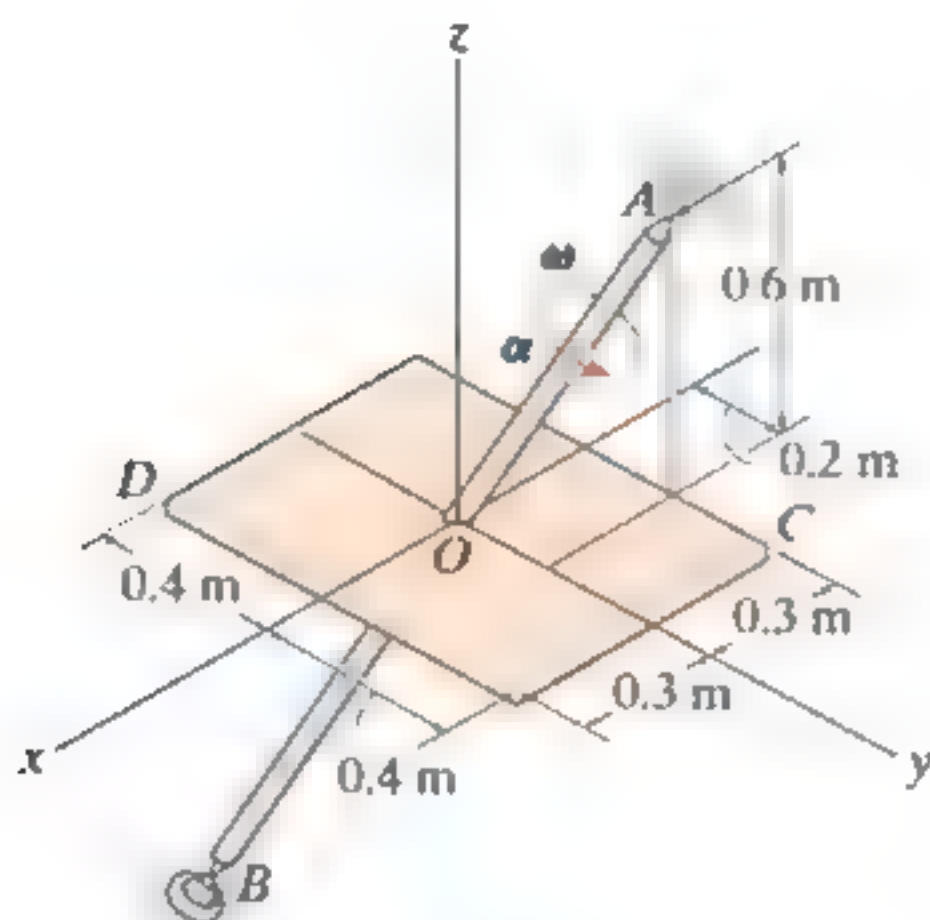
Prob. 16-34

**16-35.** Si la flecha y la placa giran a una velocidad angular constante  $\omega = 14 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad y la aceleración del punto  $C$  localizado en la esquina de la placa en el instante que se indica. Expresé el resultado en forma vectorial cartesiana.



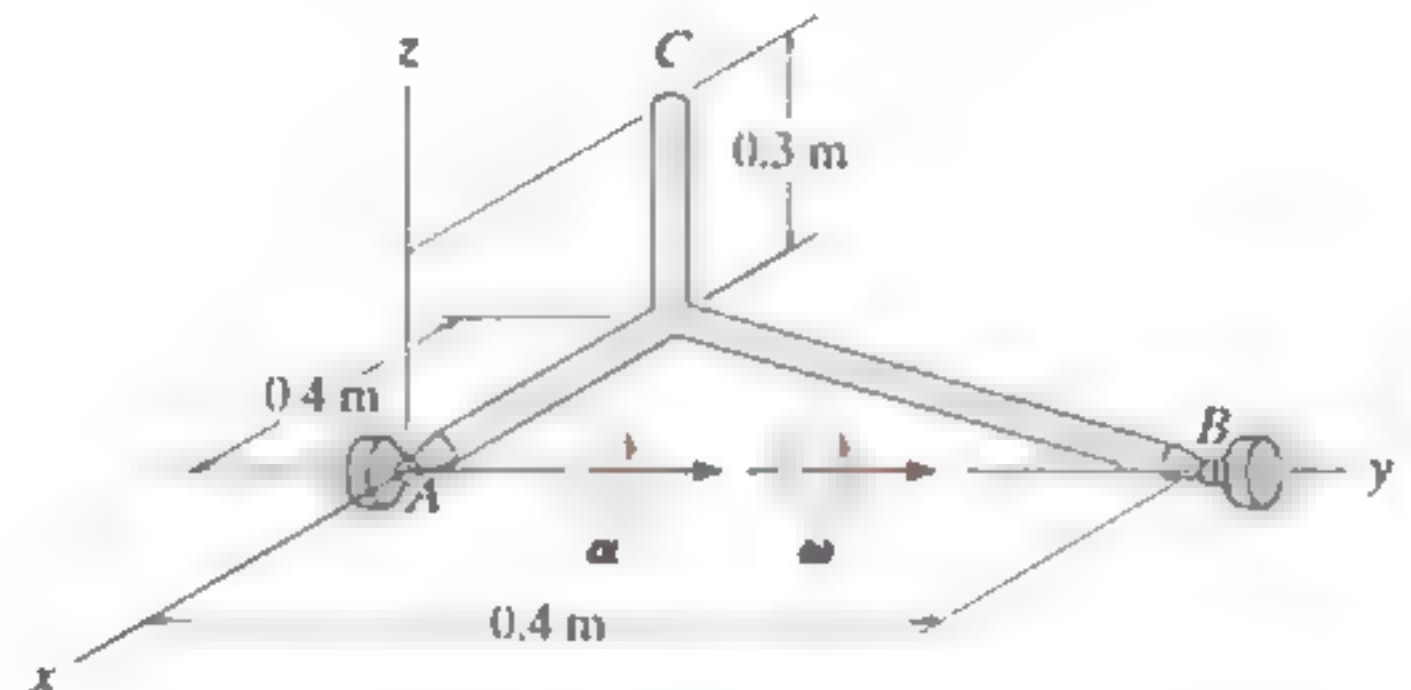
Prob. 16-35

**\*16-36.** En el instante que se muestra, la flecha y la placa giran a una velocidad angular de  $\omega = 14 \text{ rad/s}$  y aceleración angular  $\alpha = 7 \text{ rad/s}^2$ . Determine la velocidad y aceleración del punto  $D$  localizado en la esquina de la placa en este momento. Expresé el resultado en forma vectorial cartesiana.



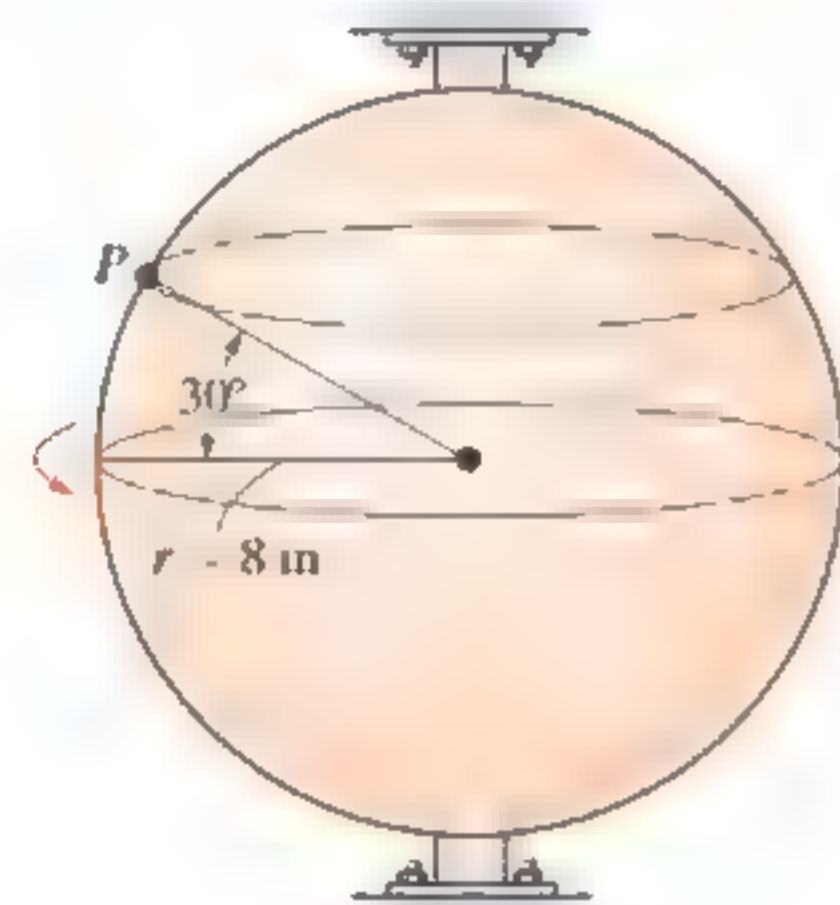
Prob. 16-36

**16-37.** El ensamble de varillas se sostiene mediante articulaciones de rótula en  $A$  y  $B$ . En el instante mostrado, gira alrededor del eje  $y$  y con una velocidad angular  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  y tiene una aceleración angular  $\alpha = 8 \text{ rad/s}^2$ . Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto  $C$  en este instante. Resuelva el problema usando vectores cartesianos y las ecuaciones 16-9 y 16-13.

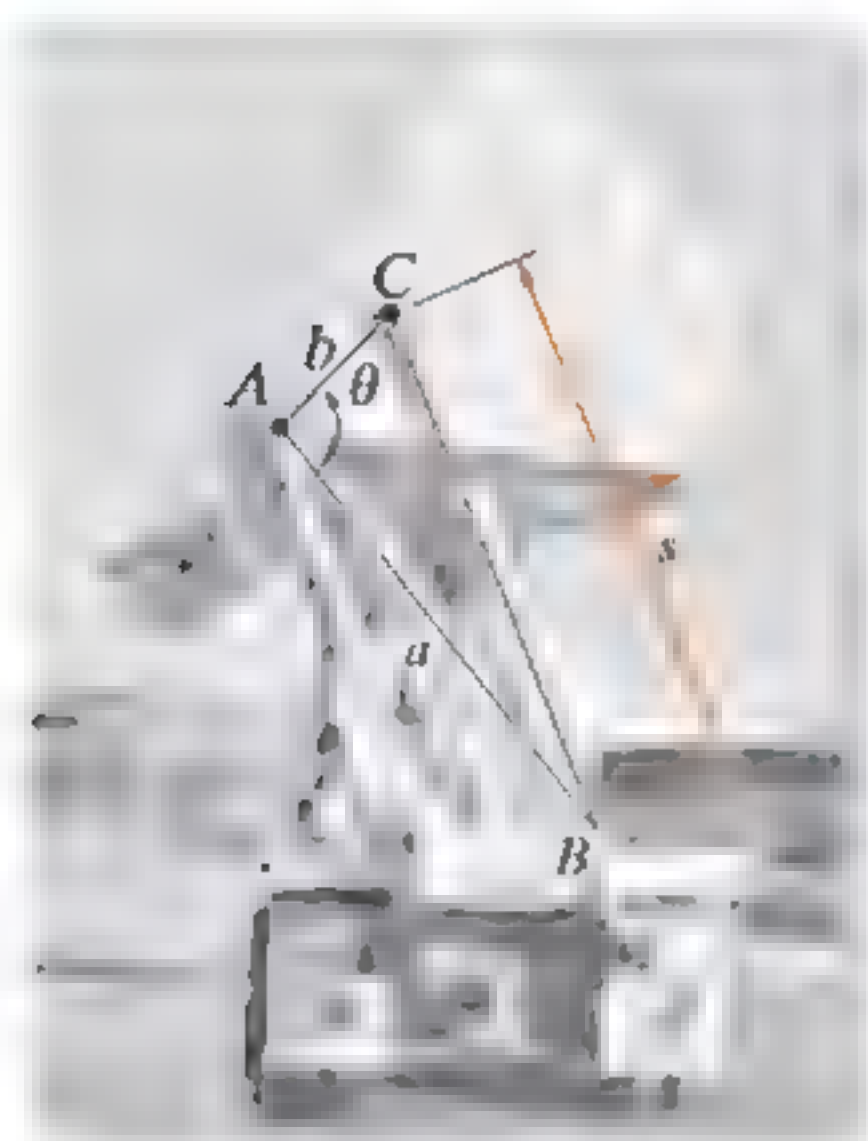


Prob. 16-37

**16-38.** La esfera parte del reposo en  $\theta = 0^\circ$  y gira con una aceleración angular de  $\alpha = (4\theta + 1) \text{ rad/s}^2$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto  $P$  sobre la esfera en el instante  $\theta = 6 \text{ rad}$ .



Prob. 16-38



La caja de volteo del camión gira alrededor de un eje fijo que pasa por el pasador en A, y la hace funcionar la extensión del cilindro hidráulico BC. La posición angular de la caja puede especificarse mediante la coordenada de posición angular  $\theta$  y la posición del punto C de la caja se especifica por medio de la coordenada de posición rectilínea  $s$ . Como  $a$  y  $b$  son longitudes fijas, entonces las dos coordenadas se relacionan por medio de la ley de los cosenos,  $s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$ .

La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación relaciona la rapidez a la cual el cilindro hidráulico se extiende a la velocidad angular de la caja. (© R. C. Hibbeler)

## 16.4 Análisis del movimiento absoluto

Un cuerpo sometido a *movimiento plano general* experimenta una traslación y rotación *simultáneas*. Si el cuerpo se representa como una lámina delgada, ésta se traslada en su plano y gira alrededor de un eje perpendicular a este plano. El movimiento puede especificarse por completo, si se conocen *tanto* la rotación angular de una línea fija en el cuerpo *como* el movimiento de un punto en él. Una forma de relacionar estos movimientos consiste en utilizar una coordenada de posición rectilínea  $s$  para ubicar el punto a lo largo de su trayectoria, y una coordenada de posición angular  $\theta$  para especificar la orientación de la línea. Las dos coordenadas se relacionan entonces por medio de la geometría del problema. Mediante la *aplicación directa* de las ecuaciones diferenciales con respecto al tiempo  $v = ds/dt$ ,  $\alpha = dv/dt$ ,  $\omega = d\theta/dt$  y  $\alpha = d\omega/dt$ , entonces pueden relacionarse el *movimiento* del punto y el *movimiento angular* de la línea. Este procedimiento es semejante al que se utilizó para resolver problemas de movimiento dependiente que implican poleas, sección 12.9. En algunos casos, este mismo procedimiento puede utilizarse para relacionar el movimiento de un cuerpo —que experimenta ya sea rotación alrededor de un eje fijo o traslación— con el de un cuerpo conectado que experimenta movimiento plano general.

### Procedimiento para el análisis

La velocidad y la aceleración de un punto  $P$  que experimenta movimiento rectilíneo pueden relacionarse con la velocidad y la aceleración angulares de una línea contenida en un cuerpo, si se aplica el siguiente procedimiento.

#### Ecuación de coordenadas de posición

- Localice un punto  $P$  en el cuerpo por medio de una coordenada de posición  $s$ , la cual se mide con respecto a un *origen fijo* y *está dirigida a lo largo de la trayectoria de movimiento en línea recta* del punto  $P$ .
- Mida con respecto a una línea de referencia fija la posición angular  $\theta$  de una línea situada en el cuerpo.
- Con las dimensiones del cuerpo, relacione  $s$  con  $\theta$ ,  $s = f(\theta)$ , por medio de geometría y/o trigonometría.

#### Derivadas con respecto al tiempo

- Considere la primera derivada de  $s = f(\theta)$  con respecto al tiempo para obtener una relación entre  $v$  y  $\omega$ .
- Considere la segunda derivada con respecto al tiempo para obtener una relación entre  $a$  y  $\alpha$ .
- En cada caso, debe utilizarse la regla de la cadena del cálculo cuando se consideren las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación de coordenadas de posición. Vea el apéndice C.

## EJEMPLO

El extremo de la varilla  $R$  en la figura 16-8 se mantiene en contacto con la leva por medio de un resorte. Si la leva gira alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$  con una aceleración angular  $\alpha$  y una velocidad angular  $\omega$ , determine la velocidad y la aceleración de la varilla, cuando la leva está en una posición arbitraria  $\theta$ .

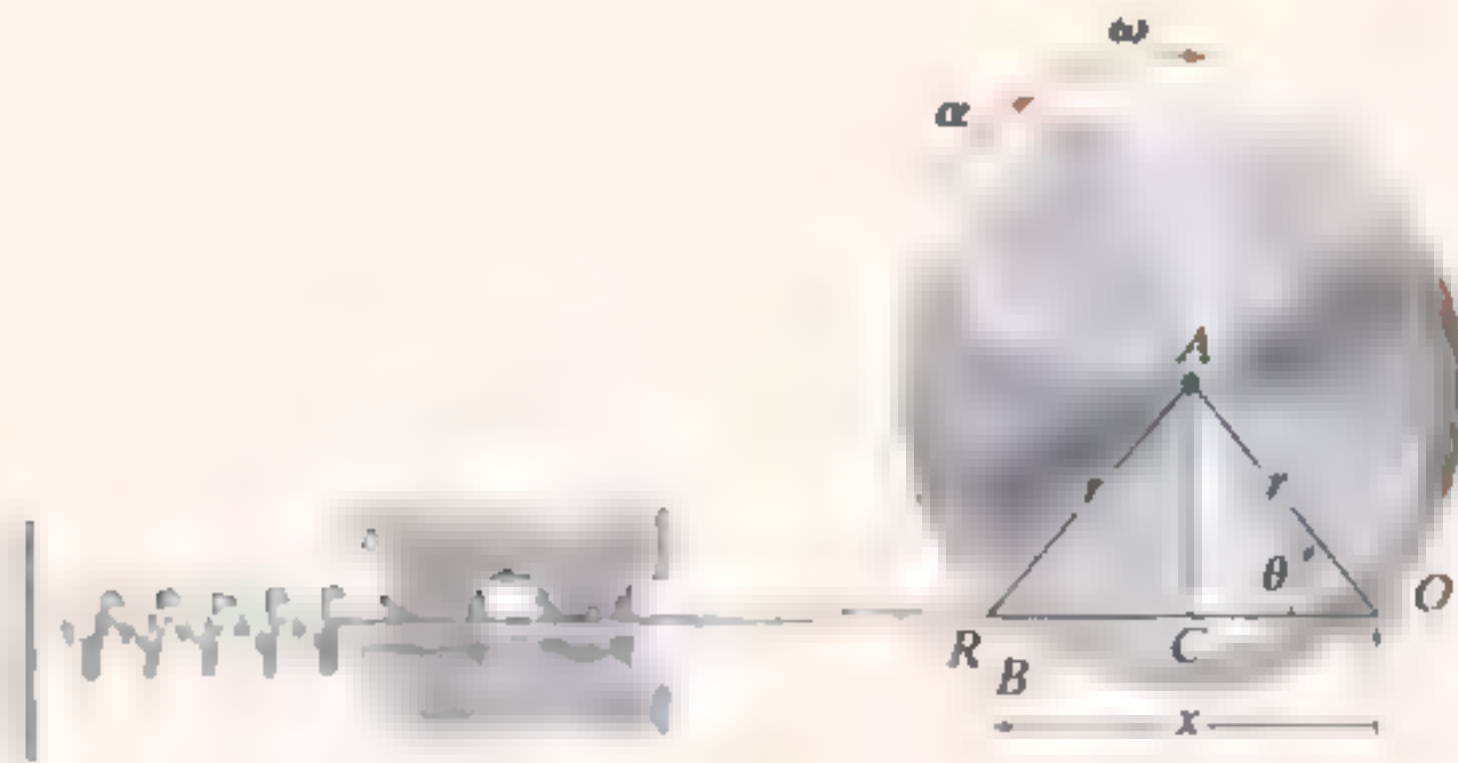


fig. 16-8

## SOLUCIÓN

Se eligen las coordenadas  $\theta$  y  $x$  para relacionar el movimiento de rotación del segmento de línea  $OA$  en la leva con la traslación rectilínea de la varilla. Estas coordenadas se miden con respecto al punto fijo  $O$  y pueden relacionarse entre sí por medio de trigonometría. Como  $OC = CB = r \cos \theta$  (fig. 16-8), entonces,

$$x = 2r \cos \theta$$

Si utilizamos la regla de cálculo de la cadena, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -2r(\sin \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega \sin \theta$$

Resp.

$$\frac{dv}{dt} = -2r \left( \frac{d\omega}{dt} \right) \sin \theta - 2r\omega (\cos \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = -2r(\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta)$$

Resp.

**NOTA:** Los signos negativos indican que  $v$  y  $a$  se oponen a la dirección positiva de  $x$ . Esto parece razonable cuando visualice el movimiento.

## EJEMPLO



En un instante dado, el cilindro de radio  $r$ , que se muestra en la figura 16-9, tiene una velocidad angular  $\omega$  y una aceleración angular  $\alpha$ . Determine la velocidad y la aceleración de su centro  $G$ , si el cilindro rueda sin deslizarse.

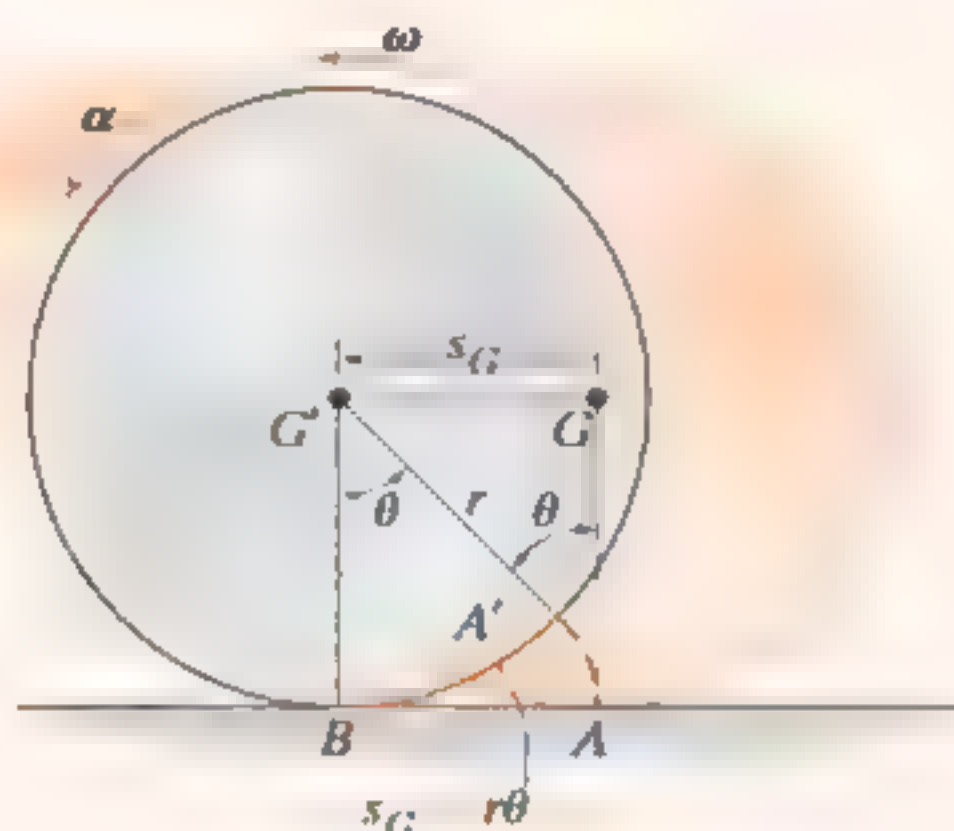


Fig. 16-9

## SOLUCIÓN

**Ecuación de coordenadas de posición.** El cilindro experimenta movimiento plano general, pues se traslada y gira al mismo tiempo. Por inspección, el punto  $G$  se mueve en *línea recta* hacia la izquierda, de  $G$  a  $G'$ , a medida que el cilindro rueda (fig. 16-9). Por consiguiente, la coordenada de posición *horizontal*  $s_G$  especificará su nueva posición  $G'$ , medida de  $G$  a  $G'$ . Asimismo, a medida que el cilindro rueda (sin deslizarse), la longitud del arco  $A'B$  en su borde, el cual está en contacto con el suelo de  $A$  a  $B$ , equivale a  $s_G$ . En consecuencia, el movimiento requiere que la línea radial  $GA$  gire  $\theta$  a la posición  $G'A'$ . Como el arco  $A'B = r\theta$ , entonces  $G$  recorre una distancia

$$s_G = r\theta$$

**Derivadas con respecto al tiempo.** Si se consideran derivadas con respecto al tiempo de esta ecuación y se tiene en cuenta que  $r$  es constante,  $\omega = d\theta/dt$  y  $\alpha = d\omega/dt$ , se obtienen las relaciones necesarias:

$$s_G = r\theta$$

$$v_G = r\omega$$

Resp.

$$a_G = r\alpha$$

Resp.

**NOTA:** Recuerde que estas relaciones son válidas sólo si el cilindro (disco, rueda, bola, etcétera) rueda(n) *sin* deslizarse.

## EJEMPLO

La ventana de la figura 16-10 se abre por medio de un cilindro hidráulico  $AB$ . Si éste se extiende a una razón constante de  $0.5 \text{ m/s}$ , determine la velocidad y la aceleración angulares de la ventana en el instante  $\theta = 30^\circ$ .

## SOLUCIÓN

**Ecuación de coordenadas de posición.** El movimiento angular de la ventana se obtiene mediante la coordenada  $\theta$ , mientras que la extensión o el movimiento *a lo largo del cilindro hidráulico* se define por medio de una coordenada  $s$ , la cual mide su longitud desde el punto fijo  $A$  hasta el punto móvil  $B$ . Estas coordenadas se relacionan con la ley de los cosenos, es decir,

$$\begin{aligned} s^2 &= (2 \text{ m})^2 + (1 \text{ m})^2 - 2(2 \text{ m})(1 \text{ m}) \cos \theta \\ s^2 &= 5 - 4 \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Cuando  $\theta = 30^\circ$ ,

$$s = 1.239 \text{ m}$$

Si consideramos las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 1, tenemos

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 0 - 4(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \\ s(v_s) &= 2(\sin \theta)\omega \end{aligned} \quad (2)$$

Como  $v_s = 0.5 \text{ m/s}$ , entonces cuando  $\theta = 30^\circ$ ,

$$\begin{aligned} (1.239 \text{ m})(0.5 \text{ m/s}) &= 2 \sin 30^\circ \omega \\ \omega &= 0.6197 \text{ rad/s} = 0.620 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2 resulta

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} v_s + s \frac{dv_s}{dt} &= 2(\cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \omega + 2(\sin \theta) \frac{d\omega}{dt} \\ v_s^2 + s a_s &= 2(\cos \theta) \omega^2 + 2(\sin \theta) \alpha \end{aligned}$$

Ya que  $a_s = dv_s/dt = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} (0.5 \text{ m/s})^2 + 0 &= 2 \cos 30^\circ (0.6197 \text{ rad/s})^2 + 2 \sin 30^\circ \alpha \\ \alpha &= -0.415 \text{ rad/s}^2 \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Como el resultado es negativo, indica que la ventana tiene una desaceleración angular.

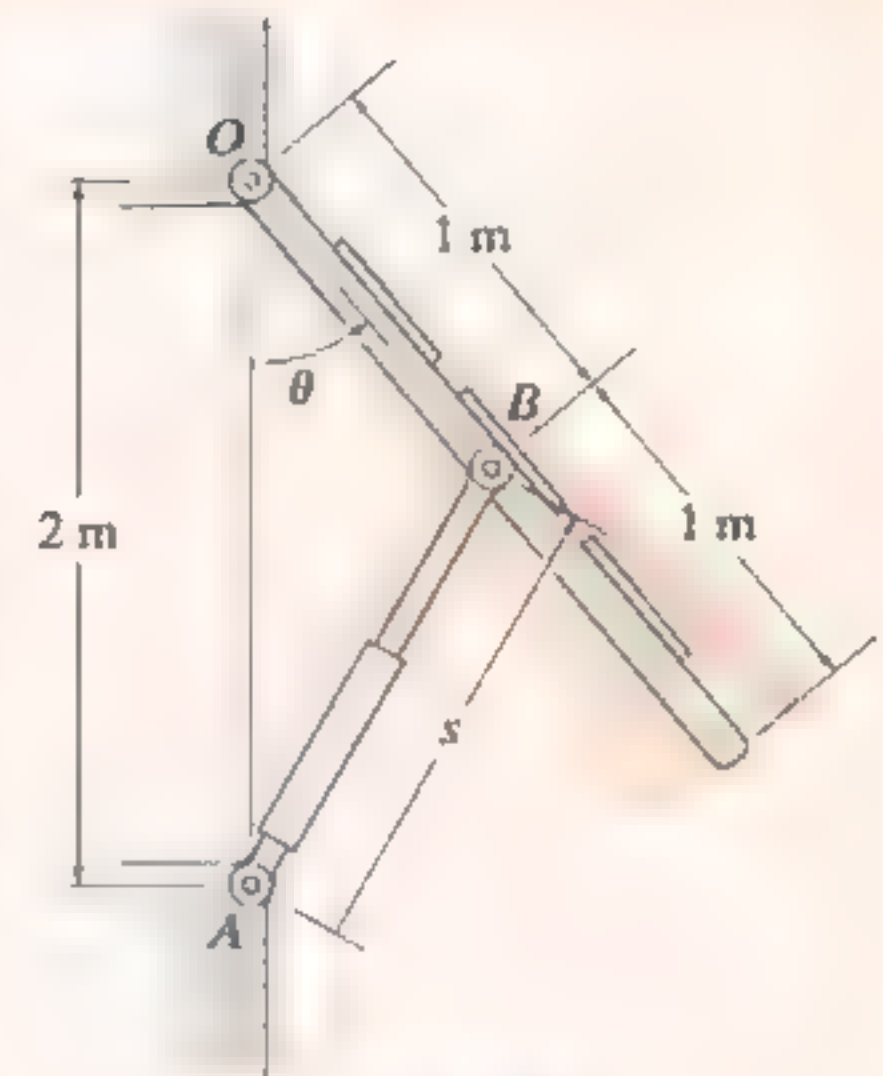
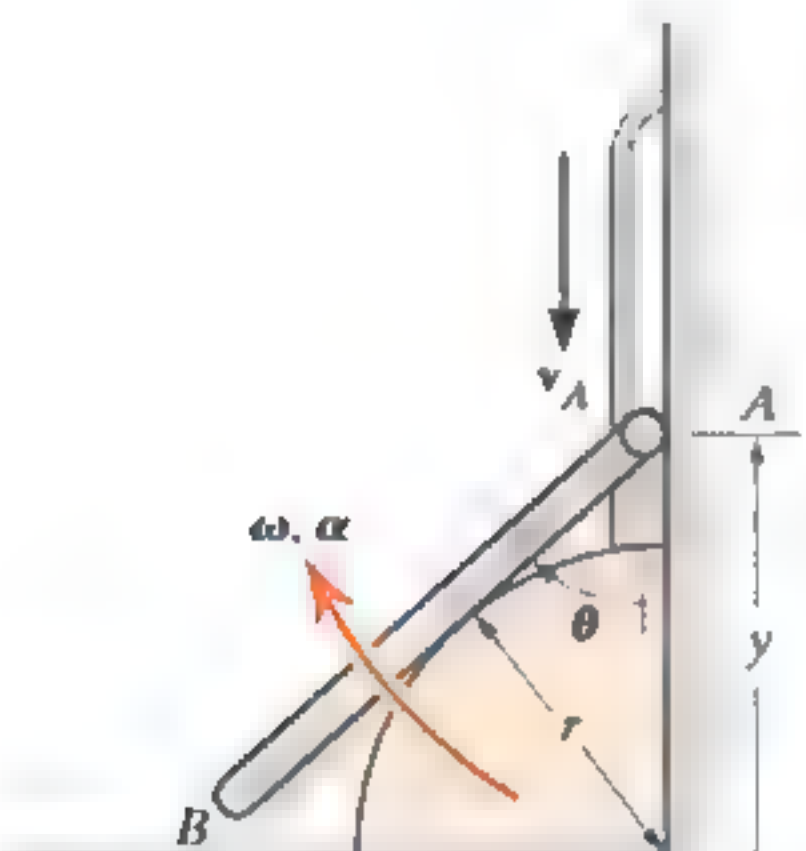


Fig. 16-10

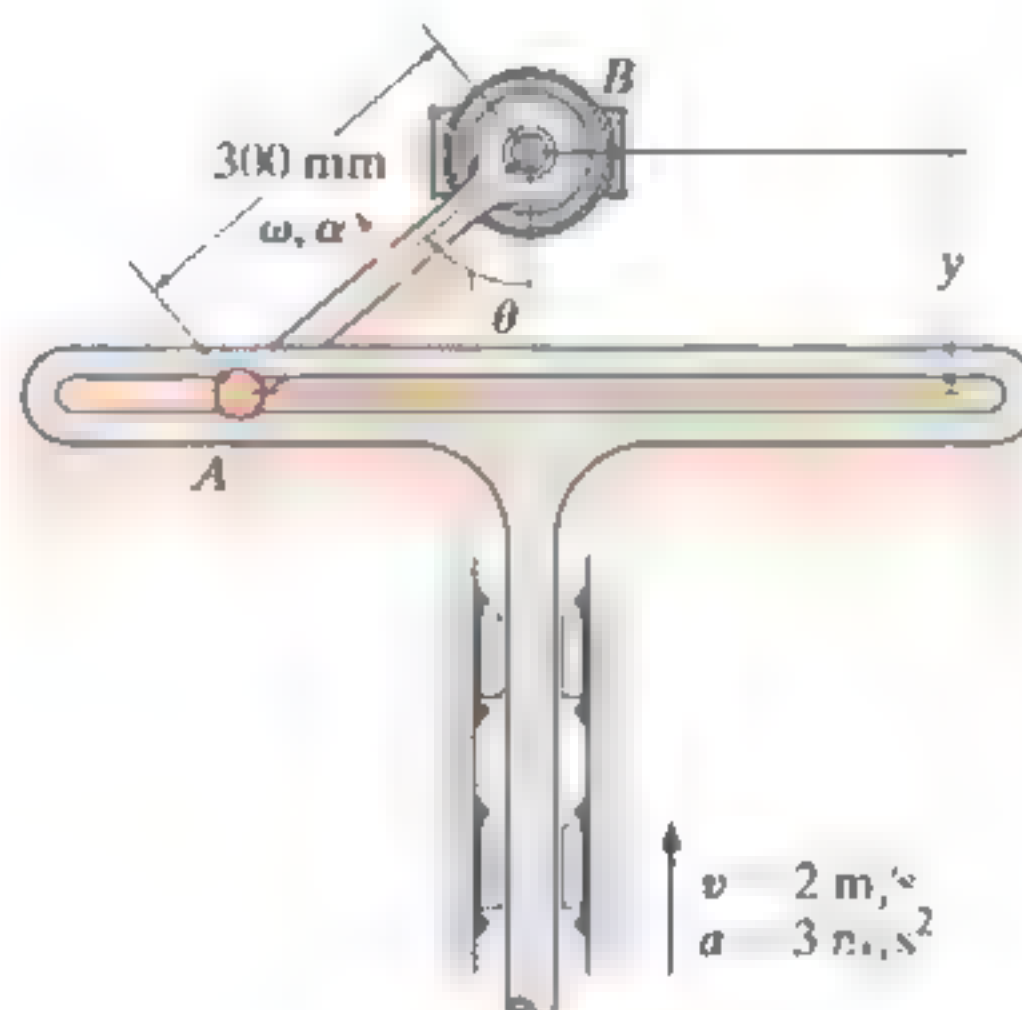
## PROBLEMAS

16-39. El extremo  $A$  de la barra se mueve hacia abajo a lo largo de la guía ranurada con una velocidad constante  $v_A$ . Determine la velocidad angular  $\omega$  y la aceleración angular  $\alpha$  de la barra en función de su posición  $y$ .



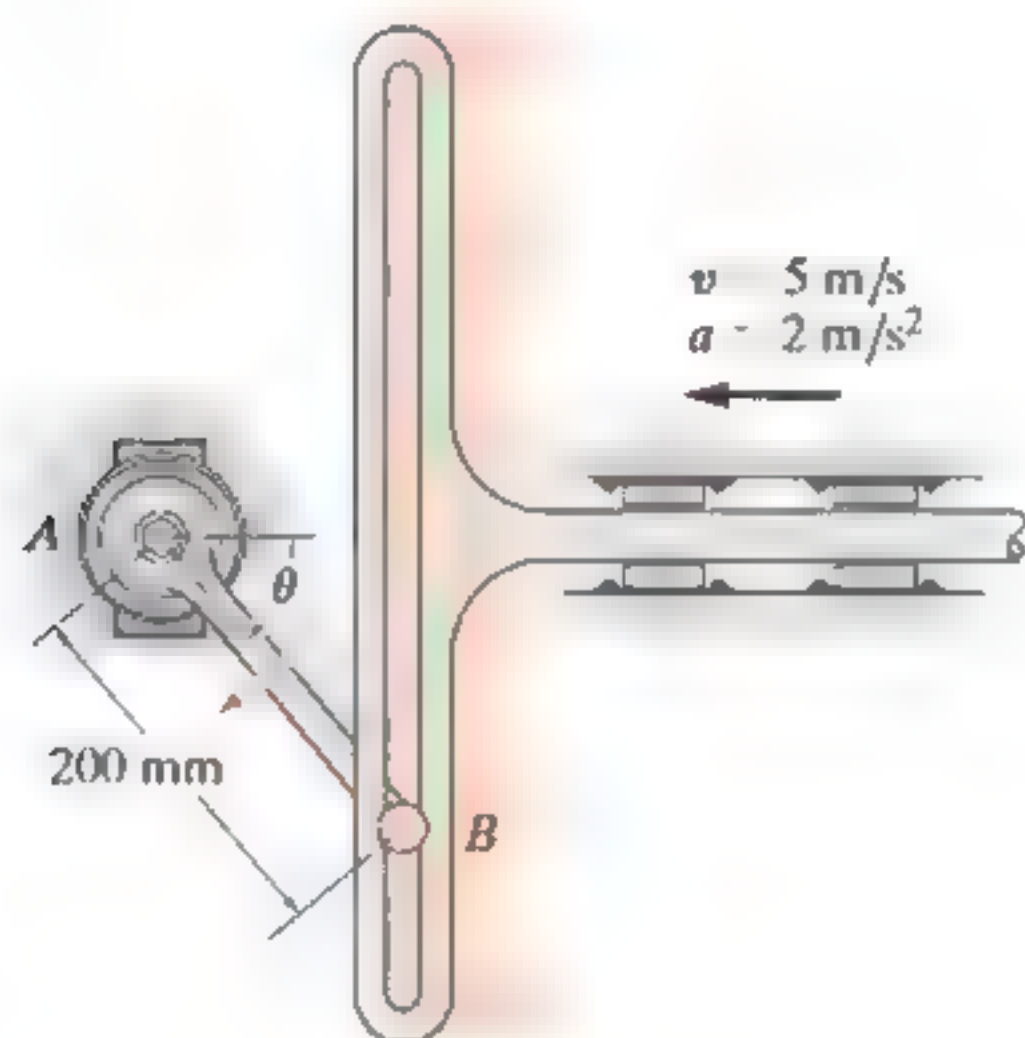
Prob. 16-39

16-41. En el instante  $\theta = 50^\circ$ , la guía ranurada se mueve hacia arriba con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  y una velocidad de  $2 \text{ m/s}$ . Determine la aceleración angular y la velocidad angular del eslabón  $AB$  en este instante. *Nota:* El movimiento ascendente de la guía es en la dirección y negativa.



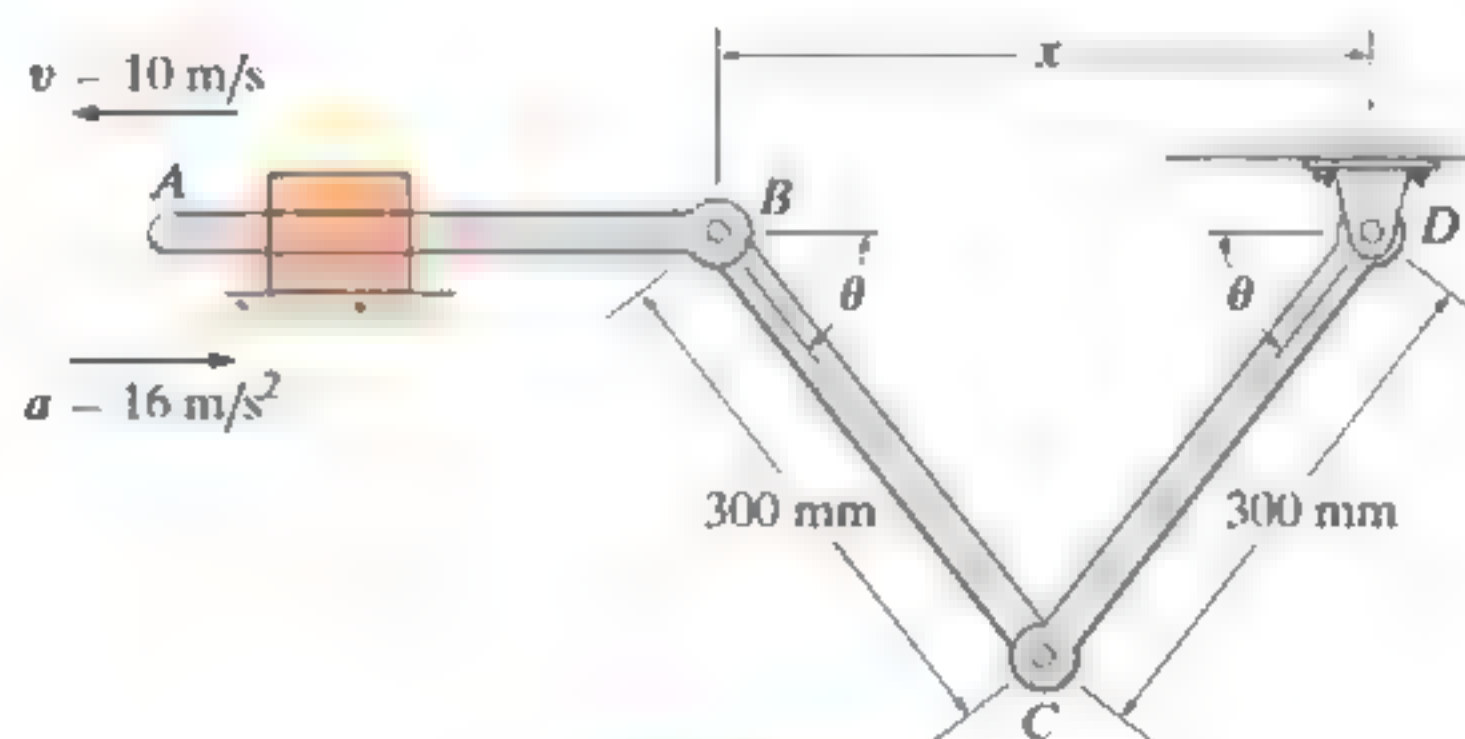
Prob. 16-41

\*16-40. En el instante  $\theta = 60^\circ$ , la varilla guía ranurada se mueve hacia la izquierda con una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  y una velocidad de  $5 \text{ m/s}$ . Determine la aceleración y la velocidad angulares del eslabón  $AB$  en este instante.



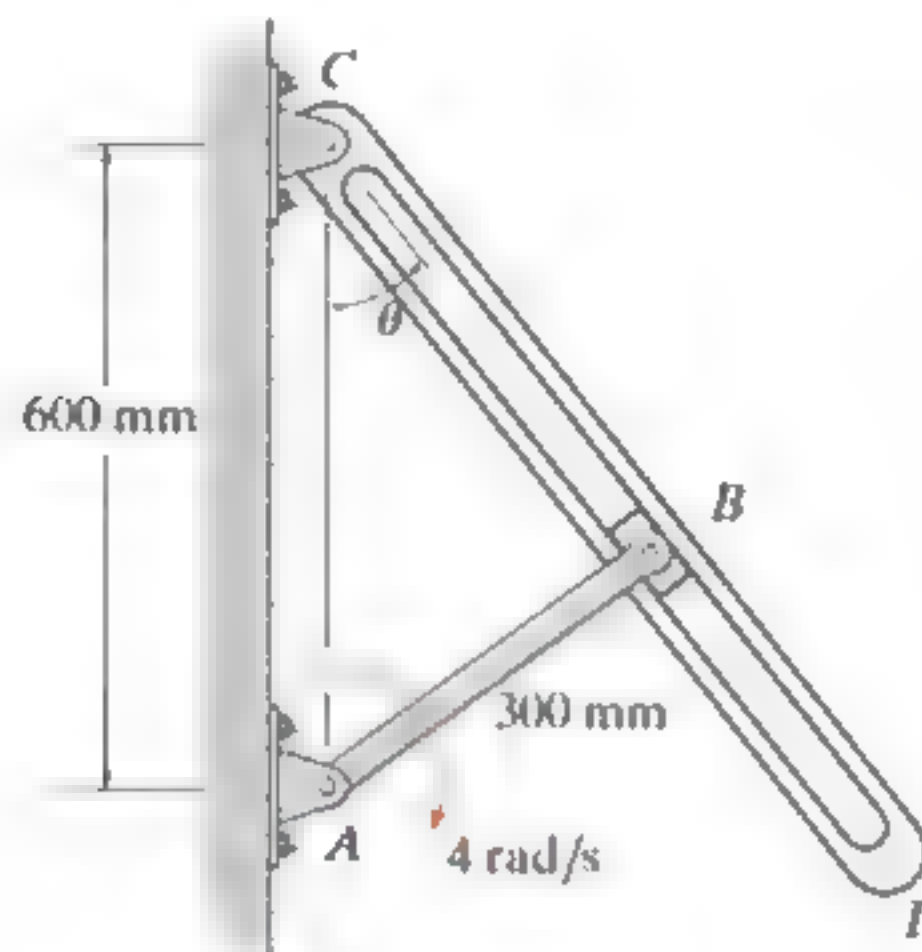
Prob. 16-40

16-42. En el instante mostrado,  $\theta = 60^\circ$  y la varilla  $AB$  se somete a una desaceleración de  $16 \text{ m/s}^2$  cuando la velocidad es de  $10 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón  $CD$  en este instante.



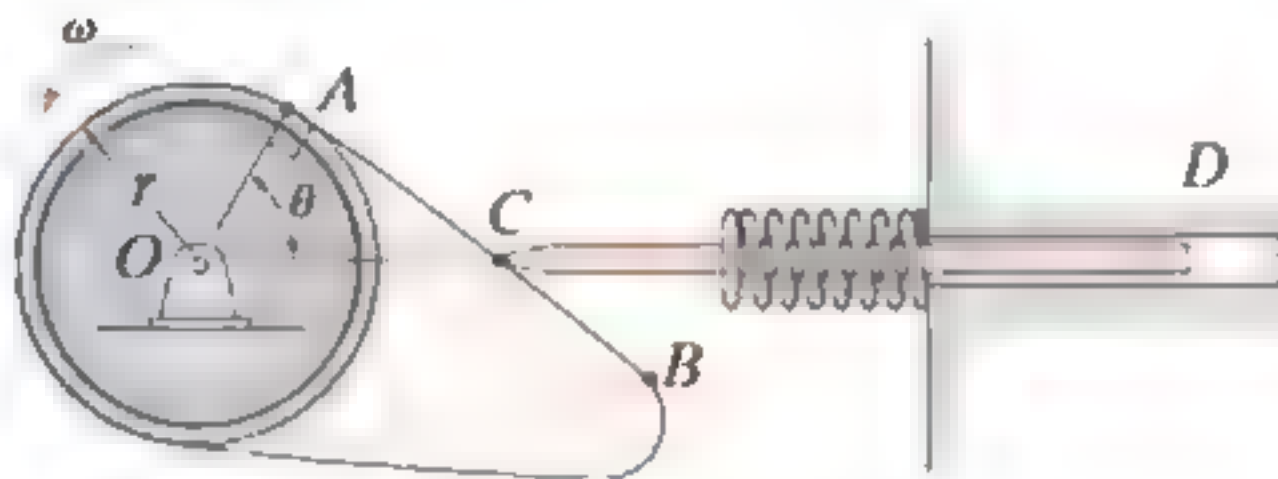
Prob. 16-42

**16-43.** La manivela  $AB$  está girando con una velocidad angular constante de  $4 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad angular de la biela  $CD$  en el instante  $\theta = 30^\circ$ .



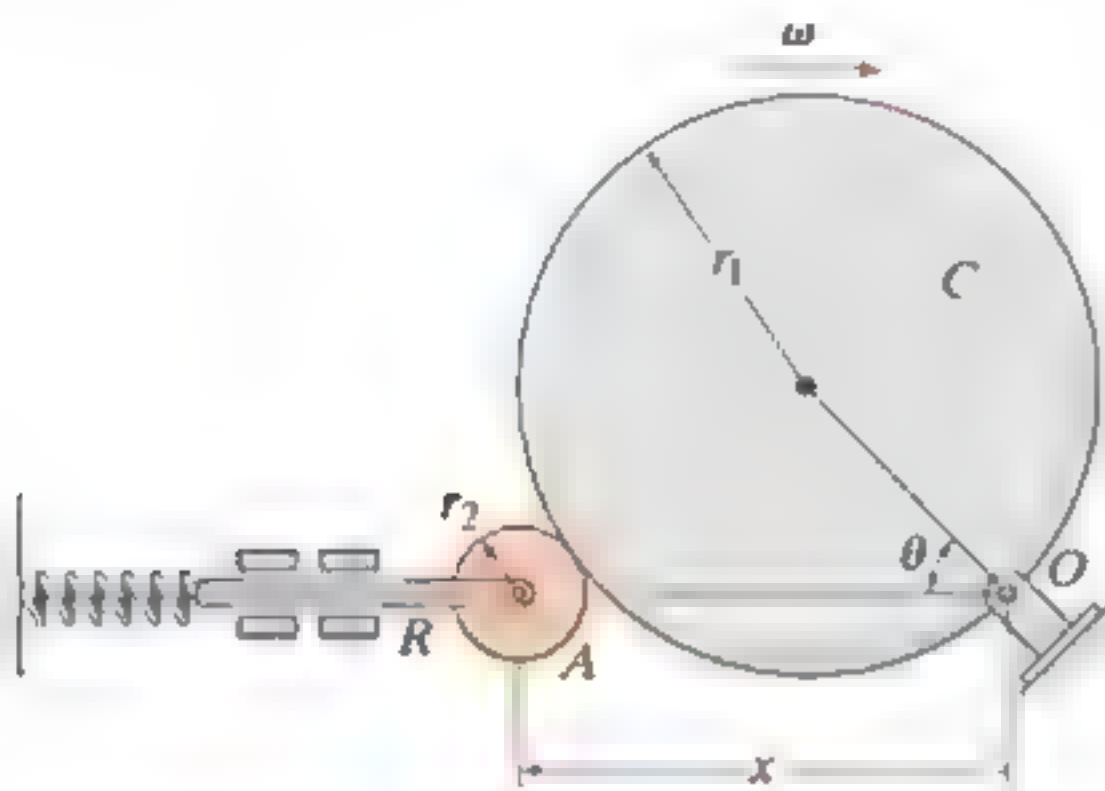
Prob. 16-43

**\*16-44.** Determine la velocidad y la aceleración de la varilla seguidora  $CD$  como una función de  $\theta$  cuando el contacto entre la leva y el seguidor está a lo largo de la región recta  $AB$  sobre la cara de la leva. La leva gira con una velocidad angular constante  $\omega$  en sentido antihorario.



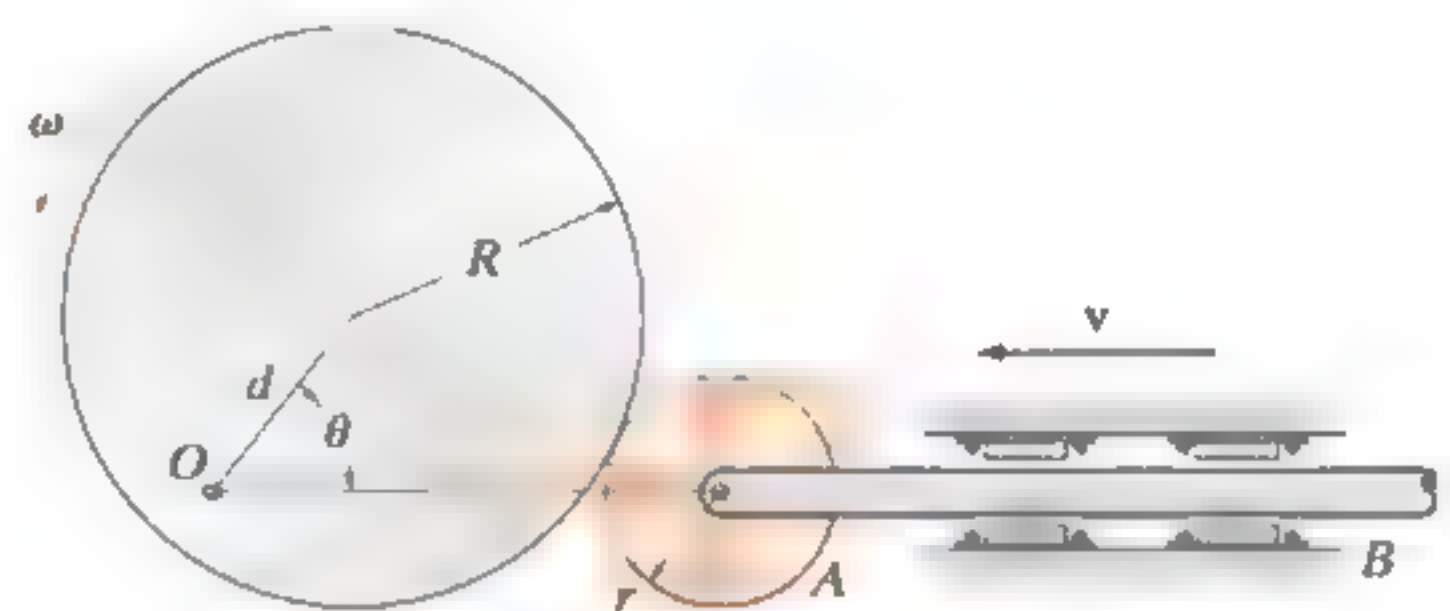
Prob. 16-44

**16-45.** Determine la velocidad de la varilla  $R$  para cualquier ángulo  $\theta$  de la leva  $C$ , si la leva gira con una velocidad angular constante  $\omega$ . La conexión articulada en  $O$  no causa interferencia con el movimiento de  $A$  sobre  $C$ .



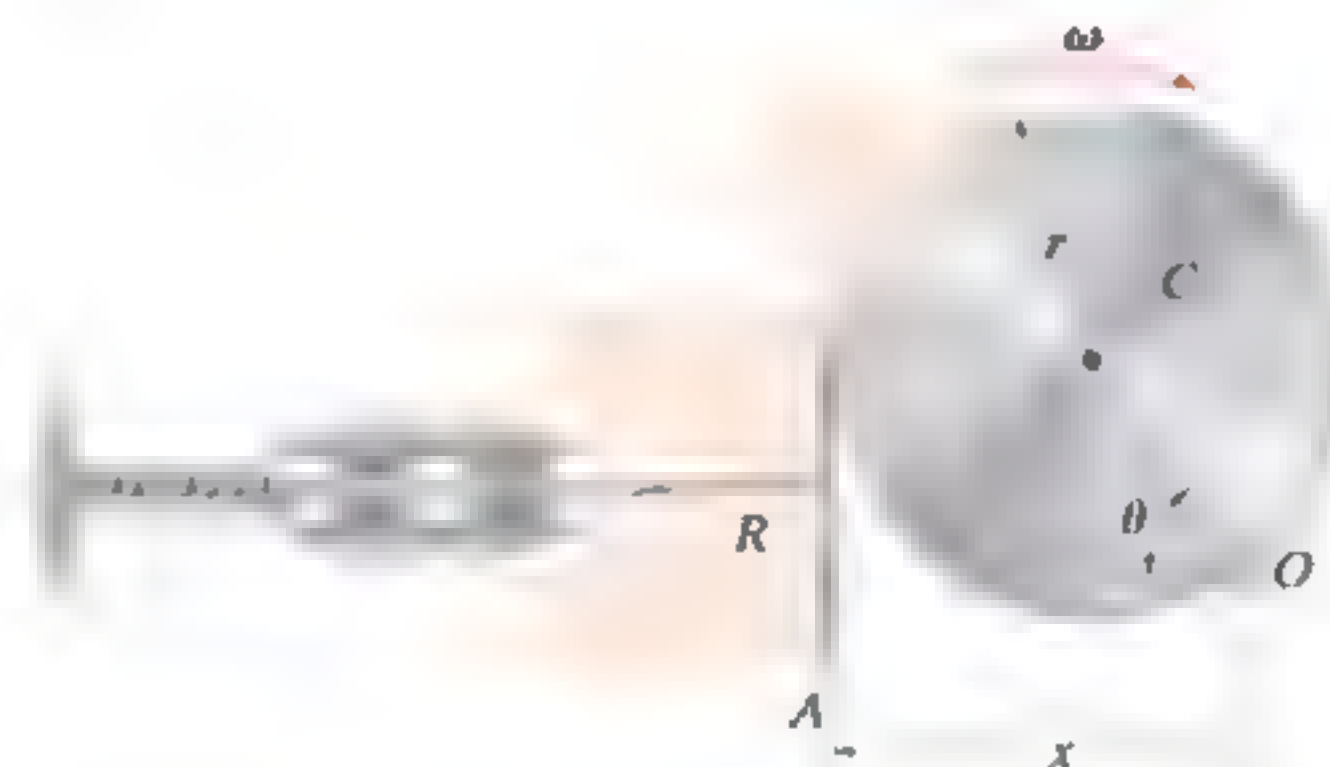
Prob. 16-45

**16-46.** La leva circular gira alrededor del punto fijo  $O$  con una velocidad angular constante  $\omega$ . Determine la velocidad  $v$  de la varilla seguidora  $AB$  en función de  $\theta$ .



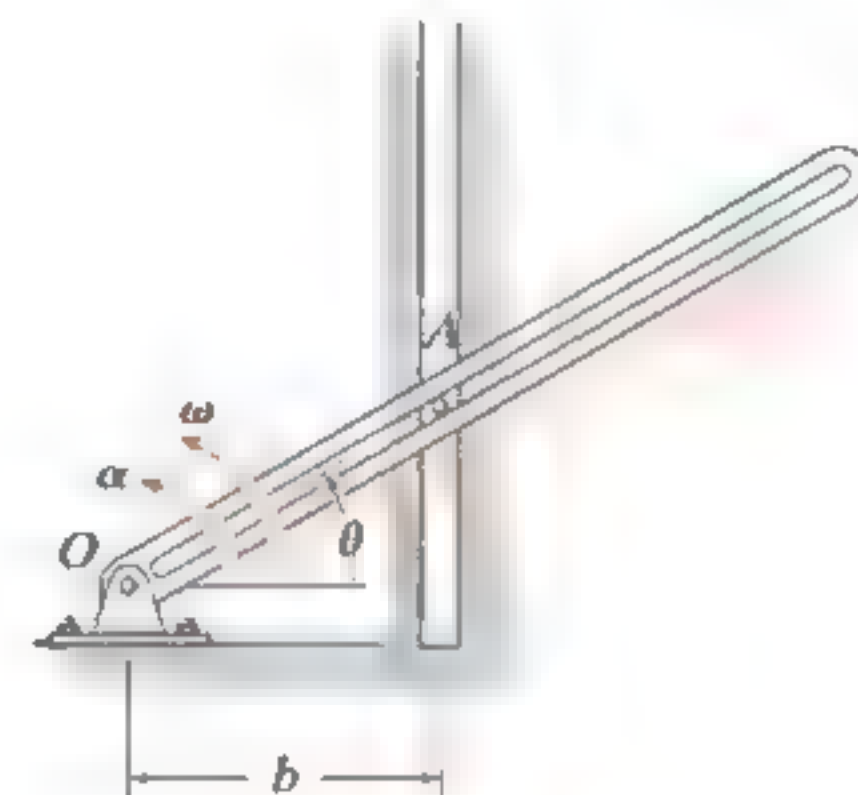
Prob. 16-46

**16-47.** Determine la velocidad de la varilla  $R$  para cualquier ángulo  $\theta$  de la leva  $C$ , mientras ésta gira con una velocidad angular constante  $\omega$ . La conexión articulada en  $O$  no causa interferencia con el movimiento de la placa  $A$  sobre  $C$ .



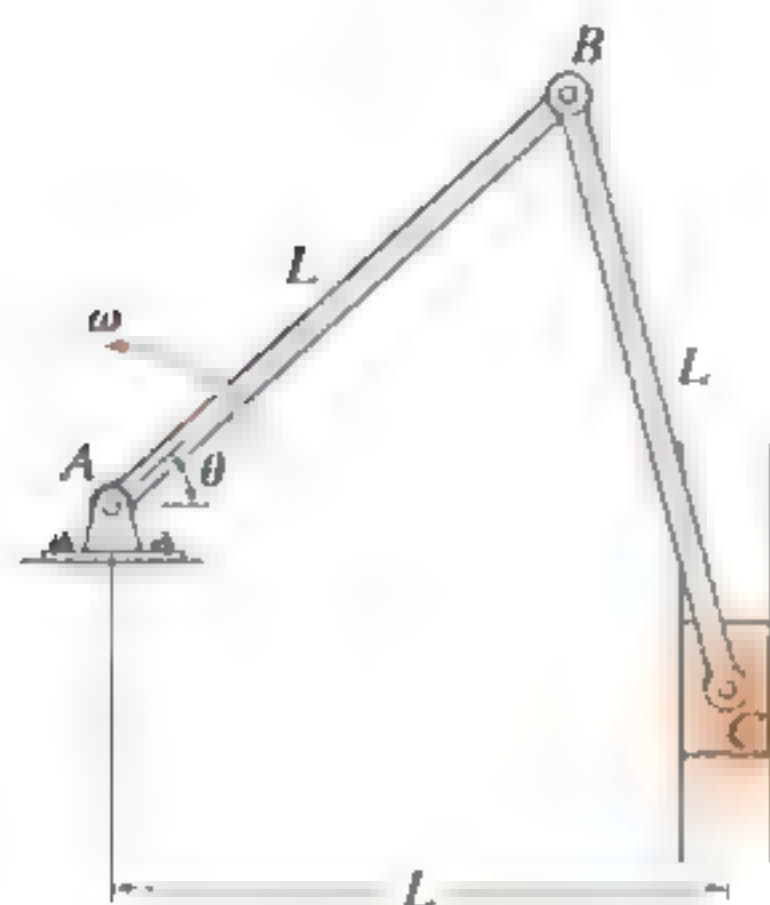
Prob. 16-47

**\*16-48.** Determine la velocidad y la aceleración de la clavija  $A$  que está confinada entre la guía vertical y la varilla ranurada giratoria.



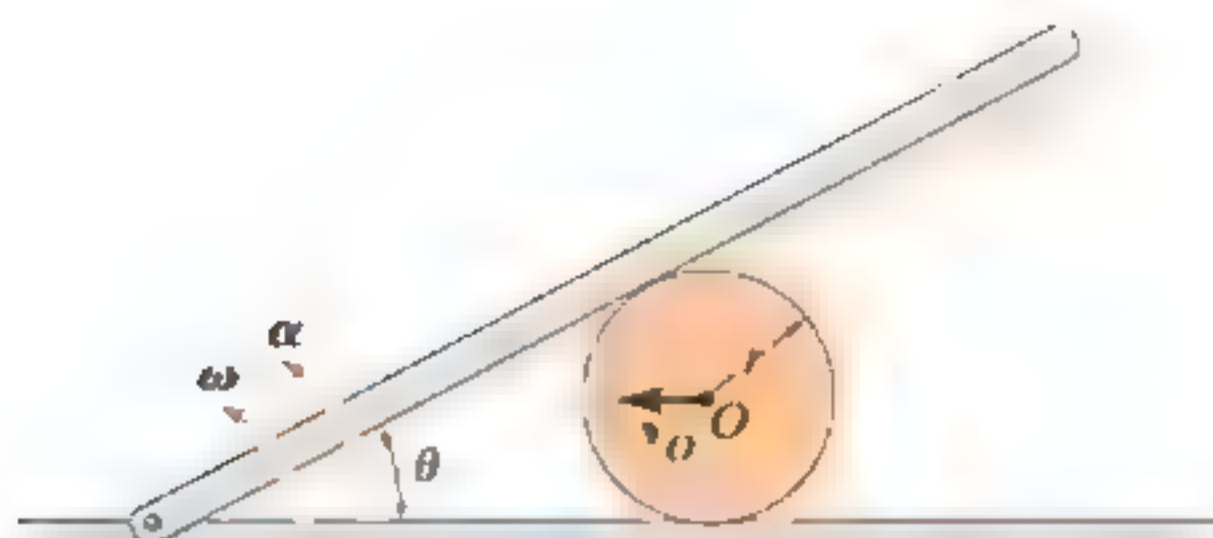
Prob. 16-48

**16-49.** La barra  $AB$  gira uniformemente alrededor del pasador fijo  $A$  con una velocidad angular constante  $\omega$ . Determine la velocidad y la aceleración del bloque  $C$ , en el instante  $\theta = 60^\circ$ .



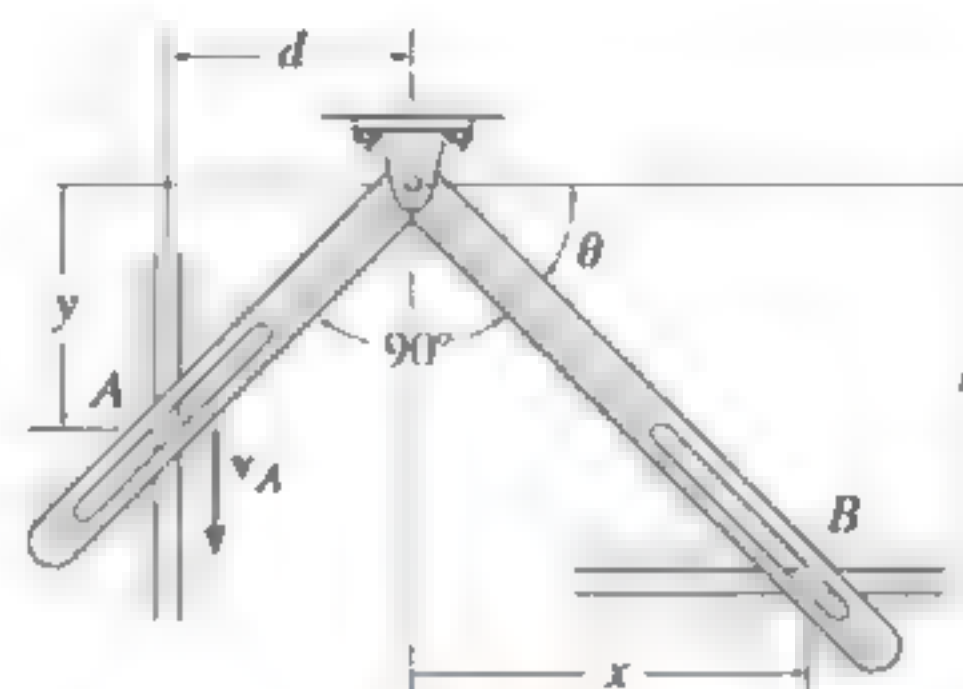
Prob. 16-49

**16-50.** El centro del cilindro se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante  $v_0$ . Determine la velocidad angular  $\omega$  y la aceleración angular  $\alpha$  de la barra. Desprecie el espesor de la barra.



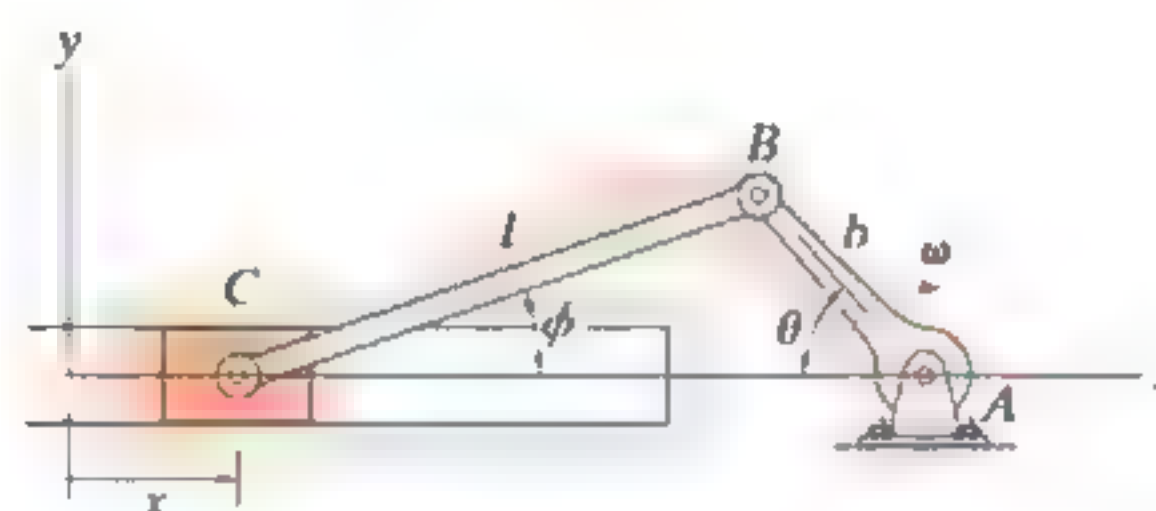
Prob. 16-50

**16-51.** Los pasadores en  $A$  y  $B$  están limitados a moverse en las pistas vertical y horizontal. Si el brazo ranurado causa que  $A$  se mueva hacia abajo a  $v_A$ , determine la velocidad de  $B$  en el instante mostrado.



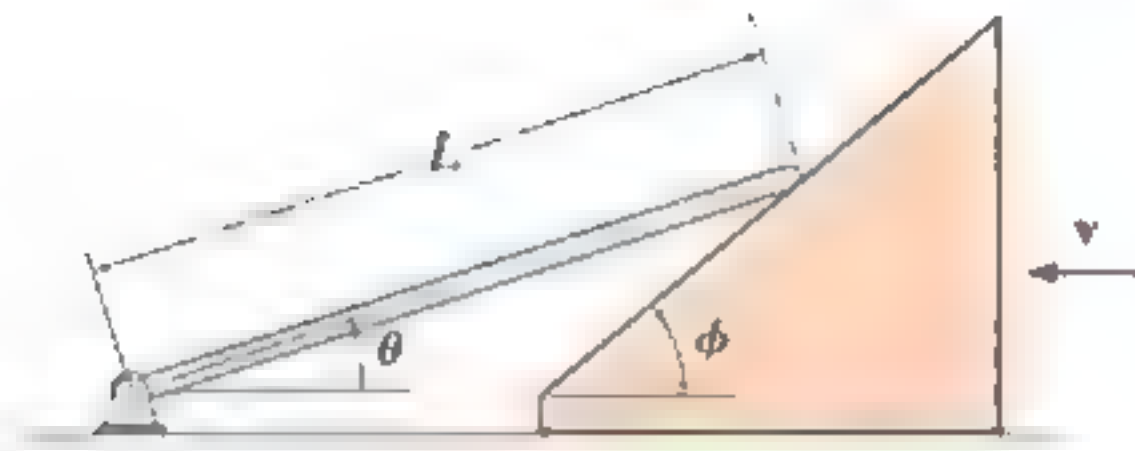
Prob. 16-51

**16-52.** La manivela  $AB$  tiene una velocidad angular constante  $\omega$ . Determine la velocidad y la aceleración del deslizador en  $C$  en función de  $\theta$ . *Sugerencia:* Utilice la coordenada  $x$  para expresar el movimiento de  $C$  y la coordenada  $\phi$  para  $CB$ .  $x = 0$  cuando  $\phi = 0^\circ$ .



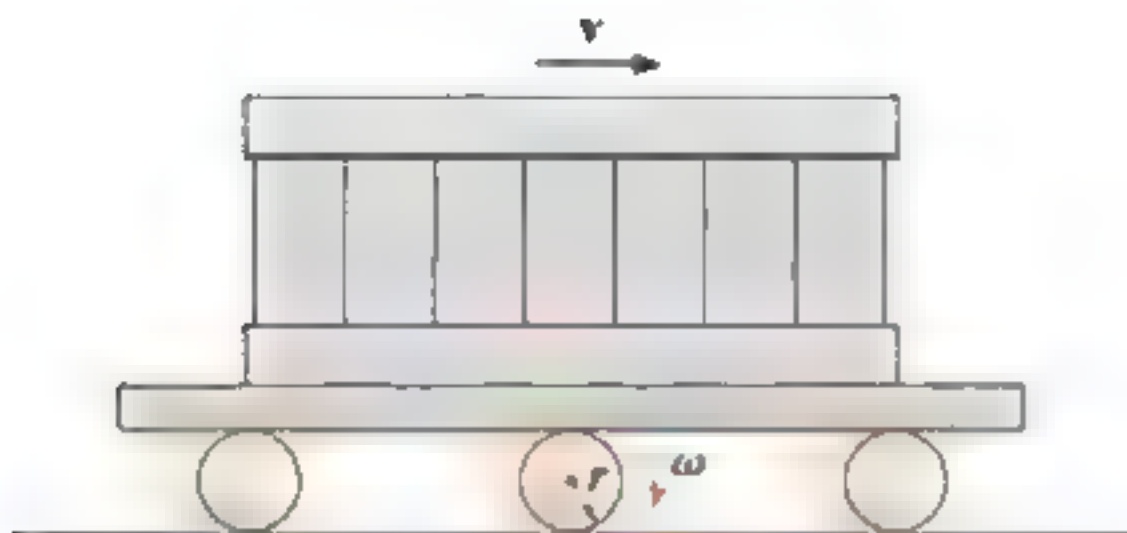
Prob. 16-52

**16-53.** Si la cuña se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante  $v$ , determine la velocidad angular de la varilla en función de  $\theta$ .



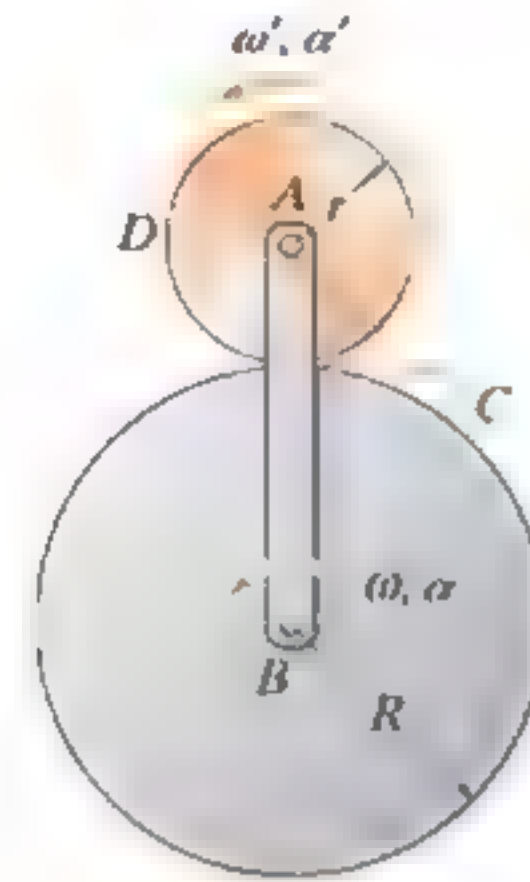
Prob. 16-53

**16-54.** La caja se transporta sobre una plataforma que se apoya sobre rodillos, cada uno de los cuales tiene un radio  $r$ . Si los rodillos no se deslizan, determine su velocidad angular cuando la plataforma se mueve hacia adelante con una velocidad  $v$ .



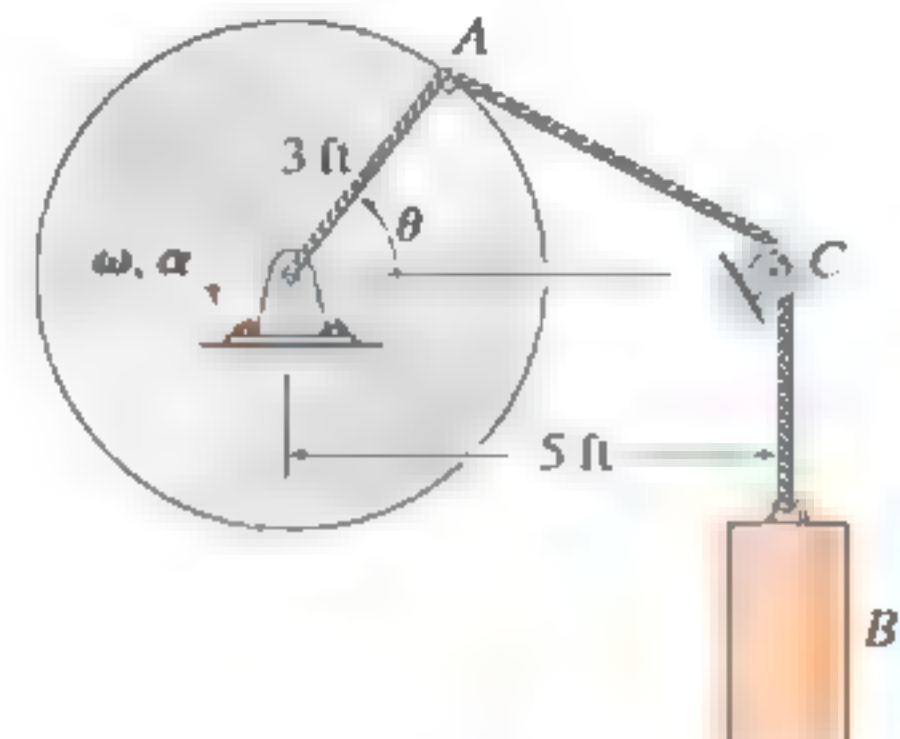
Prob. 16-54

**16-55.** El brazo  $AB$  tiene una velocidad angular de  $\omega$  y una aceleración angular de  $\alpha$ . Si no ocurre deslizamiento entre el disco  $D$  y la superficie curva fija, determine la velocidad angular y la aceleración angular del disco.



Prob. 16-55

**16-56.** En el instante mostrado, el disco gira con una velocidad angular de  $\omega$  y tiene una aceleración angular de  $\alpha$ . Determine la velocidad y la aceleración del cilindro  $B$  en este instante. Desprecie el tamaño de la polea en  $C$ .



Prob. 16-56

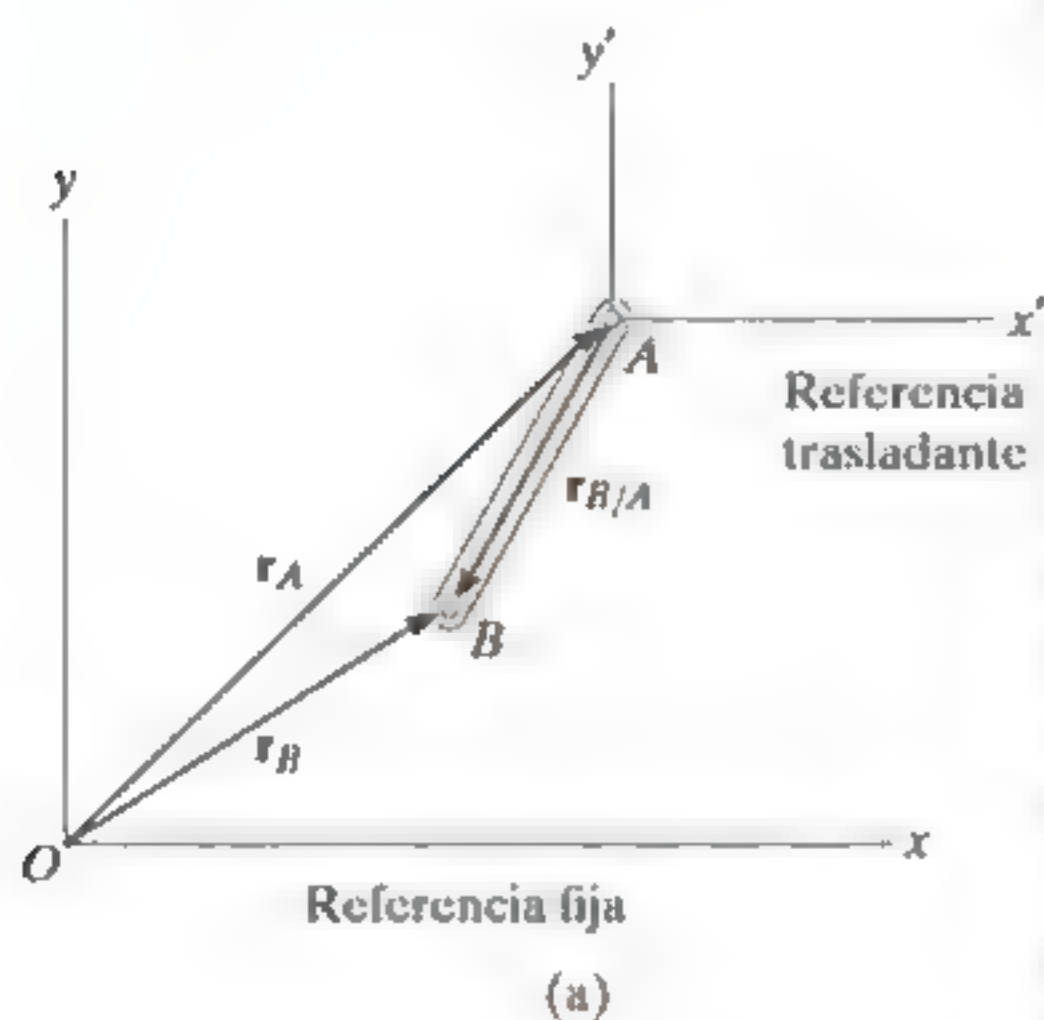


Fig. 16-11(a)

## 16.5 Análisis de movimiento relativo: velocidad

El movimiento plano general de un cuerpo rígido se describe como una combinación de traslación y rotación. Para ver estos movimientos “componentes” *por separado*, utilizaremos un *análisis de movimiento relativo* que implica dos conjuntos de ejes de coordenadas. El sistema de coordenadas  $x, y$  está fijo y mide la posición *absoluta* de dos puntos  $A$  y  $B$  en el cuerpo, representado aquí como una barra (fig. 16-11a). Se hará que el origen de los sistemas de coordenadas  $x', y'$  coincida con el “punto base”  $A$  seleccionado, el cual por lo general tiene un movimiento *conocido*. Los ejes de este sistema de coordenadas se *trasladan* con respecto al marco fijo pero no giran con la barra.

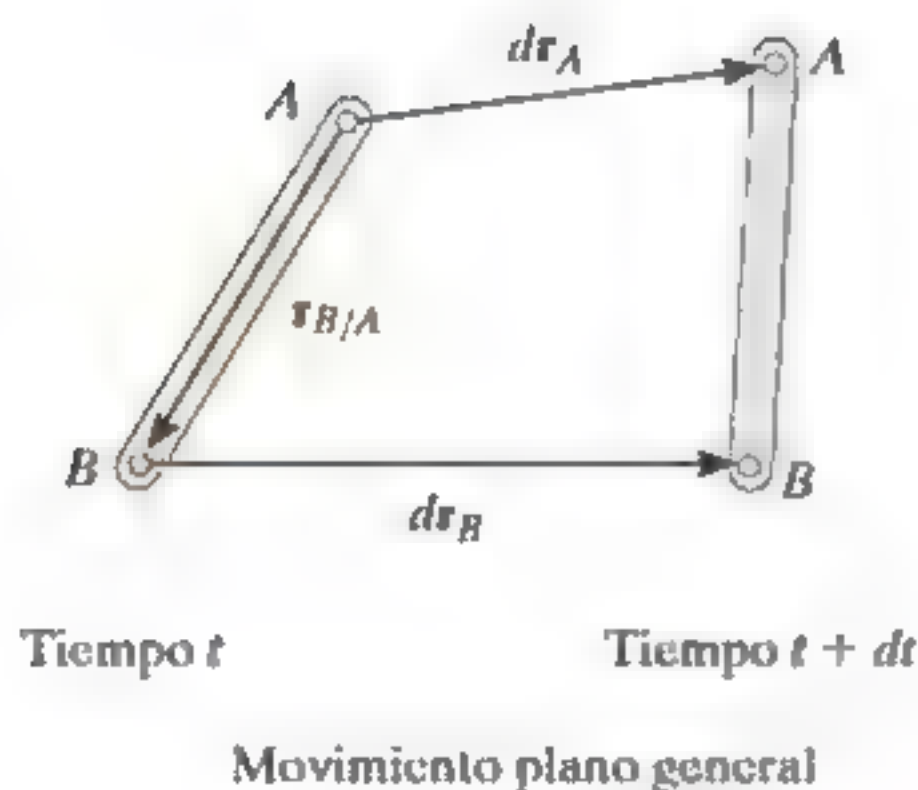
**Posición.** El vector de posición  $\mathbf{r}_A$  en la figura 16-11a especifica la ubicación del “punto base”  $A$  y el vector de posición relativa  $\mathbf{r}_{B/A}$  localiza el punto  $B$  con respecto al punto  $A$ . Mediante suma vectorial, la *posición* de  $B$  es, entonces,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

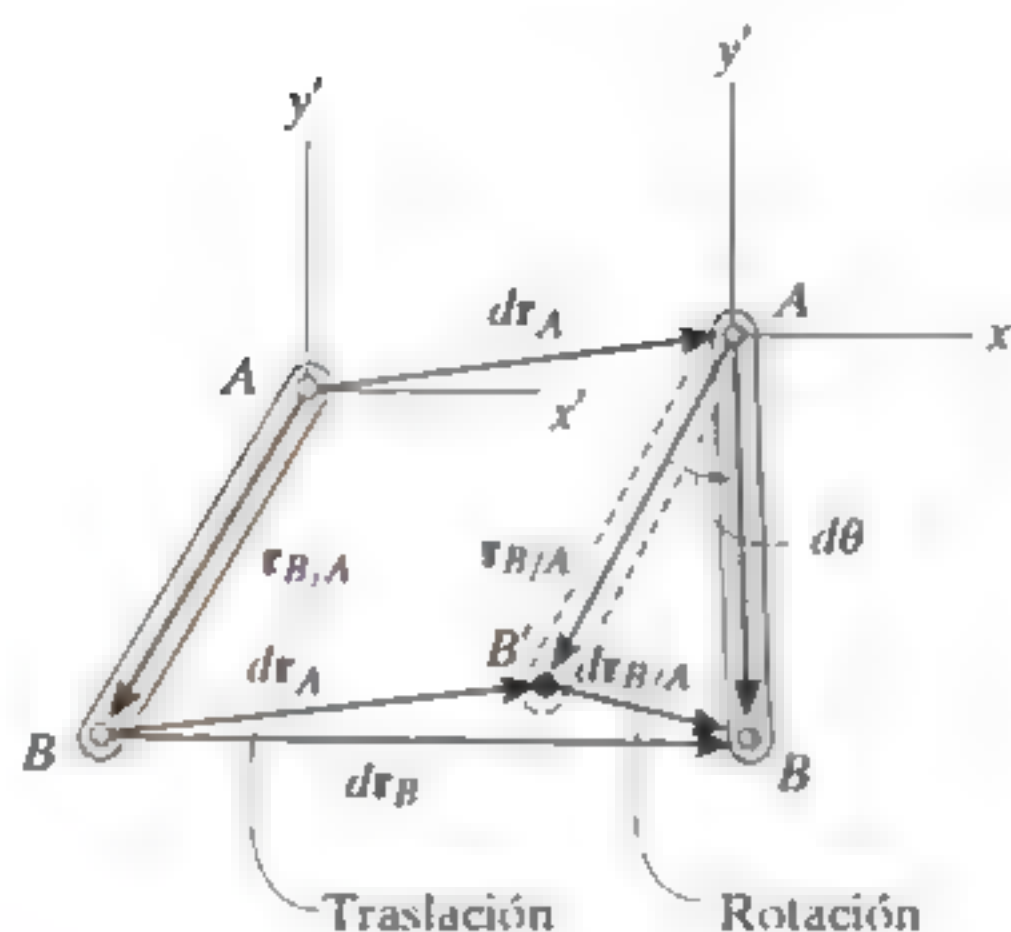
**Desplazamiento.** Durante un instante de tiempo  $dt$ , los puntos  $A$  y  $B$  experimentan los desplazamientos  $d\mathbf{r}_A$  y  $d\mathbf{r}_B$ —como se muestra en la figura 16-11b—. Si consideramos el movimiento plano general por sus partes componentes, entonces *toda la barra se traslada* primero mediante una cantidad  $d\mathbf{r}_A$  de modo que  $A$ , el punto base, se mueve a su *posición final* y el punto  $B$  a  $B'$  (fig. 16-11c). La barra *gira* por ende alrededor de  $A$  una cantidad  $d\theta$ , de modo que  $B'$  experimenta un *desplazamiento relativo*  $d\mathbf{r}_{B'/A}$  y, por consiguiente, se mueve a su posición final  $B$ . Debido a la rotación alrededor de  $A$ ,  $d\mathbf{r}_{B'/A} = \mathbf{r}_{B/A} d\theta$  y el desplazamiento de  $B$  es

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

debido a la rotación alrededor de  $A$   
debido a la traslación de  $A$   
debido a la traslación y la rotación



(b)



(c)

Fig. 16-11(b y c)



A medida que el bloque corredizo  $A$  se desplaza horizontalmente hacia la izquierda a una velocidad  $\mathbf{v}_A$ , hace girar la manivela  $CB$  en sentido antihorario, de modo que  $\mathbf{v}_B$  es tangente a su trayectoria circular, es decir, hacia arriba a la izquierda. La biela  $AB$  que conecta está sometida a movimiento plano general y, en el instante que se muestra, su velocidad angular es  $\omega$ . (© R. C. Hibbeler)

**Velocidad.** Para determinar la relación entre las velocidades de los puntos  $A$  y  $B$  es necesario considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de posición, o simplemente dividir la ecuación de desplazamiento entre  $dt$ . De esto da como resultado

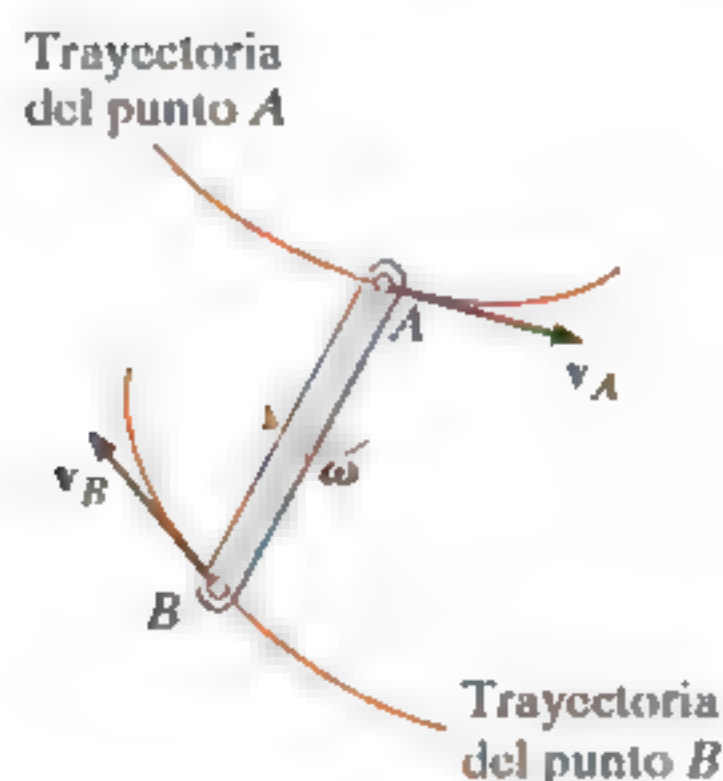
$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Los términos  $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$  y  $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$  se miden con respecto a los ejes fijos  $x, y$ , ya que representan las *velocidades absolutas* de los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Como el desplazamiento relativo lo provoca una rotación, la magnitud del tercer término es  $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = r_{B/A} d\theta/dt = r_{B/A} \dot{\theta} = r_{B/A} \omega$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Denotaremos este término como la *velocidad relativa*  $\mathbf{v}_{B/A}$ , puesto que representa la velocidad de  $B$  con respecto a  $A$  medida por un observador fijo en los ejes trasladantes  $x', y'$ . Dicho de otra manera, *la barra parece moverse como si girara con una velocidad angular  $\omega$  con respecto al eje  $z'$  que pasa por  $A$* . Por consiguiente, la magnitud de  $\mathbf{v}_{B/A}$  es  $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$  y su dirección es perpendicular a  $\mathbf{r}_{B/A}$ . Entonces tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (16-15)$$

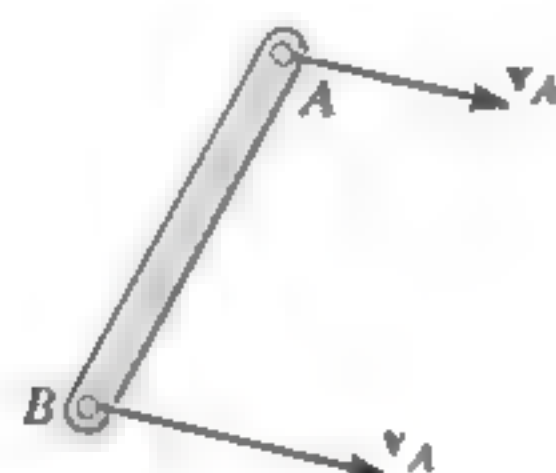
donde

- $\mathbf{v}_B$  = velocidad del punto  $B$
- $\mathbf{v}_A$  = velocidad del punto base  $A$
- $\mathbf{v}_{B/A}$  = velocidad de  $B$  con respecto a  $A$



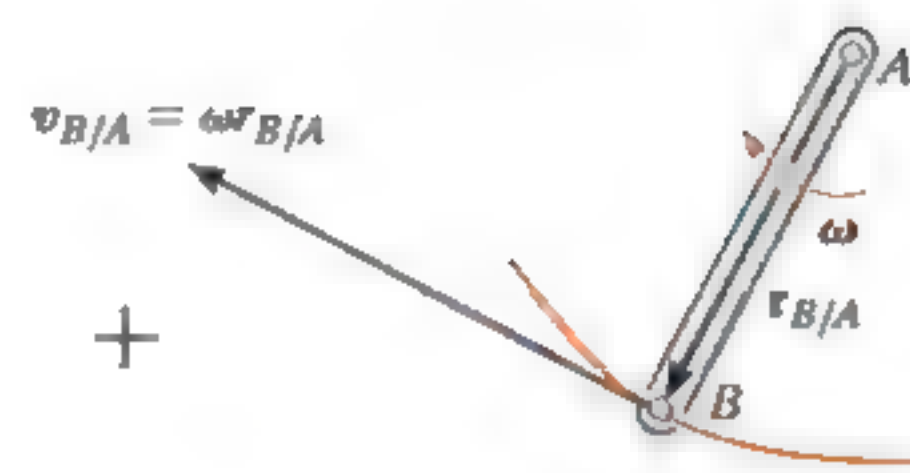
Movimiento plano general

(d)



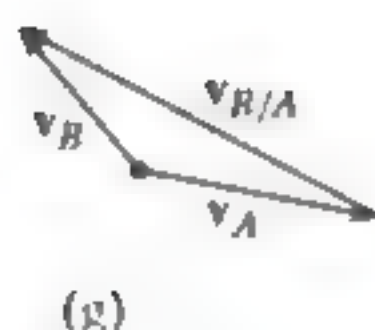
Traslación

(e)

Rotación alrededor  
del punto base A

(f)

Fig. 16-11 (cont.)



(g)

Lo que establece la ecuación  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$  es que la velocidad de  $B$  (fig. 16-11d), se determina al considerar que toda la barra se traslada con una velocidad de  $\mathbf{v}_A$  (fig. 16-11e) y que gira alrededor de  $A$  con una velocidad angular  $\omega$  (fig. 16-11f). La adición vectorial de estos dos efectos, aplicada a  $B$ , resulta  $\mathbf{v}_B$ , como se muestra en la figura 16-11g.

Como la velocidad relativa  $\mathbf{v}_{B/A}$  representa el efecto del *movimiento circular* alrededor de  $A$ , este término se expresa mediante el producto vectorial  $\mathbf{v}_{B/A} = \omega \times \mathbf{r}_{B/A}$ , ecuación 16-9. Por consiguiente, para su aplicación mediante un análisis vectorial cartesiano, también podemos escribir la ecuación 16-15 como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (16-16)$$

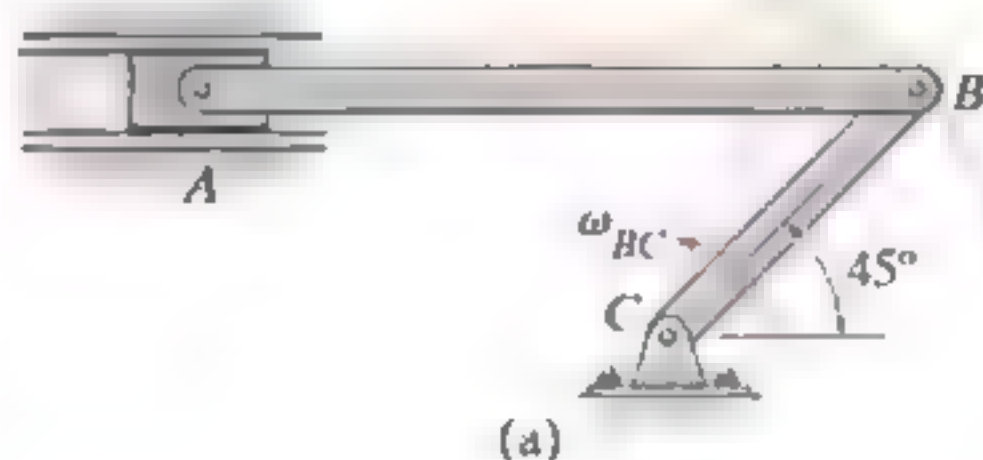
donde

$\mathbf{v}_B$  = velocidad de  $B$

$\mathbf{v}_A$  = velocidad del punto base  $A$

$\omega$  = velocidad angular del cuerpo

$\mathbf{r}_{B/A}$  = vector de posición dirigido de  $A$  a  $B$



(a)



(b)

Fig. 16-12

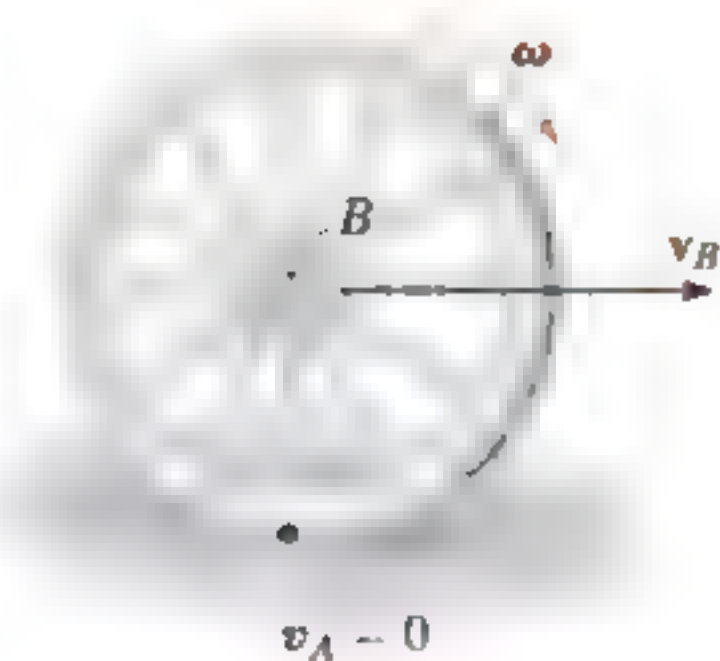


Fig. 16-13

La ecuación de velocidad 16-15 o 16-16 puede usarse de una manera práctica para estudiar el movimiento plano general de un cuerpo rígido, el cual está conectado por pasador a otros cuerpos en movimiento o en con contacto con éstos. Cuando se aplica esta ecuación, en general los puntos  $A$  y  $B$  deberían seleccionarse como puntos en el cuerpo que están conectados por medio de un pasador a otros cuerpos, o como puntos en contacto con cuerpos adyacentes que tienen un *movimiento conocido*. Por ejemplo, el punto  $A$  en el eslabón  $AB$  en la figura 16-12a debe moverse a lo largo de una trayectoria horizontal, mientras que el punto  $B$  lo hace en una trayectoria circular. Por consiguiente, pueden establecerse las *direcciones* de  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{v}_B$  ya que siempre son *tangentes* a sus trayectorias de movimiento (fig. 16-12b). En el caso de la rueda mostrada en la figura 16-13, la cual gira *sin deslizarse*, el punto  $A$  en ella puede seleccionarse en el suelo. Aquí, la velocidad de  $A$  es cero (momentáneamente) pues el suelo no se mueve. Además, el centro de la rueda,  $B$ , se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal de modo que  $\mathbf{v}_B$  es horizontal.

## Procedimiento para el análisis

La ecuación de velocidad relativa puede aplicarse ya sea mediante análisis vectorial cartesiano, o bien, escribiendo directamente las ecuaciones de componentes escalares  $x$  y  $y$ . Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

### Análisis vectorial

#### Diagrama cinemático

- Establezca las direcciones de las coordenadas  $x$  y  $y$  fijas y trace un diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él las velocidades  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  de los puntos  $A$  y  $B$ , la velocidad angular  $\omega$ , y el vector de posición relativa  $\mathbf{r}_{B/A}$ .
- Si las magnitudes de  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  o  $\omega$  son incógnitas, puede suponerse el sentido de estos vectores.

#### Ecuación de velocidad

- Para aplicar  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A}$ , exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial y, luego, iguale las componentes  $i$  y  $j$  respectivas para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta en una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, indica que el sentido del vector es opuesto al que se muestra en el diagrama cinemático.

### Análisis escalar

#### Diagrama cinemático

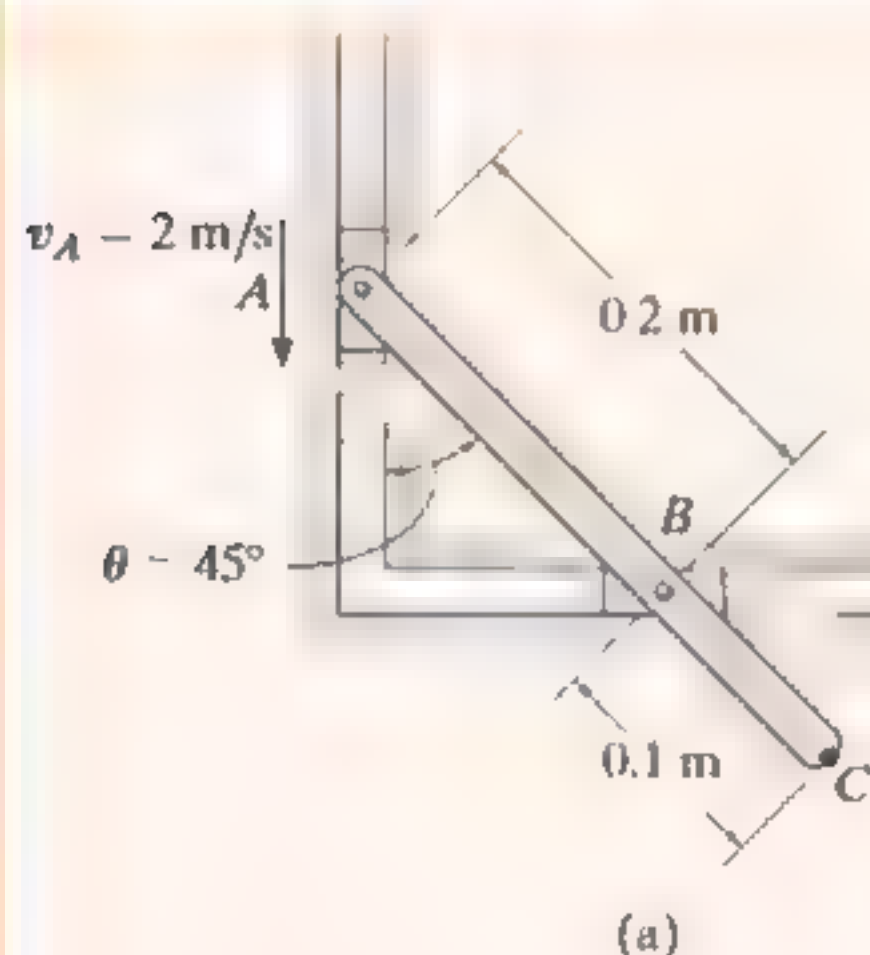
- Si la ecuación de velocidad se va a aplicar en forma escalar, entonces deben establecerse la magnitud y la dirección de la velocidad relativa  $\mathbf{v}_{B/A}$ . Trace un diagrama cinemático como se muestra en la figura 16-11g, el cual muestra el movimiento relativo. Como se considera que el cuerpo debe estar “sujeto por medio de un pasador” momentáneamente en el punto base  $A$ , la magnitud de  $\mathbf{v}_{B/A}$  es  $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ . La dirección de  $\mathbf{v}_{B/A}$  siempre es perpendicular a  $\mathbf{r}_{B/A}$  de acuerdo con el movimiento de rotación  $\omega$  del cuerpo\*.

#### Ecuación de velocidad

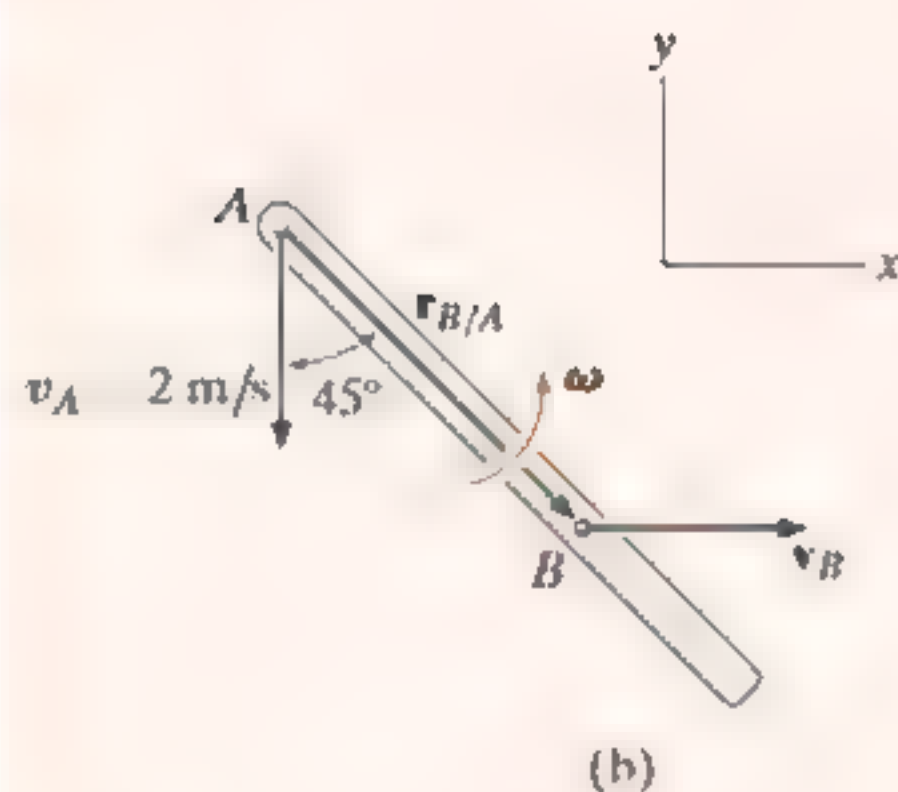
- Escriba la ecuación 16-15 en forma simbólica,  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ , y debajo de cada uno de los términos represente gráficamente los vectores, de modo que muestren sus magnitudes y direcciones. Las ecuaciones escalares se determinan con las componentes  $x$  y  $y$  de estos vectores.

\*La notación  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})}$  suele ser útil para recordar que  $A$  está “conectado con un pasador”.

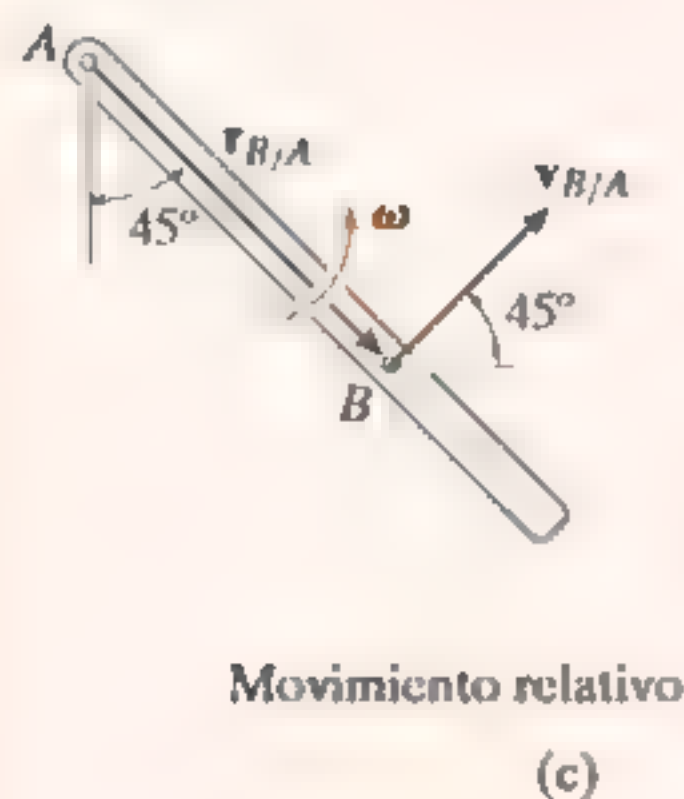
## EJEMPLO



(a)



(b)



Movimiento relativo

(c)

Fig. 16-14

El eslabón que se ilustra en la figura 16-14a está guiado por los bloques  $A$  y  $B$ , los cuales se mueven en la ranuras fijas. Si la velocidad de  $A$  es de 2 m/s hacia abajo, determine la velocidad de  $B$  cuando  $\theta = 45^\circ$ .

## SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

**Diagrama cinemático.** Como los puntos  $A$  y  $B$  sólo pueden moverse a lo largo de las ranuras fijas y  $v_A$  está dirigida hacia abajo, la velocidad  $v_B$  debe dirigirse horizontalmente hacia la derecha (fig. 16-14b). Este movimiento hace que el eslabón gire en sentido antihorario; es decir, de acuerdo con la regla de la mano derecha, la dirección de la velocidad angular  $\omega$  es hacia fuera, perpendicular al plano del movimiento.

**Ecuación de velocidad.** Al expresar cada uno de los vectores en la figura 16-14b en función de sus componentes  $i$ ,  $j$ ,  $k$  y aplicar la ecuación 16-16 a  $A$ , el punto base, y  $B$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A} \\ v_B \mathbf{i} &= -2\mathbf{j} + [\omega \mathbf{k} \times (0.2 \sin 45^\circ \mathbf{i} - 0.2 \cos 45^\circ \mathbf{j})] \\ v_B \mathbf{i} &= -2\mathbf{j} + 0.2\omega \sin 45^\circ \mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45^\circ \mathbf{i} \end{aligned}$$

Si se igualan las componentes  $i$  y  $j$  se tiene

$$v_B = 0.2\omega \cos 45^\circ \quad 0 = -2 + 0.2\omega \sin 45^\circ$$

Por lo tanto,

$$\omega = 14.1 \text{ rad/s} \quad v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow \quad \text{Resp.}$$

## SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

En la figura 16-14c, se muestra el diagrama cinemático del “movimiento circular” relativo que produce  $v_{B/A}$ . Aquí  $v_{B/A} = \omega(0.2 \text{ m})$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + v_{B/A} \\ \left[ \begin{array}{c} v_B \\ \rightarrow \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \omega(0.2 \text{ m}) \\ \nearrow 45^\circ \end{array} \right] \\ (\rightarrow) \quad v_B &= 0 + \omega(0.2) \cos 45^\circ \\ (\uparrow) \quad 0 &= -2 + \omega(0.2) \sin 45^\circ \end{aligned}$$

La solución produce los resultados anteriores.

Es necesario destacar que estos resultados son válidos sólo en el instante  $\theta = 45^\circ$ . Un nuevo cálculo para  $\theta = 44^\circ$  origina  $v_B = 2.07 \text{ m/s}$  y  $\omega = 14.4 \text{ rad/s}$ ; mientras que cuando  $\theta = 46^\circ$ ,  $v_B = 1.93 \text{ m/s}$  y  $\omega = 13.9 \text{ rad/s}$ , etcétera.

**NOTA:** Dado que se conocen  $v_A$  y  $\omega$ , es posible determinar la velocidad de cualquier otro punto sobre el eslabón. A manera de ejercicio, vea si puede aplicar la ecuación 16-16 a los puntos  $A$  y  $C$ , o a los puntos  $B$  y  $C$ , y demuestre que cuando  $\theta = 45^\circ$ ,  $v_C = 3.16 \text{ m/s}$ , dirigida a un ángulo de  $18.4^\circ$  hacia arriba de la horizontal.

## EJEMPLO

El cilindro de la figura 16-15a rueda sin deslizarse sobre la superficie de una banda transportadora, la cual se mueve a 2 ft/s. Determine la velocidad del punto  $A$ . El cilindro tiene una velocidad angular en sentido horario  $\omega = 15 \text{ rad/s}$  en el instante que se muestra.

## SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

**Cinemático.** Como no hay deslizamiento, el punto  $B$  en el cilindro tiene la misma velocidad que la transportadora (fig. 16-15b). Además, se conoce la velocidad angular del cilindro, así que podemos aplicar la ecuación de velocidad a  $B$ , el punto base, y  $A$  para determinar  $\mathbf{v}_A$ .

## Ecuación de velocidad

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x \mathbf{i} + (v_A)_y \mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x \mathbf{i} + (v_A)_y \mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$

de modo que

$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ ft/s} \quad (1)$$

$$(v_A)_y = 7.50 \text{ ft/s} \quad (2)$$

Por lo tanto,

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ ft/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{7.50}{9.50} = 38.3^\circ \quad \swarrow$$

## SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Como un procedimiento alternativo, las componentes escalares de  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$  pueden obtenerse directamente. De acuerdo con el diagrama cinemático que ilustra el movimiento “circular” relativo, el cual produce  $\mathbf{v}_{A/B}$  (fig. 16-15c), tenemos

$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s}) \left( \frac{0.5 \text{ ft}}{\cos 45^\circ} \right) = 10.6 \text{ ft/s}$$

Por consiguiente,

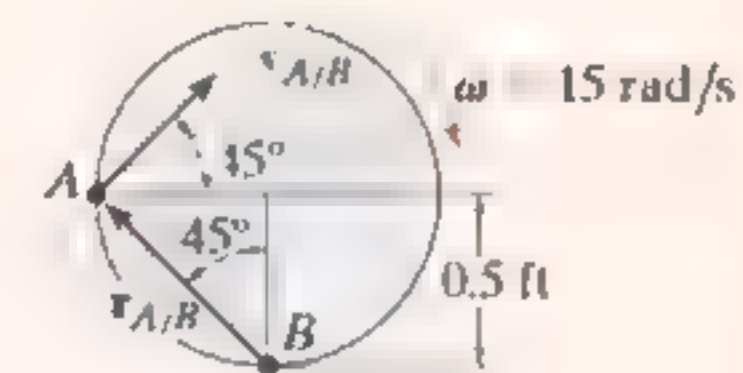
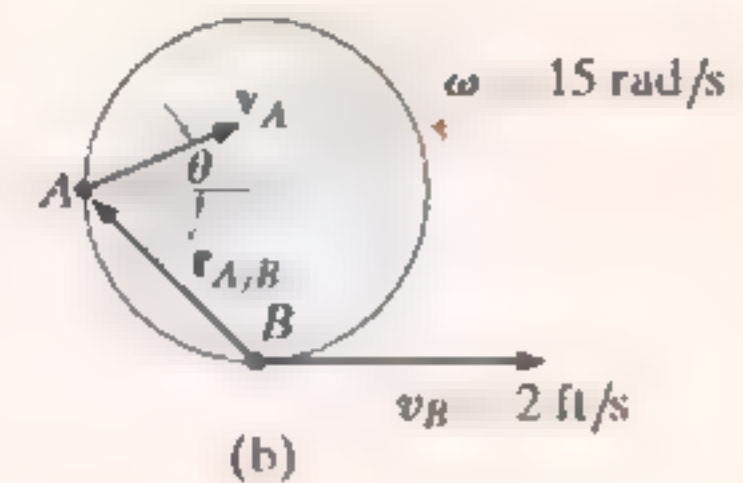
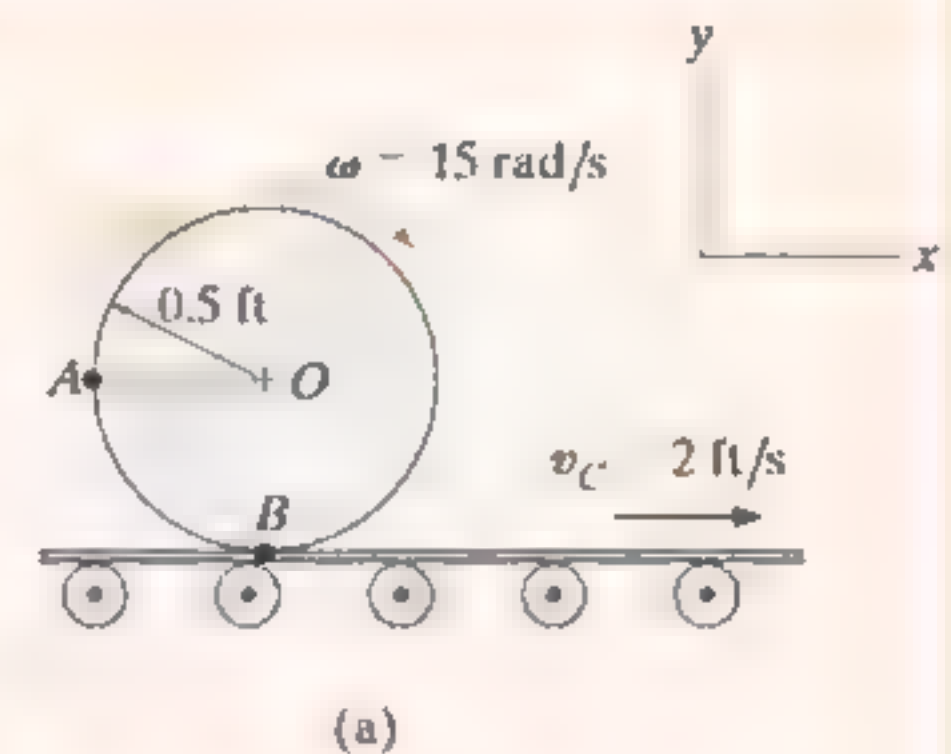
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\begin{bmatrix} (v_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_A)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ ft/s} \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10.6 \text{ ft/s} \\ \swarrow 45^\circ \end{bmatrix}$$

Al igualar las componentes  $x$  y  $y$  se obtienen los mismos resultados que antes, es decir,

$$(\rightarrow) \quad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45^\circ = 9.50 \text{ ft/s}$$

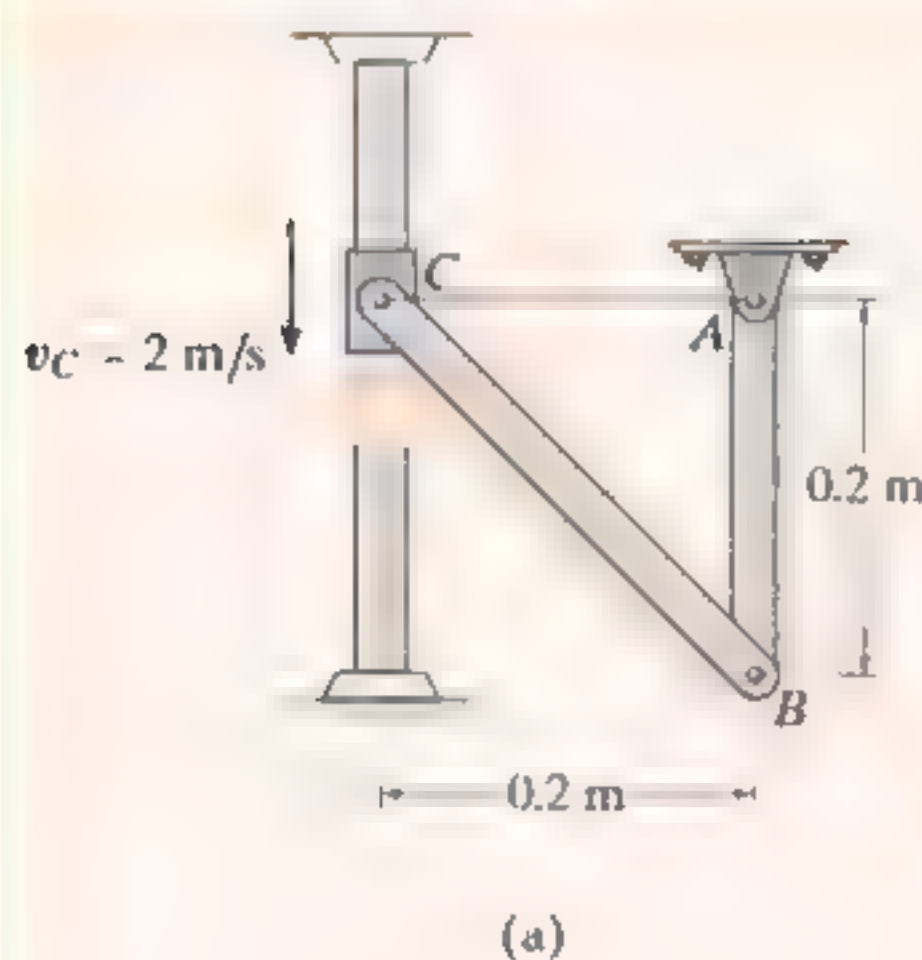
$$(+\uparrow) \quad (v_A)_y = 0 + 10.6 \sin 45^\circ = 7.50 \text{ ft/s}$$



Movimiento relativo  
(c)

Fig. 16-15

## EJEMPLO 16.1

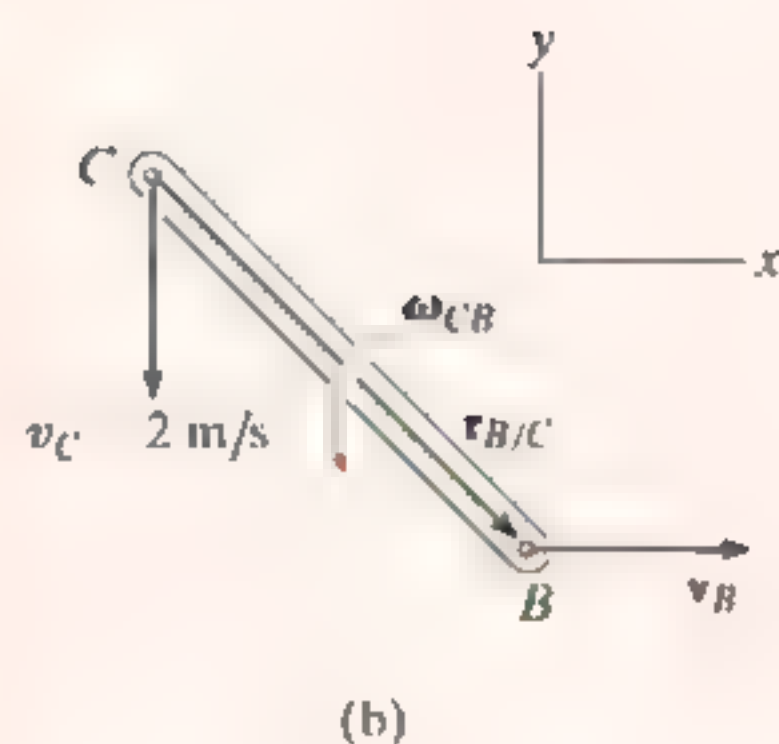


El collarín C de la figura 16-16a desciende a 2 m/s. Determine la velocidad angular de CB en este instante.

## SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

**Diagrama cinemático.** El movimiento descendente de C hace que B se mueva a la derecha a lo largo de una trayectoria curva. Asimismo, CB y AB giran en sentido antihorario.

**Eslabón CB** (movimiento plano general): vea la figura 16-16b.



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \omega_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$v_B \mathbf{i} = -2 \mathbf{j} + \omega_{CB} \mathbf{k} \times (0.2 \mathbf{i} - 0.2 \mathbf{j})$$

$$v_B \mathbf{i} = -2 \mathbf{j} + 0.2 \omega_{CB} \mathbf{j} + 0.2 \omega_{CB} \mathbf{i}$$

$$v_B = 0.2 \omega_{CB} \quad (1)$$

$$0 = -2 + 0.2 \omega_{CB} \quad (2)$$

$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

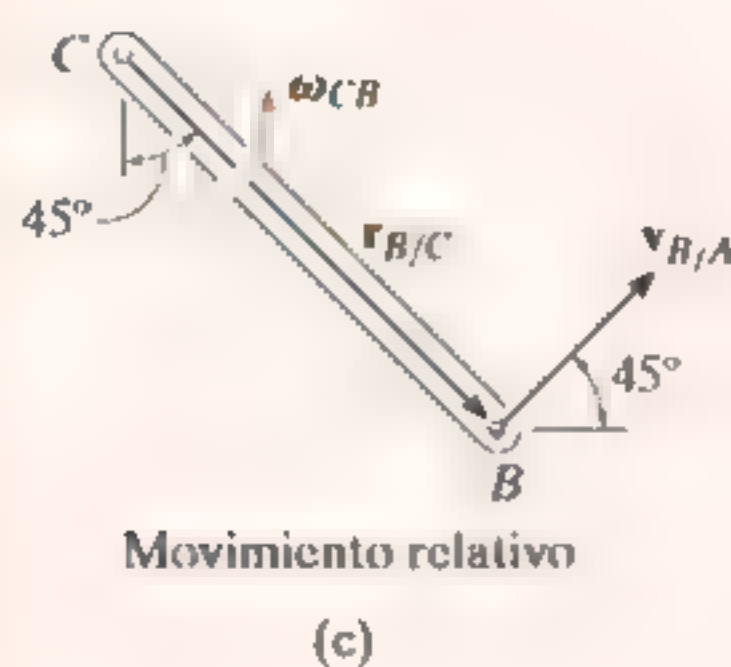
$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

## SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Las ecuaciones de componentes escalares de  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$  se obtienen directamente. El diagrama cinemático en la figura 16-16c muestra el movimiento “circular” relativo producido por  $\mathbf{v}_{B/C}$ . Tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \text{ m}) \\ \angle 45^\circ \end{bmatrix}$$



Al resolver estos vectores en las direcciones x y y se obtiene

$$(\rightarrow) \quad v_B = 0 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \cos 45^\circ)$$

$$(+\uparrow) \quad 0 = -2 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \sin 45^\circ)$$

las cuales son las mismas que las ecuaciones 1 y 2.

**NOTA:** Como el eslabón AB gira alrededor de un eje fijo y se conoce  $v_B$  (fig. 16-16d), su velocidad angular se determina con  $v_B = \omega_{AB} r_{AB}$  o  $2 \text{ m/s} = \omega_{AB}(0.2 \text{ m})$ ,  $\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s}$ .

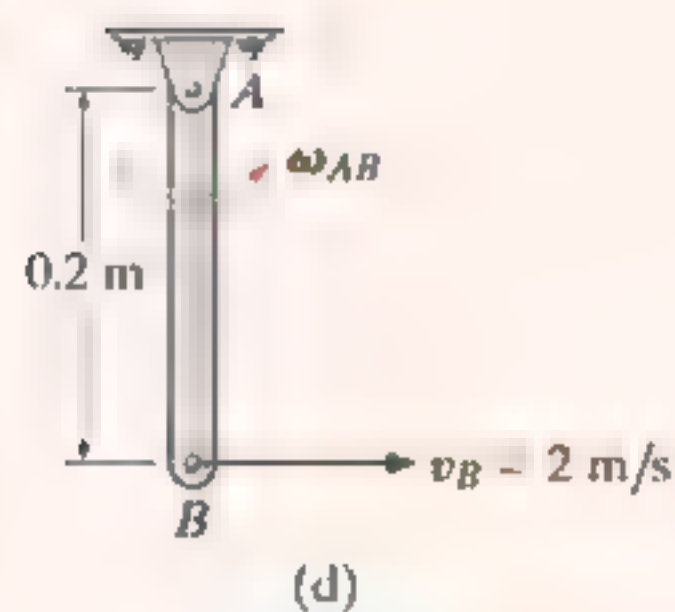
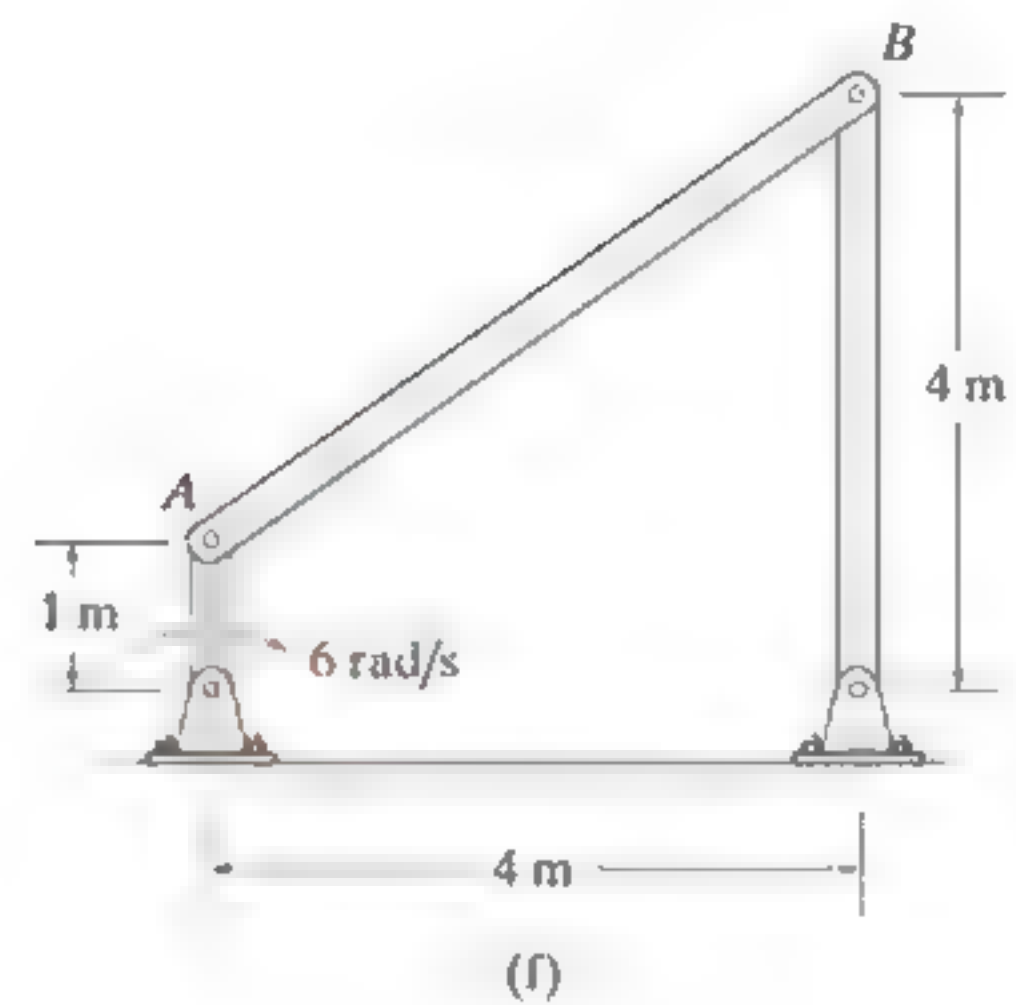
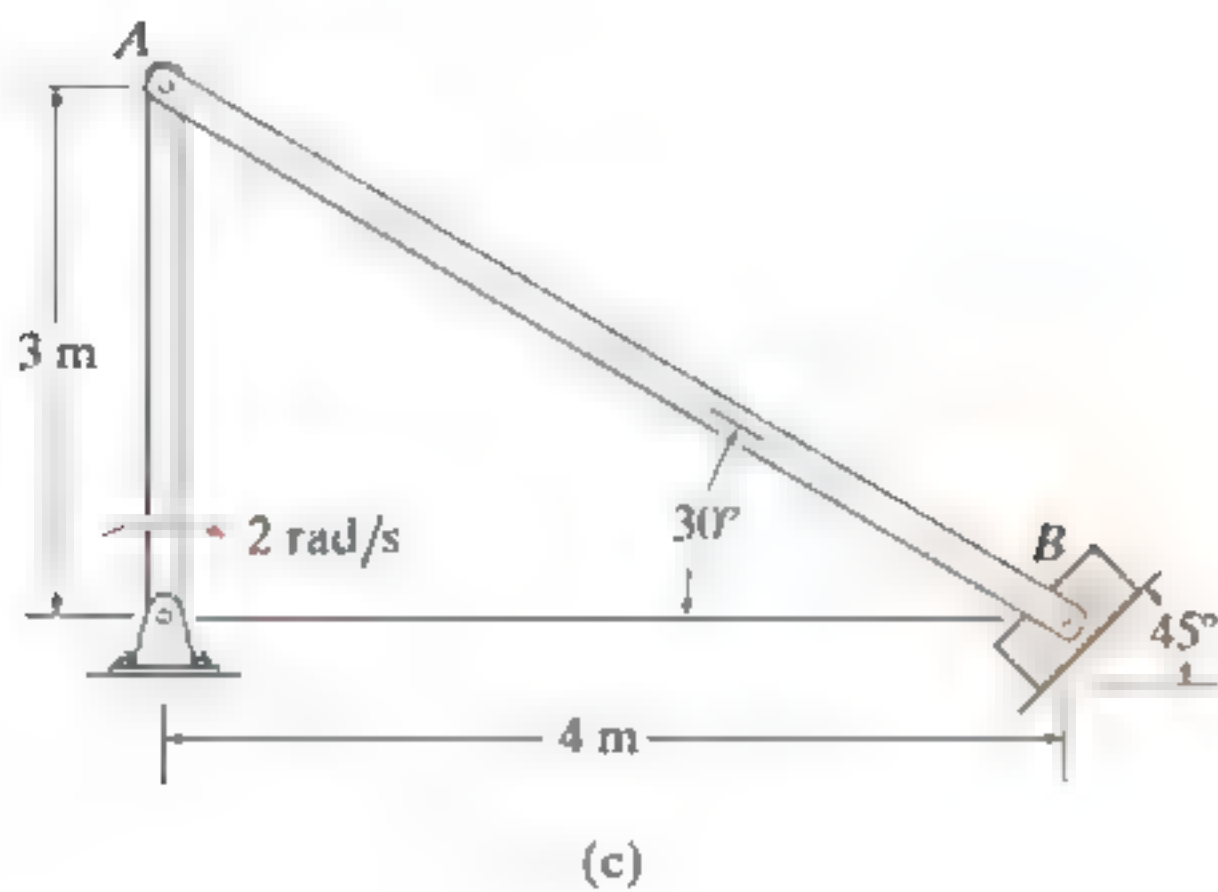
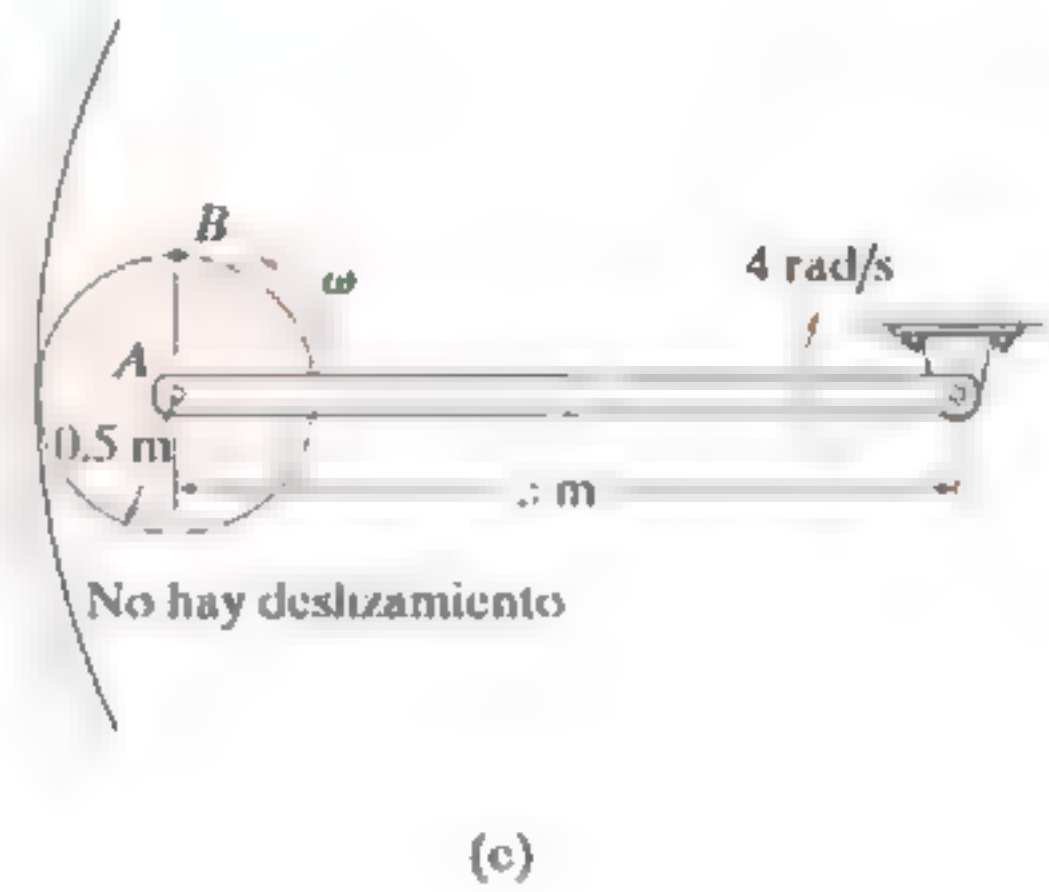
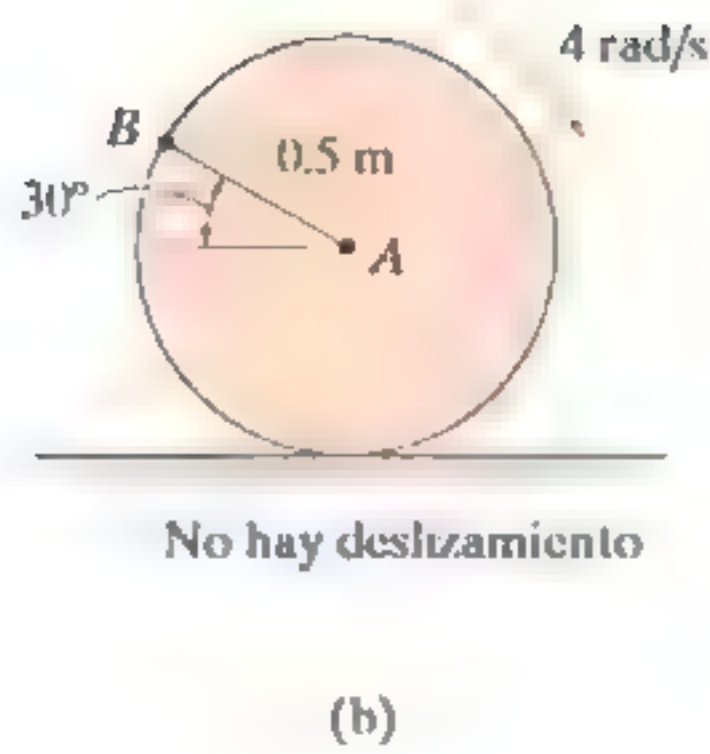
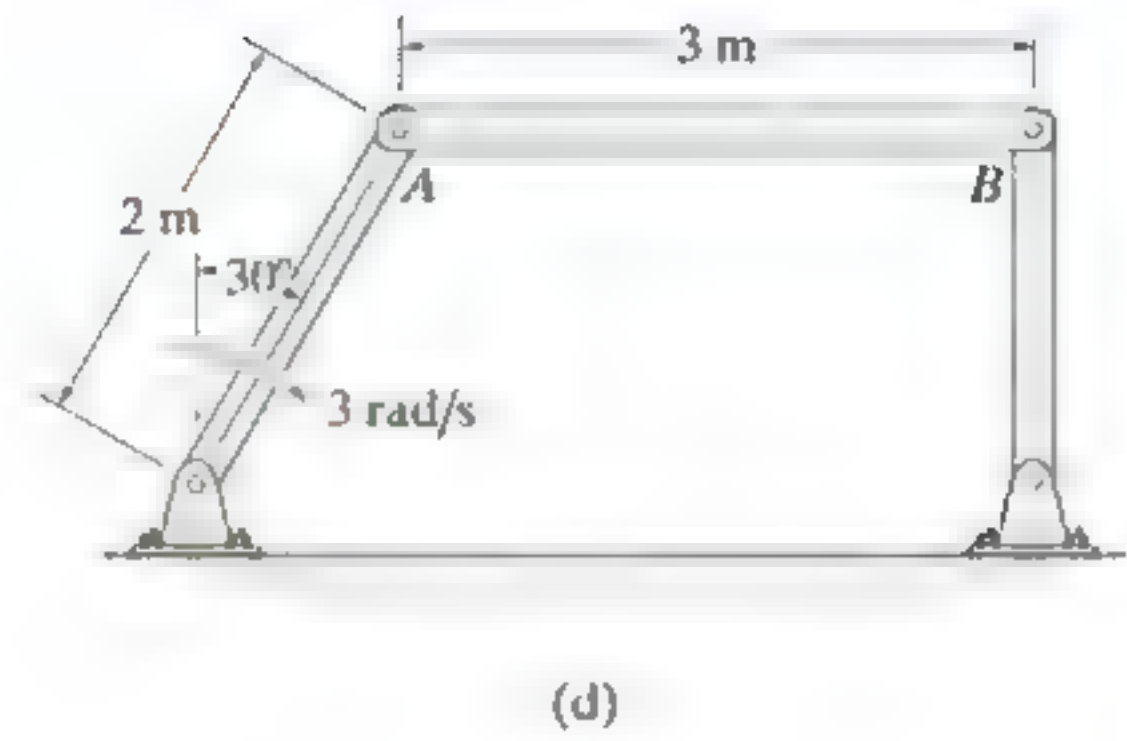
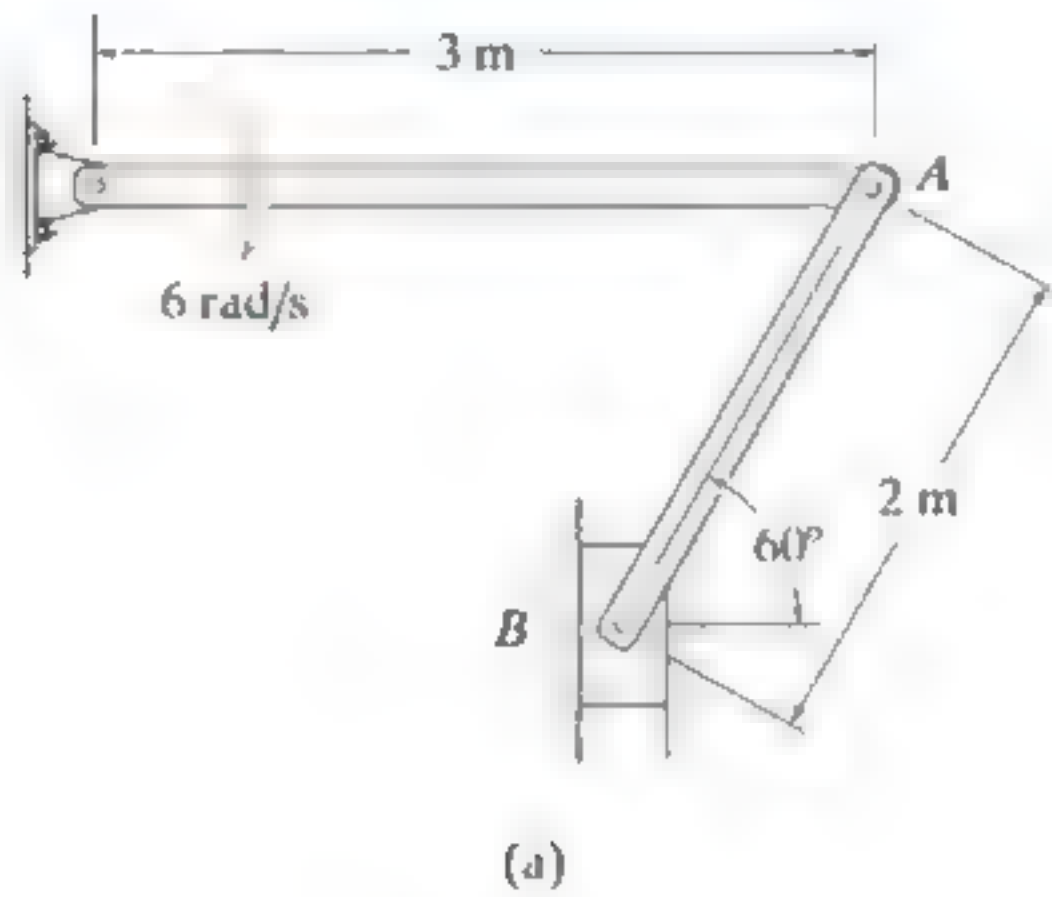


Fig. 16-16

# PROBLEMA PRELIMINAR

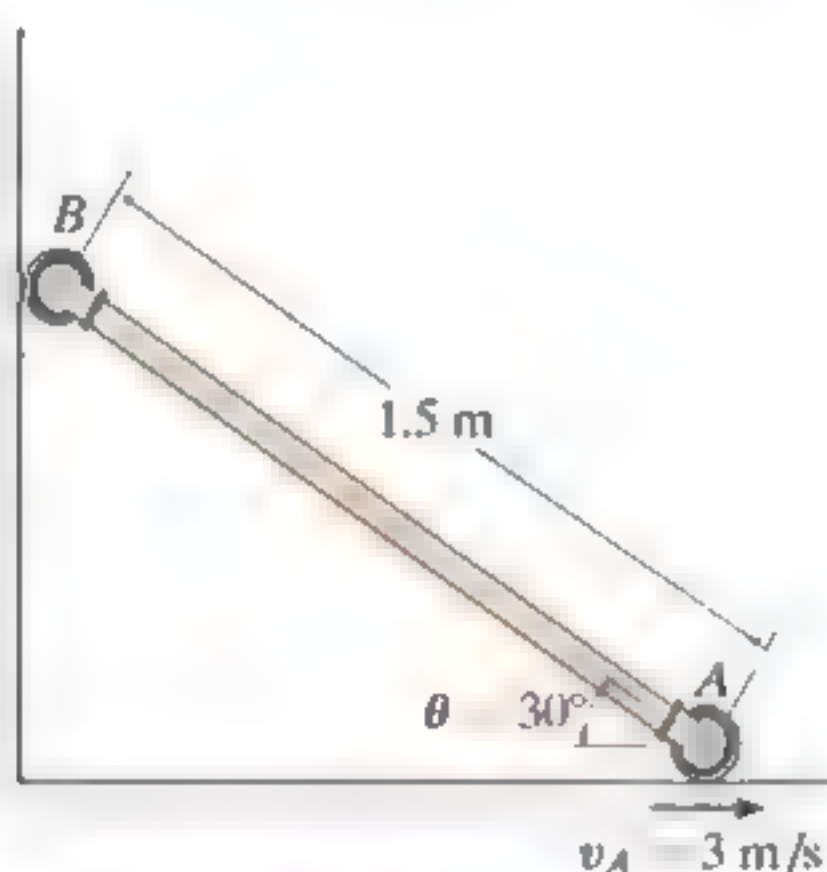
**P16-1.** Establezca la ecuación de velocidad relativa entre los puntos *A* y *B*.



Prob. P16-1

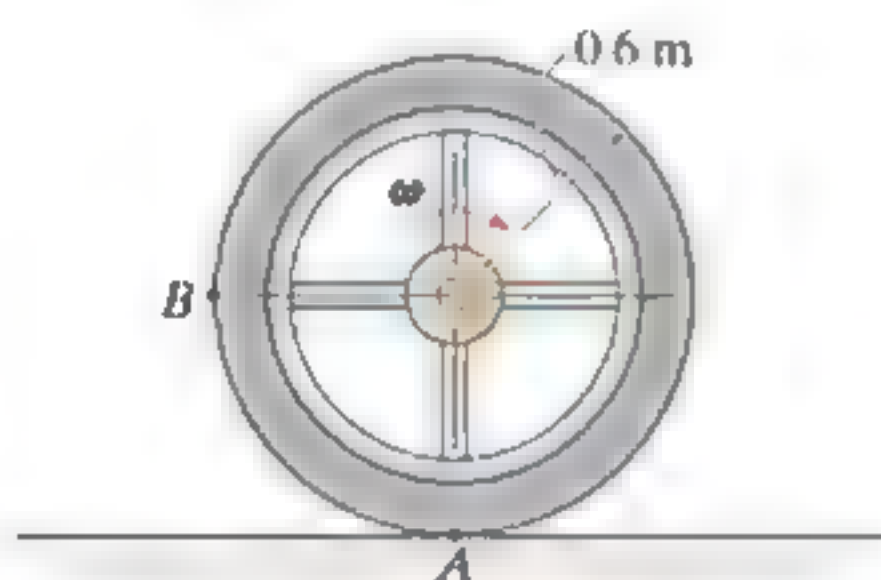
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**116-7.** Si el rodillo  $A$  se mueve a la derecha a una velocidad constante  $v_A = 3 \text{ m/s}$ , determine la velocidad angular del eslabón y la velocidad del rodillo  $B$  cuando  $\theta = 30^\circ$ .



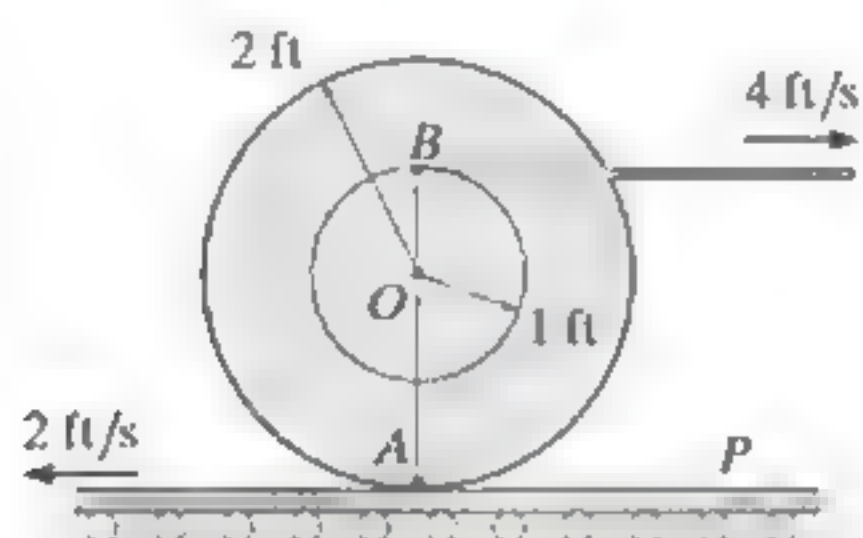
Prob. 116-7

**116-8.** La rueda gira sin deslizarse con una velocidad angular  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ . Determine la magnitud de la velocidad en el punto  $B$  en el instante que se muestra.



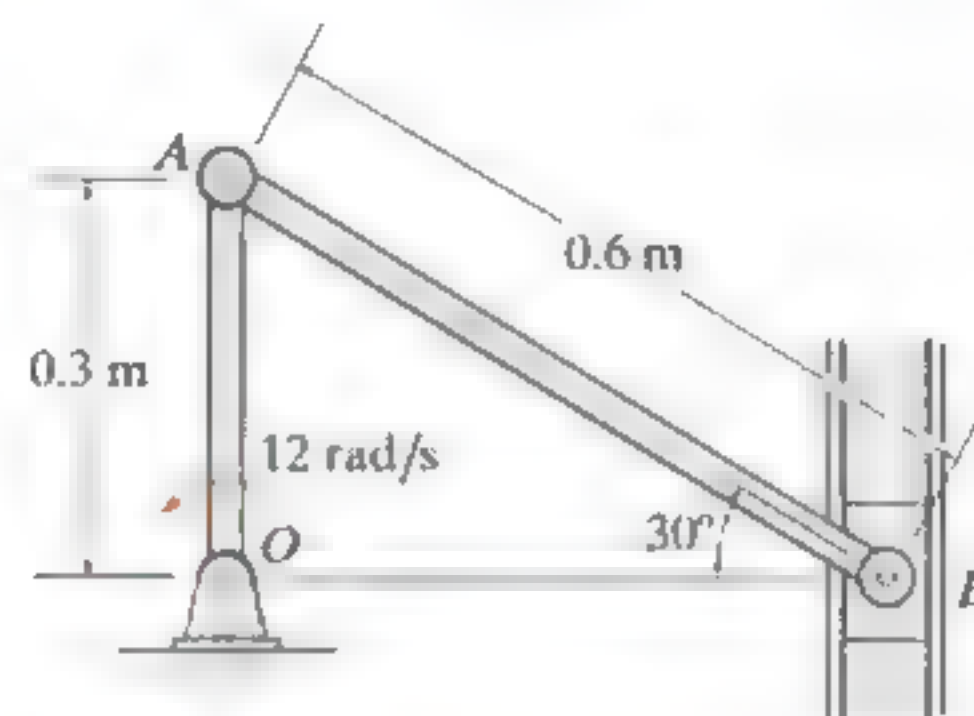
Prob. 116-8

**116-9.** Determine la velocidad angular del carrete. El cable se enrolla alrededor del núcleo interno y el carrete no se desliza sobre la plataforma  $P$ .



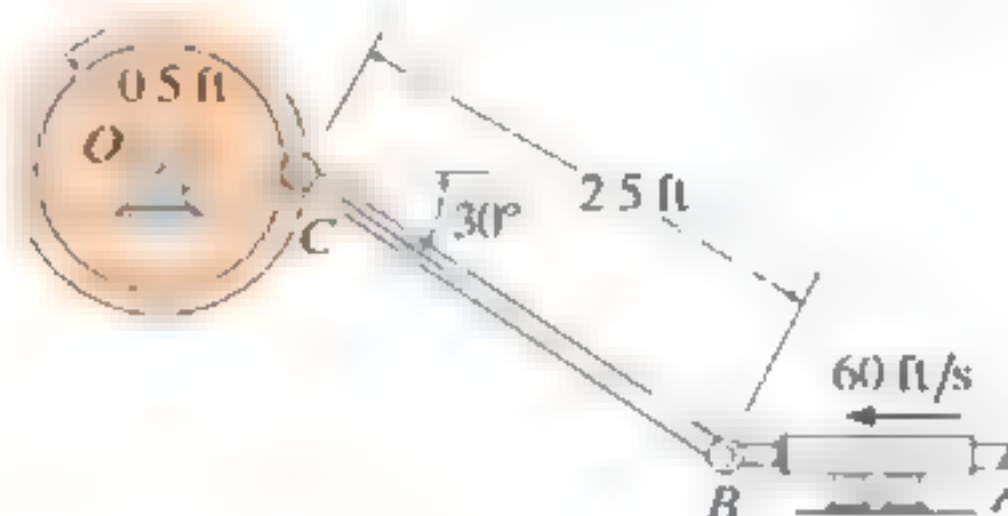
Prob. 116-9

**116-10.** Si la palanca  $OA$  gira con una velocidad angular de  $\omega = 12 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad del pistón  $B$  y la velocidad angular de la varilla  $AB$  en el instante que se muestra.



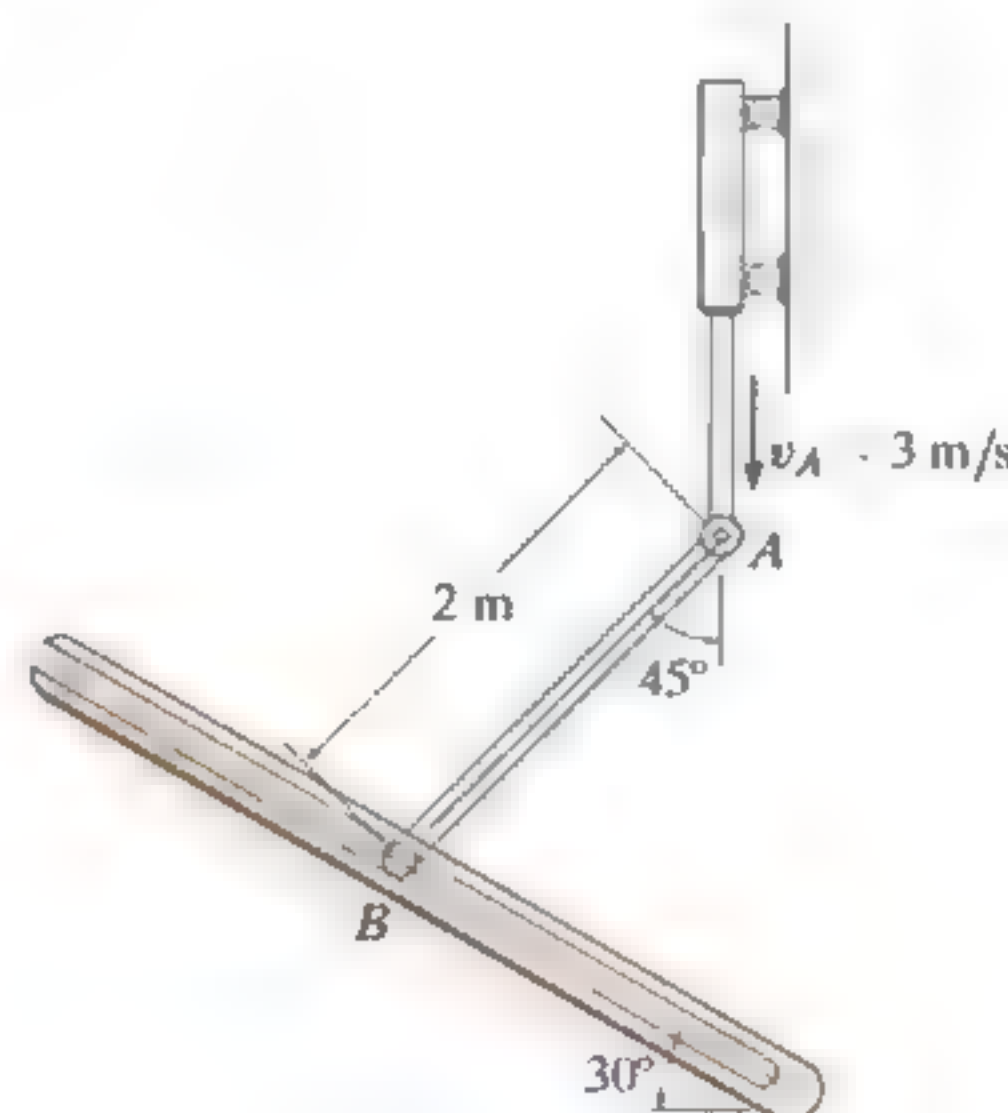
Prob. 116-10

**116-11.** Si la varilla  $AB$  se desliza a lo largo de la ranura horizontal con una velocidad de  $60 \text{ ft/s}$ , determine la velocidad angular del eslabón  $BC$  en el instante que se muestra.



Prob. 116-11

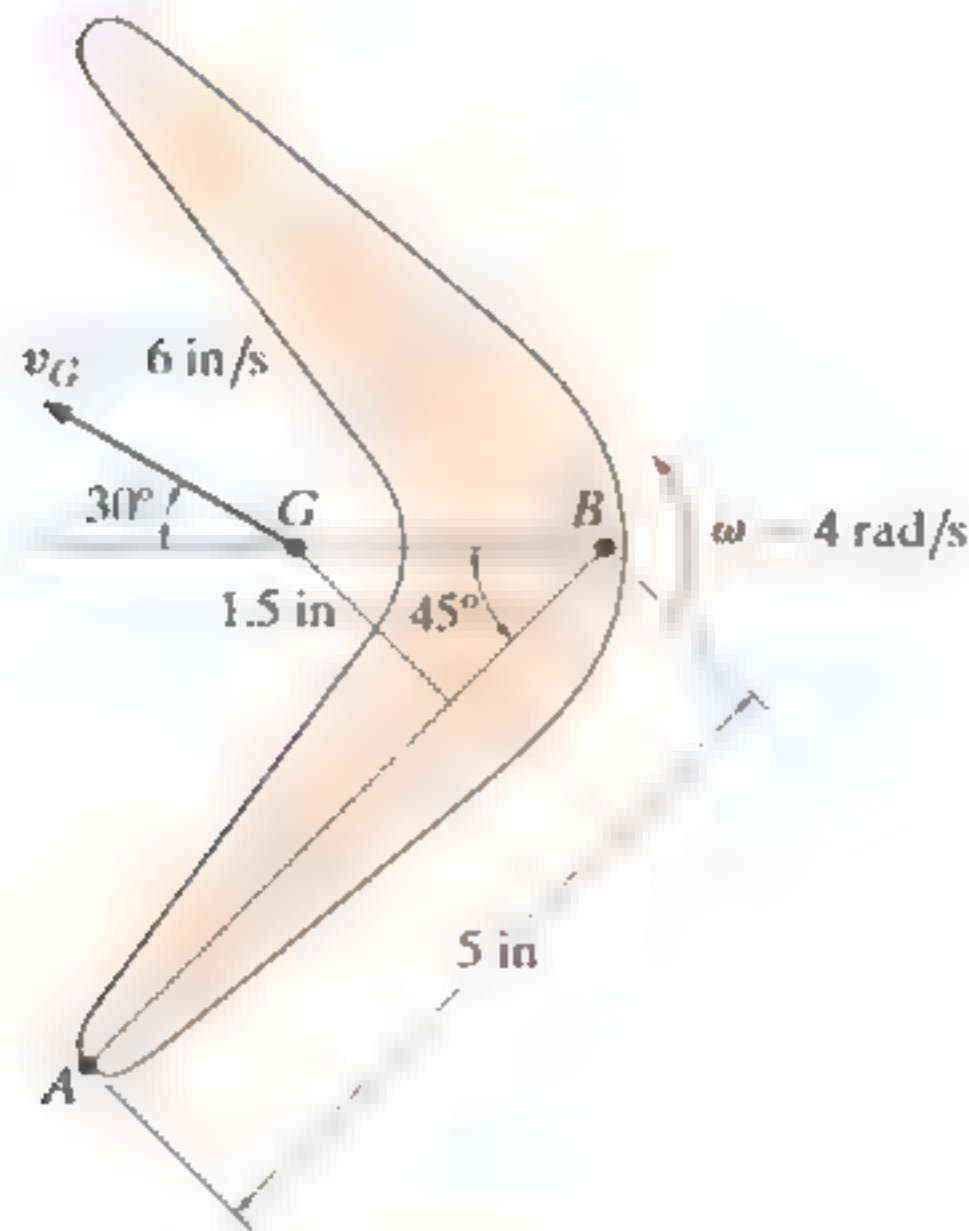
**116-12.** La velocidad del extremo  $A$  del eslabón es  $v_A = 3 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad de la clavija  $B$  en este instante. La clavija está restringida a moverse a lo largo de la ranura.



Prob. 116-12

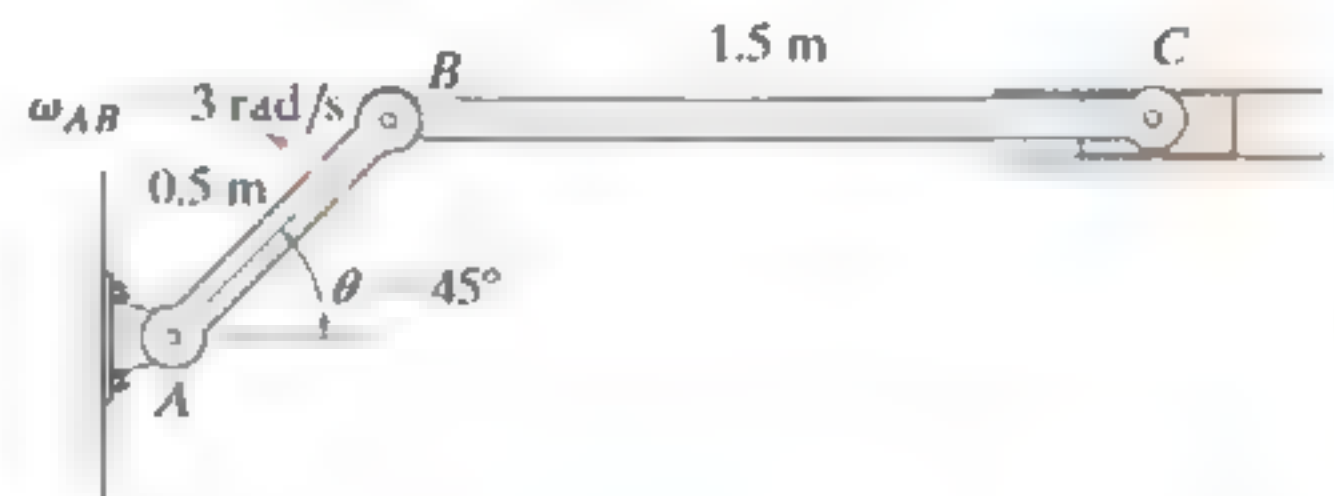
## PROBLEMAS

**16-57.** En el instante mostrado el *boomerang* tiene una velocidad angular  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ , y su centro de masa  $G$  tiene una velocidad  $v_G = 6 \text{ in/s}$ . Determine la velocidad del punto  $B$  en este instante.



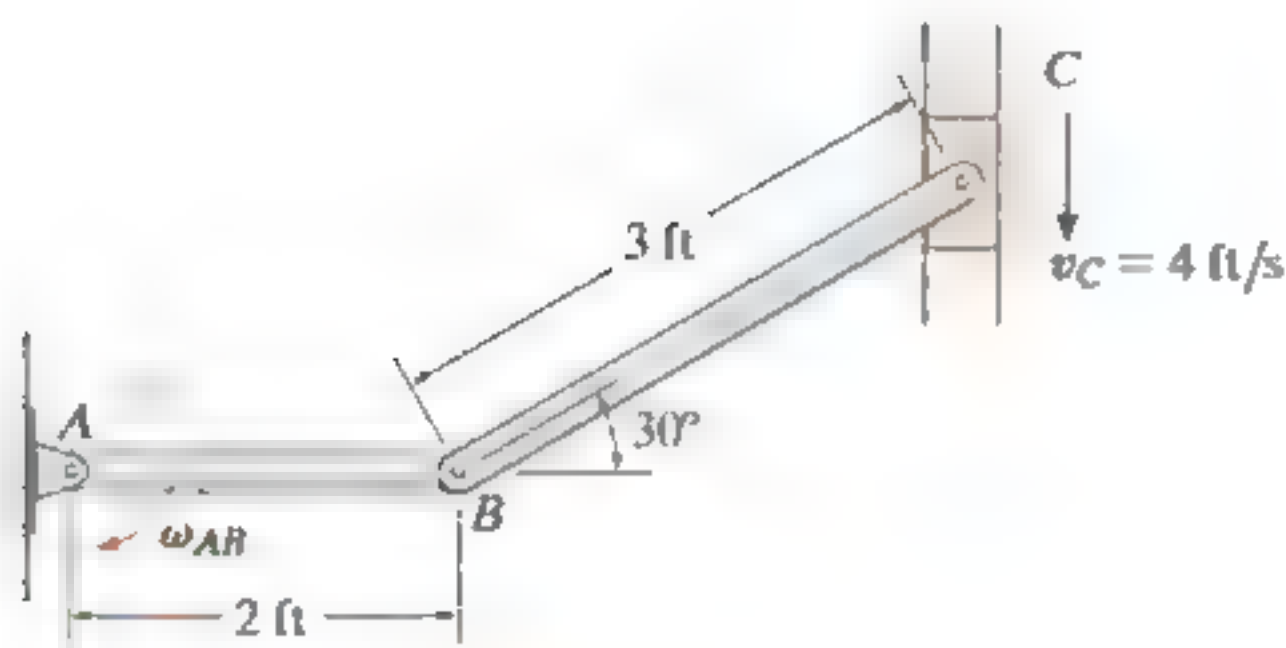
Prob. 16-57

**16-59.** El eslabón  $AB$  tiene una velocidad angular de  $3 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del bloque  $C$  y la velocidad angular del eslabón  $BC$  en el instante  $\theta = 45^\circ$ . Además, grafique la posición del eslabón  $BC$  cuando  $\theta = 60^\circ, 45^\circ$  y  $30^\circ$  para mostrar su movimiento plano general.



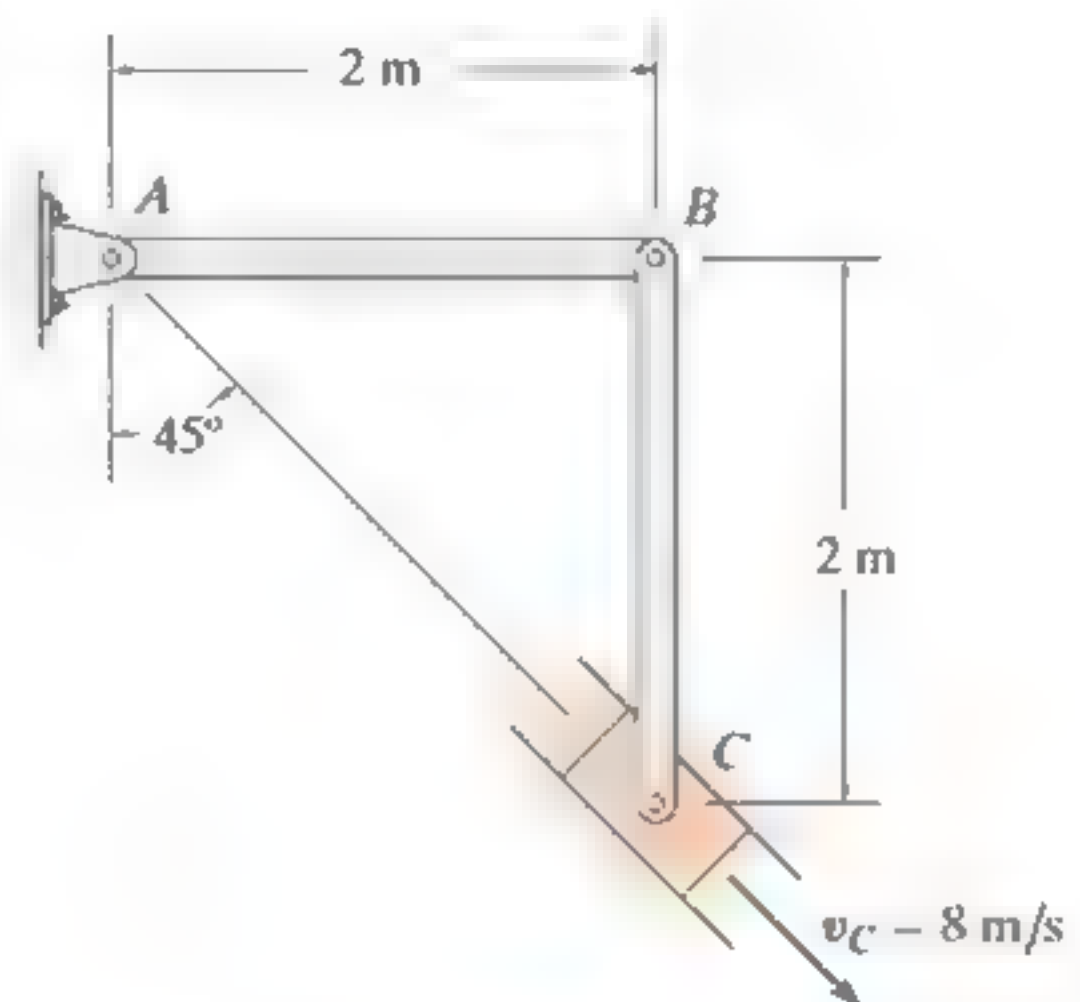
Prob. 16-59

**16-58.** Si el bloque en  $C$  se mueve hacia abajo a  $4 \text{ ft/s}$ , determine la velocidad angular de la barra  $AB$  en el instante mostrado.



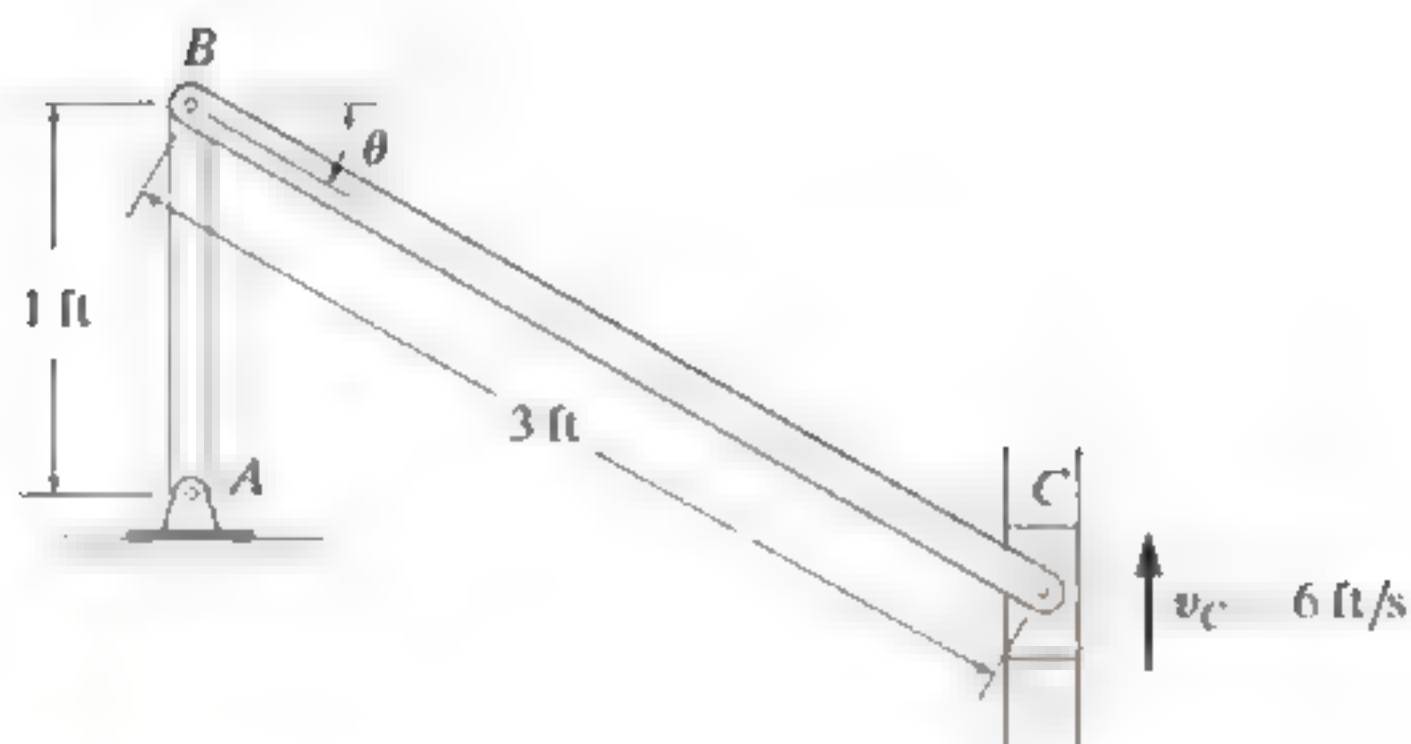
Prob. 16-58

**\*16-60.** El bloque deslizante  $C$  se mueve hacia abajo a  $8 \text{ m/s}$  por la ranura inclinada. Determine las velocidades angulares de los eslabones  $AB$  y  $BC$  en el instante mostrado.



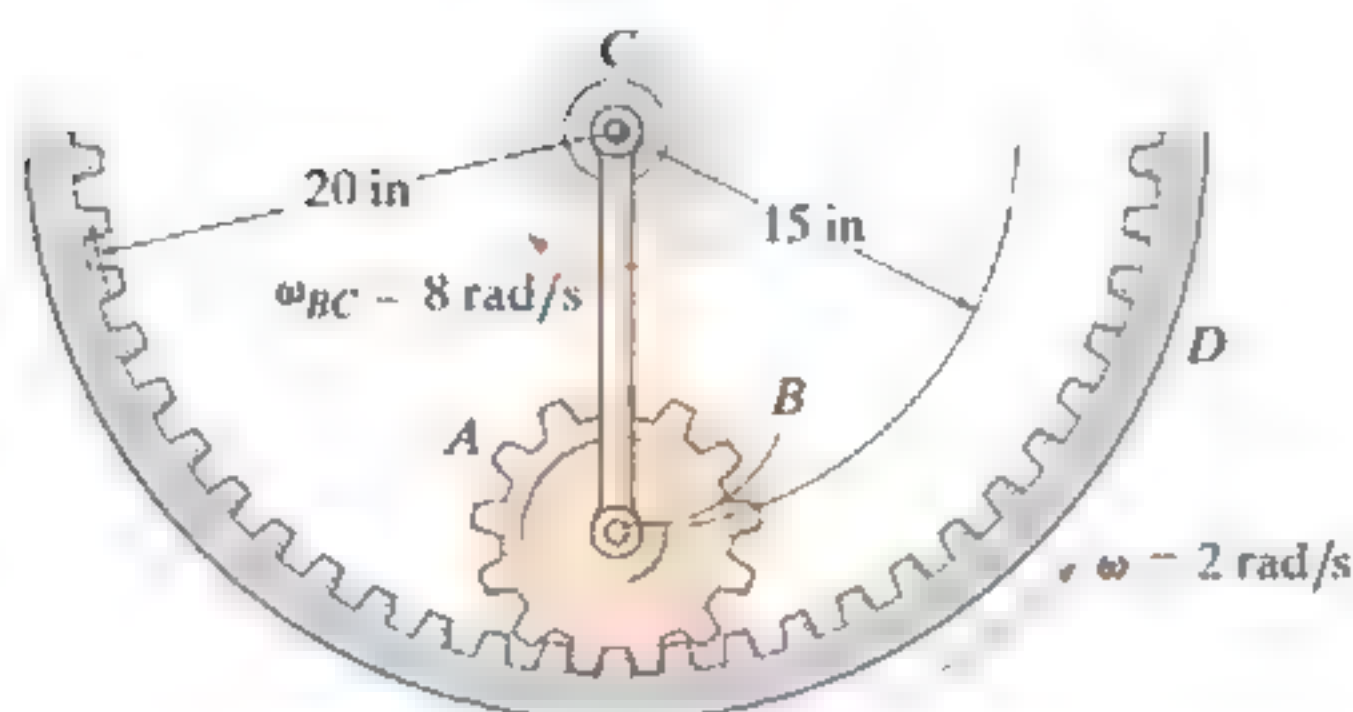
Prob. 16-60

**16-61.** Determine la velocidad angular de los eslabones  $AB$  y  $BC$  en el instante  $\theta = 30^\circ$ . Además, grafique la posición del eslabón  $BC$  cuando  $\theta = 55^\circ, 45^\circ$  y  $30^\circ$  para mostrar su movimiento plano general.



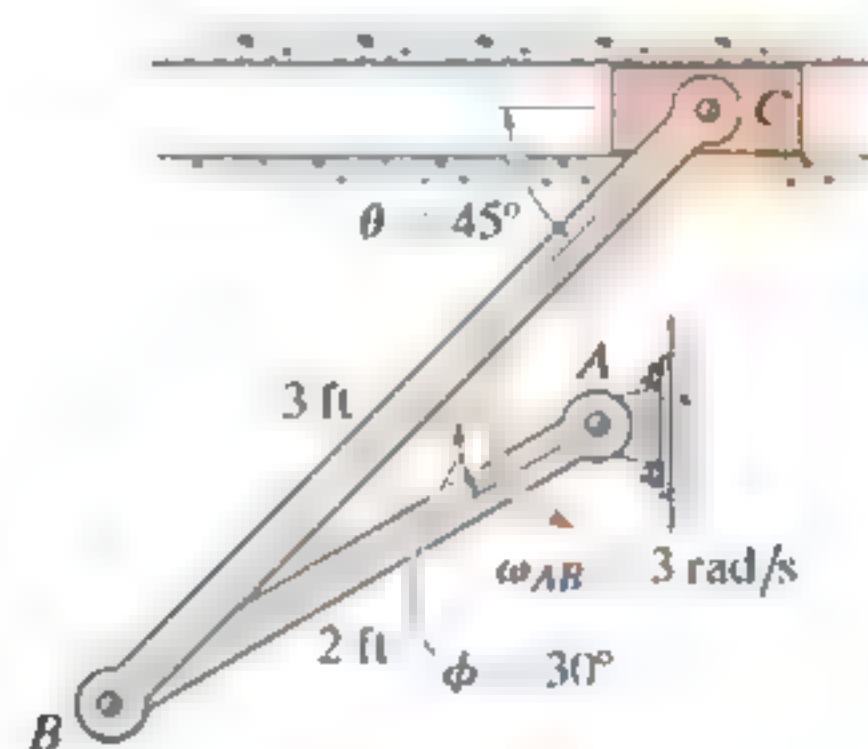
Prob. 16-61

**16-62.** El engrane planetario  $A$  está articulado en  $B$ . El eslabón  $BC$  gira en sentido horario con una velocidad angular de  $8 \text{ rad/s}$ , mientras que el engrane dentado exterior gira en sentido antihorario con una velocidad angular de  $2 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad angular del engrane  $A$ .



Prob. 16-62

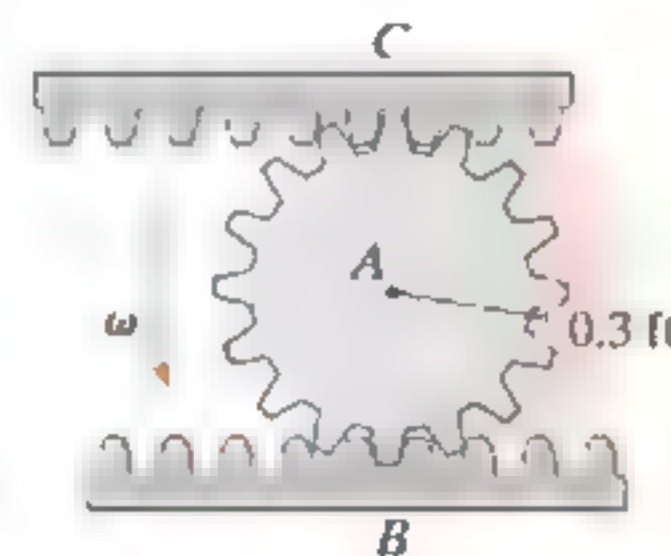
**16-63.** Si la velocidad angular del eslabón  $AB$  es  $\omega_{AB} = 3 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad del bloque en  $C$  y la velocidad angular del eslabón de conexión  $CB$  en el instante  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 30^\circ$ .



Prob. 16-63

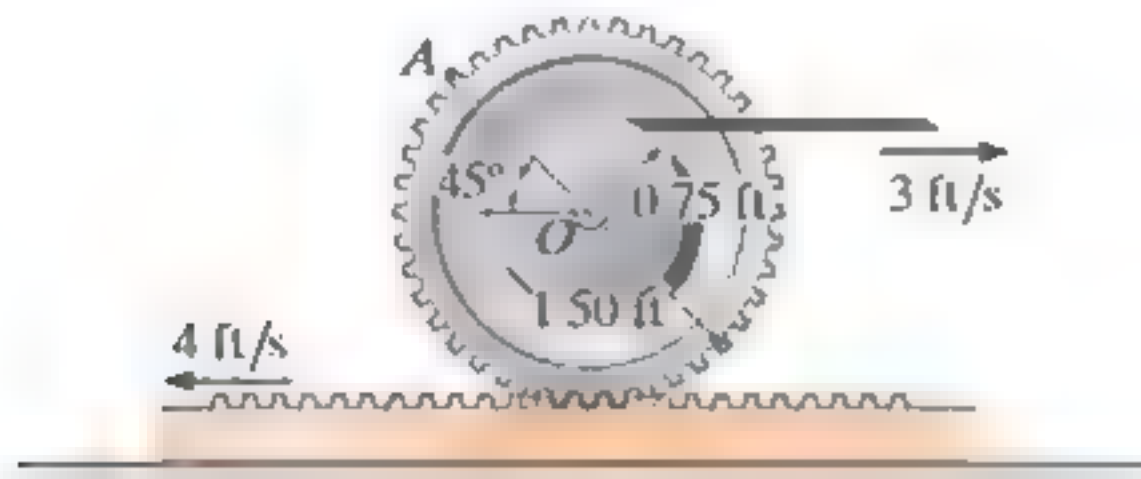
**\*16-64.** El engrane de piñón  $A$  rueda sobre el engrane dentado fijo  $B$  con una velocidad angular  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del engrane dentado  $C$ .

**16-65.** El piñón rueda sobre los engranes dentados. Si  $B$  se mueve hacia la derecha a  $8 \text{ ft/s}$  y  $C$  se mueve hacia la izquierda a  $4 \text{ ft/s}$ , determine la velocidad angular del engrane de piñón y la velocidad de su centro  $A$ .



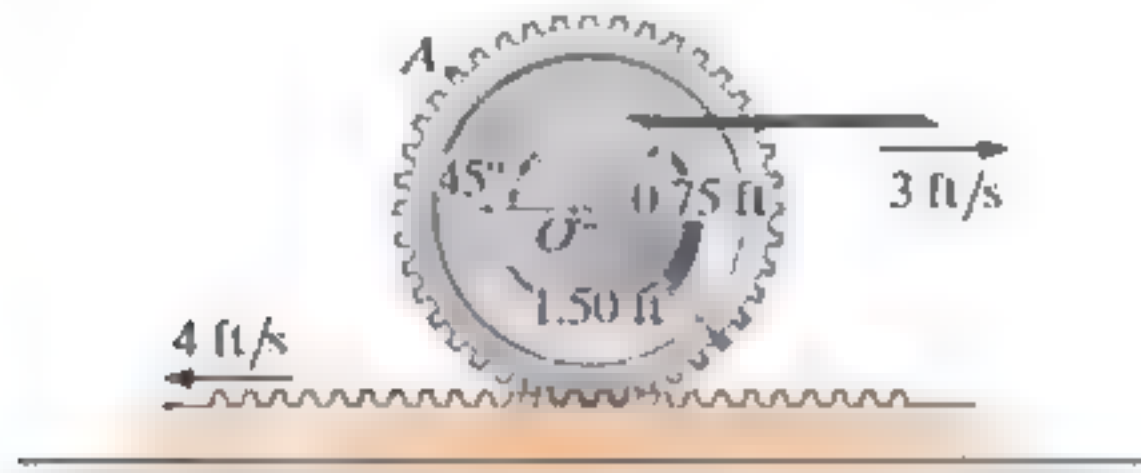
Probs. 16-64-65

**16-66.** Determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro  $O$  en el instante mostrado.



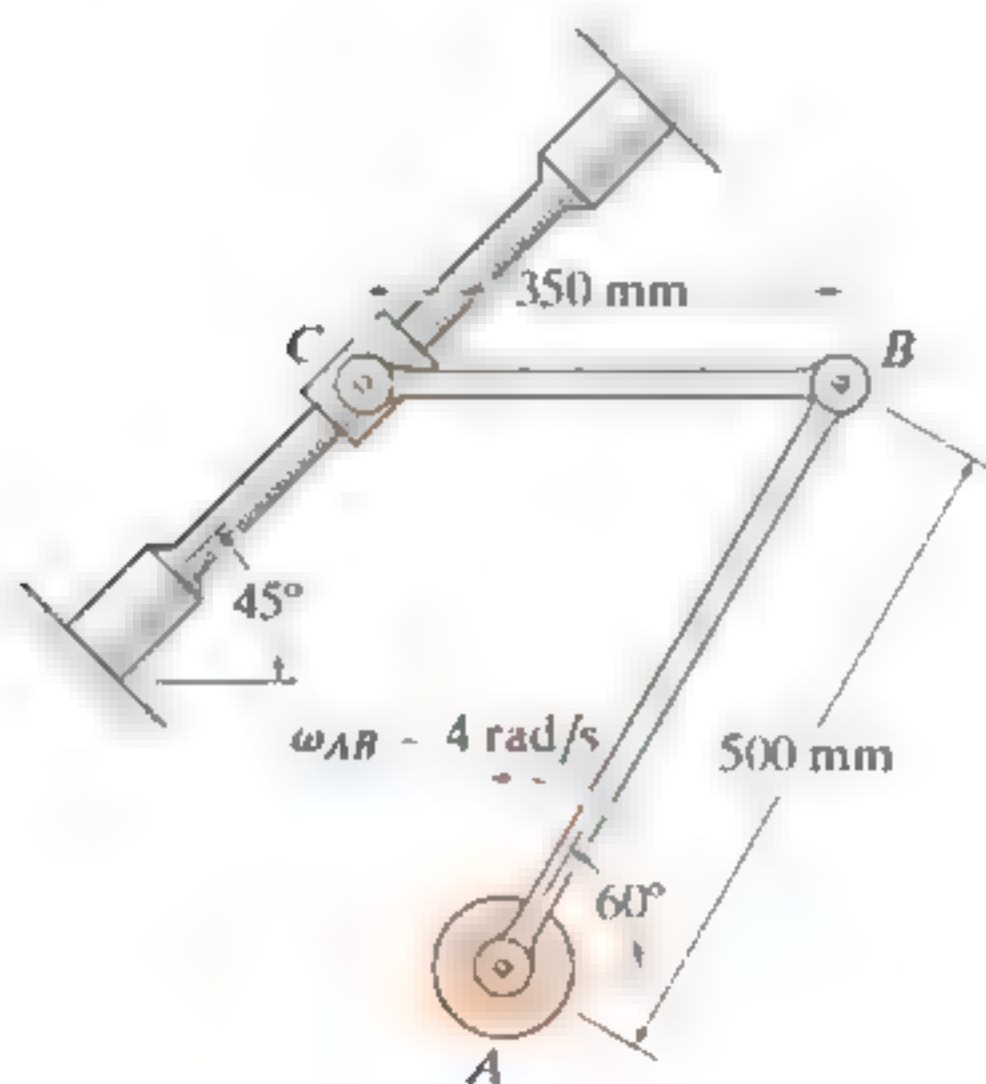
Prob. 16-66

**16-67.** Determine la velocidad del punto  $A$  sobre el borde del engrane en el instante indicado.



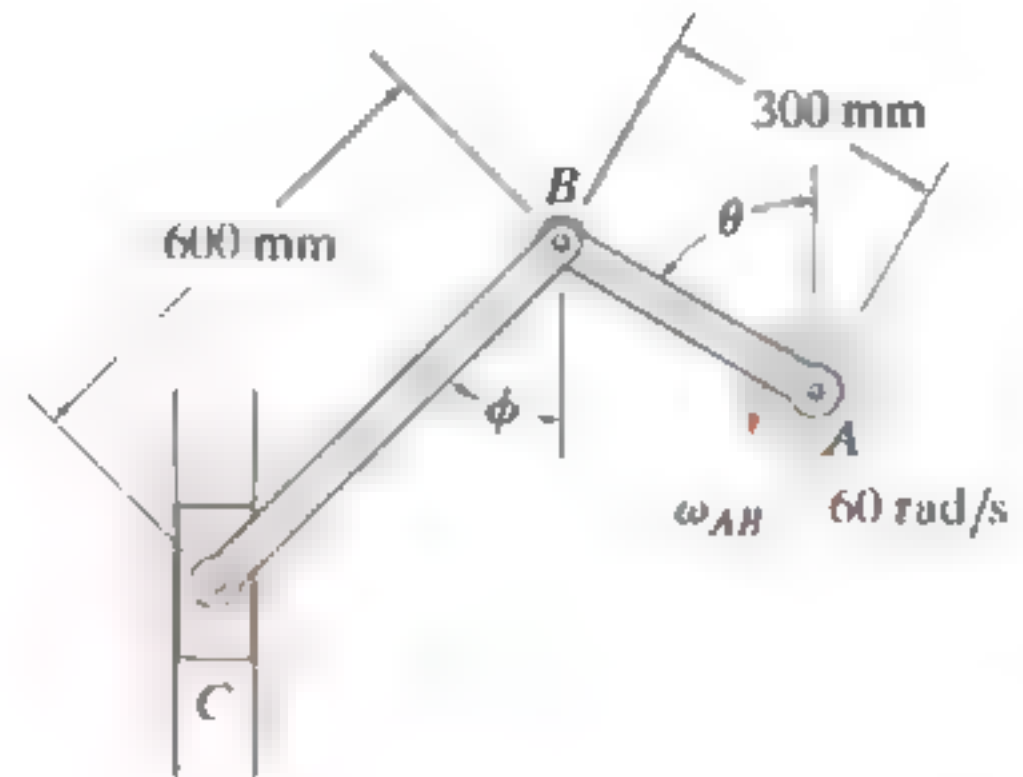
Prob. 16-67

**\*16-68.** Si se sabe que la velocidad angular del eslabón  $AB$  es  $\omega_{AB} = 4 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad del collarín en  $C$  y la velocidad angular del eslabón  $CB$  en el instante mostrado. El eslabón  $CB$  está en posición horizontal en este instante.



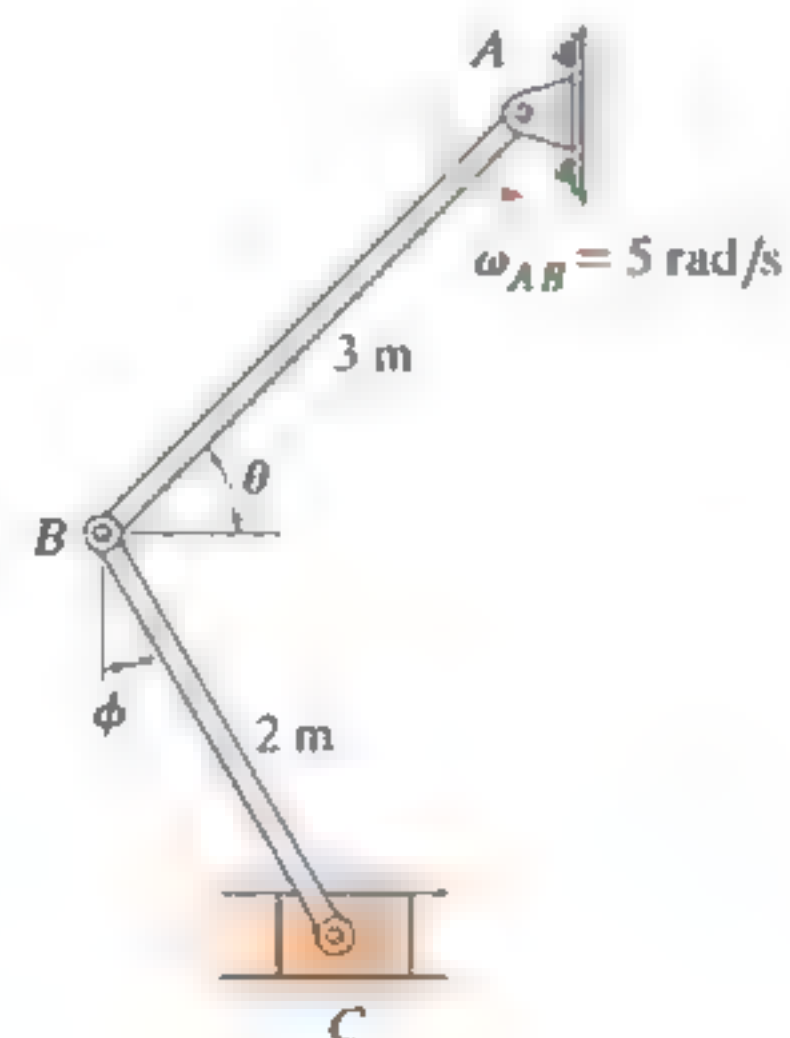
Prob. 16-68

**16-69.** La varilla  $AB$  gira con una velocidad angular de  $\omega_{AB} = 60 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del deslizador  $C$  en el instante  $\theta = 60^\circ$  y  $\phi = 45^\circ$ . Asimismo, grafique la posición de la barra  $BC$  cuando  $\theta = 30^\circ, 60^\circ$  y  $90^\circ$  para mostrar su movimiento plano general.



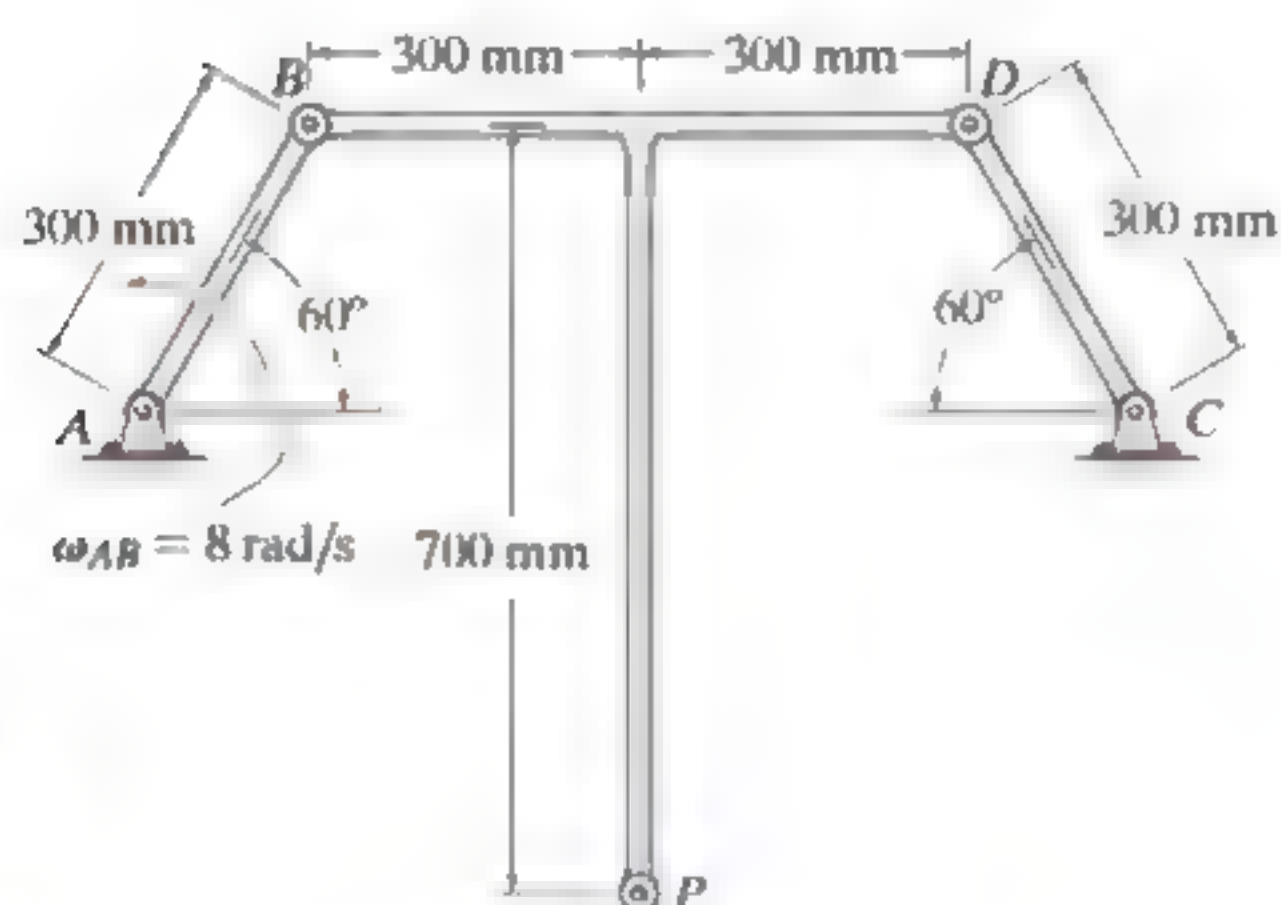
Prob. 16-69

**16-70.** La velocidad angular del eslabón  $AB$  es  $\omega_{AB} = 5 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del bloque  $C$  y la velocidad angular del eslabón  $BC$  en el instante  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 30^\circ$ . Además, grafique la posición del eslabón  $CB$  cuando  $\theta = 45^\circ, 60^\circ$  y  $75^\circ$  para mostrar su movimiento plano general.



Prob. 16-70

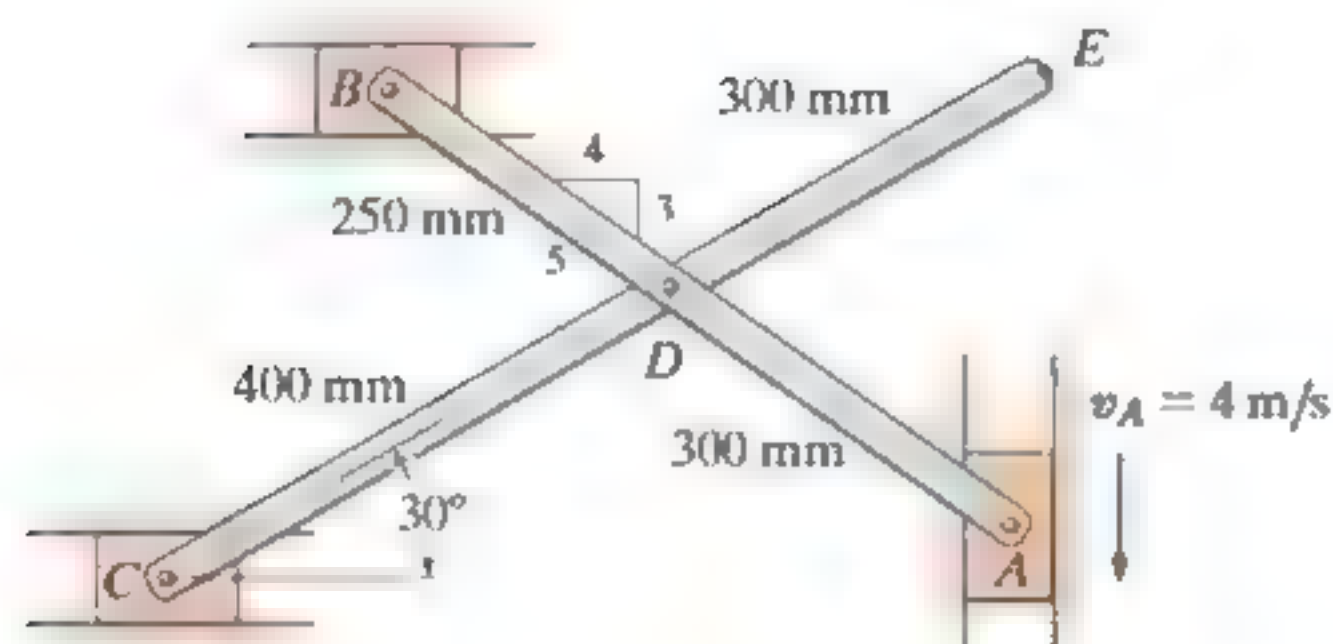
**16-71.** Los eslabones similares  $AB$  y  $CD$  giran alrededor de los pasadores fijos en  $A$  y  $C$ . Si  $AB$  tiene una velocidad angular  $\omega_{AB} = 8 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular de  $BDP$  y la velocidad del punto  $P$ .



Prob. 16-71

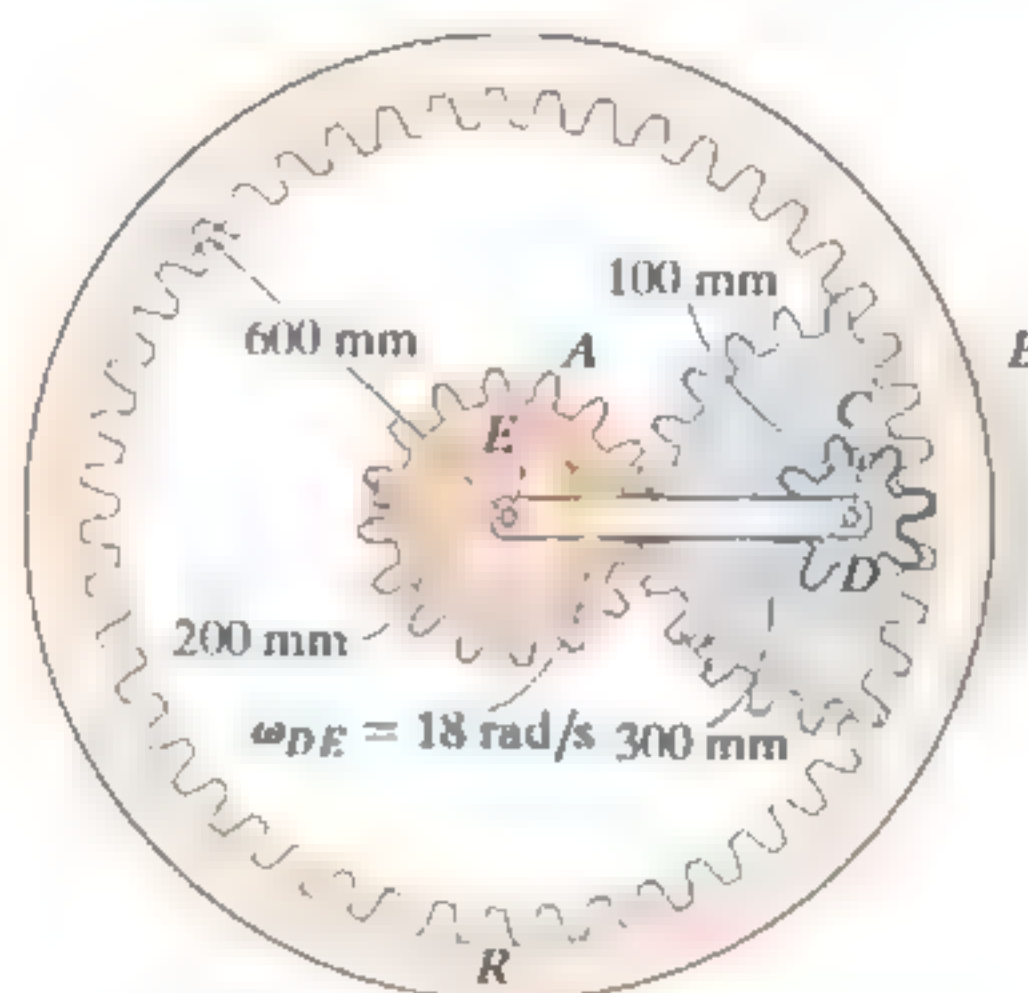
**\*16-72.** Si el bloque deslizable  $A$  se mueve hacia abajo a  $v_A = 4 \text{ m/s}$ , determine las velocidades de los bloques  $B$  y  $C$  en el instante mostrado.

**16-73.** Si el bloque deslizable  $A$  se mueve hacia abajo a  $v_A = 4 \text{ m/s}$ , determine la velocidad del punto  $E$  en el instante mostrado.



Probs. 16-72/73

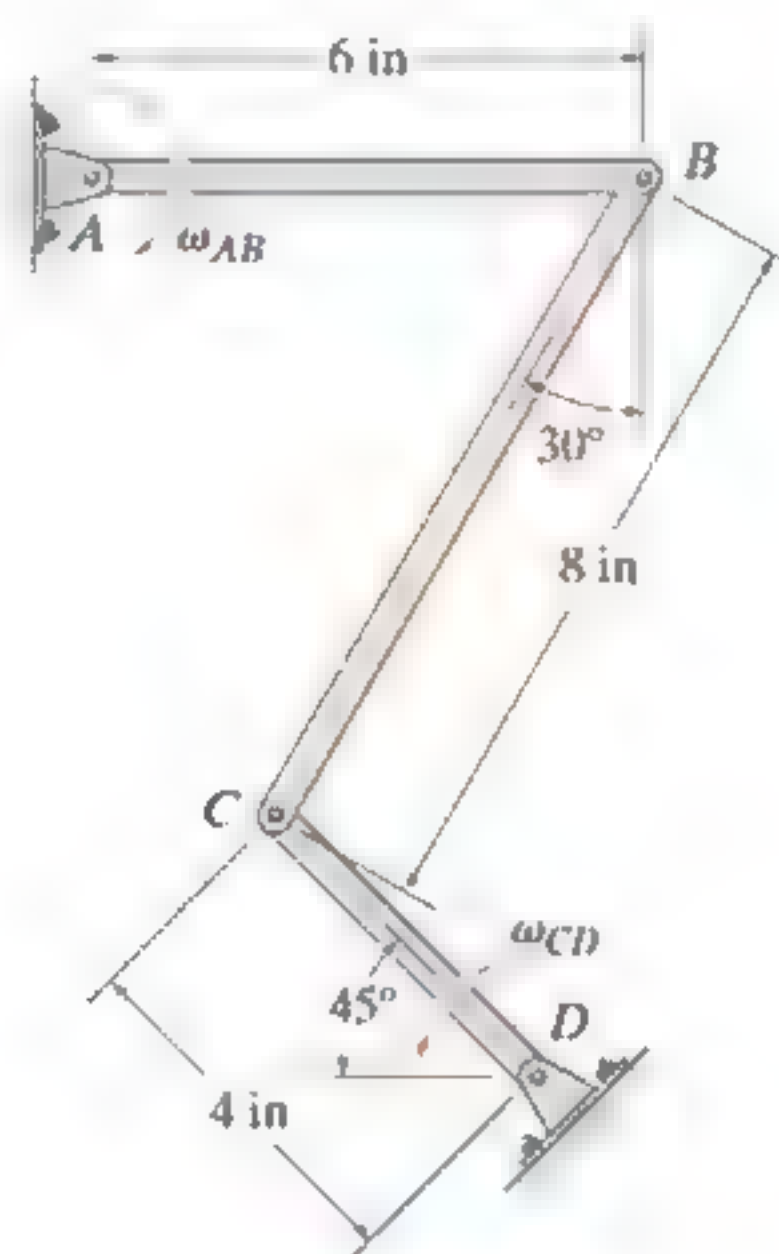
**16-74.** El tren de engranes epicíclicos se compone de un engrane sol  $A$ , el cual está acoplado al engrane satélite  $B$ . Este engrane tiene una masa interna  $C$  la cual está fija en  $B$  y engrana con la corona dentada  $R$  fija. Si el eslabón  $DE$  conectado por medio de un pasador a  $B$  y  $C$  gira a  $\omega_{DE} = 18 \text{ rad/s}$  alrededor del pasador  $E$ , determine las velocidades angulares de los engranes satélite y sol.



Prob. 16-74

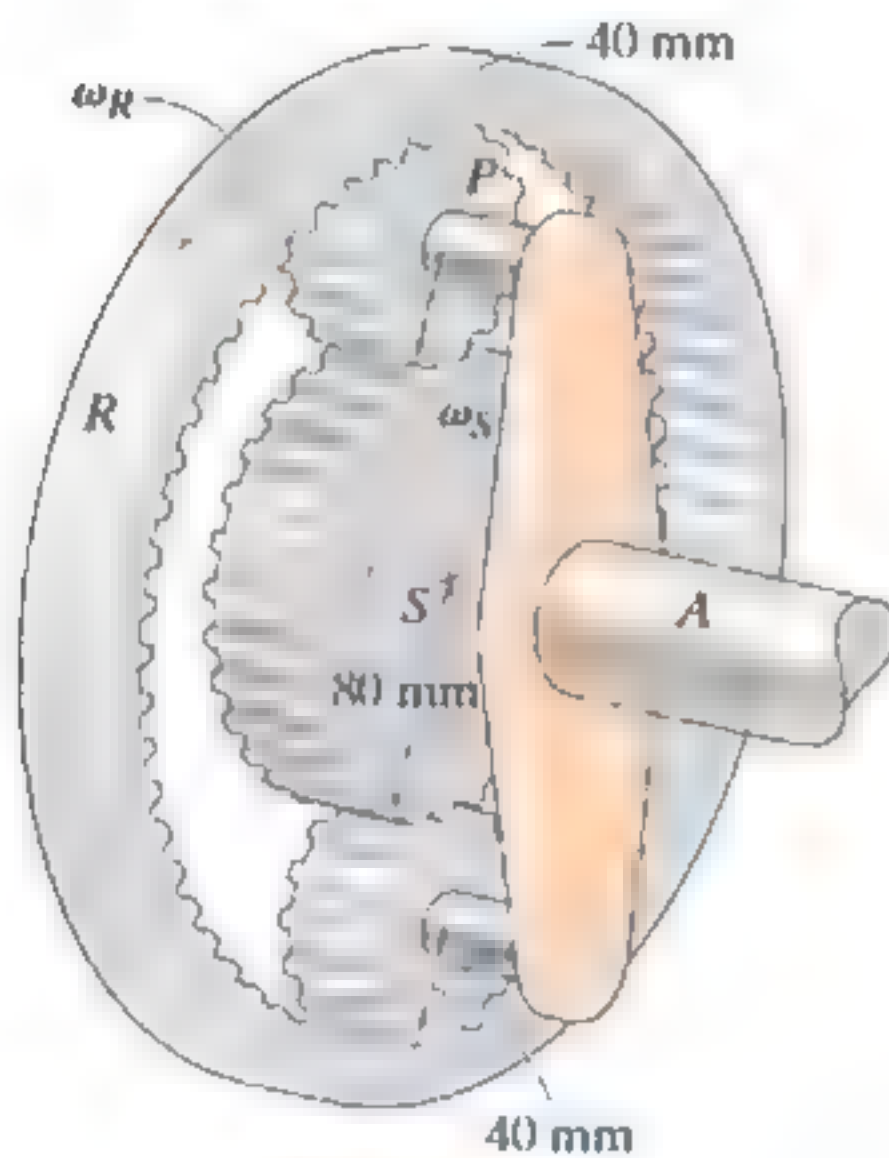
**16-75.** Si el eslabón  $AB$  gira a  $\omega_{AB} = 3 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular del eslabón  $CD$  en el instante indicado.

**\*16-76.** Si el eslabón  $CD$  gira a  $\omega_{CD} = 5 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular del eslabón  $AB$  en el instante indicado.



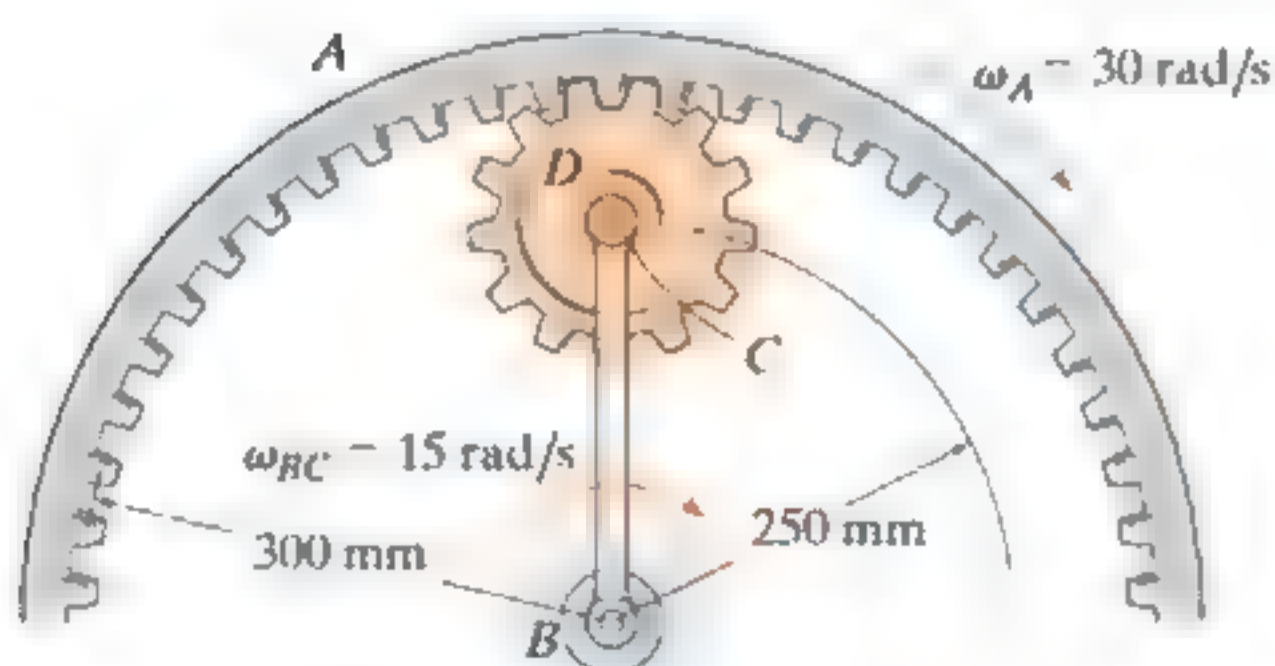
Probs. 16-75/76

**16-77.** El sistema de engranes planetarios se utiliza en la transmisión automática de un automóvil. Bloquear o liberar determinados engranes tiene la ventaja de hacer que el automóvil funcione a diferentes rapidezces. Considere el caso donde la corona dentada  $R$  se mantiene fija,  $\omega_R = 0$  y el engrane sol  $S$  gira a  $\omega_S = 5 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad angular de cada uno de los engranes planeta  $P$  y la flecha  $A$ .



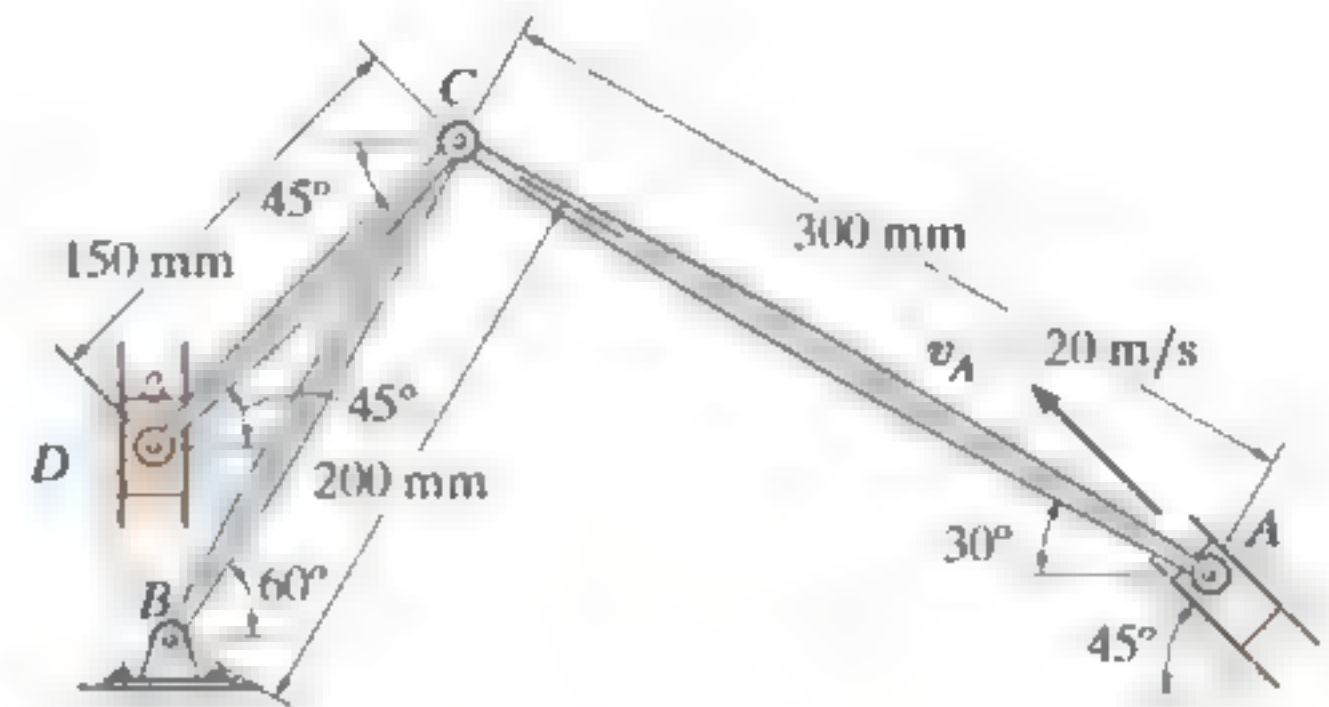
Prob. 16-77

**16-78.** Si la corona dentada  $A$  gira en sentido horario con una velocidad angular de  $\omega_A = 30 \text{ rad/s}$ , mientras que el eslabón  $BC$  gira en sentido horario con una velocidad angular de  $\omega_{BC} = 15 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular del engrane  $D$ .



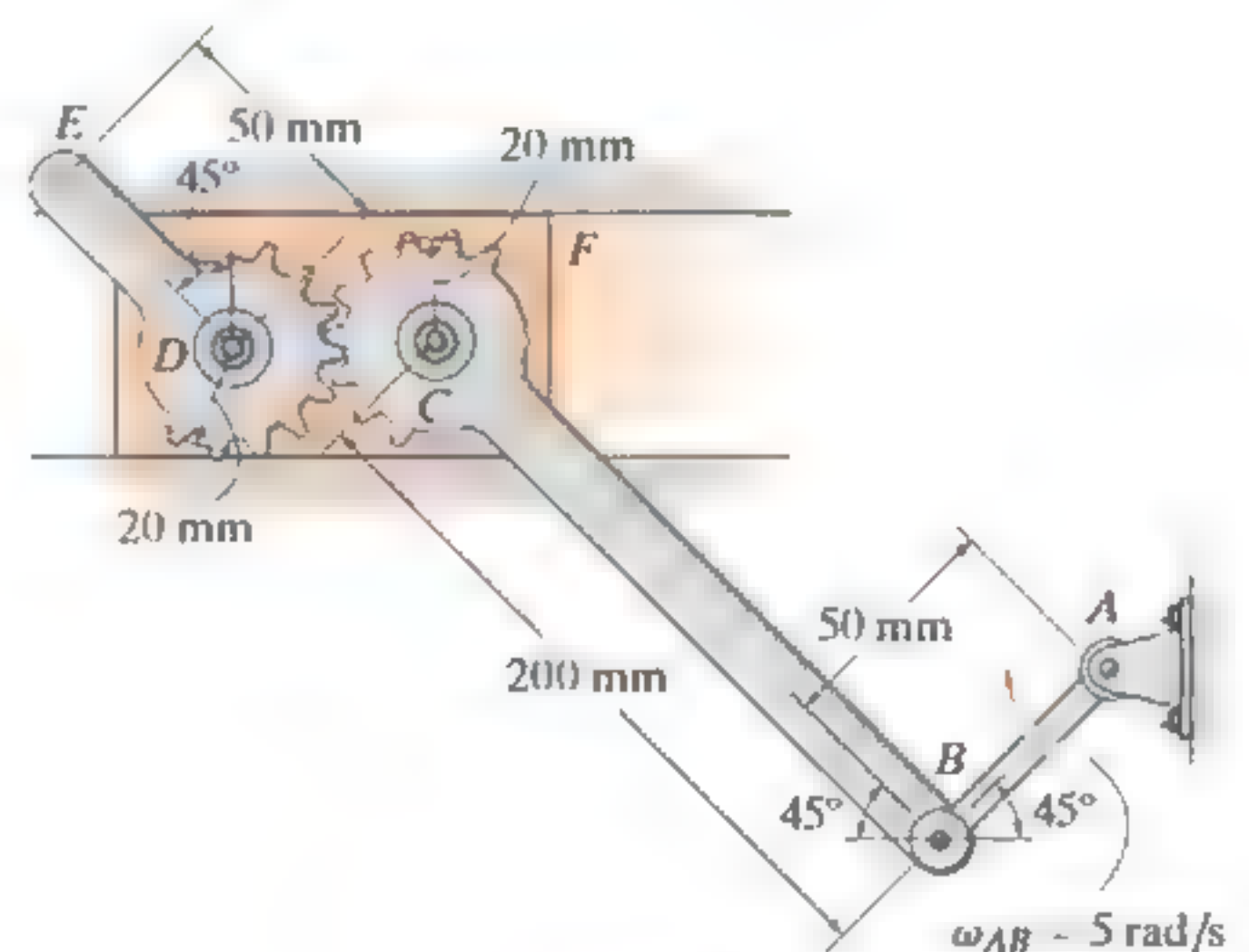
Prob. 16-78

**16-79.** El mecanismo que se ilustra se utiliza en una máquina de remachar. Se compone de un pistón motriz  $A$ , tres eslabones y una remachadora que está unida al bloque deslizante  $D$ . Determine la velocidad de  $D$  en el instante indicado, cuando el pistón en  $A$  se desplaza a  $v_A = 20 \text{ m/s}$ .



Prob. 16-79

**\*16-80.** El mecanismo se utiliza en una máquina para la fabricación de un producto de siambre. Debido al movimiento de rotación del eslabón  $AB$  y el deslizamiento del bloque  $F$ , el engrane segmentario con palanca  $DE$  experimenta un movimiento plano general. Si  $AB$  gira a  $\omega_{AB} = 5 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad del punto  $E$  en el instante indicado.



Prob. 16-80

## 16.6 Centro instantáneo de velocidad cero

La velocidad de cualquier punto  $B$  localizado en un cuerpo rígido puede obtenerse de una manera muy directa al seleccionar el punto base  $A$  como un punto de *velocidad cero* en el instante considerado. En este caso,  $\mathbf{v}_A = 0$  y, por consiguiente, la ecuación de velocidad,  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ , se vuelve  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ . En el caso de un cuerpo que tenga movimiento plano general, el punto  $A$  así seleccionado se llama *centro instantáneo (CI) de velocidad cero* y se ubica en el *eje instantáneo de velocidad cero*. Este eje siempre es perpendicular al plano de movimiento y la intersección del eje con el plano define la ubicación del CI. Como el punto  $A$  coincide con el CI, entonces  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/CI}$  y, por lo tanto, el punto  $B$  se mueve momentáneamente alrededor del CI en una *trayectoria circular*, expresado de otra manera, el cuerpo parece girar alrededor del eje instantáneo. La *magnitud* de  $\mathbf{v}_B$  es simplemente  $v_B = \omega r_{B/CI}$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular del cuerpo. Debido al movimiento circular, la *dirección* de  $\mathbf{v}_B$  siempre debe ser *perpendicular* a  $\mathbf{r}_{B/CI}$ .

Por ejemplo, el CI de la rueda de la bicicleta de la figura 16-17 está en el punto de contacto con el suelo. Ahí los rayos son un tanto visibles, mientras que en la parte superior de rueda se ven borrosos. Si nos imaginamos que la rueda está momentáneamente fija por medio de un pasador en este punto, se pueden determinar las velocidades de varios puntos con  $v = \omega r$ . Aquí, las distancias radiales mostradas en la foto (fig. 16-17) deben determinarse mediante la geometría de la rueda.



(© R. C. Hibbeler)

Fig. 16-17

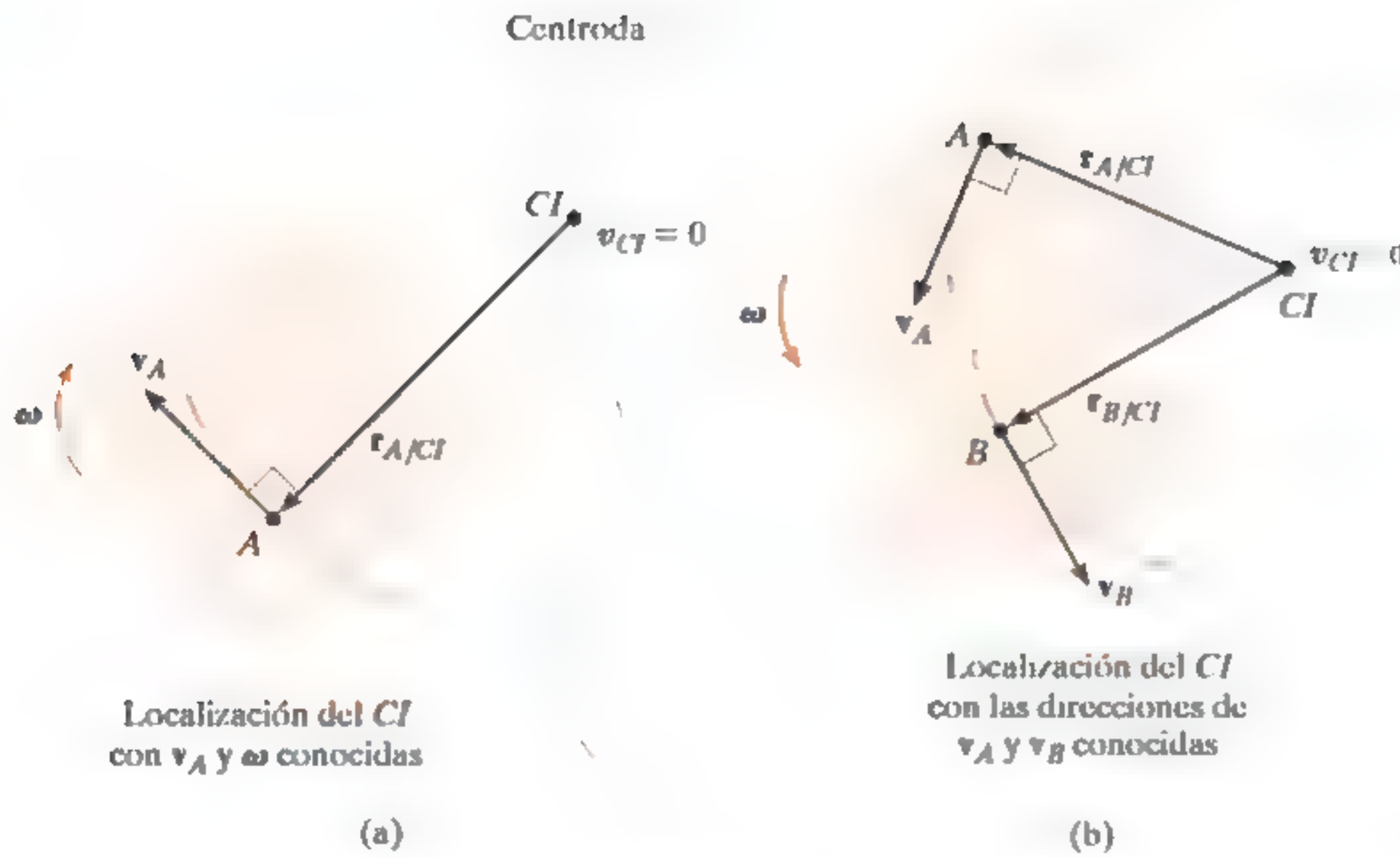
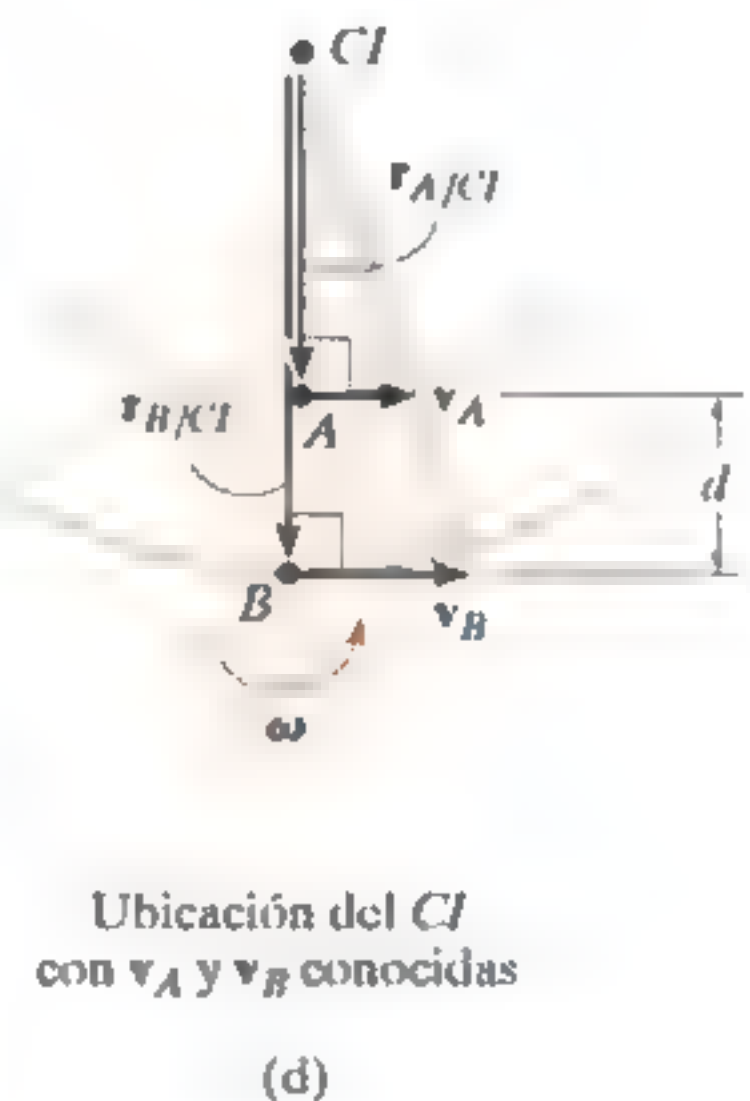
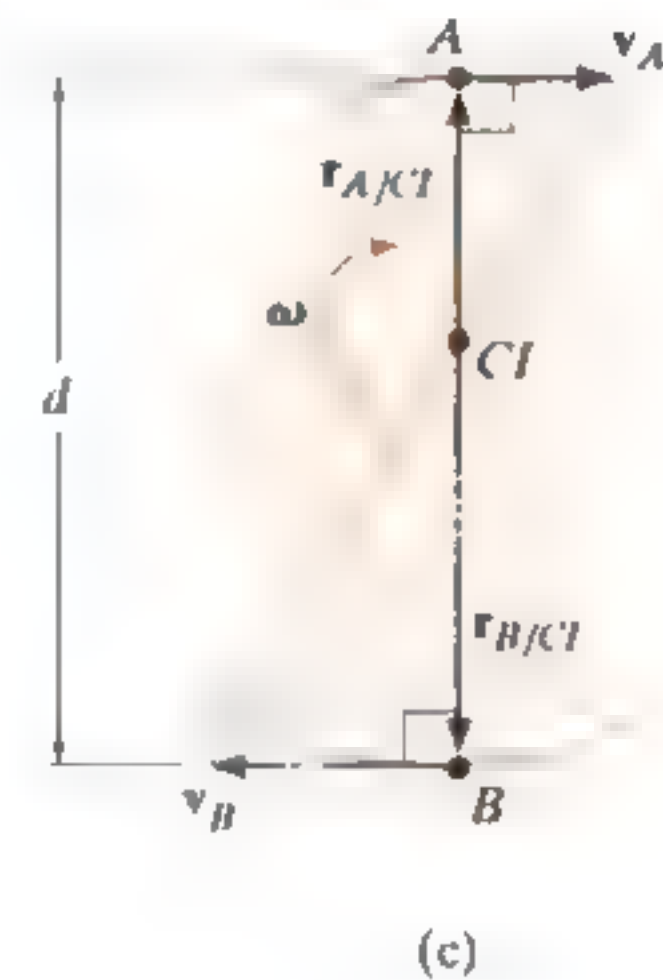


Fig. 16-18

**Localización del  $CI$**  Para localizar el  $CI$  podemos partir del hecho de que la *velocidad* de un punto en el cuerpo *siempre es perpendicular al vector de posición relativa* dirigido desde  $CI$  hacia el punto. Se presentan varias posibilidades:

- Se conocen la velocidad  $v_A$  de un punto  $A$  en el cuerpo y la velocidad angular  $\omega$  del cuerpo (fig. 16-18a). En este caso, el  $CI$  se encuentra a lo largo de la línea trazada perpendicular a  $v_A$  en  $A$ , de modo que la distancia de  $A$  al  $CI$  es  $r_{A/CI} = v_A/\omega$ . Observe que el  $CI$  queda arriba a la derecha de  $A$ , ya que  $v_A$  debe provocar una velocidad angular en sentido horario  $\omega$  alrededor del  $CI$ .
- Las líneas de acción de dos velocidades no paralelas  $v_A$  y  $v_B$  se conocen (fig. 16-18b). Trace en los puntos  $A$  y  $B$  segmentos de línea perpendiculares a  $v_A$  y  $v_B$ . Al extender estas perpendiculares hasta su punto de intersección como se muestra, se localiza el  $CI$  en el instante considerado.
- La magnitud y dirección de dos velocidades paralelas  $v_A$  y  $v_B$  se conocen. En este caso, la ubicación del  $CI$  se determina mediante triángulos proporcionales. En las figuras 16-18c y d se muestran algunos ejemplos. En ambos casos,  $r_{A/CI} = v_A/\omega$  y  $r_{B/CI} = v_B/\omega$ . Si  $d$  es una distancia conocida entre los puntos  $A$  y  $B$ , entonces en la figura 16-18c,  $r_{A/CI} + r_{B/CI} = d$  y en la figura 16-18d,  $r_{B/CI} - r_{A/CI} = d$ .



Cuando la tabla se desliza hacia abajo a la izquierda experimenta un movimiento plano general. Como se conocen las direcciones de las velocidades de sus extremos  $A$  y  $B$ , el  $CI$  se localiza como se indica. En este instante la tabla girará momentáneamente alrededor de este punto. Dibuje la tabla en otras varias posiciones y establezca el  $CI$  en cada caso. (© R. C. Hibbeler)

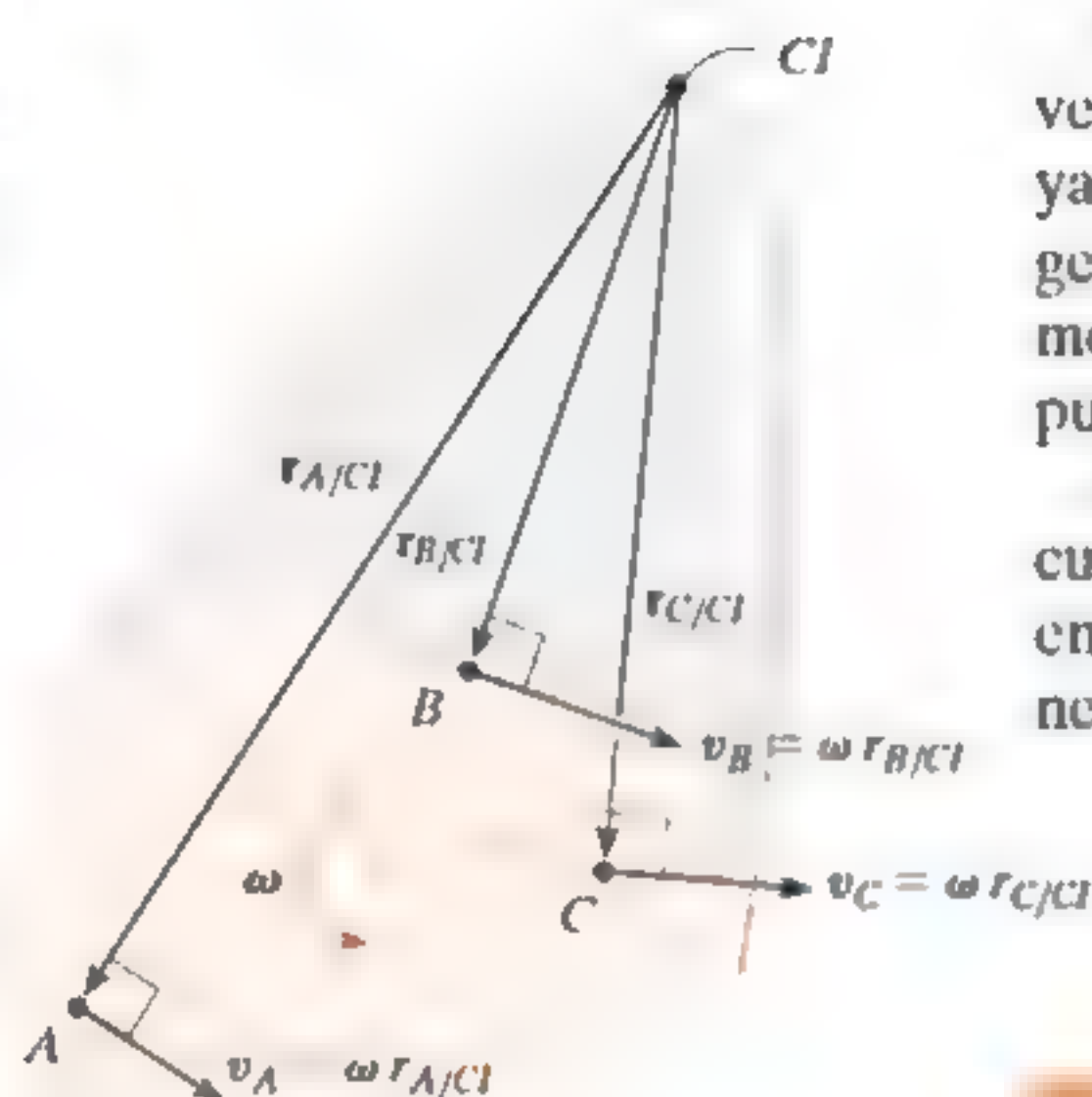
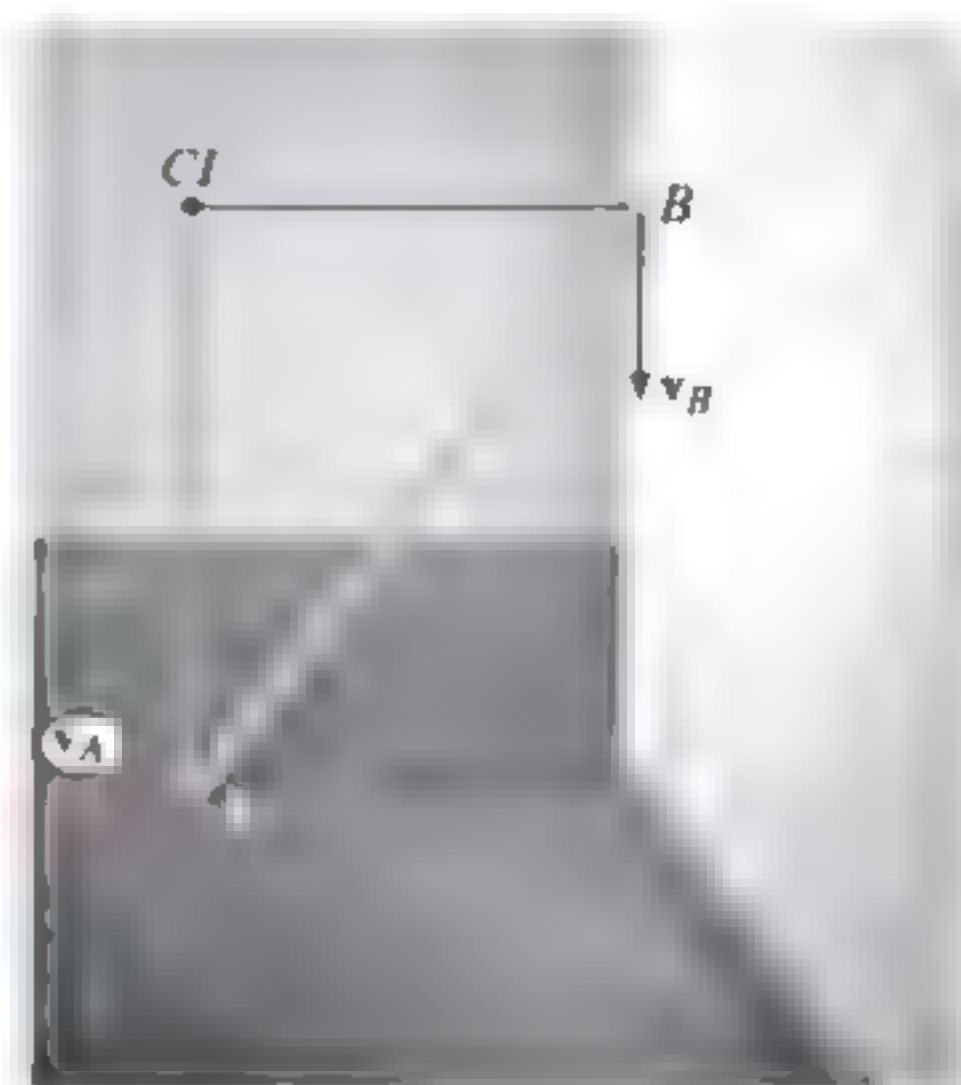


Fig. 16-19

Dese cuenta de que el punto seleccionado como el centro instantáneo de velocidad cero del cuerpo *sólo puede utilizarse en el instante considerado*, ya que el cuerpo cambia de posición de un instante al siguiente. El lugar geométrico de los puntos que definen la ubicación del  $CI$  durante el movimiento del cuerpo se llama *centroda* (fig. 16-18a) y, por lo tanto, cada punto en la centroda actúa como el  $CI$  del cuerpo sólo por un instante.

Aun cuando el  $CI$  puede aprovecharse para determinar la velocidad de cualquier punto de un cuerpo, por lo general *no tiene aceleración cero* y, en consecuencia, *no se le debería utilizar para determinar las aceleraciones de los puntos de un cuerpo*.

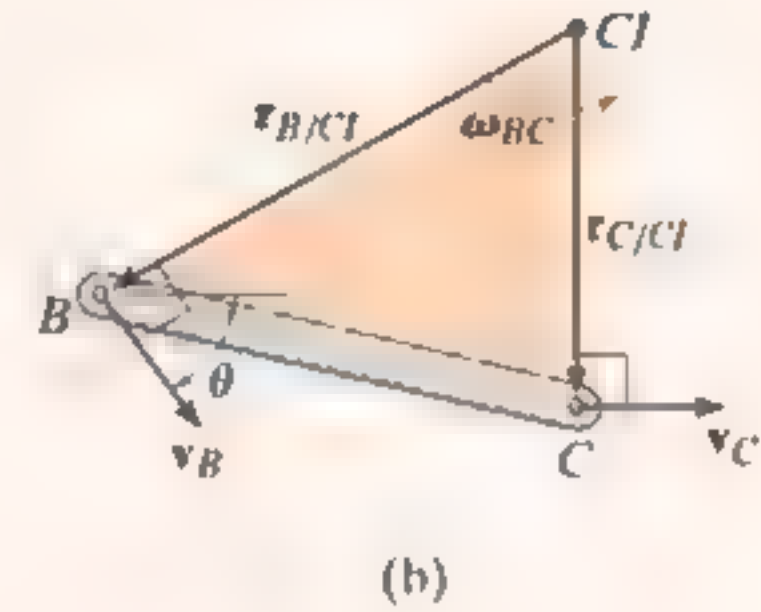
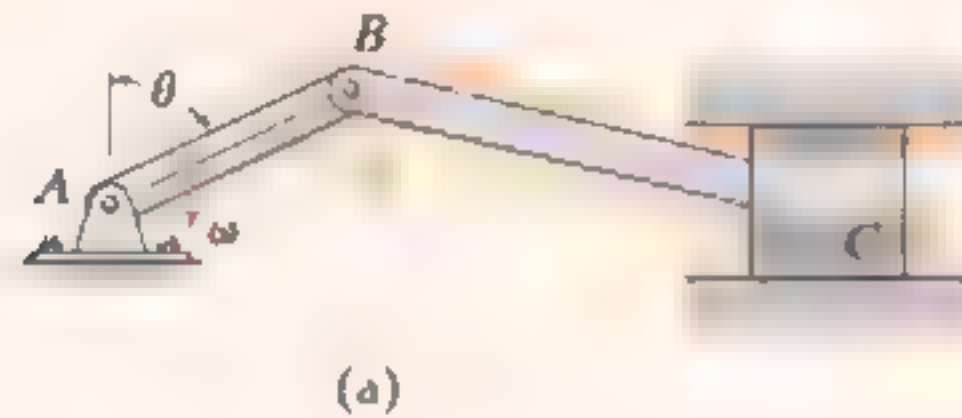
### Procedimiento para el análisis

La velocidad de un punto de un cuerpo sometido a movimiento plano general puede determinarse con referencia a su centro instantáneo de velocidad cero, siempre que primero se establezca la ubicación del  $CI$  usando uno de los tres métodos antes descritos.

- Como se muestra en el diagrama cinemático de la figura 16-19, nos imaginamos el cuerpo como “extendido y fijo mediante un pasador” en el  $CI$  de modo que, en el instante considerado, gira alrededor de este pasador con su velocidad angular  $\omega$ .
- La *magnitud* de la velocidad de cada uno de los puntos arbitrarios  $A$ ,  $B$  y  $C$  en el cuerpo puede determinarse con la ecuación  $v = \omega r$ , donde  $r$  es la distancia radial del  $CI$  a cada punto.
- La línea de acción de cada vector de velocidad  $\mathbf{v}$  es *perpendicular* a su línea radial asociada  $\mathbf{r}$ , y la velocidad tiene un *sentido de dirección* que tiende a mover el punto de una manera consistente con la rotación angular  $\omega$  de la línea radial (fig. 16-19).

## EJEMPLO

Demuestre cómo se ubica el centro instantáneo de velocidad cero para (a) el elemento  $BC$  que se ilustra en la figura 16-20a y (b) el eslabón  $CB$  que se muestra en la figura 16-20c.



## SOLUCIÓN

**Parte (a).** Como se indica en la figura 16-20a, el punto  $B$  describe una trayectoria circular de modo que  $v_B$  es perpendicular a  $AB$ . Por consiguiente, actúa a un ángulo  $\theta$  desde la horizontal, como se muestra en la figura 16-20b. El movimiento del punto  $B$  hace que el pistón se mueva hacia delante *de manera horizontal* con una velocidad  $v_C$ . Cuando las líneas se trazan perpendiculares a  $v_B$  y  $v_C$  (fig. 16-20b), se intersecan en el  $CI$ .

**Parte (b).** Los puntos  $B$  y  $C$  siguen trayectorias circulares de movimiento, ya que cada uno de los eslabones  $AB$  y  $DC$  se someten a rotación alrededor de un eje fijo (fig. 16-20c). Como la velocidad siempre es tangente a la trayectoria en el instante considerado,  $v_C$  en la varilla  $DC$  y  $v_B$  en la varilla  $AB$  están dirigidas verticalmente hacia abajo, a lo largo del eje del eslabón  $CB$  (fig. 16-20d). Líneas radiales trazadas perpendiculares a estas dos velocidades forman líneas paralelas que se intersecan en "infinito", es decir,  $r_{C/CI} \rightarrow \infty$  y  $r_{B/CI} \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $\omega_{CB} = (v_C/r_{C/CI}) \rightarrow 0$ . Por consiguiente, el eslabón  $CB$  se traslada momentáneamente. Un instante después, sin embargo,  $CB$  quedará en una posición inclinada, lo cual hace que el  $CI$  se mueva a alguna ubicación finita.

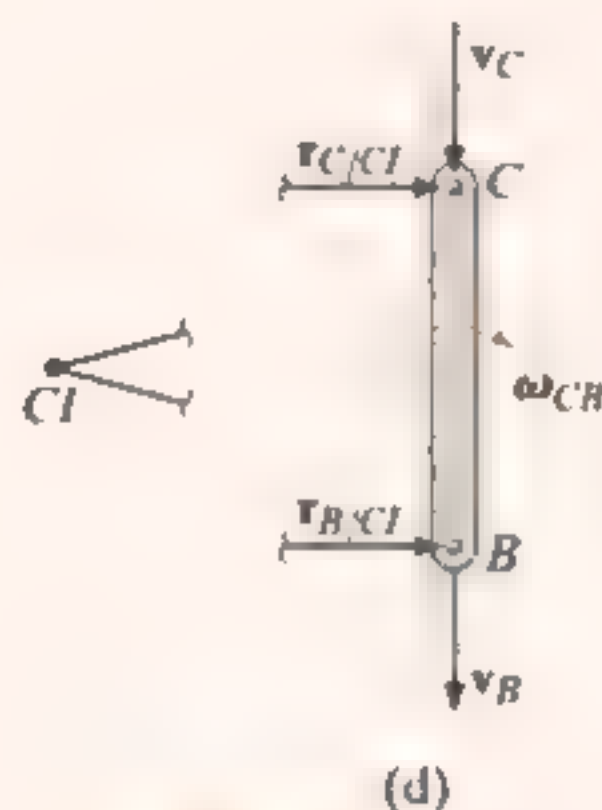
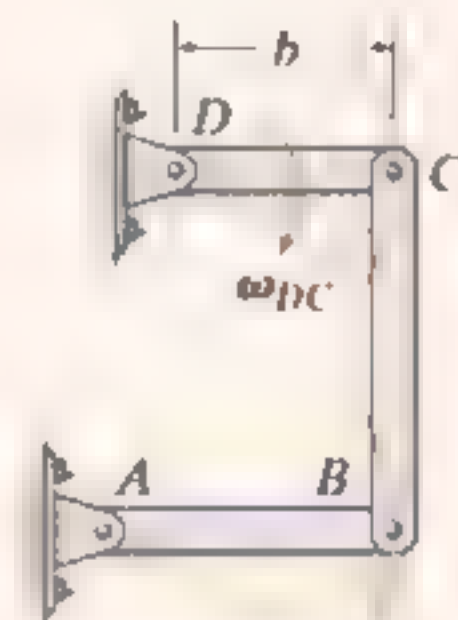
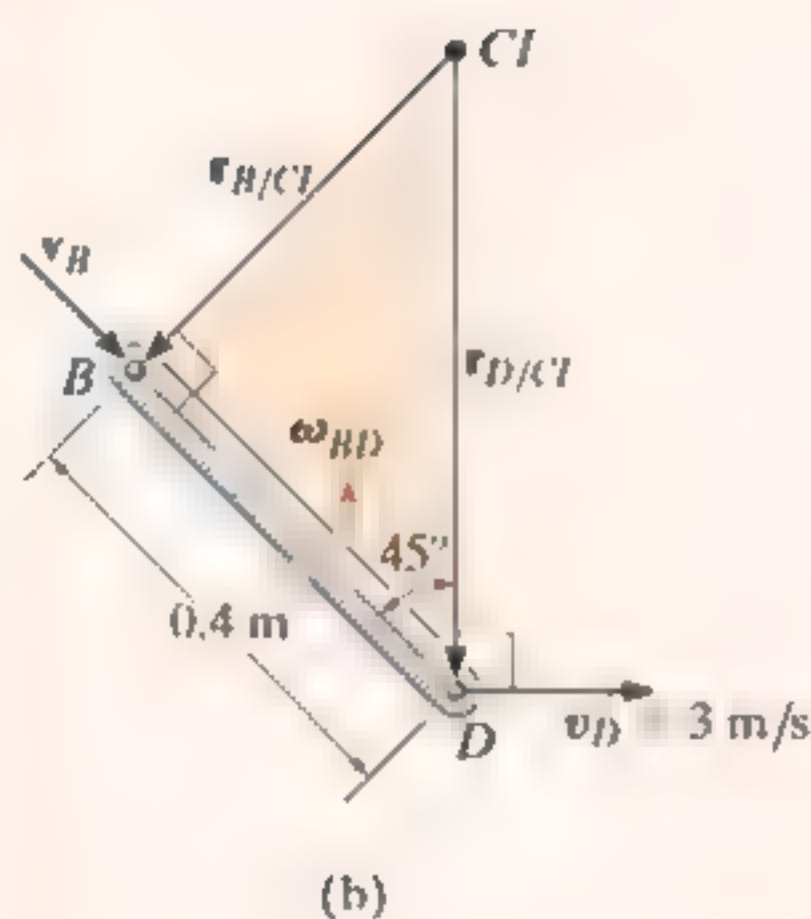
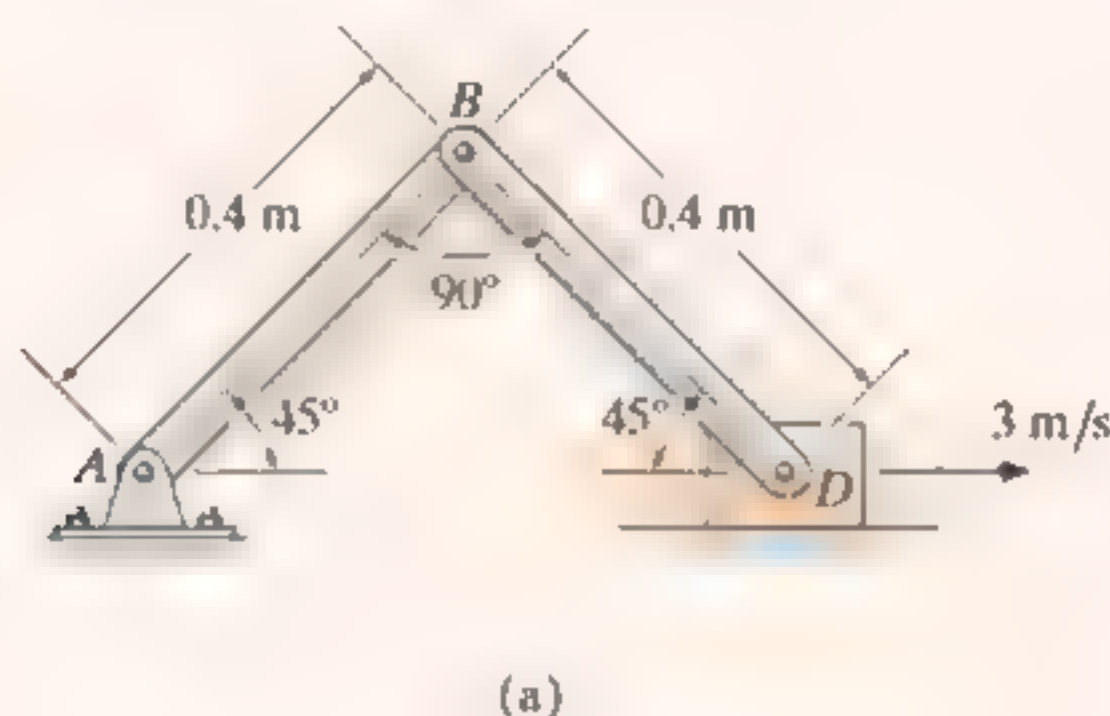


Fig. 16-20

## EJEMPLO 16.11

El bloque  $D$  en la figura 16-21a se mueve con una rapidez de 3 m/s. Determine las velocidades angulares de los eslabones  $BD$  y  $AB$  en el instante que se muestra.



## SOLUCIÓN

A medida que  $D$  se mueve a la derecha, hace que  $AB$  gire en sentido horario alrededor del punto  $A$ . Por consiguiente,  $v_B$  está dirigida perpendicular a  $AB$ . El centro instantáneo de velocidad cero de  $BD$  está en la intersección de los segmentos de línea trazados perpendiculares a  $v_B$  y  $v_D$  (fig. 16-21b). Por la geometría,

$$r_{B/CI} = 0.4 \tan 45^\circ \text{ m} = 0.4 \text{ m}$$

$$r_{D/CI} = \frac{0.4 \text{ m}}{\cos 45^\circ} = 0.5657 \text{ m}$$

Como se conoce la magnitud de  $v_D$ , la velocidad angular del eslabón  $BD$  es

$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/CI}} = \frac{3 \text{ m/s}}{0.5657 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

La velocidad de  $B$  es, por consiguiente,

$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/CI}) = 5.30 \text{ rad/s} (0.4 \text{ m}) = 2.12 \text{ m/s} \curvearrowleft 45^\circ$$

Según la figura 16-21c, la velocidad angular de  $AB$  es

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

*Resp.*

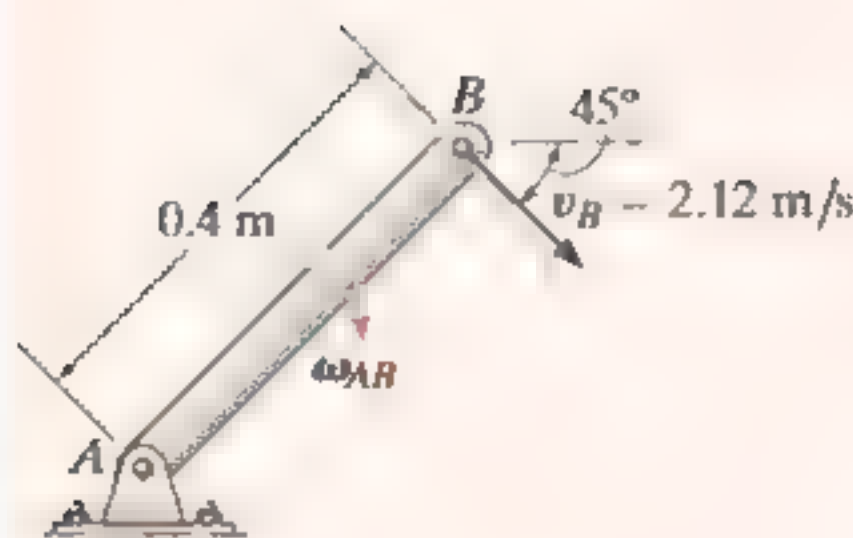
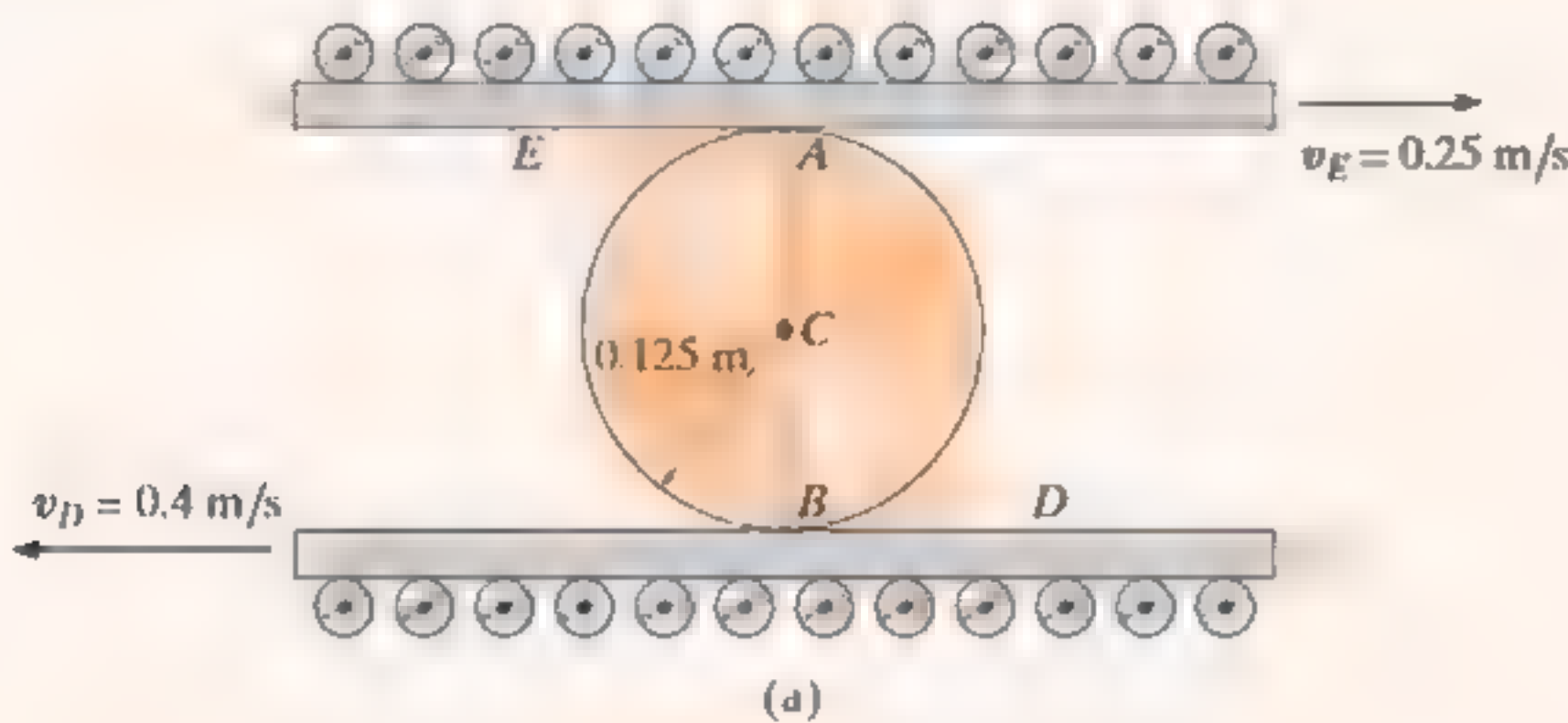


Fig. 16-21

**NOTA:** Trate y resuelva este problema mediante la aplicación de  $v_D = v_B + v_{D/B}$  al elemento  $BD$ .

## EJEMPLO

El cilindro que se muestra en la figura 16-22a rueda sin deslizarse entre las dos placas móviles  $E$  y  $D$ . Determine la velocidad angular del cilindro y la velocidad de su centro  $C$ .



## SOLUCIÓN

Como no hay deslizamiento, los puntos de contacto  $A$  y  $B$  en el cilindro tienen las mismas velocidades que las placas  $E$  y  $D$ , respectivamente. Además, las velocidades  $v_A$  y  $v_B$  son *paralelas*, de modo que por la proporcionalidad de los triángulos rectángulos el  $CI$  se encuentra en un punto sobre la línea  $AB$  (fig. 16-22b). Si suponemos que este punto está a una distancia  $x$  de  $B$ , entonces

$$\begin{aligned} v_B &= \omega x; & 0.4 \text{ m/s} &= \omega x \\ v_A &= \omega(0.25 \text{ m} - x); & 0.25 \text{ m/s} &= \omega(0.25 \text{ m} - x) \end{aligned}$$

Si se divide una ecuación entre la otra se elimina  $\omega$  y se obtiene

$$\begin{aligned} 0.4(0.25 - x) &= 0.25x \\ x &= \frac{0.1}{0.65} = 0.1538 \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad angular del cilindro es

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{0.1538 \text{ m}} = 2.60 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

La velocidad del punto  $C$  es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} v_C &= \omega r_{C/CI} = 2.60 \text{ rad/s} (0.1538 \text{ m} - 0.125 \text{ m}) \\ &= 0.0750 \text{ m/s} \leftarrow \end{aligned}$$

*Resp.*

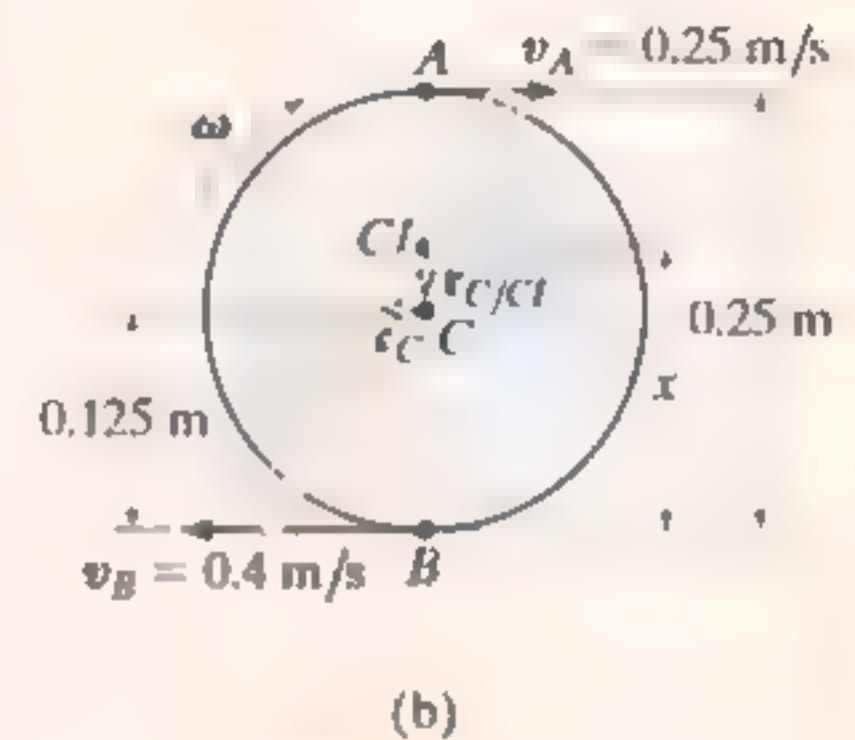
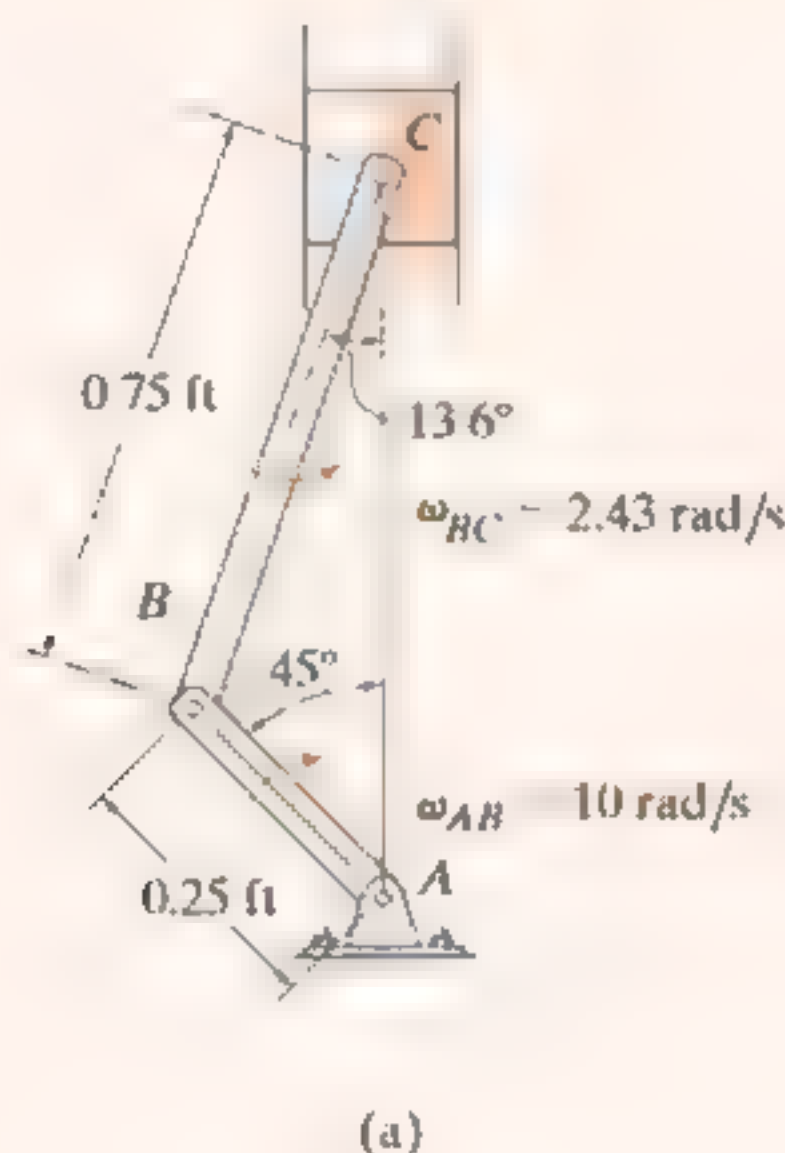


Fig. 16-22

## EJEMPLO 16.12

El cigüeñal  $AB$  gira en sentido horario con una velocidad angular de  $10 \text{ rad/s}$  (fig. 16-23a). Determine la velocidad del pistón en el instante que se muestra.



## SOLUCIÓN

El cigüeñal gira alrededor de un eje fijo y, por lo tanto, la velocidad del punto  $B$  es

$$v_B = 10 \text{ rad/s} (0.25 \text{ ft}) = 2.50 \text{ ft/s} \angle 45^\circ$$

Como las direcciones de las velocidades de  $B$  y  $C$  se conocen, entonces el  $CI$  de la biela  $BC$  se encuentra en la intersección de las líneas extendidas a partir de estos puntos, perpendiculares a  $v_B$  y  $v_C$  (fig. 16-23b). Las magnitudes de  $r_{B/CI}$  y  $r_{C/CI}$  se obtienen con la geometría del triángulo y la ley de los senos, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{0.75 \text{ ft}}{\sin 45^\circ} &= \frac{r_{B/CI}}{\sin 76.4^\circ} \\ r_{B/CI} &= 1.031 \text{ ft} \\ \frac{0.75 \text{ ft}}{\sin 45^\circ} &= \frac{r_{C/CI}}{\sin 58.6^\circ} \\ r_{C/CI} &= 0.9056 \text{ ft} \end{aligned}$$

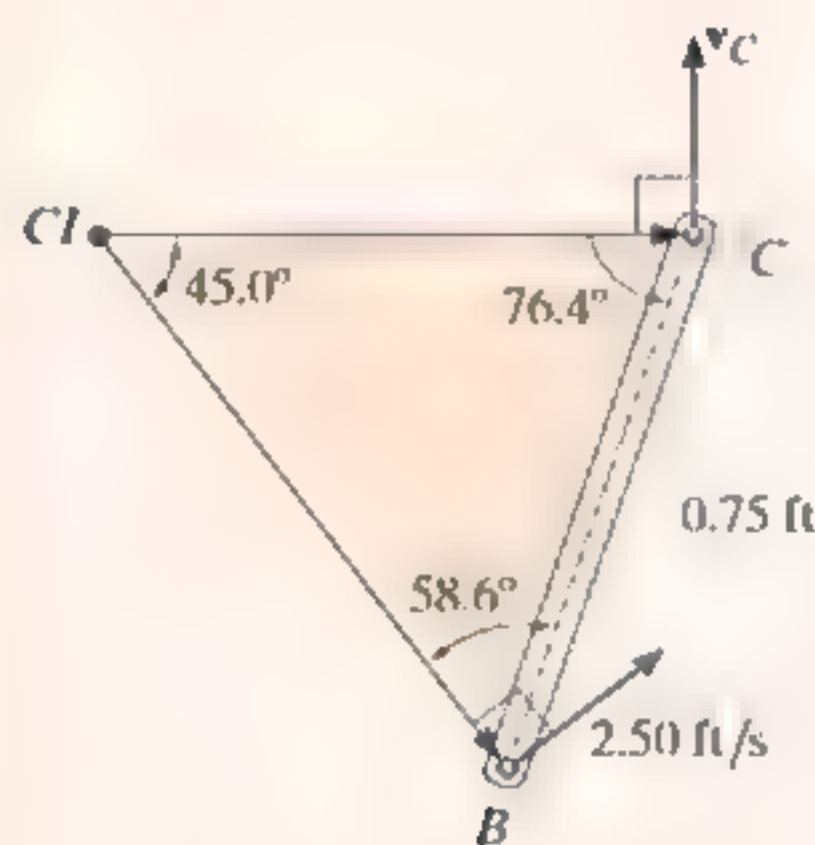


Fig. 16-23

El sentido de rotación de  $\omega_{BC}$  debe ser el mismo de la rotación ocasionada por  $v_B$  alrededor del  $CI$ , que es en sentido antihorario. Por consiguiente,

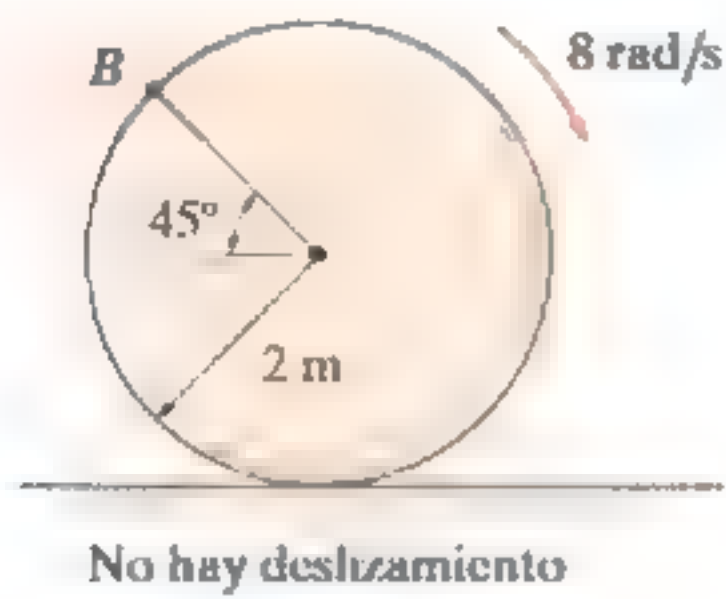
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{2.5 \text{ ft/s}}{1.031 \text{ ft}} = 2.425 \text{ rad/s}$$

Con este resultado, la velocidad del pistón es

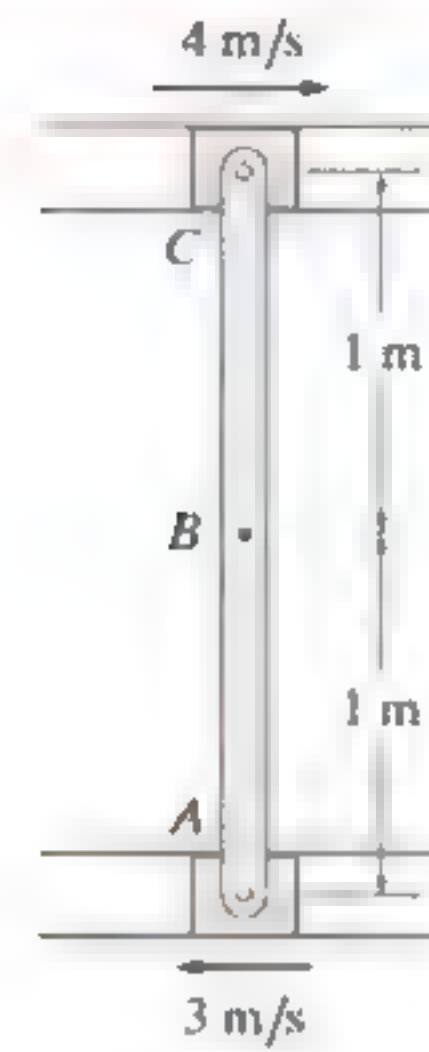
$$v_C = \omega_{BC} r_{C/CI} = (2.425 \text{ rad/s})(0.9056 \text{ ft}) = 2.20 \text{ ft/s} \quad \text{Resp.}$$

# PROBLEMA PRELIMINAR

**P16-2.** Establezca la ubicación del centro instantáneo de velocidad cero para encontrar la velocidad del punto  $B$ .



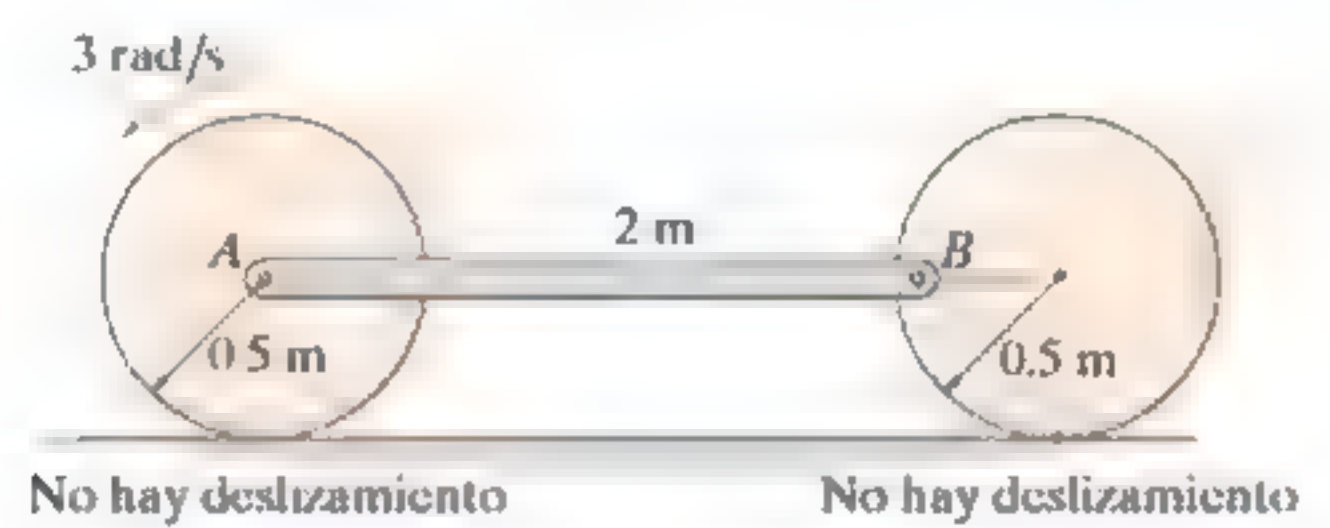
(a)



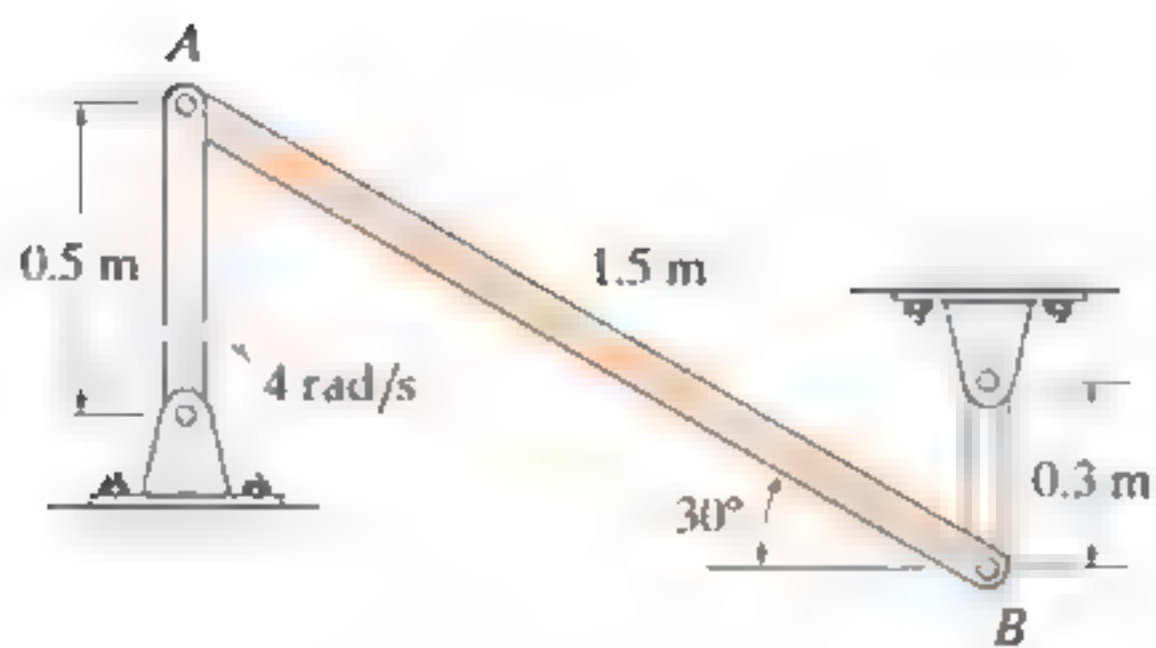
(d)



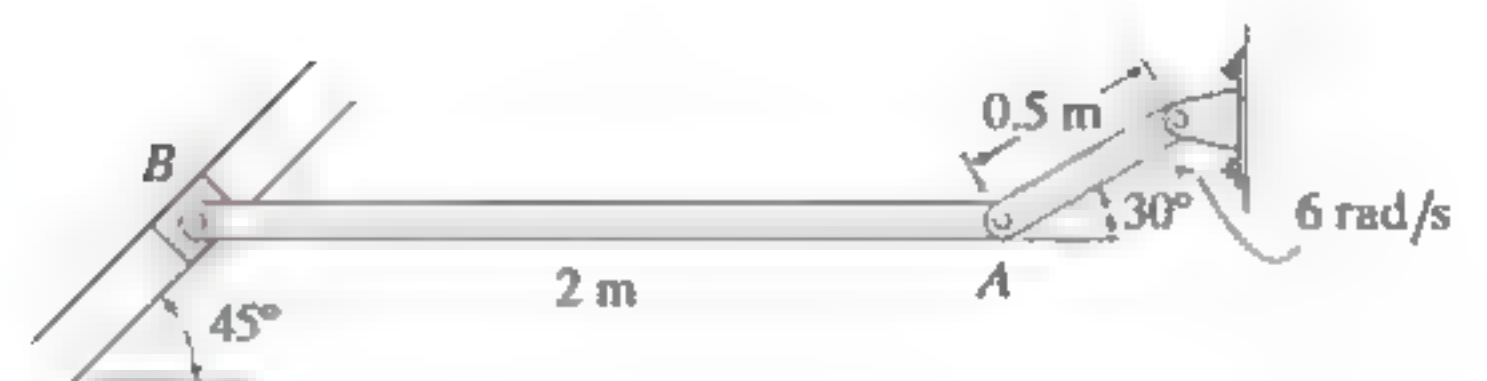
(b)



(c)



(e)

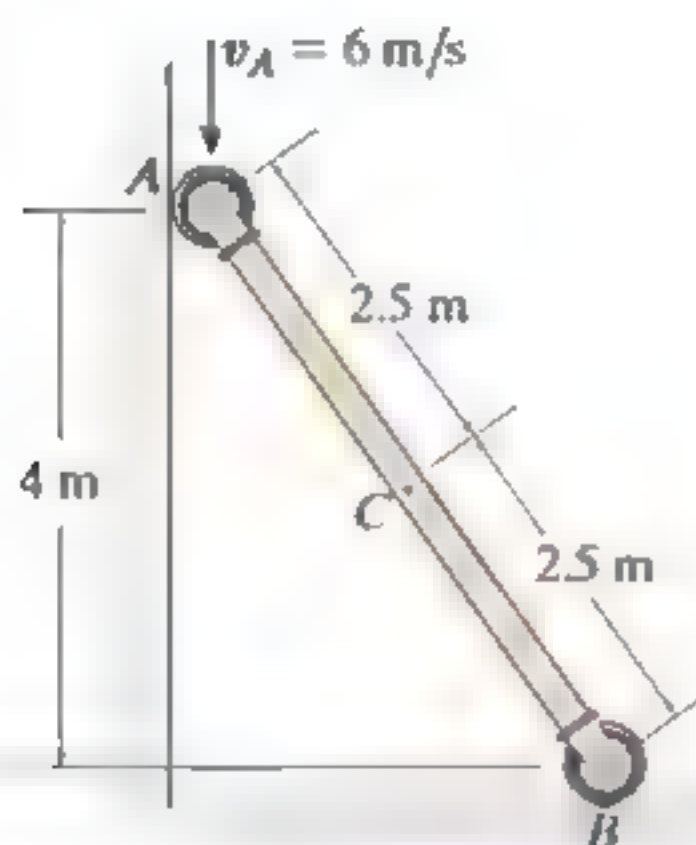


(f)

Prob. P16-2

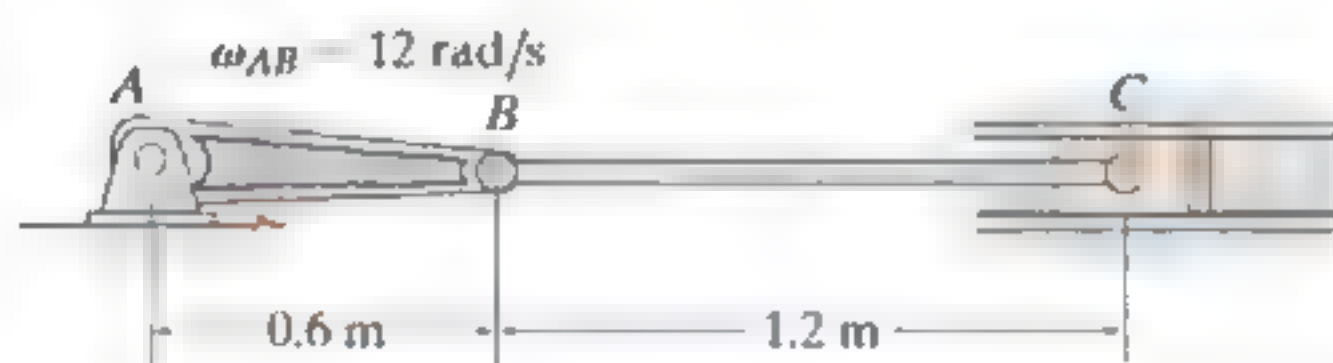
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**116-13.** Determine la velocidad angular de la varilla y la velocidad del punto  $C$  en el instante que se muestra.



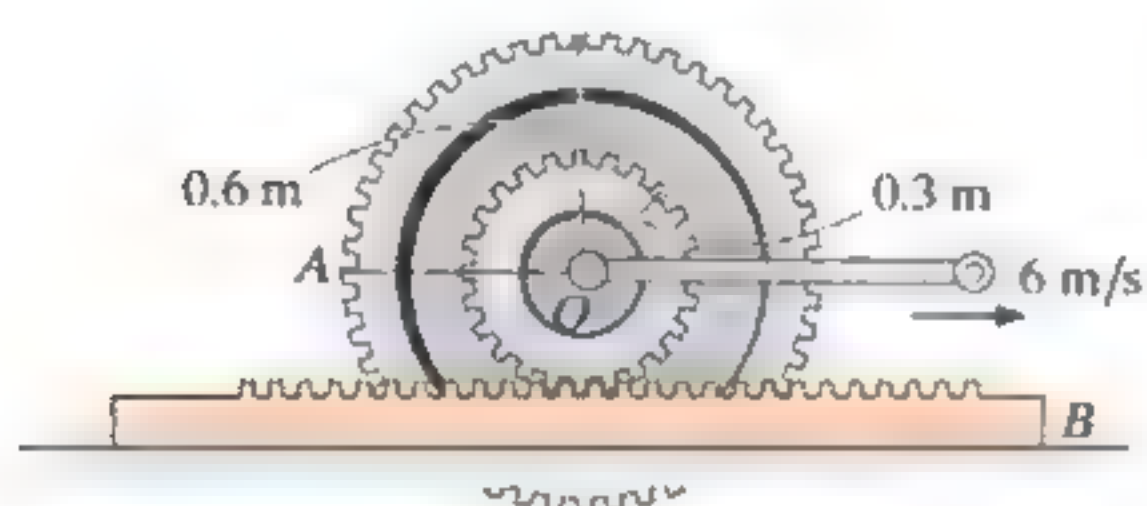
Prob. 116-13

**116-14.** Determine la velocidad angular del eslabón  $BC$  y la velocidad del pistón  $C$  en el instante que se muestra.



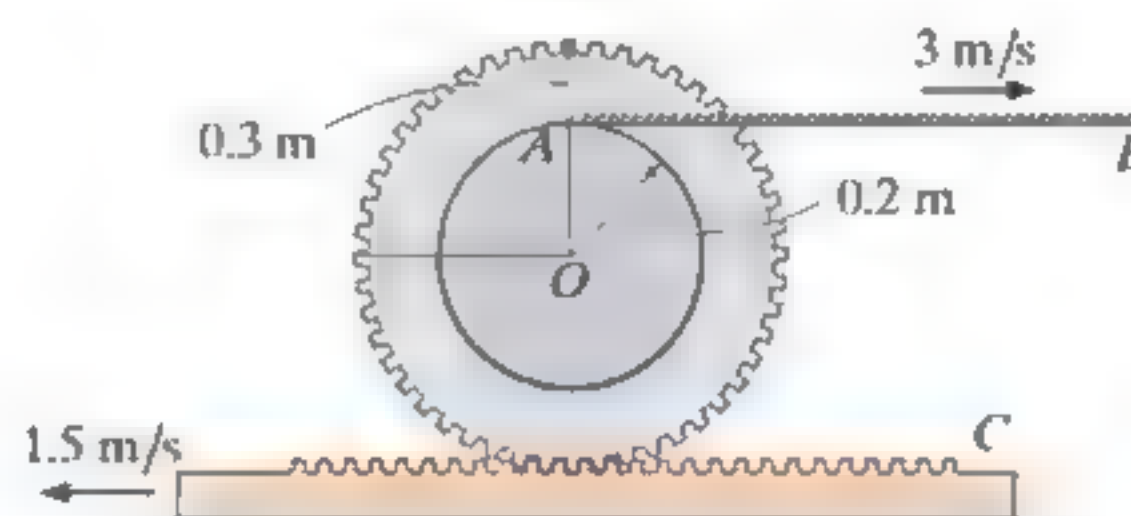
Prob. 116-14

**116-15.** Si el centro  $O$  de la rueda se mueve con una velocidad de  $v_O = 6$  m/s, determine la velocidad del punto  $A$  en la rueda. La cremallera  $B$  está fija.



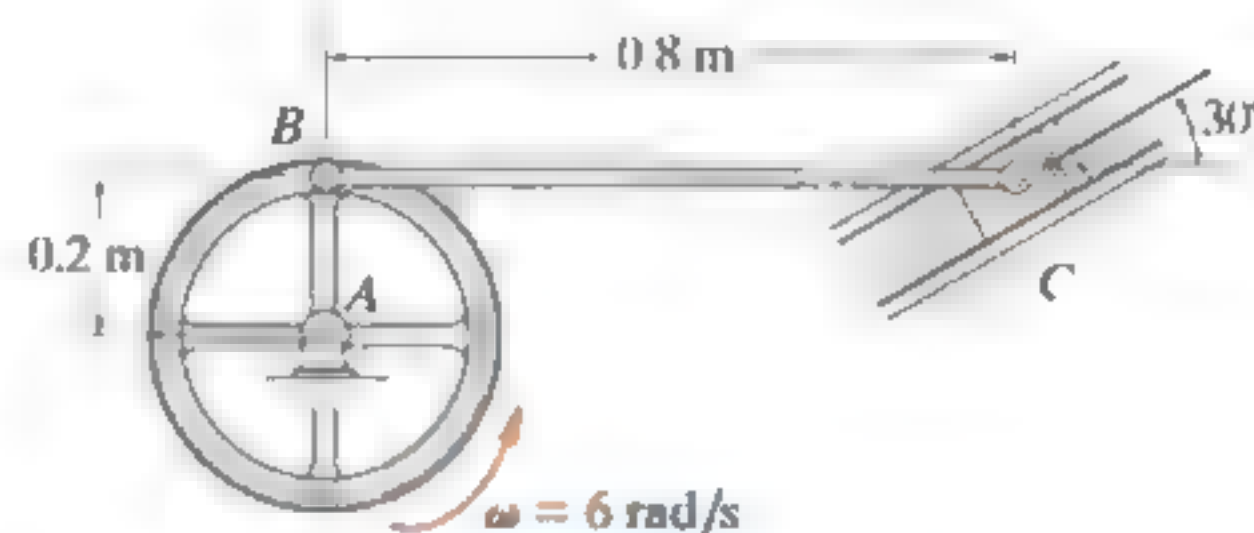
Prob. 116-15

**116-16.** Si el cable se desenrolla con una rapidez de 3 m/s y la de la cremallera  $C$  es de 1.5 m/s, determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro  $O$ .



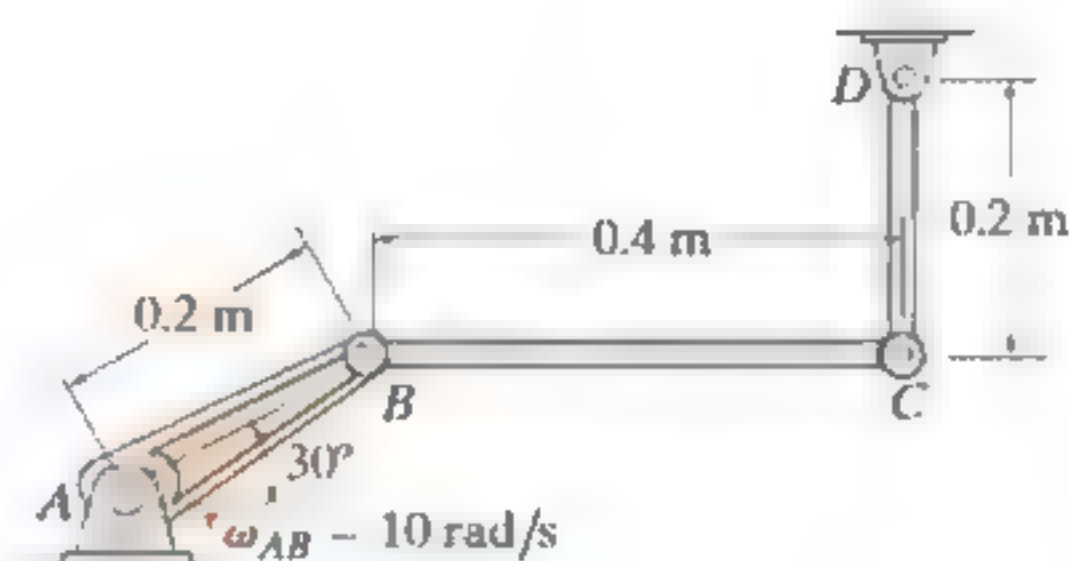
Prob. 116-16

**116-17.** Determine la velocidad angular del eslabón  $BC$  y la velocidad del pistón  $C$  en el instante que se muestra.



Prob. 116-17

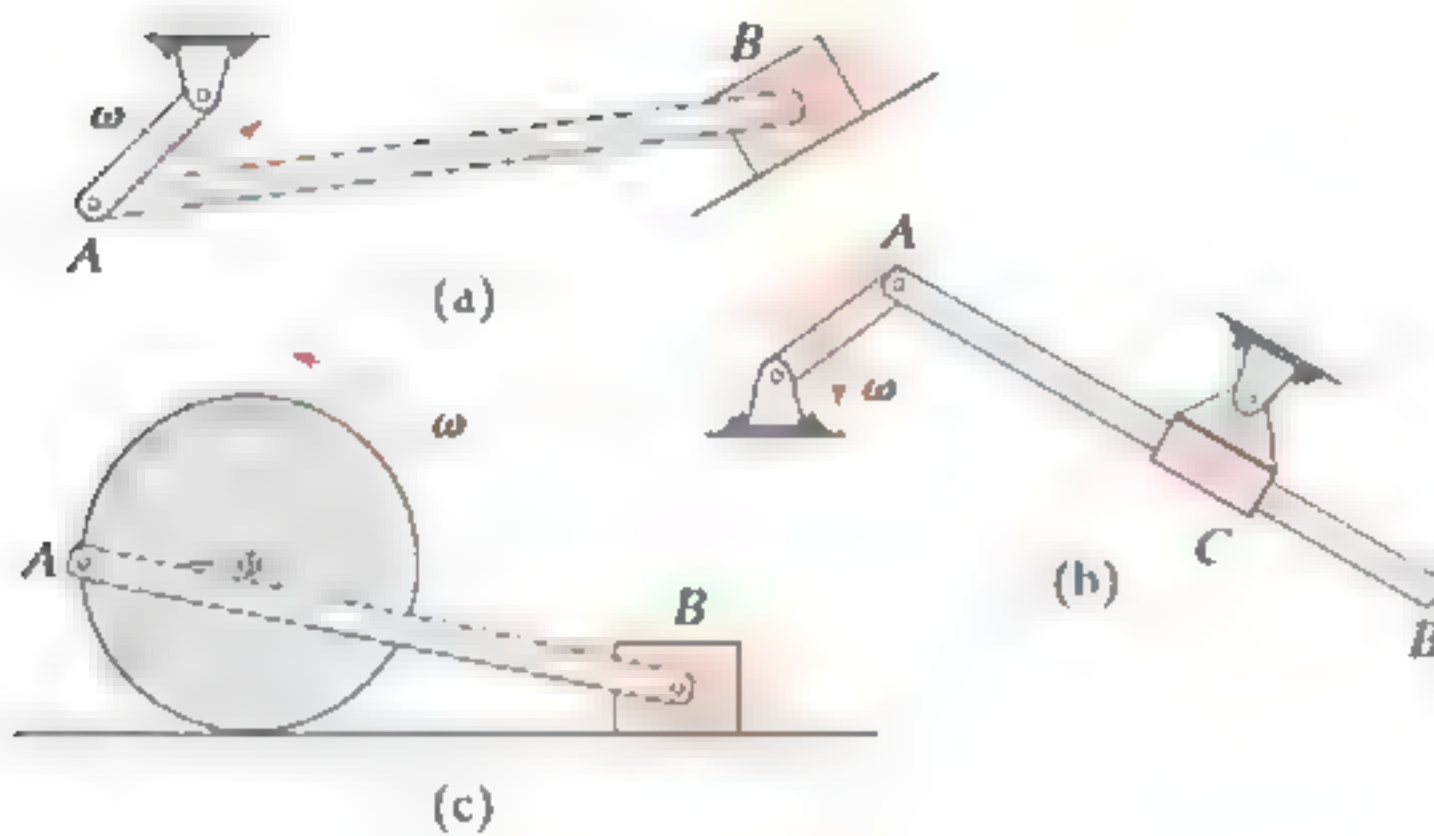
**116-18.** Determine la velocidad angular de los eslabones  $BC$  y  $CD$  en el instante que se muestra.



Prob. 116-18

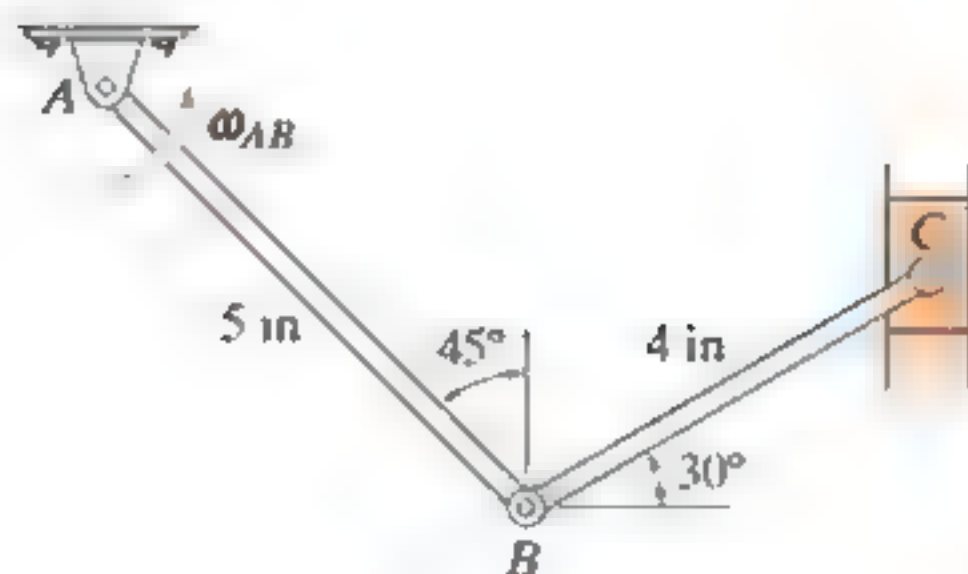
## PROBLEMAS

**16-81.** En cada caso, muestre gráficamente cómo localizar el centro instantáneo de velocidad cero del eslabón  $AB$ . Suponga que se conoce la geometría.



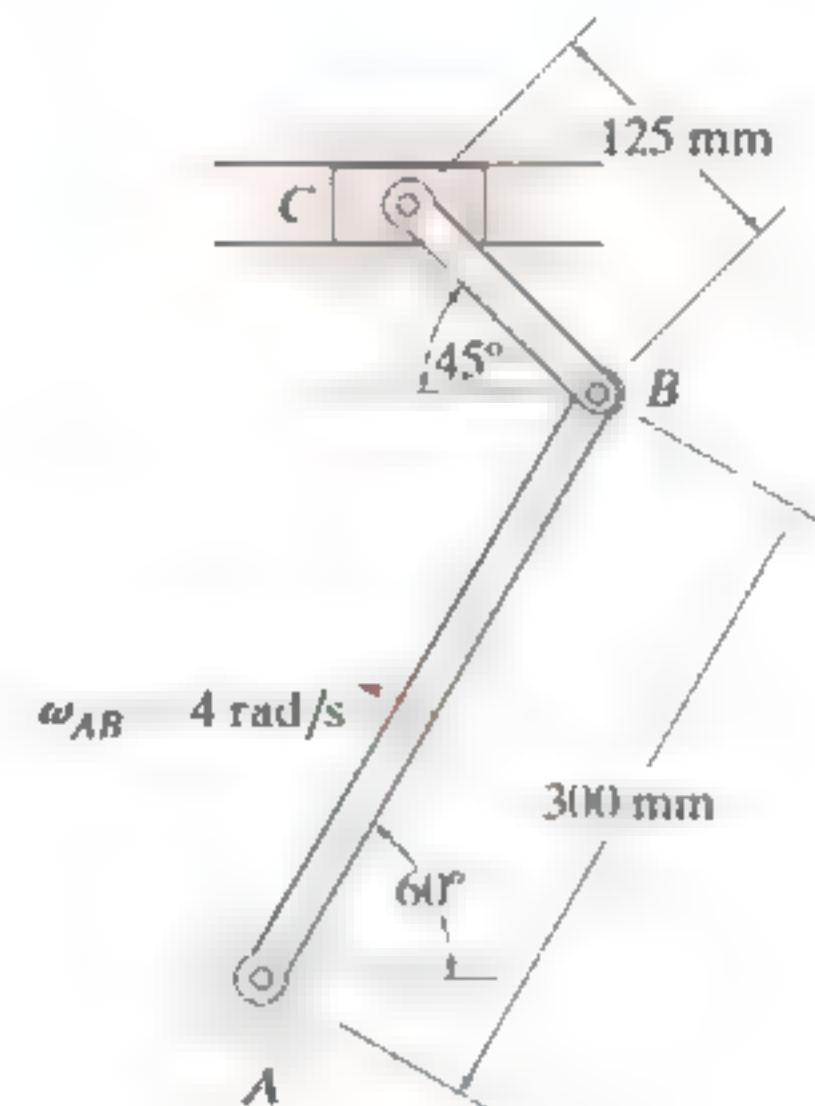
Prob. 16-81

**16-82.** Determine la velocidad angular del eslabón  $AB$  en el instante mostrado, si el bloque  $C$  se mueve hacia arriba a  $12 \text{ in/s}$ .



Prob. 16-82

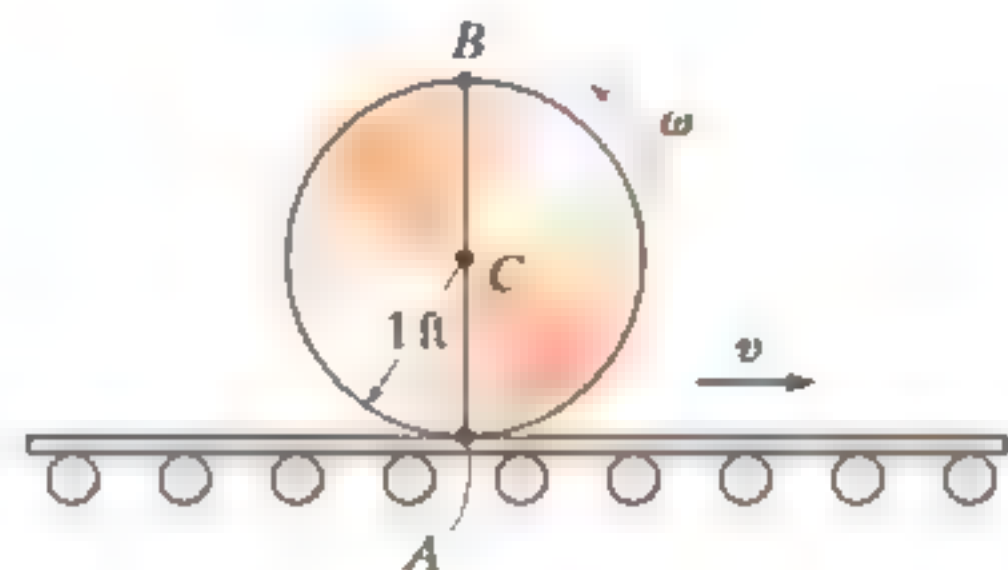
**16-83.** El mecanismo formador está diseñado para proporcionar un golpe de corte lento y un retorno rápido a una hoja unida a la corredera en  $C$ . Determine la velocidad angular del eslabón  $CB$  en el instante mostrado, si el eslabón  $AB$  gira a  $4 \text{ rad/s}$ .



Prob. 16-83

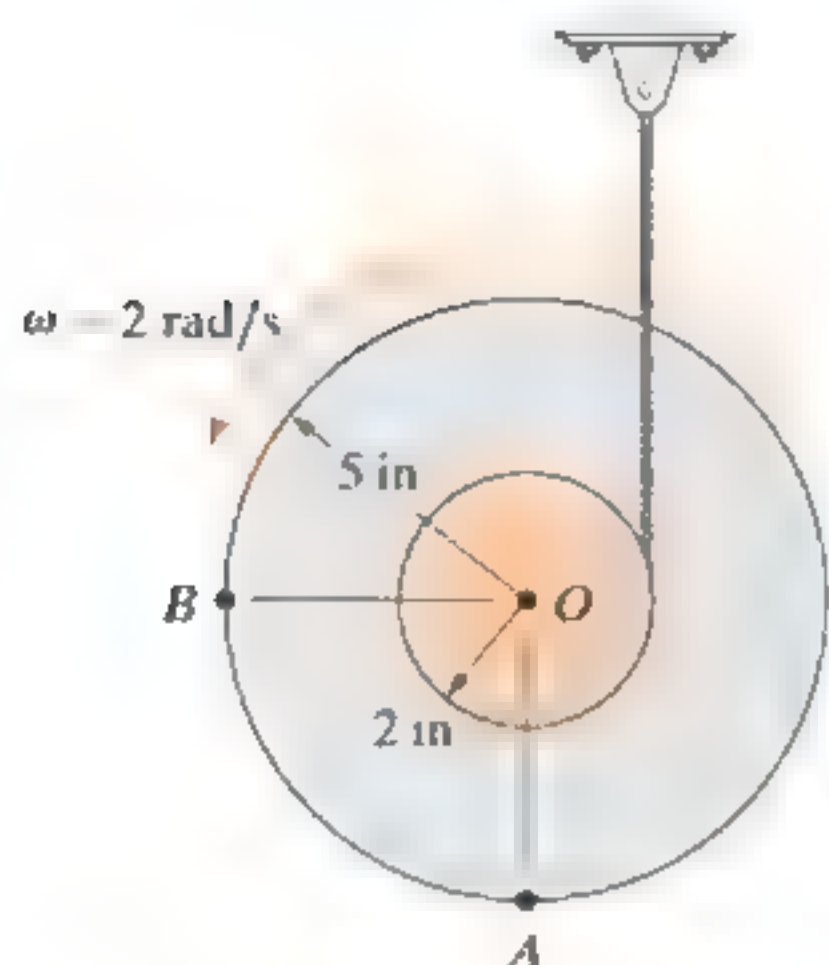
**\*16-84.** La banda transportadora se mueve hacia la derecha a  $v = 8 \text{ ft/s}$  y, en el mismo instante, el cilindro rueda en sentido antihorario a  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  sin deslizarse. Determine las velocidades del centro del cilindro  $C$  y el punto  $B$  en este instante.

**16-85.** La banda transportadora se mueve hacia la derecha a  $v = 12 \text{ ft/s}$  y, en el mismo instante, el cilindro rueda en sentido antihorario a  $\omega = 6 \text{ rad/s}$ , mientras que su centro tiene una velocidad de  $4 \text{ ft/s}$  hacia la izquierda. Determine las velocidades de los puntos  $A$  y  $B$  sobre el disco en este instante. ¿Se desliza el cilindro sobre la banda transportadora?



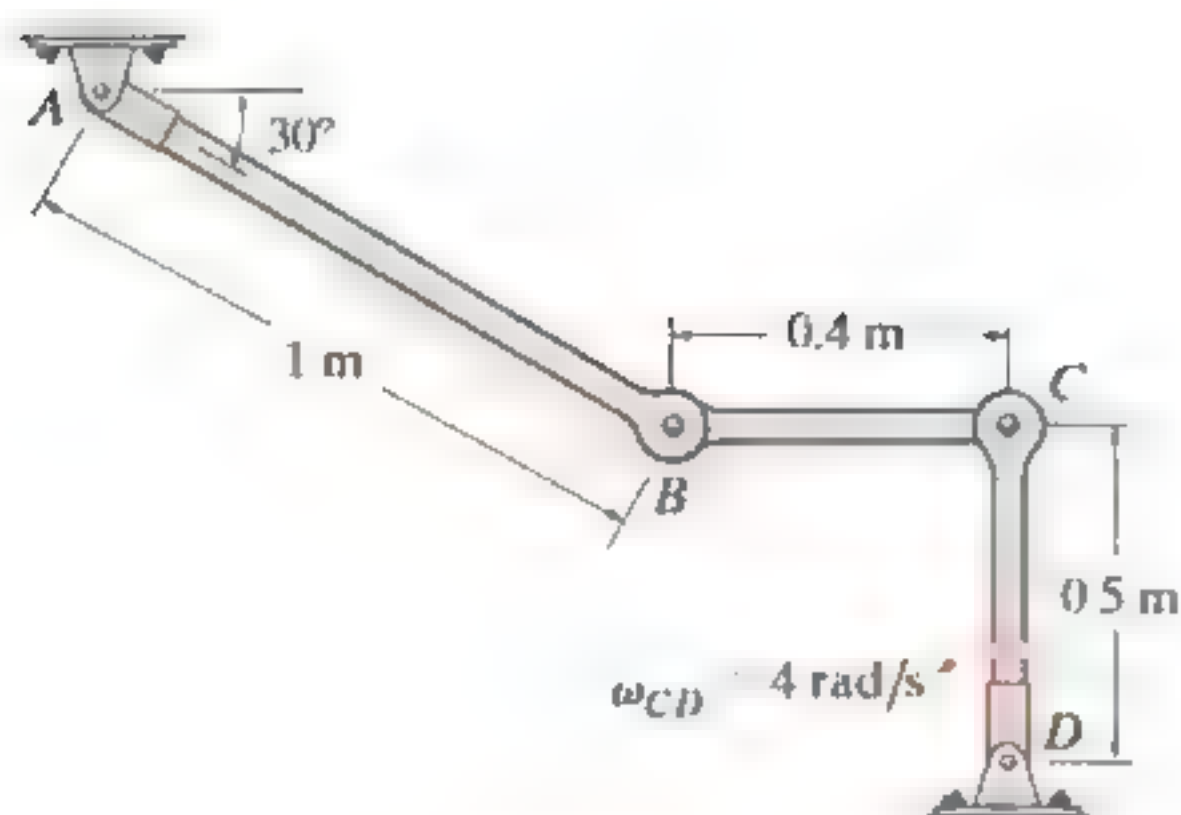
Probs. 16-84/85

16-86. A medida que la cuerda se desenrolla del eje interno de la rueda, ésta gira a  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  en el instante mostrado. Determine las velocidades de los puntos  $A$  y  $B$ .



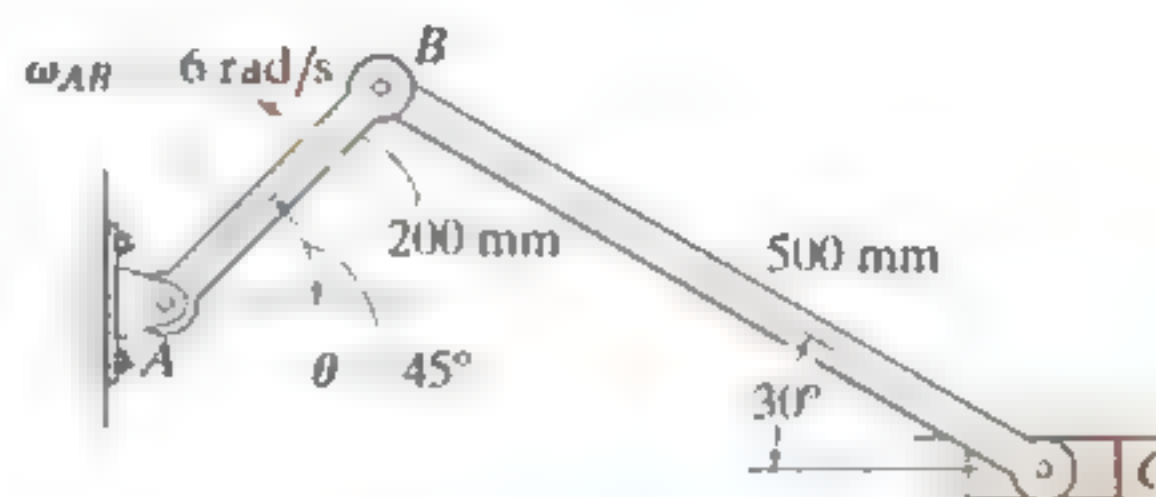
Prob. 16-86

16-87. Si la varilla  $CD$  gira con una velocidad angular  $\omega_{CD} = 4 \text{ rad/s}$ , determine las velocidades angulares de las varillas  $AB$  y  $CB$  en el instante mostrado.



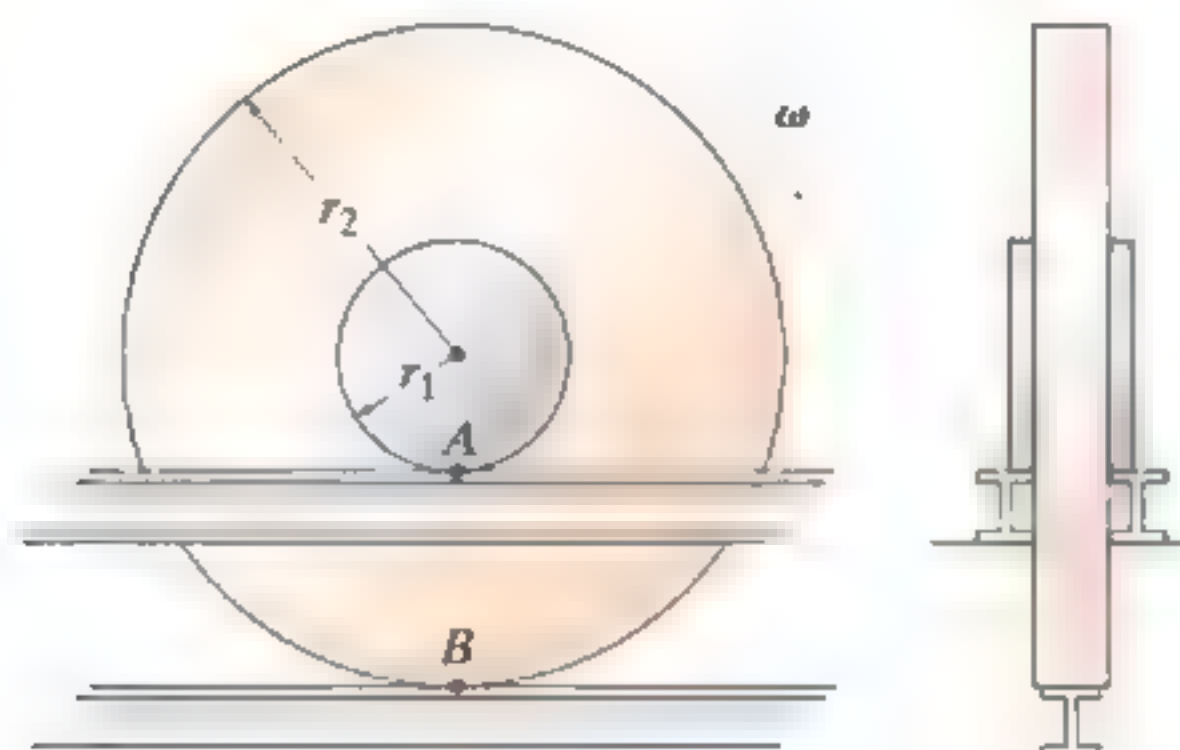
Prob. 16-87

16-88. Si la barra  $AB$  tiene una velocidad angular  $\omega_{AB} = 6 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad del bloque deslizante  $C$  en el instante mostrado.



Prob. 16-88

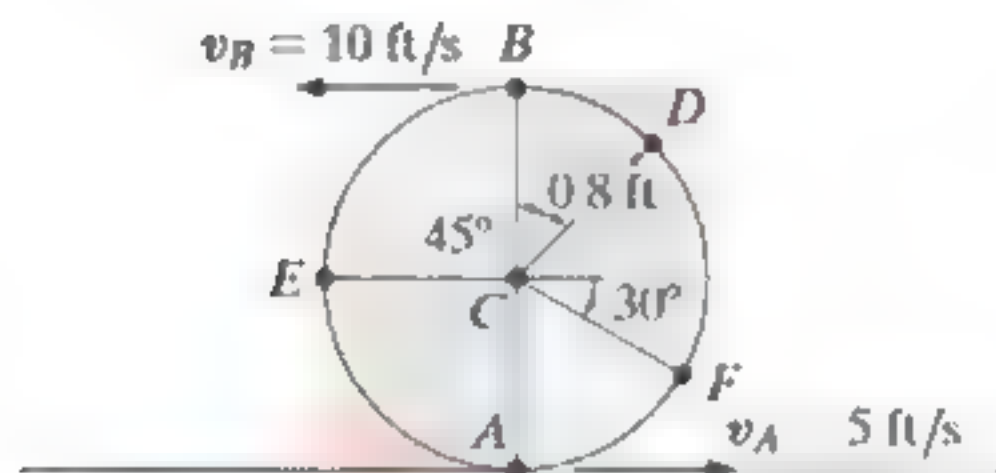
16-89. Demuestre que si el borde de la rueda y su eje se mantienen en contacto con las tres pistas mientras la rueda gira, es necesario que ocurra deslizamiento en el eje  $A$  si no hay deslizamiento en  $B$ . En estas condiciones, ¿cuál es la velocidad en  $A$  si la rueda tiene una velocidad angular  $\omega$ ?



Prob. 16-89

**16-90.** Debido al deslizamiento, los puntos  $A$  y  $B$  en el borde del disco tienen las velocidades mostradas. Determine las velocidades del punto central  $C$  y el punto  $D$  en este instante.

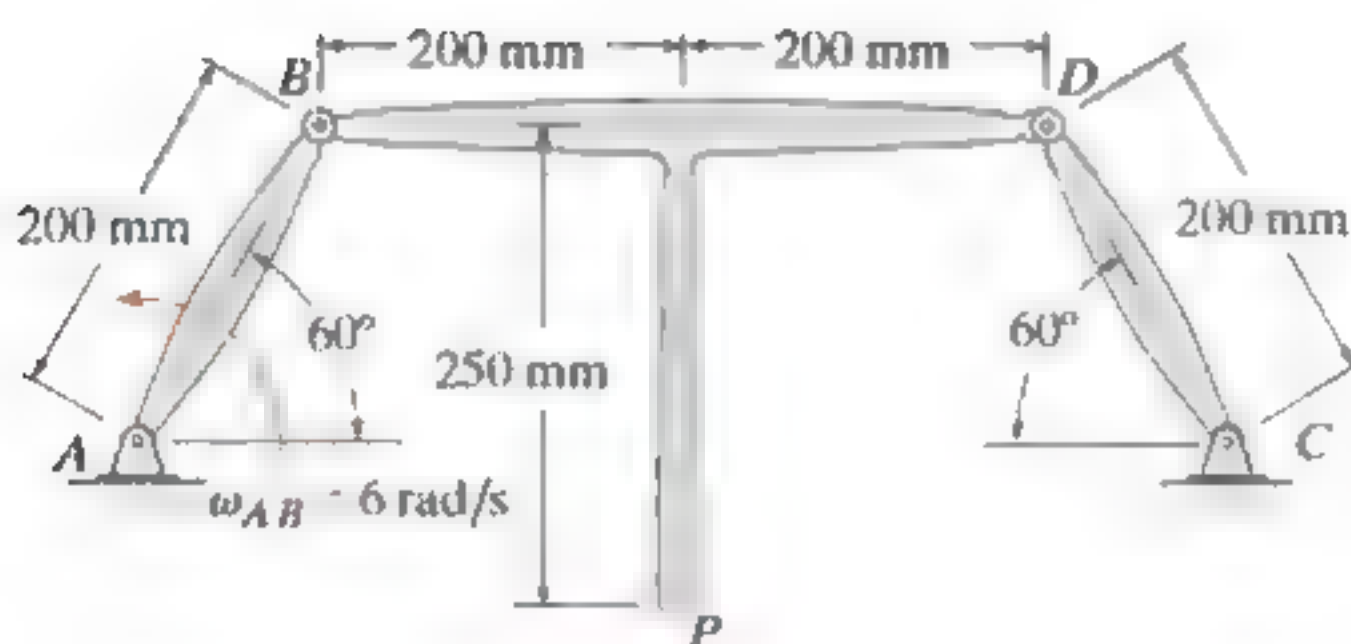
**16-91.** Debido al deslizamiento, los puntos  $A$  y  $B$  en el borde del disco tienen las velocidades mostradas. Determine las velocidades del punto central  $C$  y el punto  $E$  en este instante.



Probs. 16-90, 91

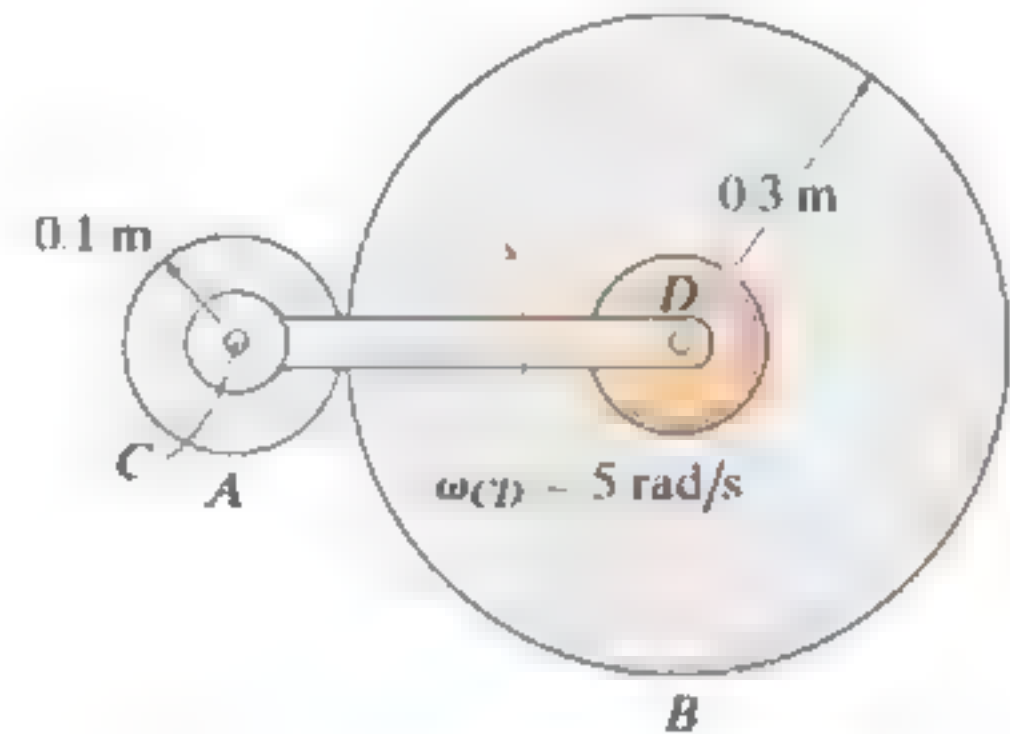
**\*16-92.** El elemento  $AB$  gira a  $\omega_{AB} = 6 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del punto  $D$  y la velocidad angular de los elementos de  $BPD$  y  $CD$ .

**16-93.** El elemento  $AB$  gira a  $\omega_{AB} = 6 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del punto  $P$  y la velocidad angular del elemento  $BPD$ .



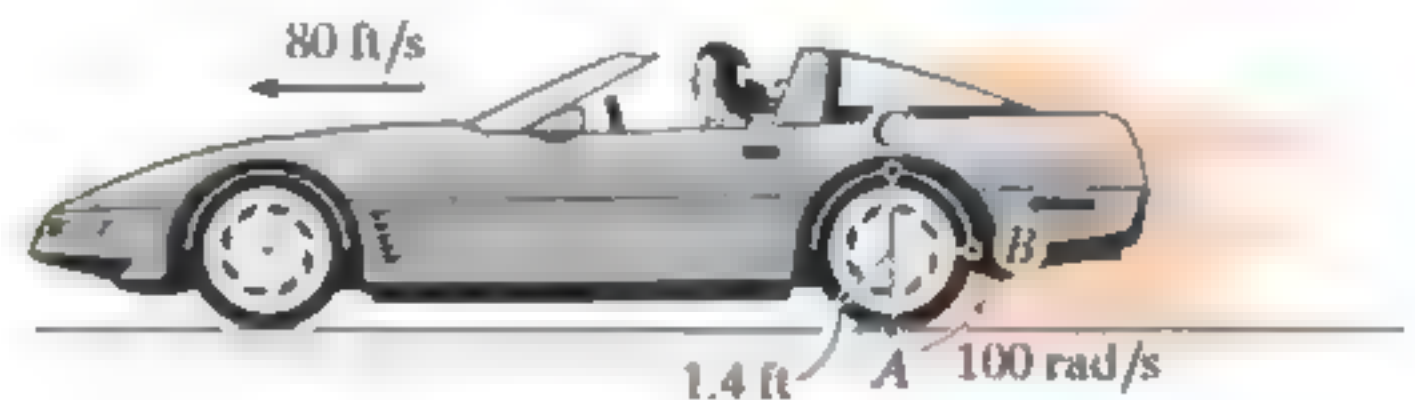
Probs. 16-92, 93

**16-94.** El cilindro  $B$  rueda sobre el cilindro fijo  $A$  sin deslizarse. Si la barra conectada  $CD$  gira con una velocidad angular  $\omega_{CD} = 5 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular del cilindro  $B$ . El punto  $C$  es un punto fijo.



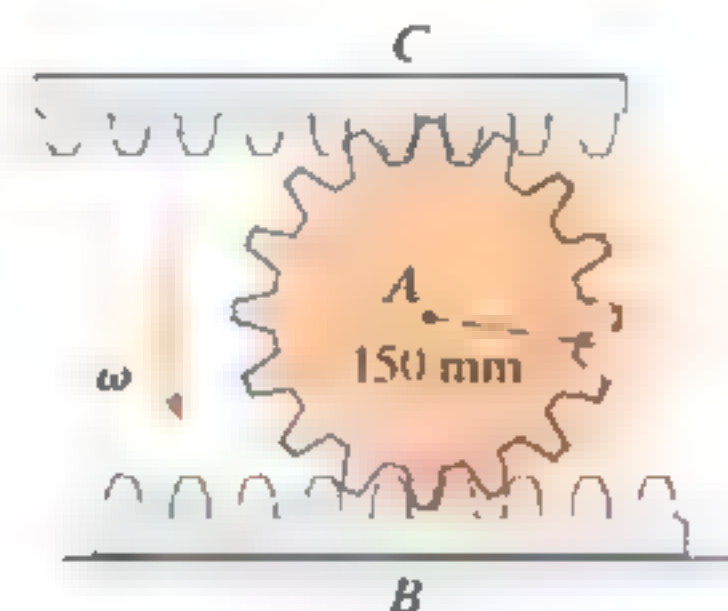
Prob. 16-94

**16-95.** Cuando el automóvil se desplaza hacia adelante a  $80 \text{ ft/s}$  sobre una carretera mojada, debido al deslizamiento, las ruedas traseras tienen una velocidad angular  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . Determine las velocidades de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  causadas por el movimiento.



Prob. 16-95

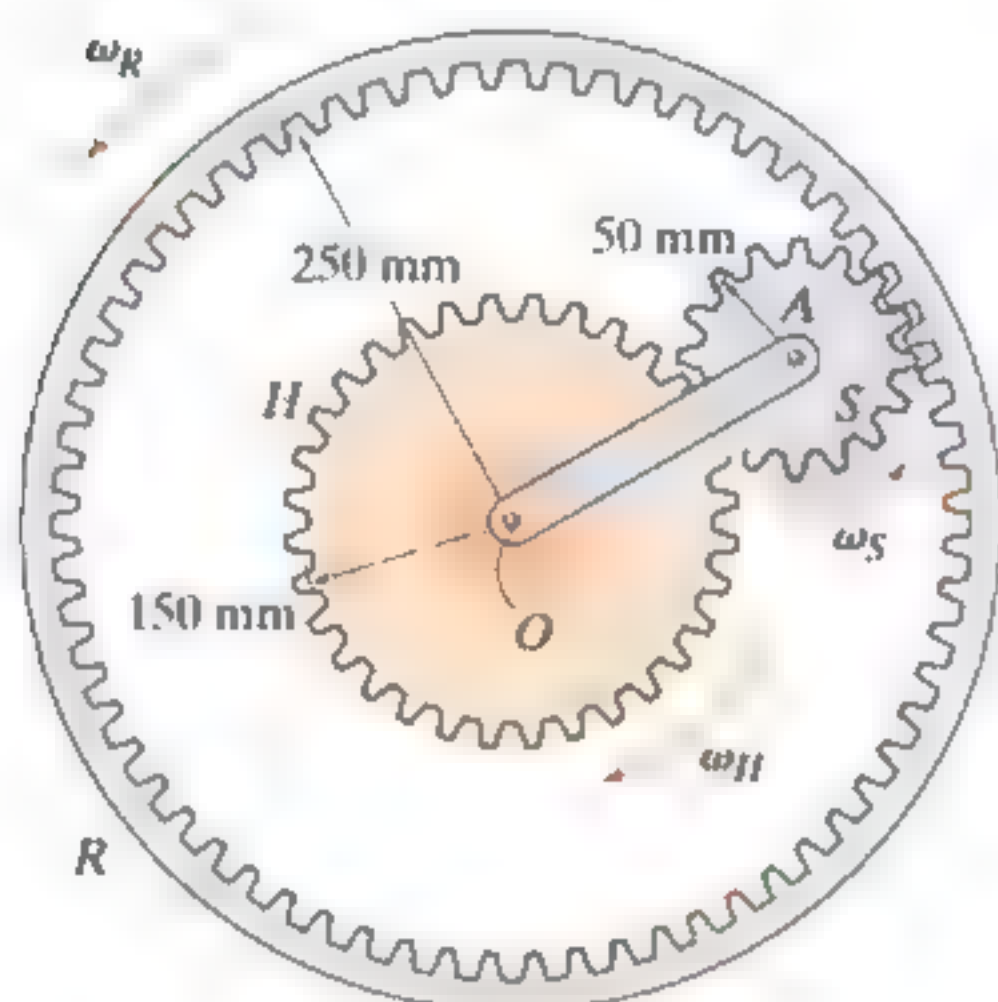
**\*16-96.** El engrane de piñón  $A$  rueda sobre el engrane dentado  $B$  con una velocidad angular  $\omega = 8 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del engrane dentado  $C$ .



Prob. 16-96

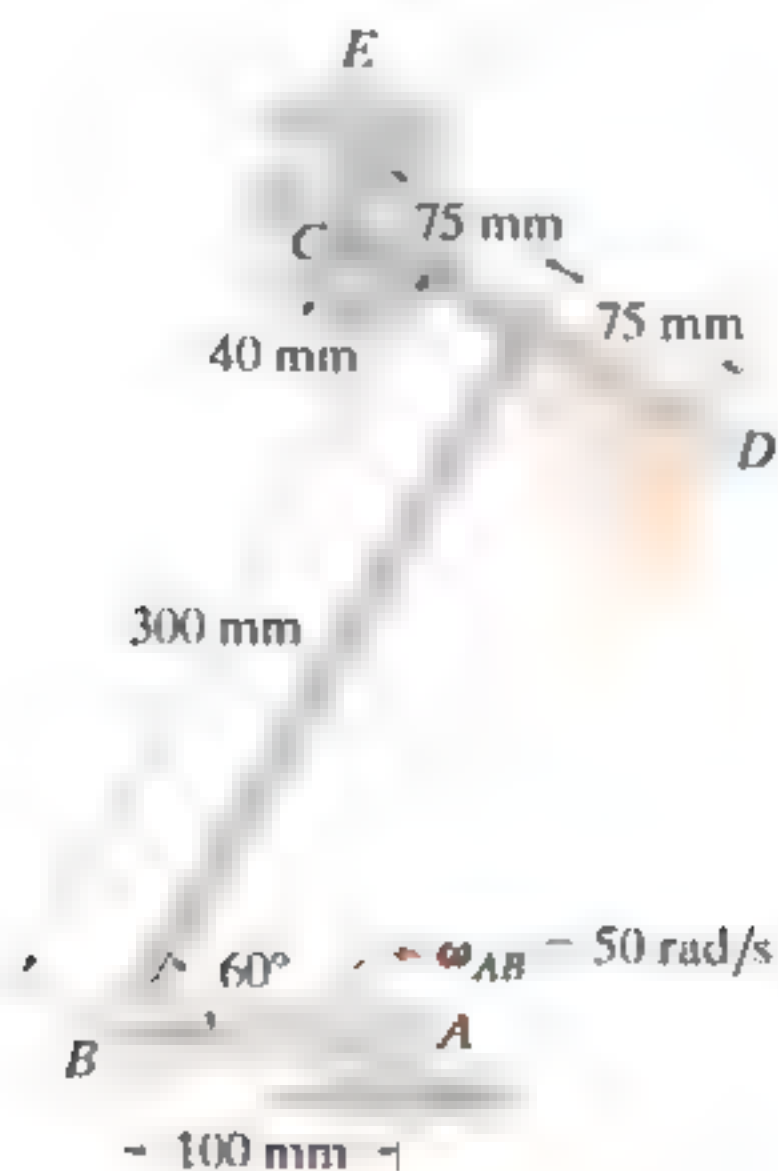
**16-97.** Si el engrane central  $H$  y la corona dentada  $R$  tienen velocidades angulares  $\omega_H = 5 \text{ rad/s}$  y  $\omega_R = 20 \text{ rad/s}$ , respectivamente, determine la velocidad angular  $\omega_S$  del engrane recto  $S$  y la velocidad angular de su brazo adjunto  $OA$ .

**16-98.** Si el engrane central  $H$  tiene una velocidad angular  $\omega_H = 5 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular de la corona dentada  $R$ , tal que el brazo  $OA$  unido al engrane recto  $S$  permanezca estacionario ( $\omega_{OA} = 0$ ). ¿Cuál es la velocidad angular del engrane recto?



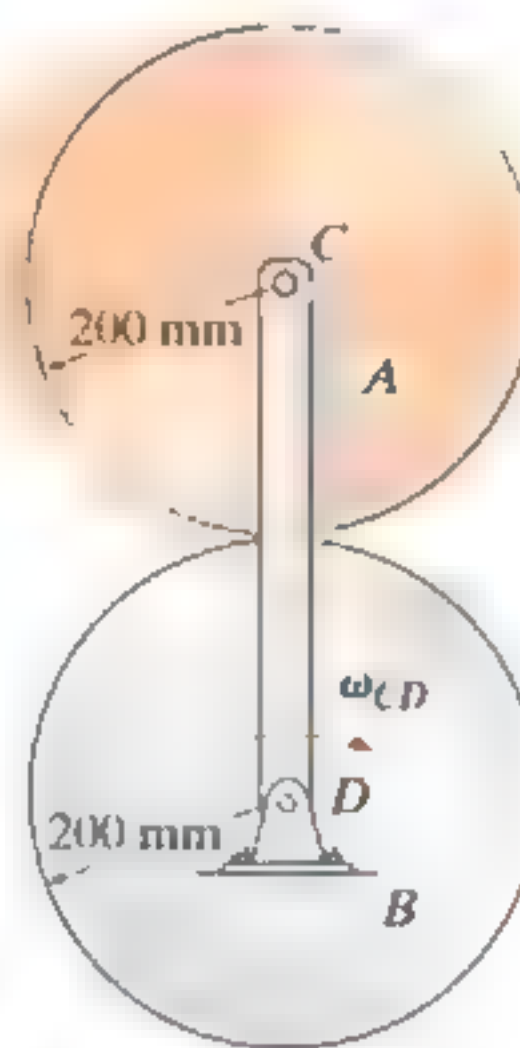
Probs. 16-97/98

**16-99.** El cigüeñal  $AB$  gira a  $\omega_{AB} = 50 \text{ rad/s}$  alrededor del eje fijo a través del punto  $A$ , y el disco en  $C$  se mantiene fijo en su soporte en  $E$ . Determine la velocidad angular de la varilla  $CD$  en el instante mostrado.



Prob. 16-99

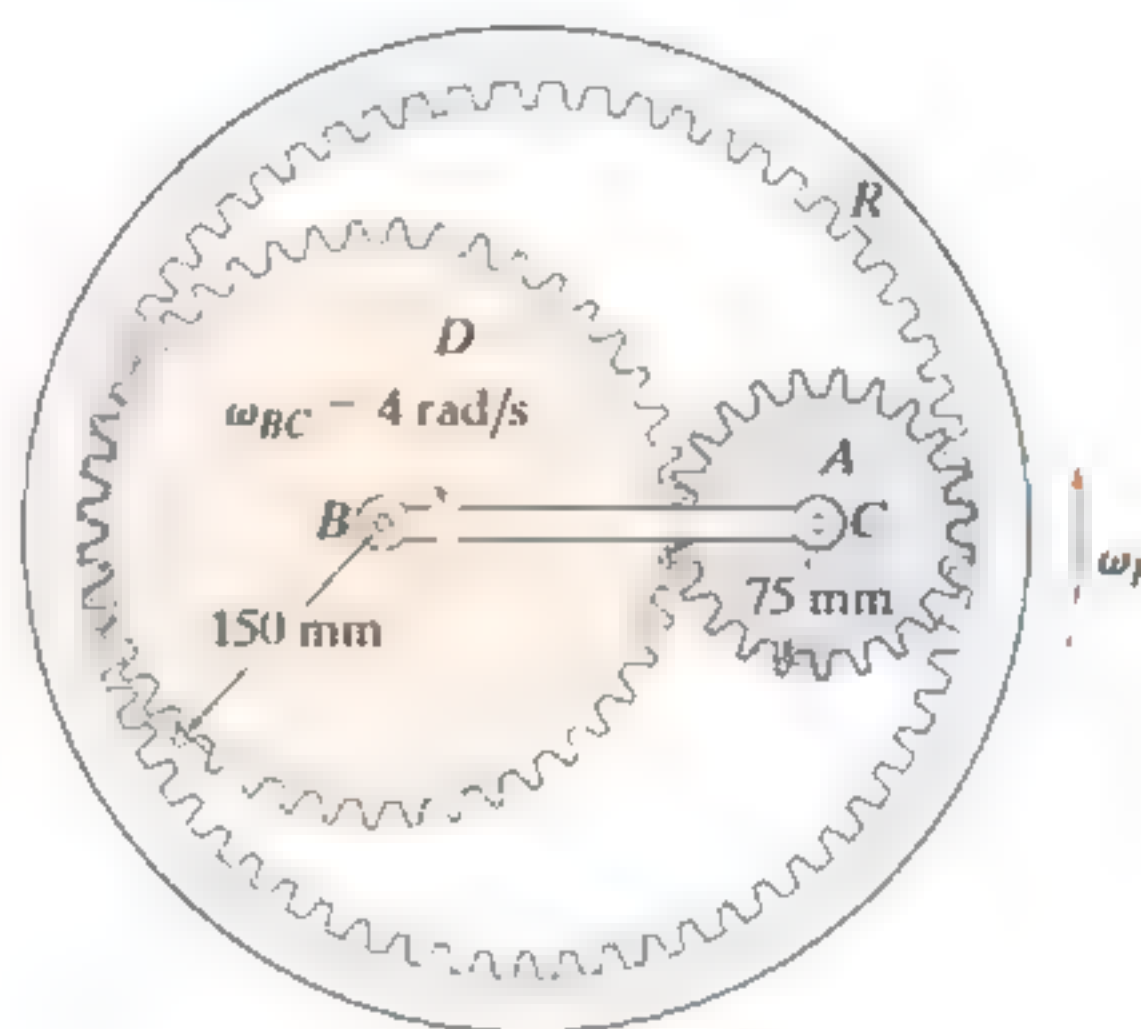
**16-100.** El cilindro  $A$  rueda sobre el cilindro fijo  $B$  sin deslizarse. Si la barra  $CD$  gira con una velocidad angular de  $\omega_{CD} = 3 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular de  $A$ .



Prob. 16-100

**16-101.** El engrane planetario  $A$  está conectado mediante un pasador al extremo del eslabón  $BC$ . Si el eslabón gira alrededor del punto fijo  $B$  a  $4 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular de la corona dentada  $R$ . El engrane solar  $D$  se encuentra fijo respecto a la rotación.

**16-102.** Resuelva el problema 16-101 si el engrane central  $D$  gira en sentido horario a  $\omega_D = 5 \text{ rad/s}$ , mientras el eslabón  $BC$  gira en sentido antihorario a  $\omega_{BC} = 4 \text{ rad/s}$ .



Probs. 16-101/102

## 16.7 Análisis del movimiento relativo: aceleración

Una ecuación que relacione la aceleración de dos puntos en una barra (cuerpo rígido) sometida a movimiento plano general puede determinarse al diferenciar  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$  con respecto al tiempo. De aquí resulta

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

Los términos  $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{a}_B$  y  $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{a}_A$  se miden con respecto a un sistema de ejes  $x, y$  fijos y representan las *aceleraciones absolutas* de los puntos  $B$  y  $A$ . El último término representa la aceleración de  $B$  con respecto a  $A$  medida por un observador fijo en los ejes trasladantes  $x', y'$  que tienen su origen en el punto base  $A$ . En la sección 16.5 se demostró que para este observador el punto  $B$  parece moverse a lo largo de un *arco circular* con radio de curvatura  $r_{B/A}$ . Por consiguiente,  $\mathbf{a}_{B/A}$  puede expresarse en función de sus componentes tangencial y normal; es decir,  $\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ , donde  $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$ . Por lo tanto, la ecuación de aceleración relativa se escribe en la forma

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \quad (16-17)$$

donde

$\mathbf{a}_B$  = aceleración del punto  $B$

$\mathbf{a}_A$  = aceleración del punto  $A$

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$  = componente de aceleración tangencial de  $B$  con respecto a  $A$ . La *magnitud* es  $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$  y la *dirección* es perpendicular a  $\mathbf{r}_{B/A}$

$(\mathbf{a}_{B/A})_n$  = componente de aceleración normal de  $B$  con respecto a  $A$ . La *magnitud* es  $(\mathbf{a}_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$  y la *dirección* siempre es de  $B$  hacia  $A$ .

En la figura 16-24 están representados gráficamente los términos de la ecuación 16-17. Aquí se observa que en un instante dado la aceleración de  $B$  (fig. 16-24a) se determina al considerar que la barra se traslada con una aceleración  $\mathbf{a}_A$  (fig. 16-24b) y simultáneamente gira alrededor del punto base  $A$  con una velocidad angular instantánea  $\omega$  y una aceleración angular  $\alpha$  (fig. 16-24c). La adición vectorial de estos dos efectos, aplicados a  $B$ , da como resultado  $\mathbf{a}_B$  (fig. 16-24d). En la figura 16-24a, como los puntos  $A$  y  $B$  se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*, la aceleración de estos puntos tendrán *componentes tanto tangenciales como normales*. (Recuerde que la aceleración de un punto es *tangente a la trayectoria* sólo cuando ésta es *rectilínea* o cuando es un punto de inflexión en una curva.)

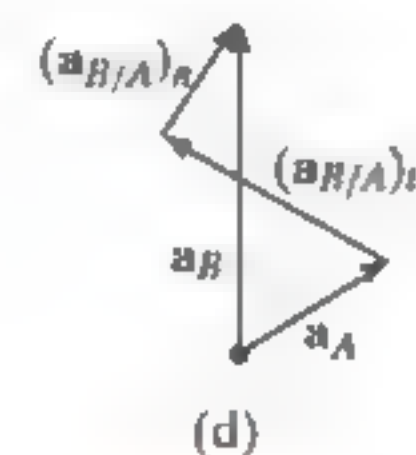
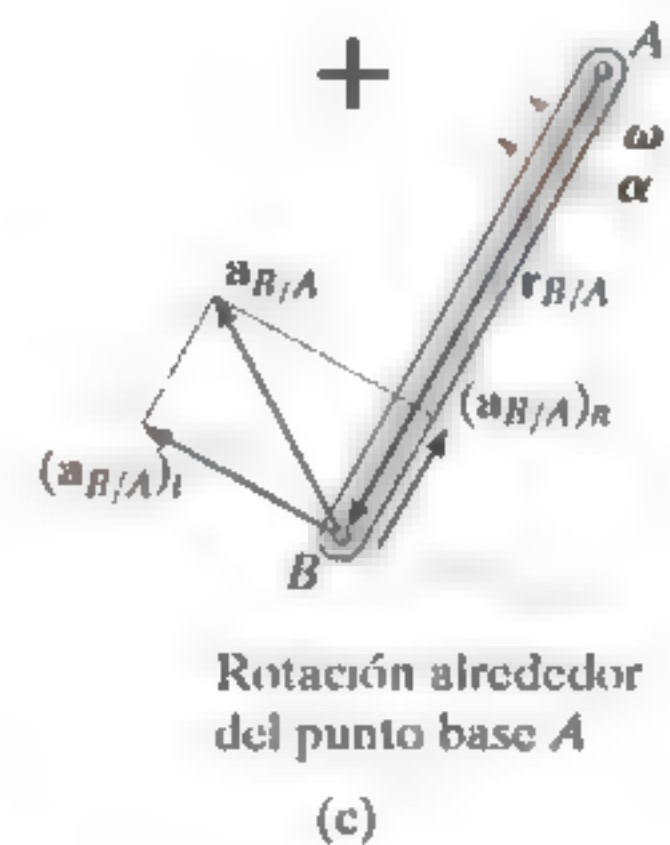
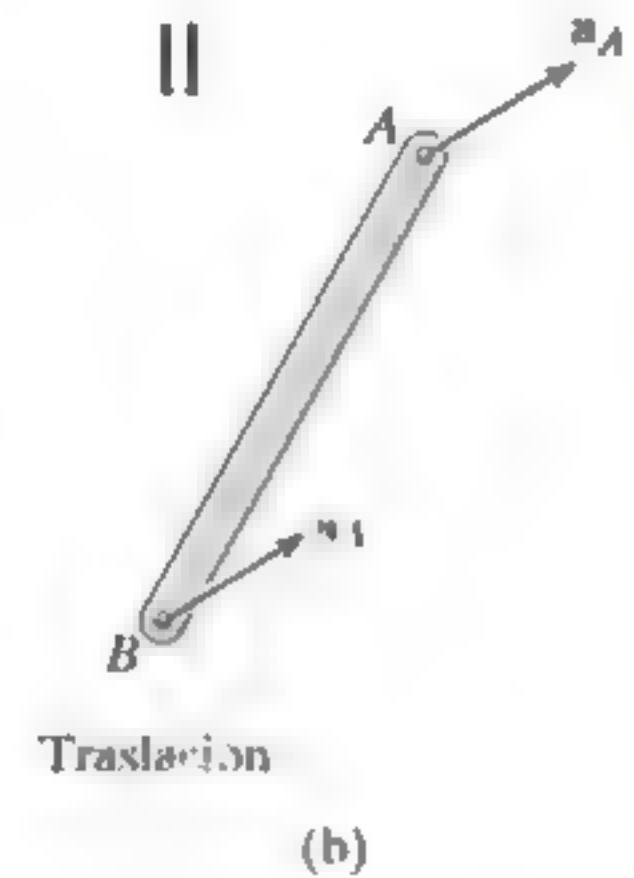
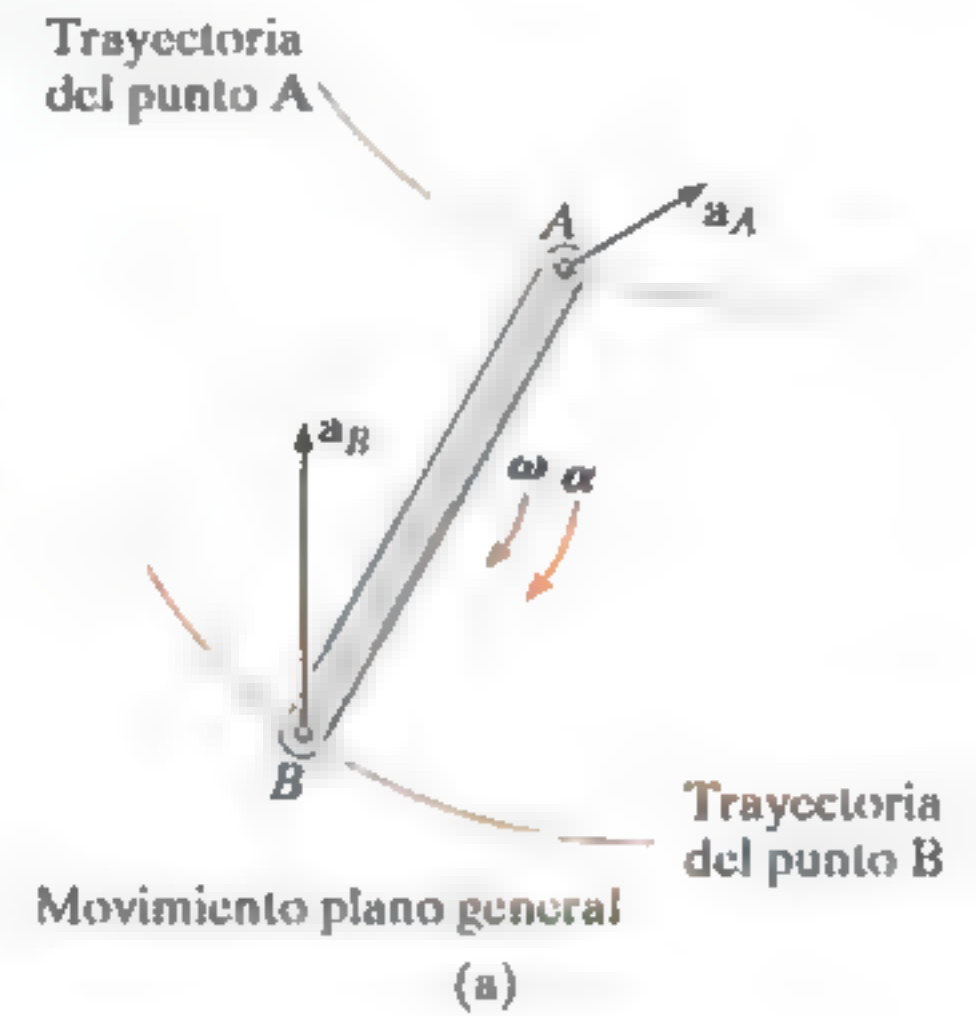
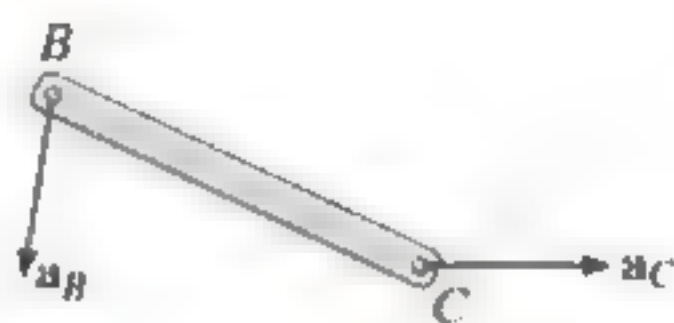
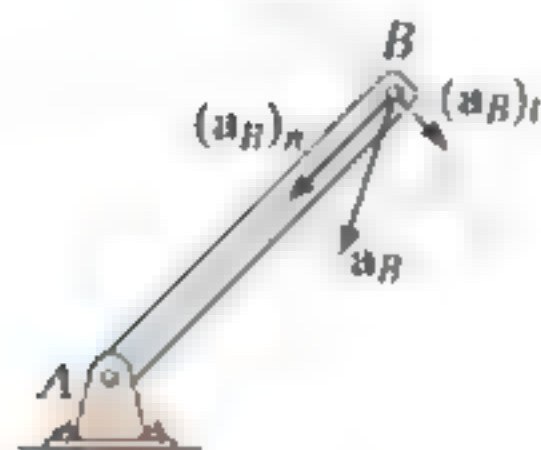
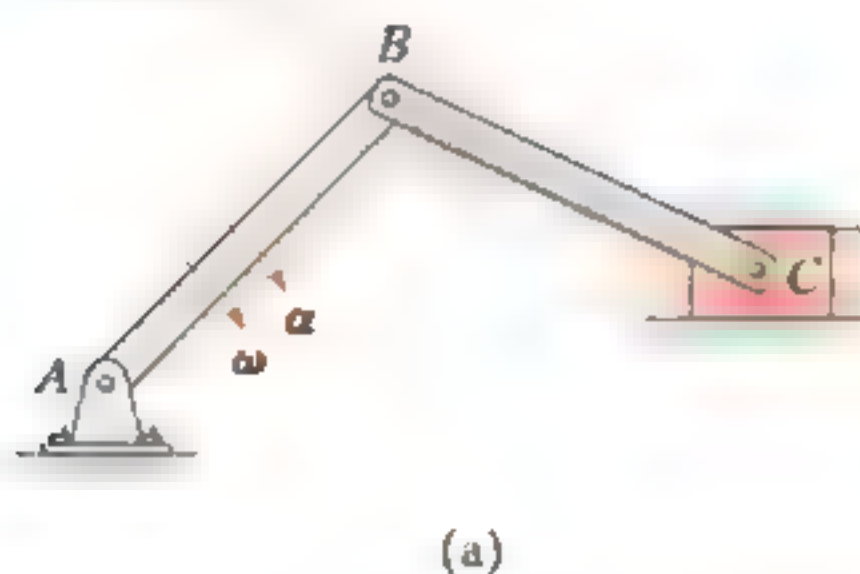


Fig. 16-24

Trayectoria de B



(b)

Fig. 16-25

Como las componentes de aceleración relativa representan el efecto de *movimiento circular* observado desde ejes trasladantes que tienen su origen en el punto base  $A$ , estos términos pueden expresarse como  $(a_{B/A})_t = \alpha \times r_{B/A}$  y  $(a_{B/A})_n = -\omega^2 r_{B/A}$ , ecuación 16-14. Por lo tanto, la ecuación 16-17 se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \quad (16-18)$$

donde

 $\mathbf{a}_B$  = aceleración del punto  $B$  $\mathbf{a}_A$  = aceleración del punto base  $A$  $\alpha$  = aceleración angular del cuerpo $\omega$  = velocidad angular del cuerpo $\mathbf{r}_{B/A}$  = vector de posición dirigido de  $A$  a  $B$ 

Si la ecuación 16-17 o la 16-18 se aplican de una manera práctica para estudiar el movimiento acelerado de un cuerpo rígido que está *conectado por medio de un pasador* a otros dos cuerpos, habrá que tener en cuenta que los puntos que *coinciden en el pasador* se mueven con la *misma aceleración*, ya que la trayectoria del movimiento sobre la cual viajan es la *misma*. Por ejemplo, el punto  $B$  situado o en la varilla  $BA$  o en la varilla  $BC$  del mecanismo de manivelas de la figura 16-25a tiene la misma aceleración, puesto que las varillas están conectadas por el pasador en  $B$ . Aquí el movimiento de  $B$  ocurre a lo largo de una *trayectoria circular*, de modo que  $\mathbf{a}_B$  puede expresarse en función de sus componentes tangencial y normal. En el otro extremo de la varilla  $BC$  el punto  $C$  se mueve a lo largo de una *trayectoria de línea recta*, definida por el pistón. Por lo tanto,  $\mathbf{a}_C$  es horizontal (fig. 16-25b).

Por último, considere un disco que rueda sin deslizarse como se indica en la figura 16-26a. Como resultado,  $v_A = 0$  y, entonces, a partir del diagrama cinemático de la figura 16-26b, la velocidad del centro de masa  $G$  es

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{G/A} = 0 + (-\omega \mathbf{k}) \times (r \mathbf{j})$$

De modo que

$$v_G = \omega r \quad (16-19)$$

Este mismo resultado también se puede determinar utilizando el método de los *CI*, donde el punto  $A$  es el *CI*.

Dado que  $G$  se mueve a lo largo de una *línea recta*, su aceleración en este caso puede determinarse a partir de la derivada con respecto al tiempo de su velocidad.

$$\frac{dv_G}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

$$a_G = \alpha r \quad (16-20)$$

Estos dos resultados importantes también se obtuvieron en el ejemplo 16.4. También son aplicables a cualquier objeto circular, como una bola, un engrane, una rueda, etcétera, que *gira sin deslizarse*.

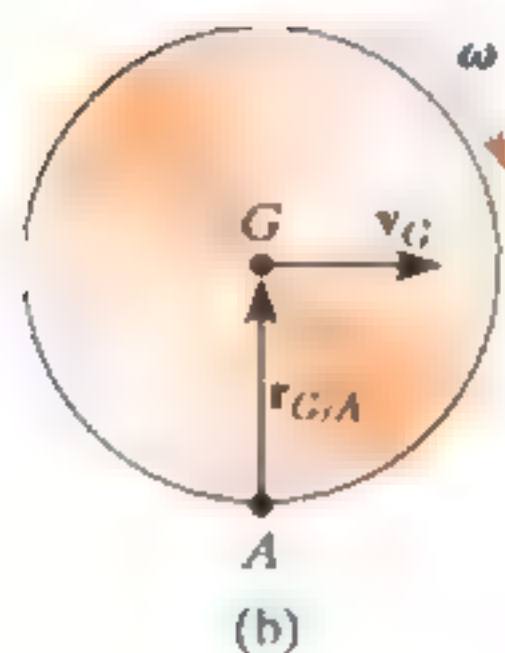
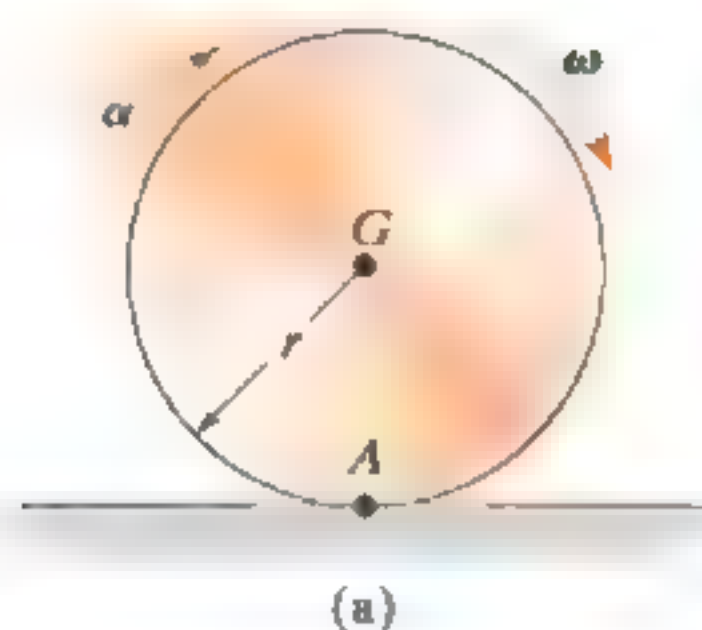


Fig. 16-26

## Procedimiento para el análisis

La ecuación de aceleración relativa puede aplicarse entre dos puntos  $A$  y  $B$  de un cuerpo o por medio de análisis vectorial cartesiano, o escribiendo directamente las ecuaciones de componentes escalares  $x$  y  $y$ .

### Análisis de la velocidad

- Determine la velocidad angular  $\omega$  del cuerpo por la velocidad como se vio en la sección 16.5 o en la 16.6. Asimismo, determine las velocidades  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{v}_B$  de los puntos  $A$  y  $B$ , si éstos se mueven a lo largo de trayectorias curvas.

### Análisis vectorial

#### Diagrama cinemático

- Establezca la dirección de las coordenadas  $x$  y  $y$  fijas y trace el diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él  $\mathbf{a}_A$ ,  $\mathbf{a}_B$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  y  $\mathbf{r}_{B/A}$ .
- Si los puntos  $A$  y  $B$  se mueven a lo largo de trayectorias curvas, entonces sus aceleraciones deberían indicarse en función de sus componentes tangencial y normal, es decir,  $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_A)_t + (\mathbf{a}_A)_n$  y  $\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_t + (\mathbf{a}_B)_n$ .

#### Ecuación de aceleración

- Para aplicar  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$  exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial (cruz) y, después, iguale las respectivas componentes  $i$  y  $j$  para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta una respuesta *negativa* para una magnitud desconocida, ello indica que el sentido del vector es opuesto al que aparece en el diagrama cinemático.

### Análisis escalar

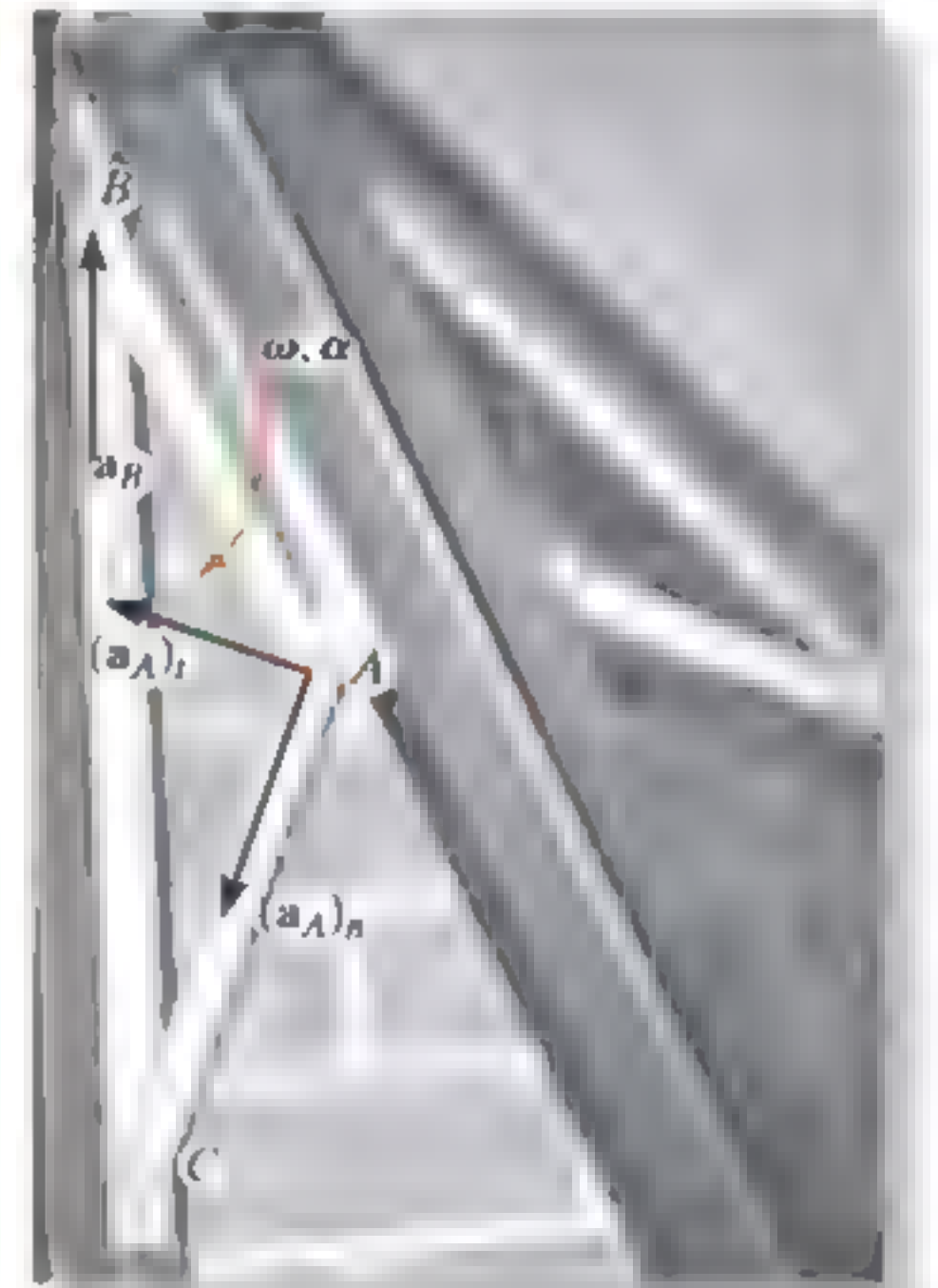
#### Diagrama cinemático

- Si la ecuación de aceleración se aplica en forma escalar, entonces deben establecerse las magnitudes y direcciones de las componentes de aceleración relativa  $(\mathbf{a}_{B/A})_t$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ . Para ello, trace un diagrama cinemático como el de la figura 16-24c. Si se considera que el cuerpo está momentáneamente “fijo por medio de un pasador” en el punto base  $A$ , entonces las magnitudes de estos componentes son  $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$ . Su sentido se establece a partir del diagrama, de modo que  $(\mathbf{a}_{B/A})_t$  actúe perpendicular a  $\mathbf{r}_{B/A}$ , de acuerdo con el movimiento de rotación  $\alpha$  del cuerpo y la dirección de  $(\mathbf{a}_{B/A})_n$  es de  $B$  hacia  $A^*$ .

#### Ecuación de aceleración

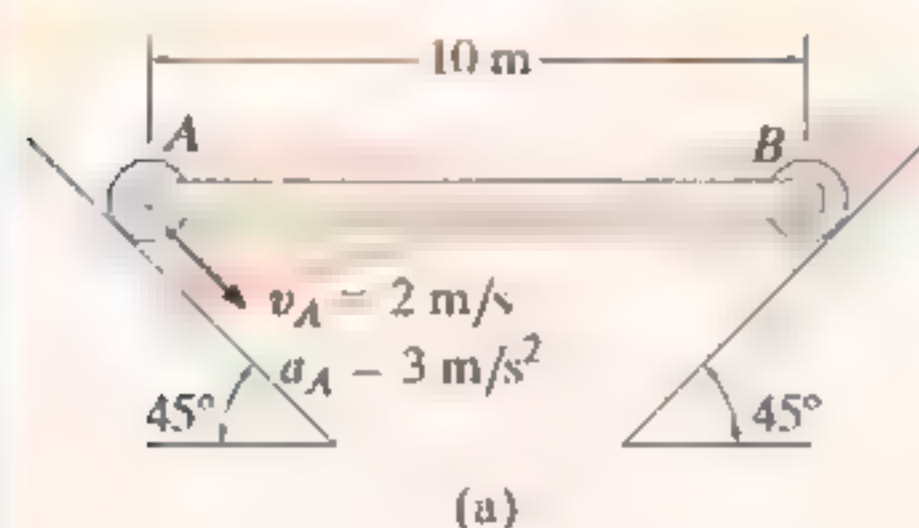
- Represente los vectores en  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$  gráficamente y muestre sus magnitudes y direcciones debajo de cada término. Las ecuaciones escalares se determinan con las componentes  $x$  y  $y$  de estos vectores.

\*La notación  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_t + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_n$  suele ser útil para recordar que se supone que  $A$  está conectado con un pasador.



Se muestra el mecanismo de una ventana. Aquí  $CA$  gira alrededor de un eje fijo a través de  $C$  y  $AB$  experimenta movimiento plano general. Como el punto  $A$  se mueve a lo largo de una trayectoria curva tiene dos componentes de aceleración, en tanto que el punto  $B$  se mueve a lo largo de una corredera recta y la dirección de su aceleración está especificada. (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO



(a)

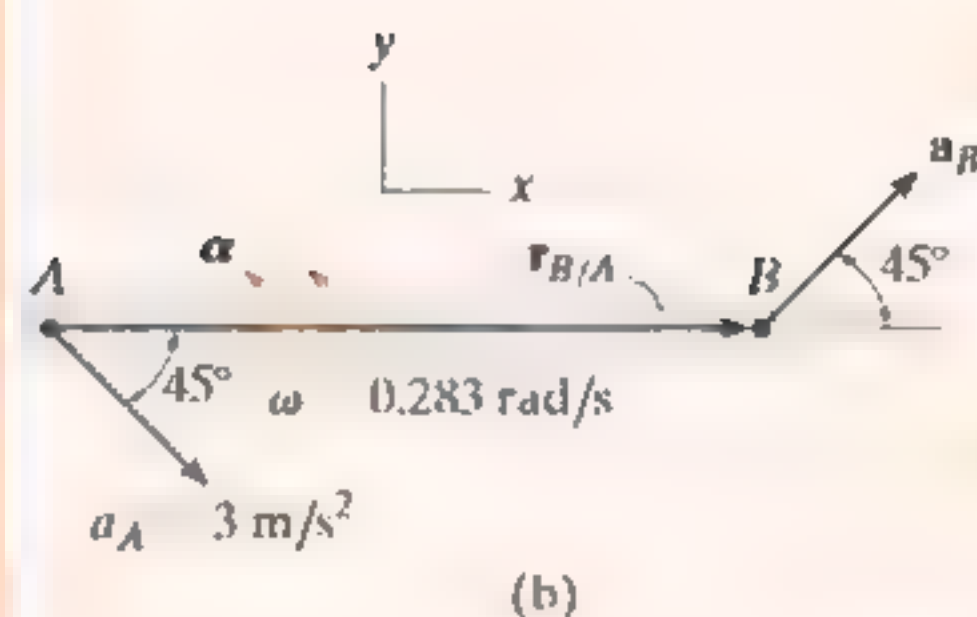
La varilla  $AB$  de la figura 16-27a está confinada a moverse a lo largo de los planos inclinados en  $A$  y  $B$ . Si la aceleración del punto  $A$  es de  $3 \text{ m/s}^2$  y su velocidad de  $2 \text{ m/s}$ , ambas dirigidas hacia abajo del plano en el instante en que la varilla está horizontal, determine la aceleración angular de la varilla en este instante.

## SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Aplicaremos la ecuación de aceleración en los puntos  $A$  y  $B$  de la varilla. Para hacerlo, primero se tiene que determinar la velocidad angular de la varilla. Demuestre que es  $\omega = 0.283 \text{ rad/s}$  por la ecuación de velocidad o el método de centros instantáneos.

**Diagrama cinemático.** Como los puntos  $A$  y  $B$  se mueven a lo largo de trayectorias de línea recta, *no* tienen componentes de aceleración normales a las trayectorias. En la figura 16-27b hay dos incógnitas, es decir,  $a_B$  y  $\alpha$ .

## Ecuación de aceleración



(b)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45^\circ \mathbf{i} + a_B \sin 45^\circ \mathbf{j} = 3 \cos 45^\circ \mathbf{i} - 3 \sin 45^\circ \mathbf{j} + (\alpha \mathbf{k}) \times (10 \mathbf{i}) - (0.283)^2 (10 \mathbf{i})$$

Al realizar el producto vectorial e igualar las componentes  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  se obtiene

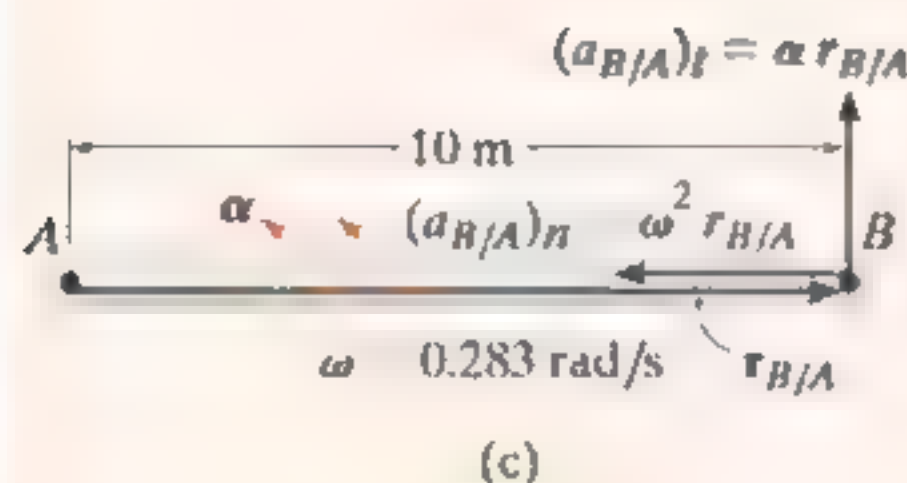
$$a_B \cos 45^\circ = 3 \cos 45^\circ - (0.283)^2 (10) \quad (1)$$

$$a_B \sin 45^\circ = -3 \sin 45^\circ + \alpha (10) \quad (2)$$

Al resolver,

$$a_B = 1.87 \text{ m/s}^2 \angle 45^\circ$$

$$\alpha = 0.344 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \quad \text{Resp.}$$



(c)

Fig. 16-27

## SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Con el diagrama cinemático, que muestra las componentes de aceleración relativa  $(\mathbf{a}_{B/A})_t$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_n$  (fig. 16-27c), tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \angle 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \angle 45^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha (10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283 \text{ rad/s})^2 (10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Al igualar las componentes  $x$  y  $y$  se obtienen las ecuaciones 1 y 2, y la solución prosigue como antes.

## EJEMPLO

El disco rueda sin deslizarse y tiene el movimiento angular mostrado en la figura 16-28a. Determine la aceleración del punto  $A$  en este instante.

$$\omega = 6 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$$

## SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Puesto que no ocurre deslizamiento, se aplica la ecuación 16-20,

$$a_G = \alpha r = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ ft}) = 2 \text{ ft/s}^2$$

## Ecuación de aceleración

Aplicaremos la ecuación de aceleración a los puntos  $G$  y  $A$  (fig. 16-28b),

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_G + \alpha \times \mathbf{r}_{A/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/G} \\ \mathbf{a}_A &= -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{j}) - (6)^2(-0.5\mathbf{j}) \\ &= \{18\mathbf{j}\} \text{ ft/s}^2 \end{aligned}$$

## SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Si utilizamos el resultado para  $a_G = 2 \text{ ft/s}^2$  que determinamos anteriormente y, con base en el diagrama cinemático, que muestra el movimiento relativo  $\mathbf{a}_{A/G}$  (fig. 16-28c), tenemos

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{A/G})_x + (\mathbf{a}_{A/G})_y$$

$$\left[ \begin{array}{c} (a_A)_x \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (a_A)_y \\ \uparrow \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 2 \text{ ft/s}^2 \\ \leftarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ ft}) \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (6 \text{ rad/s})^2(0.5 \text{ ft}) \\ \uparrow \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \quad (a_A)_x = -2 + 2 = 0$$

$$+\uparrow \quad (a_A)_y = 18 \text{ ft/s}^2$$

Por lo tanto,

$$a_A = \sqrt{(0)^2 + (18 \text{ ft/s}^2)^2} = 18 \text{ ft/s}^2$$

**NOTA:** El hecho de que  $a_A = 18 \text{ ft/s}^2$  indica que el centro instantáneo de velocidad cero, el punto  $A$ , no es un punto de aceleración cero.

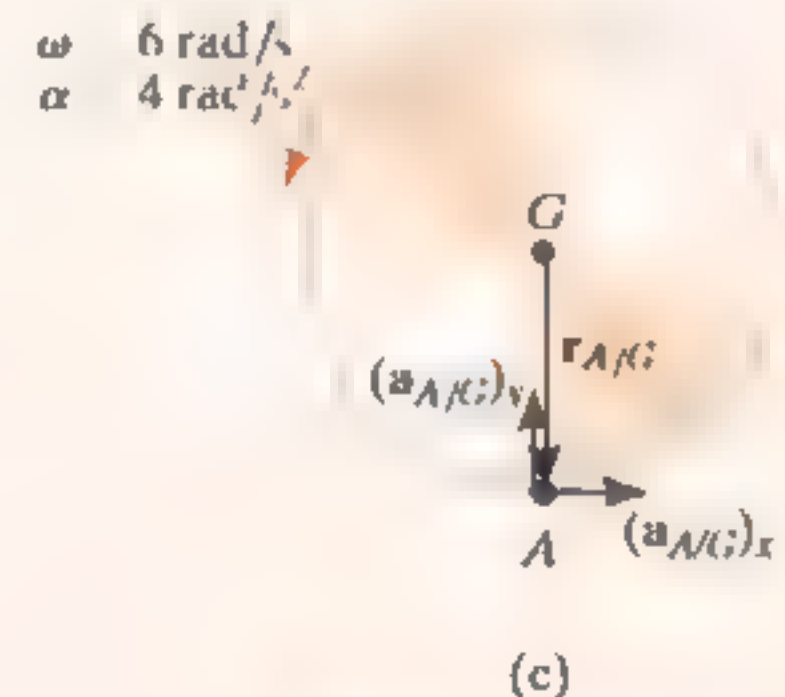
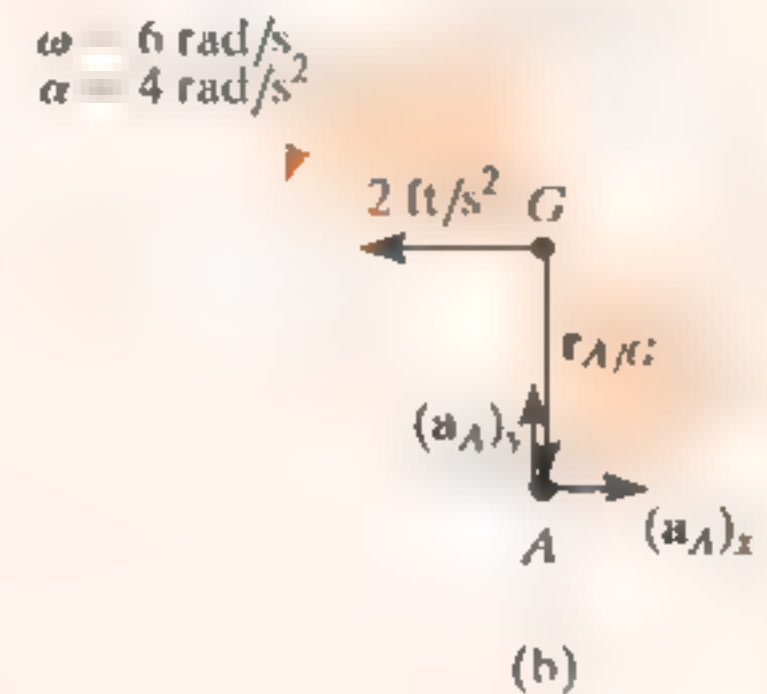
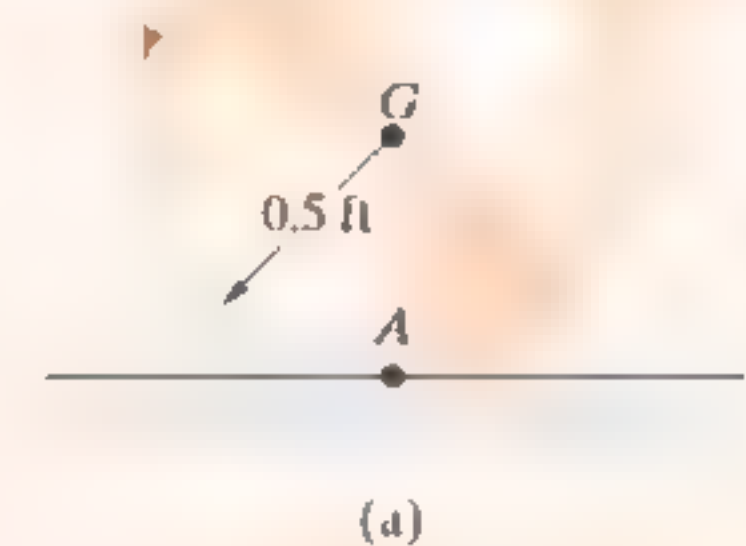
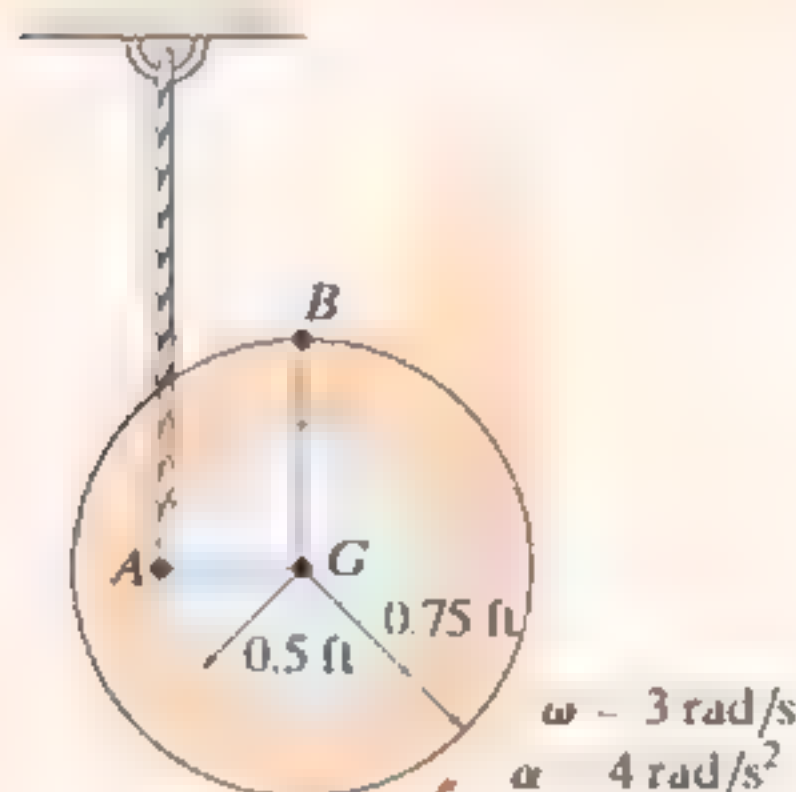
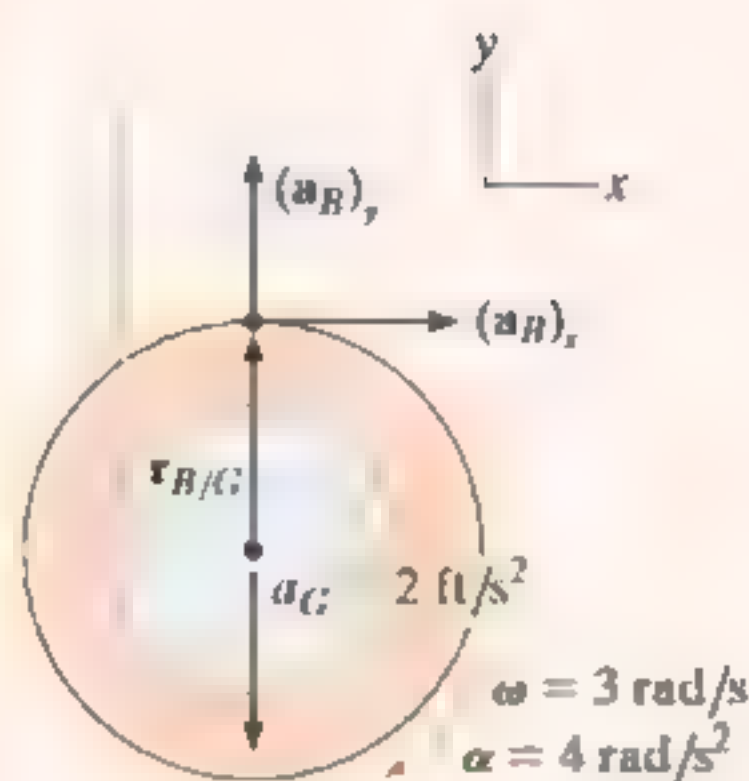


Fig. 16-28

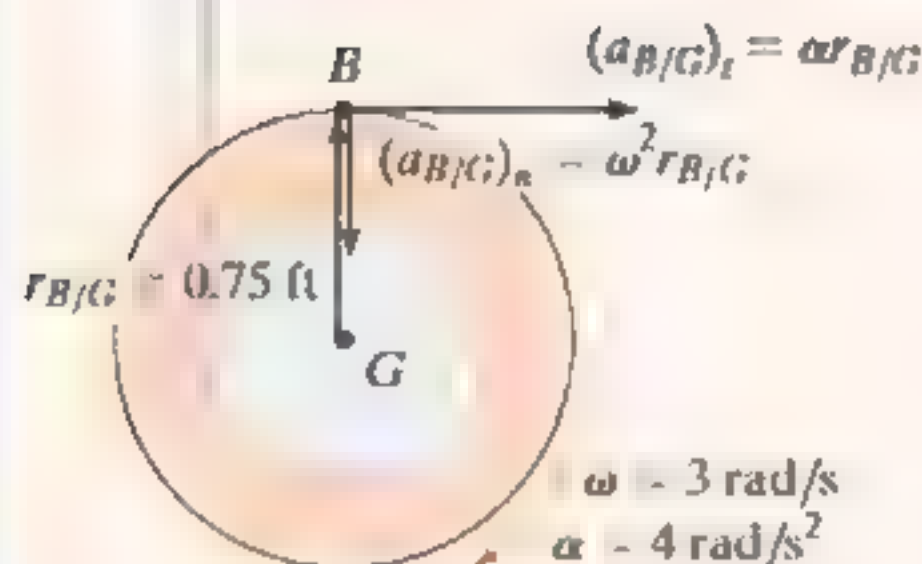
## EJEMPLO



(a)



(b)



(c)

Fig. 16-29

El carrete que se ilustra en la figura 16-29a se desenreda de la cuerda, de modo que, en el instante que se muestra, tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 4 rad/s². Determine la aceleración del punto B.

## SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

“Parece” que el carrete rueda hacia abajo sin deslizarse en el punto A. Por consiguiente, podemos utilizar los resultados de la ecuación 16-20 para determinar la aceleración del punto G, es decir,

$$a_G = \alpha r = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ ft}) = 2 \text{ ft/s}^2$$

Aplicaremos la ecuación de aceleración a los puntos G y B.

**Diagrama cinemático.** El punto B se mueve a lo largo de una *trayectoria curva* de radio de curvatura *desconocido\**. Su aceleración estará representada por sus componentes x y y desconocidas, como se muestra en la figura 16-29b.

## Ecuación de aceleración

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \alpha \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/G}$$

$$(a_B)_x \mathbf{i} + (a_B)_y \mathbf{j} = -2\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (0.75\mathbf{j}) - (3)^2(0.75\mathbf{i})$$

Al igualar los términos i y j, las ecuaciones de componentes son

$$(a_B)_x = 4(0.75) = 3 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \quad (1)$$

$$(a_B)_y = -2 - 6.75 = -8.75 \text{ ft/s}^2 = 8.75 \text{ ft/s}^2 \downarrow \quad (2)$$

La magnitud y dirección de  $\mathbf{a}_B$  son, por consiguiente,

$$a_B = \sqrt{(3)^2 + (8.75)^2} = 9.25 \text{ ft/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8.75}{3} = 71.1^\circ \quad \text{Resp.}$$

## SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Este problema se resuelve si se escriben directamente las ecuaciones de componentes escalares. El diagrama cinemático de la figura 16-29c muestra las componentes de aceleración relativa  $(\mathbf{a}_{B/G})_t$  y  $(\mathbf{a}_{B/G})_n$ . Por ende,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n$$

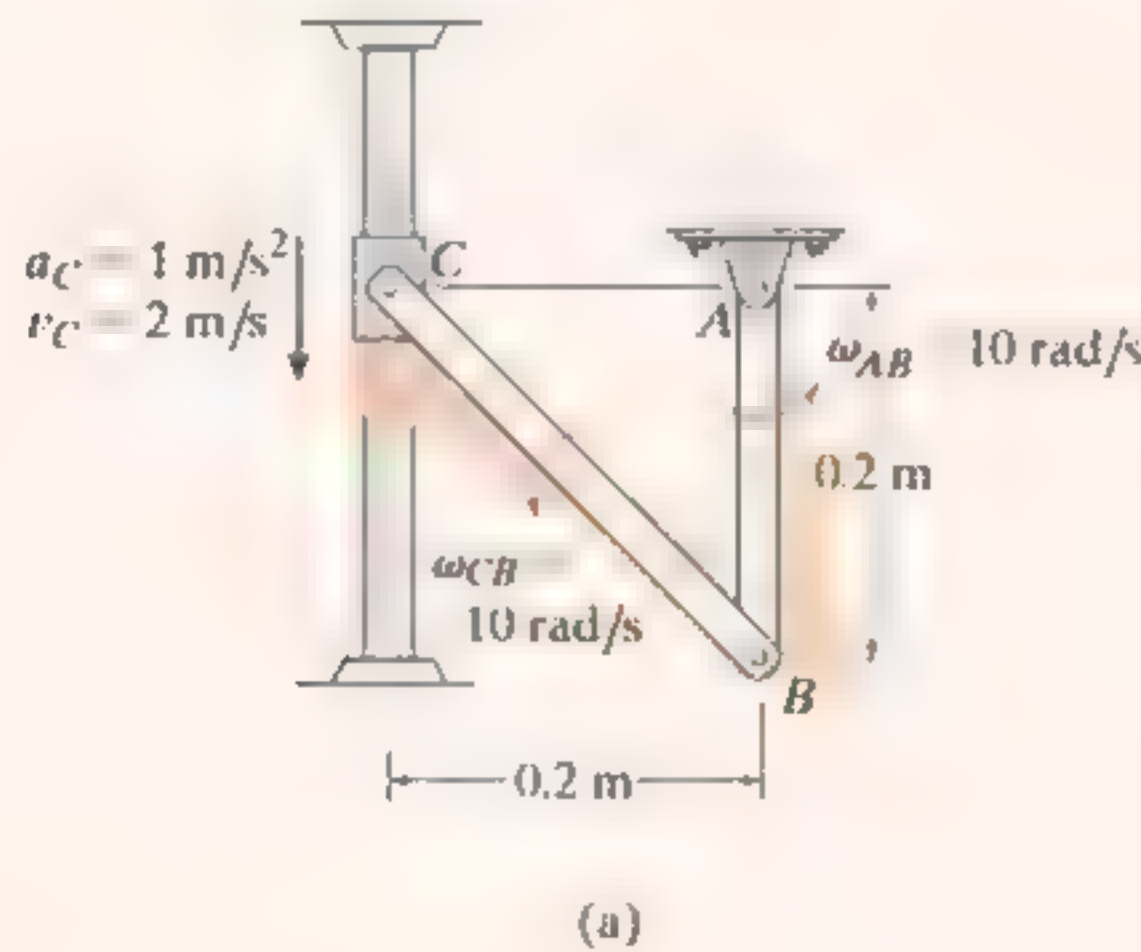
$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} (a_B)_x \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (a_B)_y \\ \uparrow \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c} 2 \text{ ft/s}^2 \\ \downarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 4 \text{ rad/s}^2 (0.75 \text{ ft}) \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (3 \text{ rad/s})^2 (0.75 \text{ ft}) \\ \downarrow \end{array} \right] \end{aligned}$$

Los componentes x y y dan las ecuaciones 1 y 2 anteriores.

\*Observe que el radio de curvatura  $\rho$  no es igual al radio del carrete, ya que éste no gira alrededor del punto G. Además,  $\rho$  no se define como la distancia de A (CI) a B, ya que la ubicación del CI depende solamente de la velocidad de un punto y no de la geometría de su trayectoria.

## EJEMPLO

El collarín  $C$  en la figura 16-30a se mueve hacia abajo con una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . En el instante que se muestra, su rapidez es de  $2 \text{ m/s}$ , la cual imprime a las articulaciones  $CB$  y  $AB$  una velocidad angular  $\omega_{AB} = \omega_{CB} = 10 \text{ rad/s}$  (vea el ejemplo 16.8). Determine la aceleración angular de  $CB$  y  $AB$  en este instante.



## SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Los diagramas cinemáticos de los eslabones  $AB$  y  $CB$  se ilustran en la figura 16-30b. Para la solución, aplicaremos la ecuación cinemática apropiada a cada eslabón.

## Ecuación de aceleración

Eslabón  $AB$  (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \alpha_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B \\ \mathbf{a}_B &= (\alpha_{AB} \mathbf{k}) \times (-0.2 \mathbf{j}) - (10)^2 (-0.2 \mathbf{j}) \\ \mathbf{a}_B &= 0.2 \alpha_{AB} \mathbf{i} + 20 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Observe que  $\mathbf{a}_B$  tiene componentes  $n$  y  $t$  pues se mueve a lo largo de una *trayectoria circular*.

Eslabón  $BC$  (movimiento plano general): Con el resultado de  $\mathbf{a}_B$  y si aplicamos la ecuación 16-18, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_C + \alpha_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C} \\ 0.2 \alpha_{AB} \mathbf{i} + 20 \mathbf{j} &= -1 \mathbf{j} + (\alpha_{CB} \mathbf{k}) \times (0.2 \mathbf{i} - 0.2 \mathbf{j}) - (10)^2 (0.2 \mathbf{i} - 0.2 \mathbf{j}) \\ 0.2 \alpha_{AB} \mathbf{i} + 20 \mathbf{j} &= -1 \mathbf{j} + 0.2 \alpha_{CB} \mathbf{j} + 0.2 \alpha_{CB} \mathbf{i} - 20 \mathbf{i} + 20 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0.2 \alpha_{AB} &= 0.2 \alpha_{CB} - 20 \\ 20 &= -1 + 0.2 \alpha_{CB} + 20 \end{aligned}$$

Al resolver,

$$\begin{aligned} \alpha_{CB} &= 5 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \\ \alpha_{AB} &= -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \end{aligned}$$

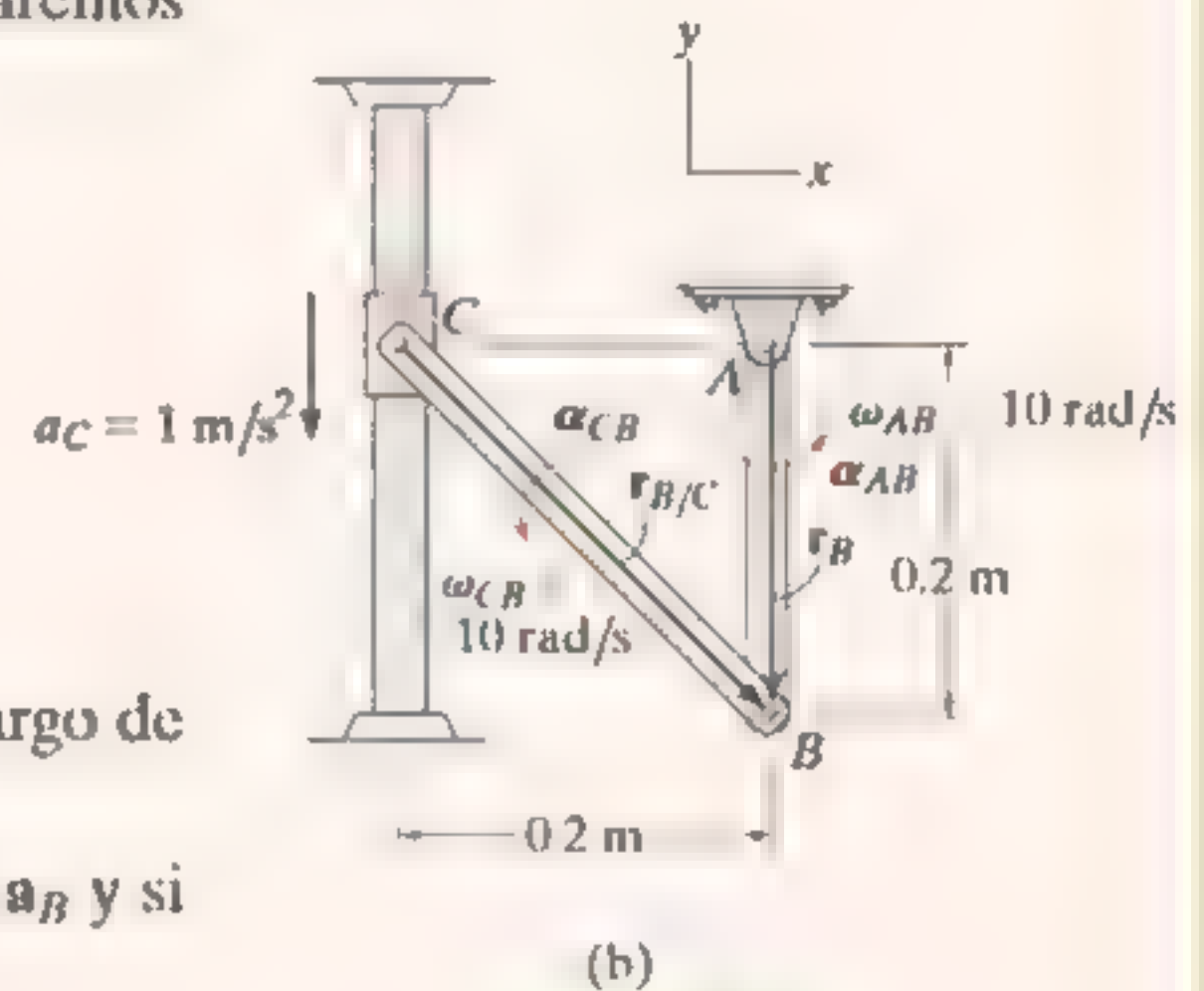
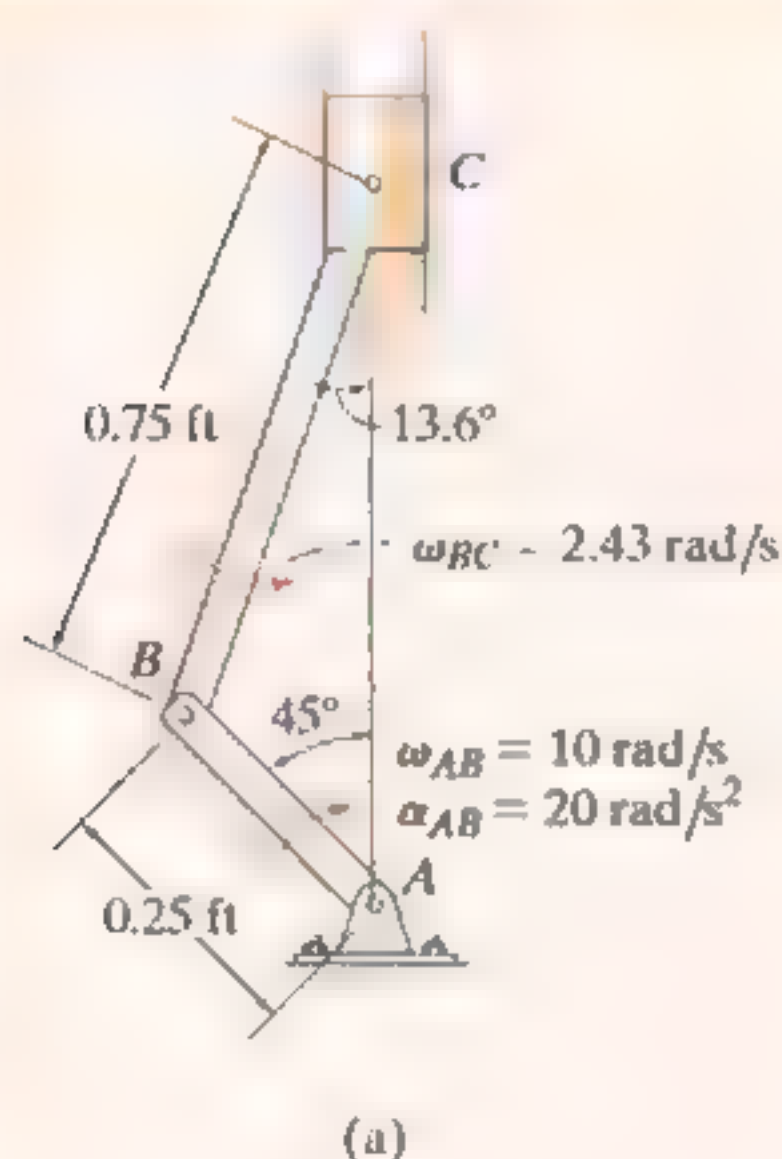


Fig. 16-30

## EJEMPLO 16.17



El cigüeñal  $AB$  gira con una aceleración angular en sentido horario de  $20 \text{ rad/s}^2$  (fig. 16-31a). Determine la aceleración del pistón cuando  $AB$  está en la posición que se ilustra. En este instante  $\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{BC} = 2.43 \text{ rad/s}$  (vea el ejemplo 16.12).

## SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

**Diagrama cinemático.** Los diagramas cinemáticos de  $AB$  y  $BC$  se muestran en la figura 16-31b. Aquí  $a_C$  es vertical, ya que  $C$  se mueve a lo largo de una trayectoria de línea recta.

Mediante la expresión de cada uno de los vectores de posición en forma vectorial cartesiana

$$\mathbf{r}_B = \{-0.25 \sin 45^\circ \mathbf{i} + 0.25 \cos 45^\circ \mathbf{j}\} \text{ ft} = \{-0.177 \mathbf{i} + 0.177 \mathbf{j}\} \text{ ft}$$

$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.75 \sin 13.6^\circ \mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6^\circ \mathbf{j}\} \text{ ft} = \{0.177 \mathbf{i} + 0.729 \mathbf{j}\} \text{ ft}$$

Cigüeñal  $AB$  (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \alpha_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B \\ &= (-20 \mathbf{k}) \times (-0.177 \mathbf{i} + 0.177 \mathbf{j}) - (10)^2 (-0.177 \mathbf{i} + 0.177 \mathbf{j}) \\ &= \{21.21 \mathbf{i} - 14.14 \mathbf{j}\} \text{ ft/s}^2 \end{aligned}$$

Biela  $BC$  (movimiento plano general): Con el resultado de  $\mathbf{a}_B$  y si observamos que  $\mathbf{a}_C$  está en la dirección vertical, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \alpha_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B} \\ a_C \mathbf{j} &= 21.21 \mathbf{i} - 14.14 \mathbf{j} + (\alpha_{BC} \mathbf{k}) \times (0.177 \mathbf{i} + 0.729 \mathbf{j}) - (2.43)^2 (0.177 \mathbf{i} + 0.729 \mathbf{j}) \\ a_C \mathbf{j} &= 21.21 \mathbf{i} - 14.14 \mathbf{j} + 0.177 \alpha_{BC} \mathbf{j} - 0.729 \alpha_{BC} \mathbf{i} - 1.04 \mathbf{i} - 4.30 \mathbf{j} \\ 0 &= 20.17 - 0.729 \alpha_{BC} \\ a_C &= 0.177 \alpha_{BC} - 18.45 \end{aligned}$$

Al resolver tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_{BC} &= 27.7 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \\ a_C &= -13.5 \text{ ft/s}^2 \end{aligned}$$

*Resp.*

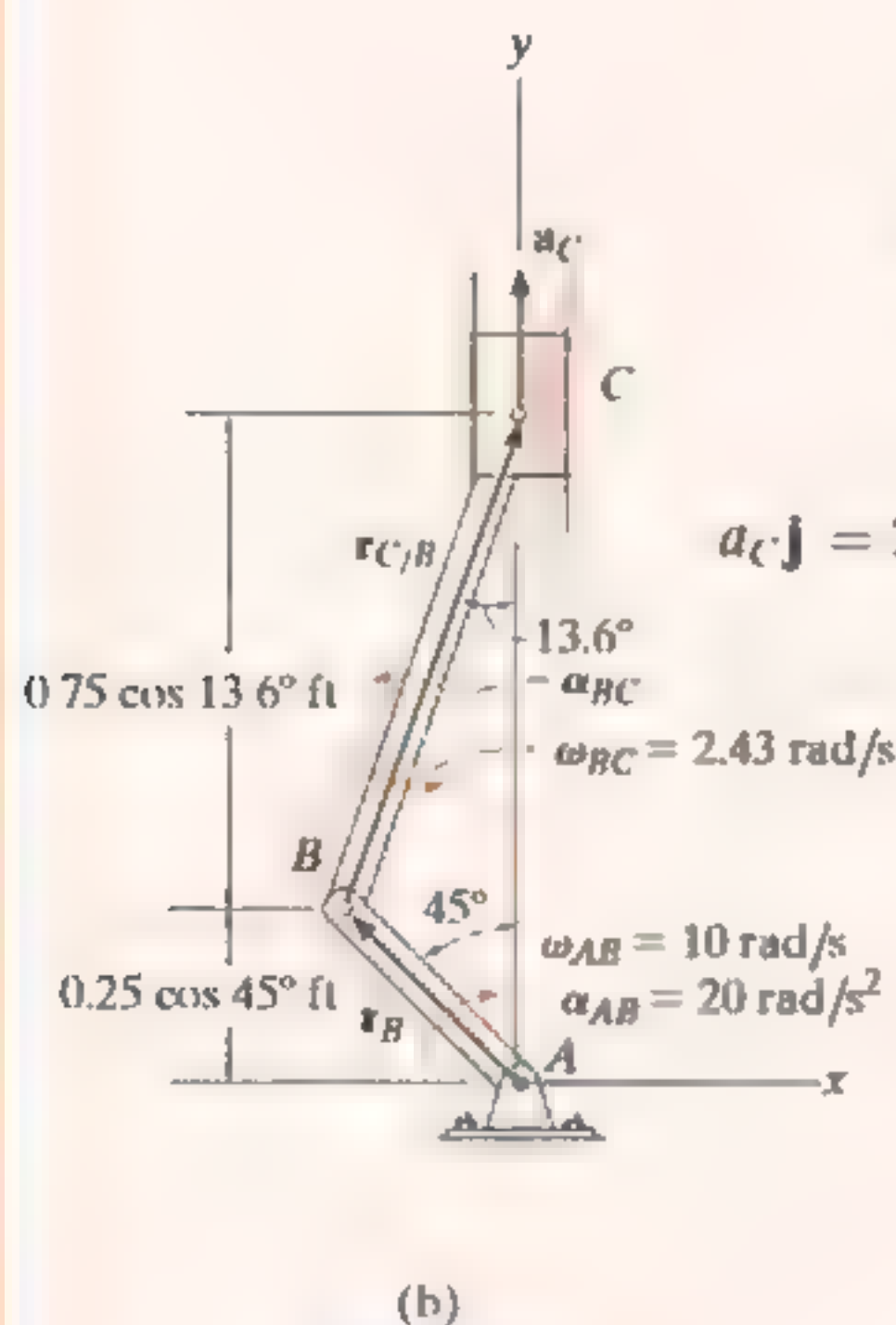
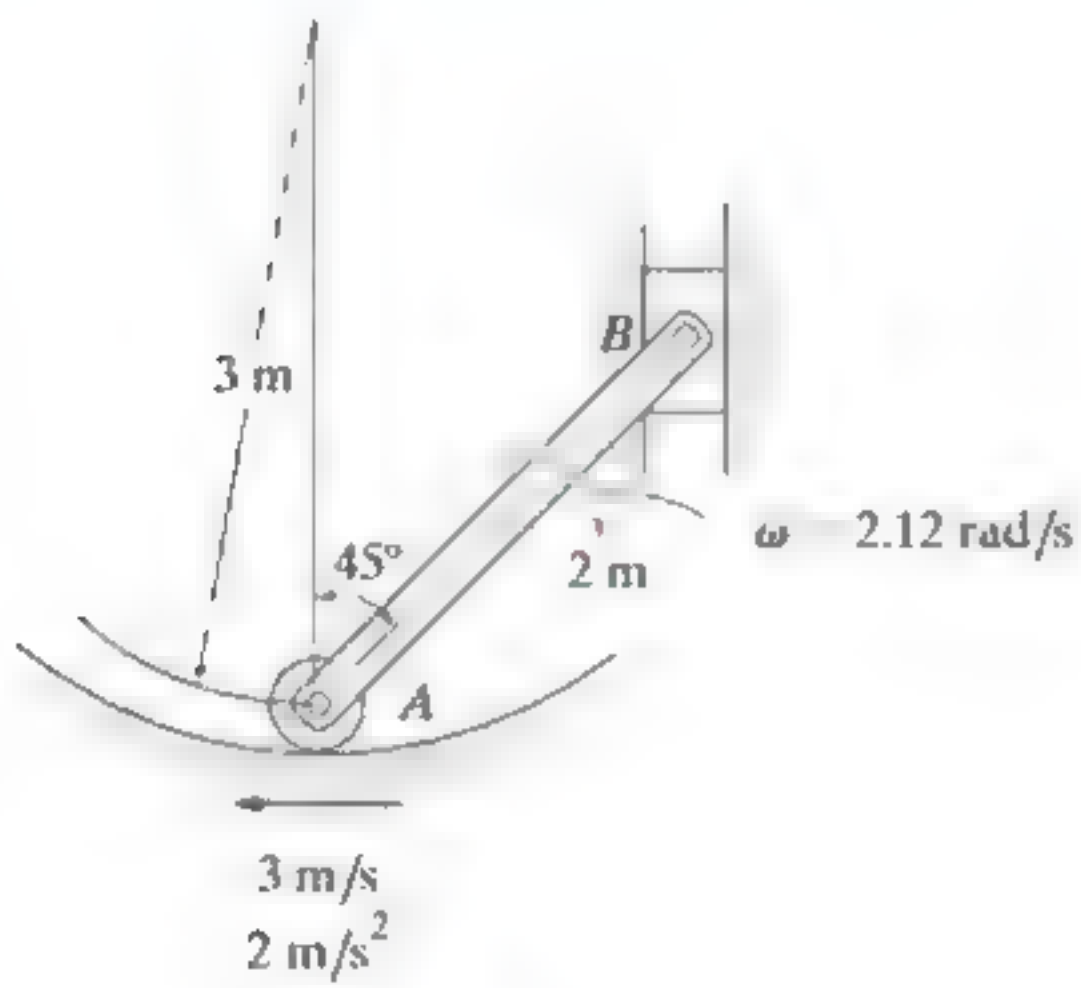


Fig. 16-31

**NOTA:** Como el pistón se mueve hacia arriba, el signo negativo de  $a_C$  indica que el pistón se desacelera, es decir,  $a_C = \{-13.5\} \text{ ft/s}^2$ . Esto hace que la rapidez del pistón se reduzca hasta que  $AB$  está vertical, momento en el cual el pistón está momentáneamente en reposo.

# PROBLEMA PRELIMINAR

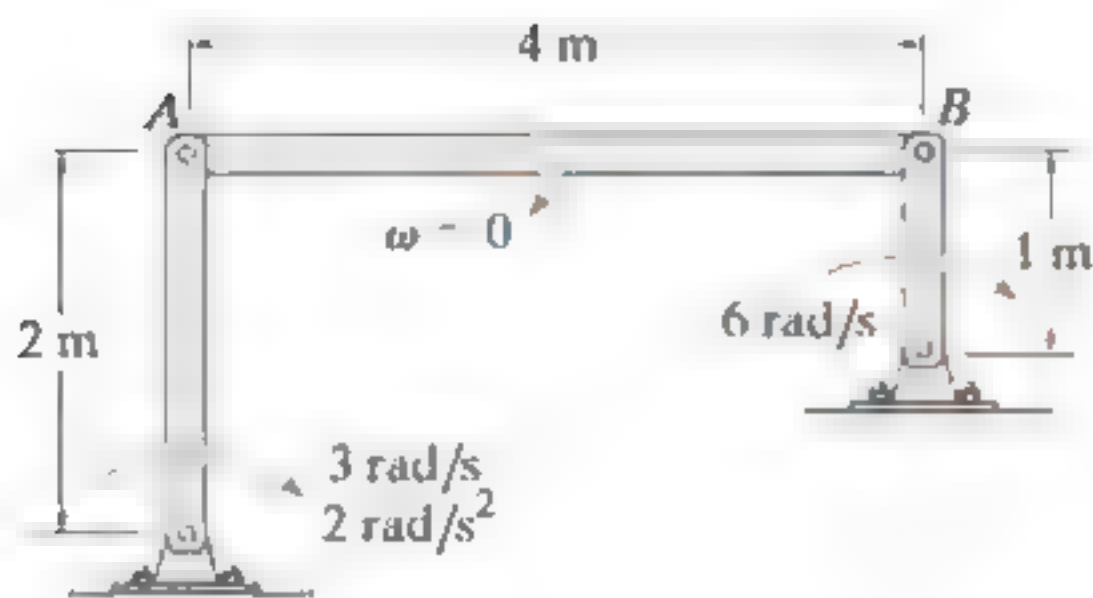
**P16-3.** Establezca la ecuación de aceleración relativa entre los puntos  $A$  y  $B$ . La velocidad angular está dada.



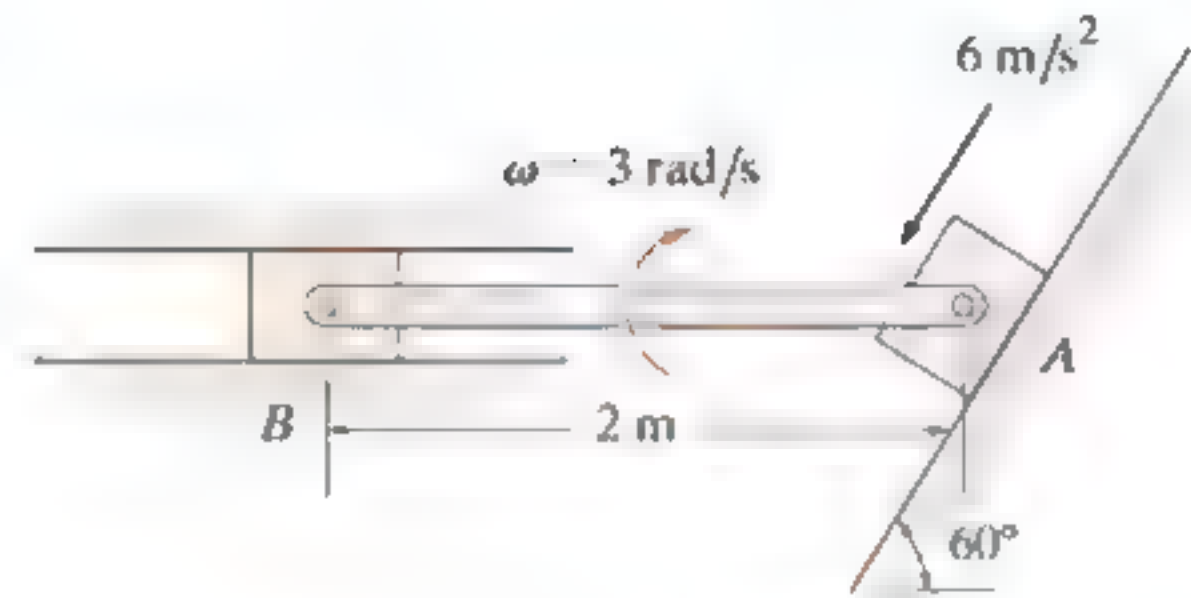
(a)



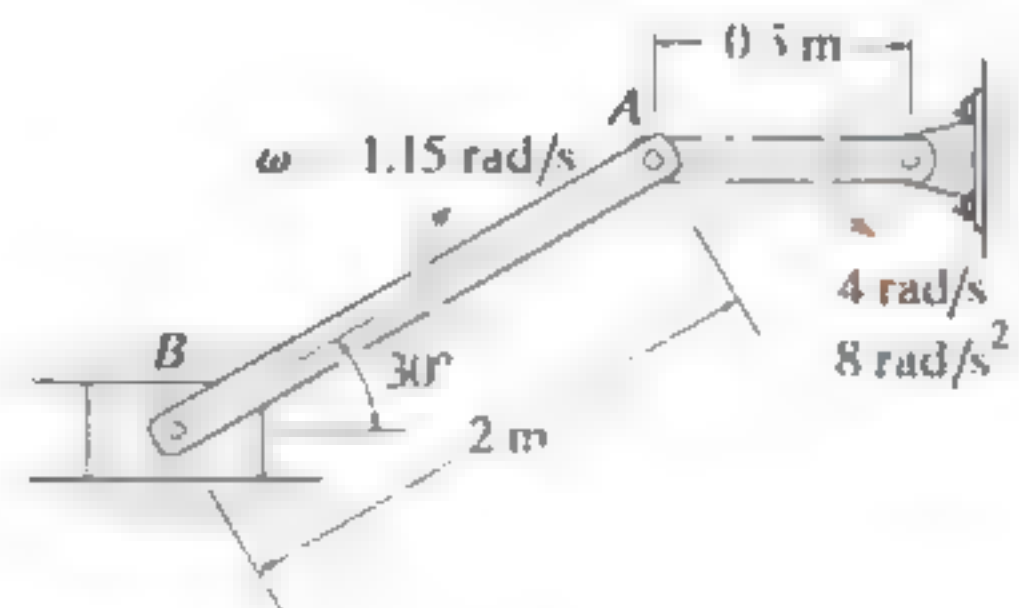
(b)



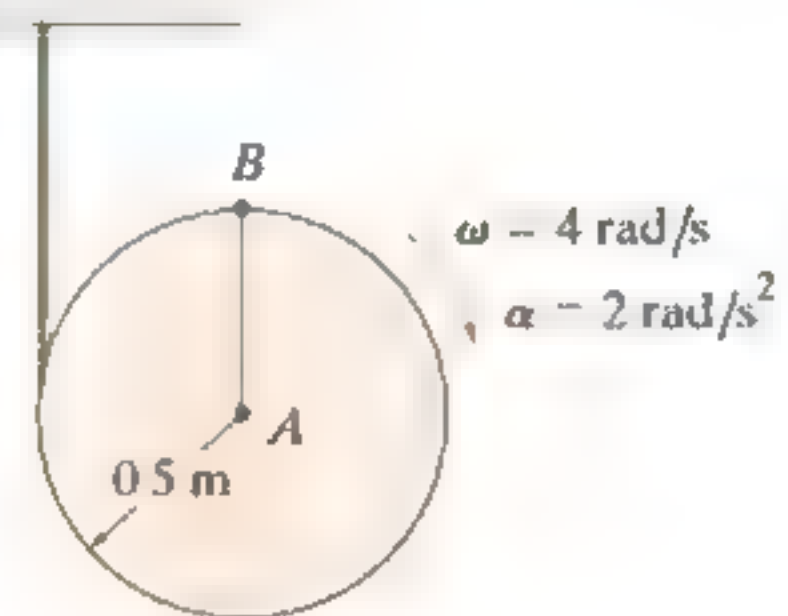
(c)



(d)



(e)

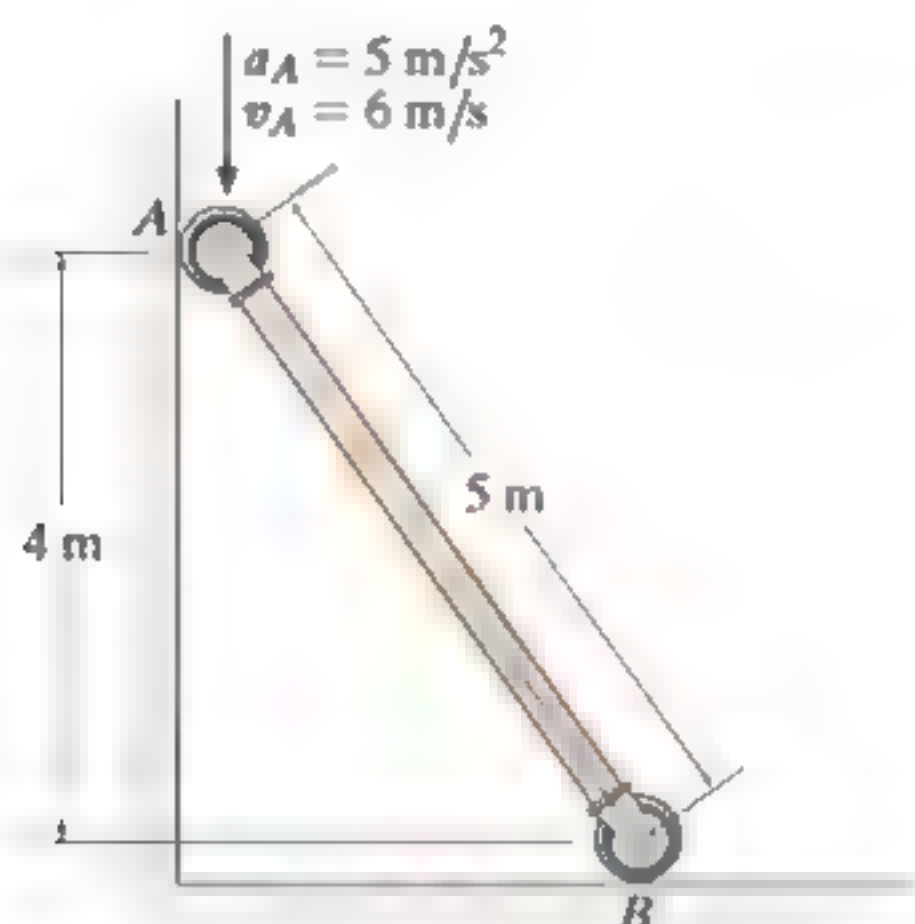


(f)

Prob. P16-3

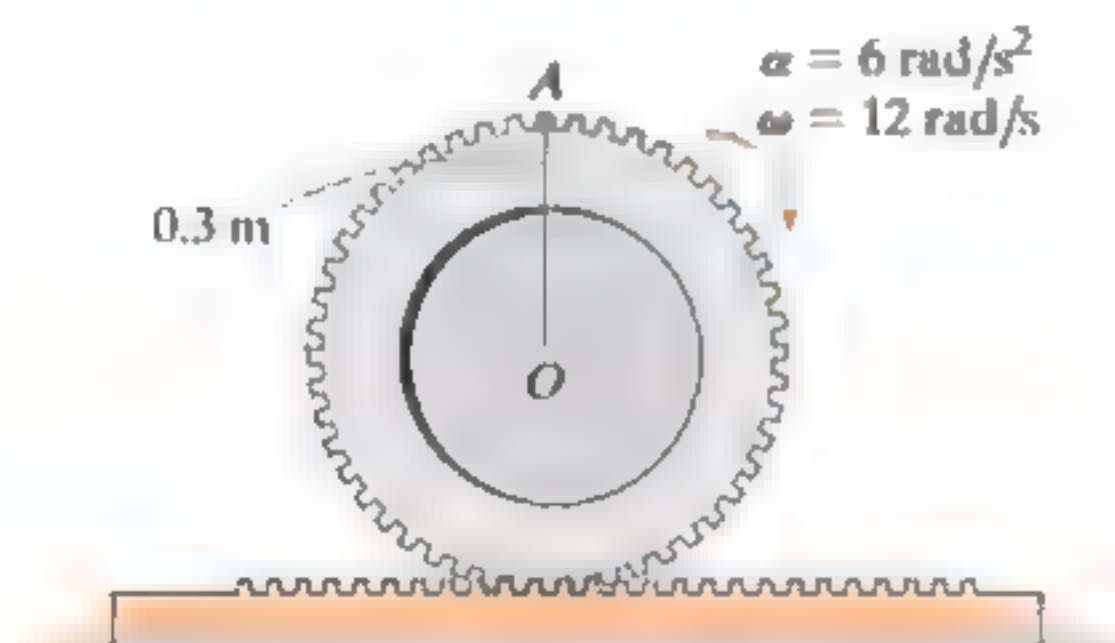
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F16-19.** En el instante que se indica, el extremo  $A$  de la varilla tiene la velocidad y aceleración mostradas. Determine la aceleración angular de la varilla y la aceleración del extremo  $B$  de la varilla.



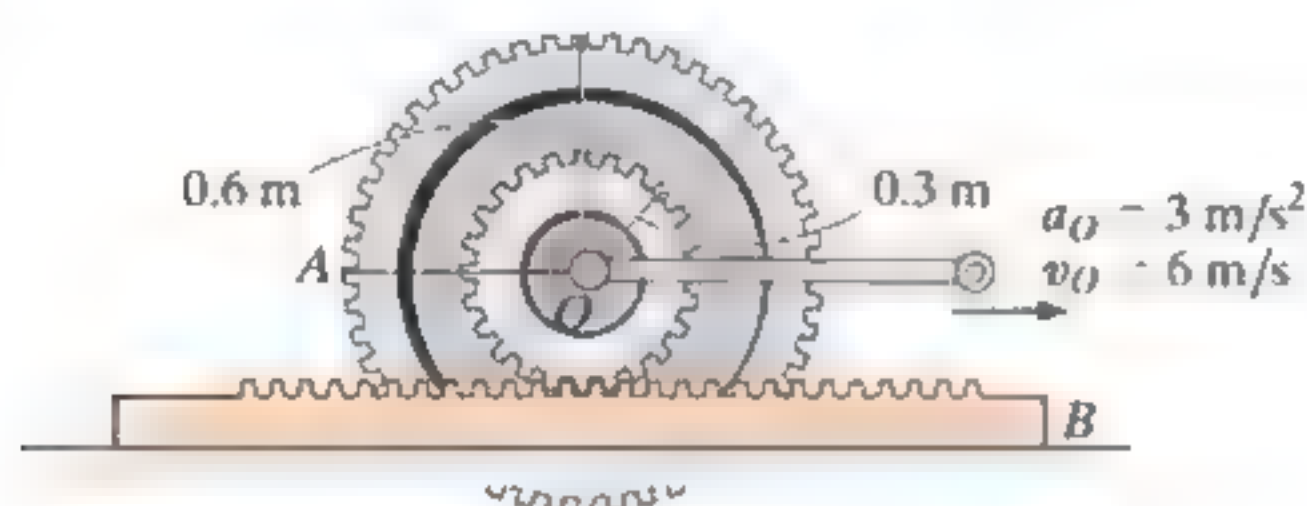
Prob. F16-19

**F16-20.** El engrane rueda sobre la cremallera fija con una velocidad angular de  $\omega = 12 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular de  $\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$ . Determine la aceleración del punto  $A$ .



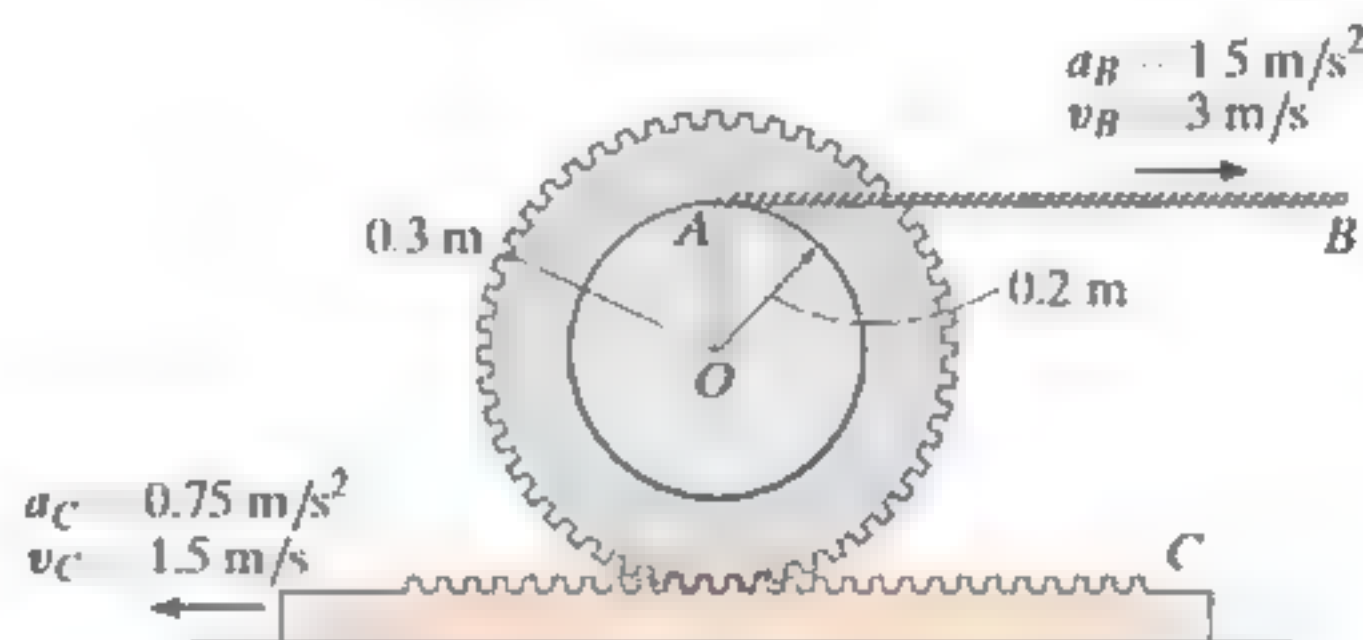
Prob. F16-20

**F16-21.** El engrane rueda sobre la cremallera fija  $B$ . En el instante que se muestra, el centro  $O$  del engrane se mueve con una velocidad de  $v_O = 6 \text{ m/s}$  y una aceleración de  $a_O = 3 \text{ m/s}^2$ . Determine la aceleración angular del engrane y la aceleración del punto  $A$  en este instante.



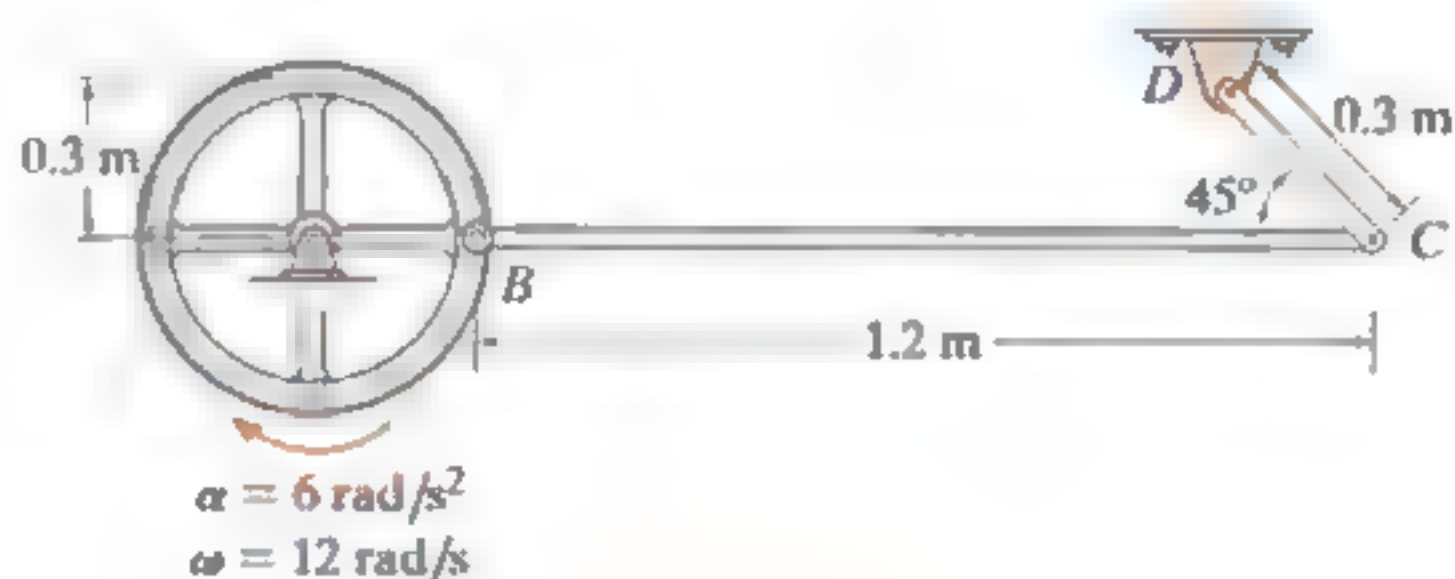
Prob. F16-21

**F16-22.** En el instante que se muestra, la velocidad del cable  $AB$  es de  $3 \text{ m/s}$  y su aceleración de  $1.5 \text{ m/s}^2$ , mientras que la velocidad de la cremallera es de  $1.5 \text{ m/s}$  y su aceleración de  $0.75 \text{ m/s}^2$ . Determine la aceleración angular del engrane en este instante.



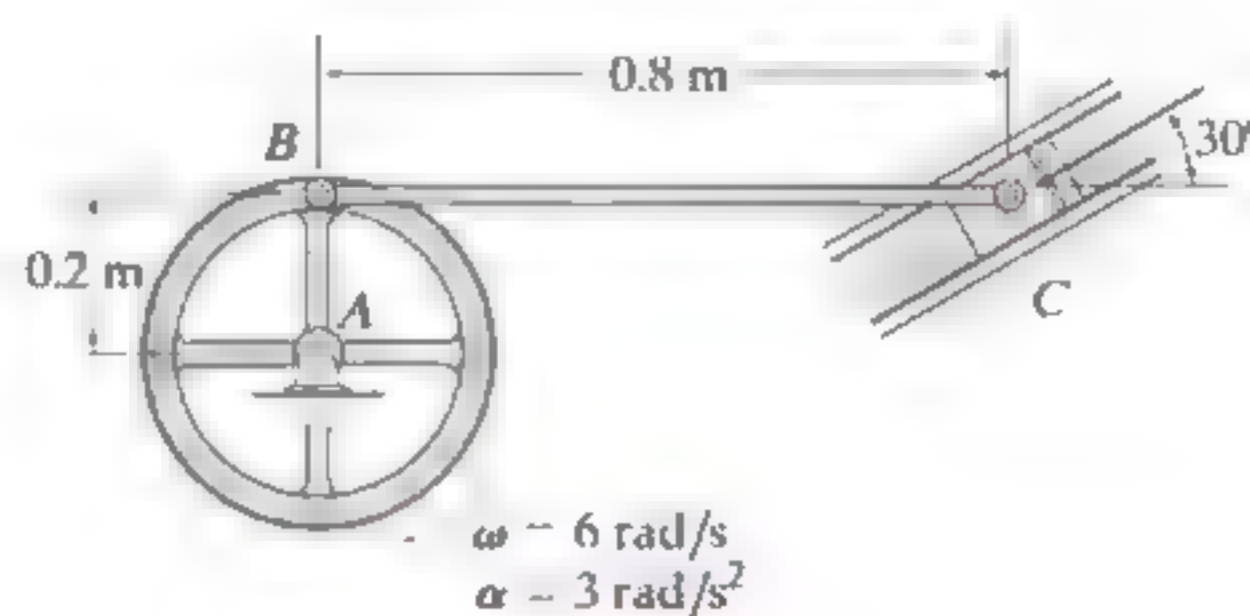
Prob. F16-22

**F16-23.** En el instante que se muestra, la rueda hace un movimiento de rotación con una velocidad angular de  $\omega = 12 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular de  $\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$ . Determine la aceleración angular del eslabón  $BC$  en el instante mostrado.



Prob. F16-23

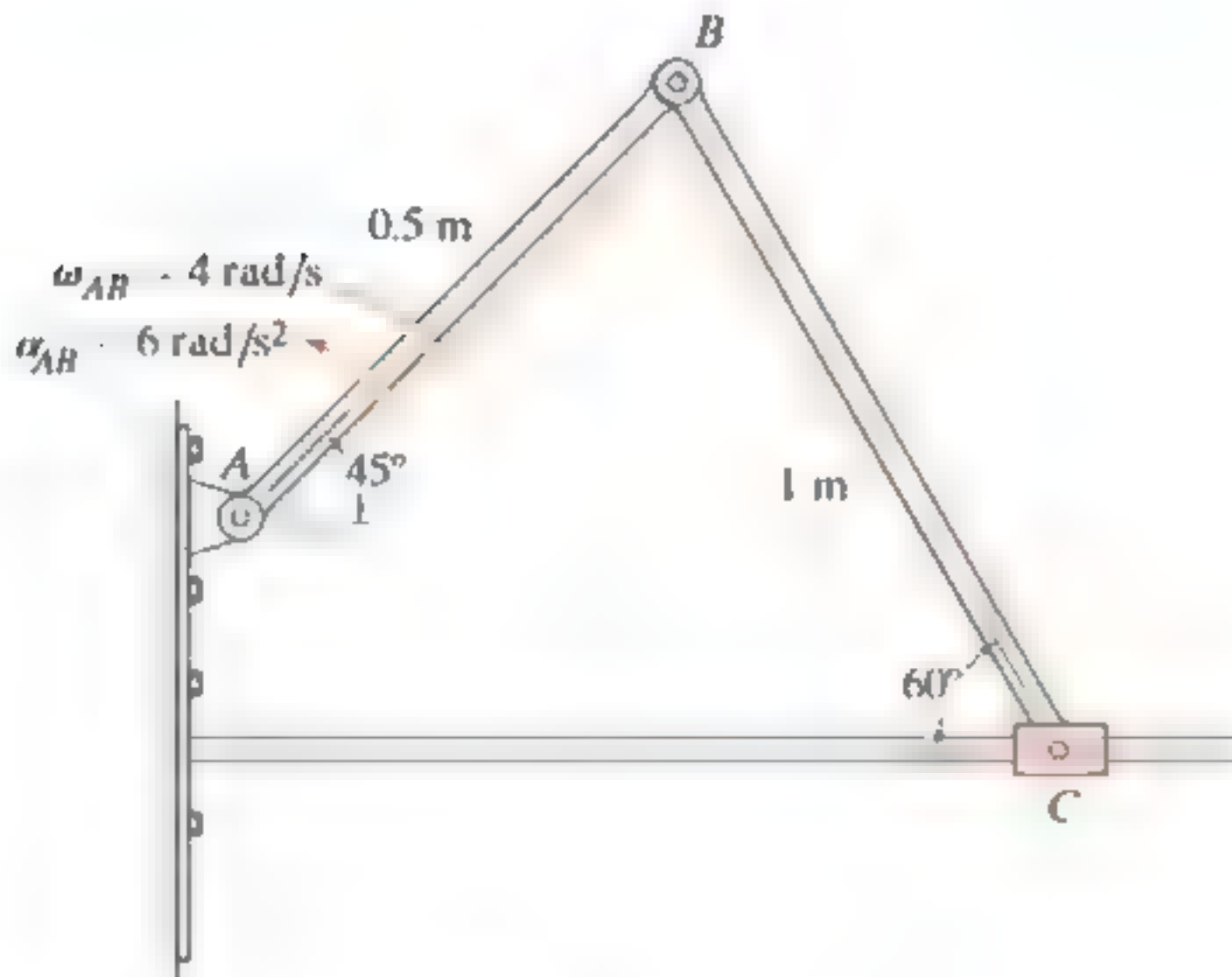
**F16-24.** En el instante que se muestra, la rueda  $A$  hace un movimiento de rotación con una velocidad angular de  $\omega = 6 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular de  $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ . Determine la aceleración angular del eslabón  $BC$  y la aceleración del pistón  $C$ .



Prob. F16-24

## PROBLEMAS

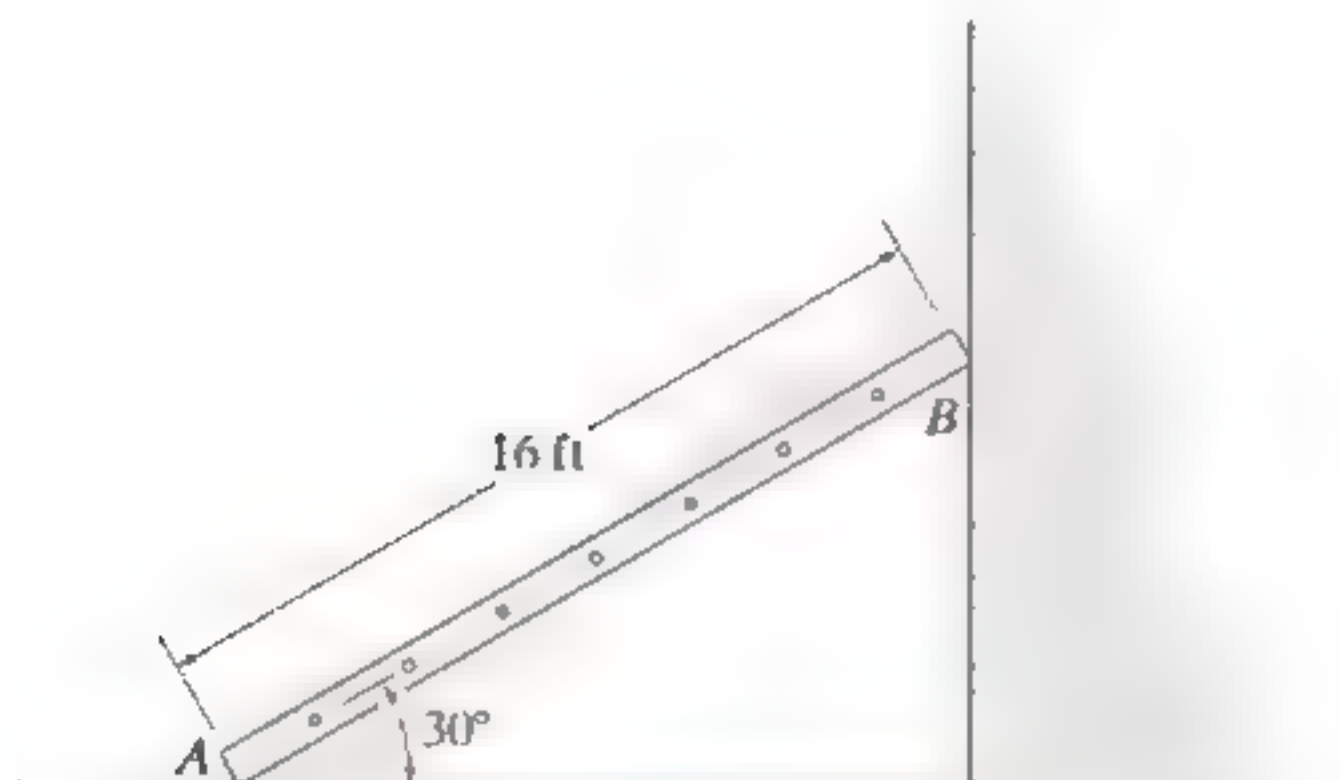
**16-103.** La barra  $AB$  tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizante  $C$  en este instante.



Prob. 16-103

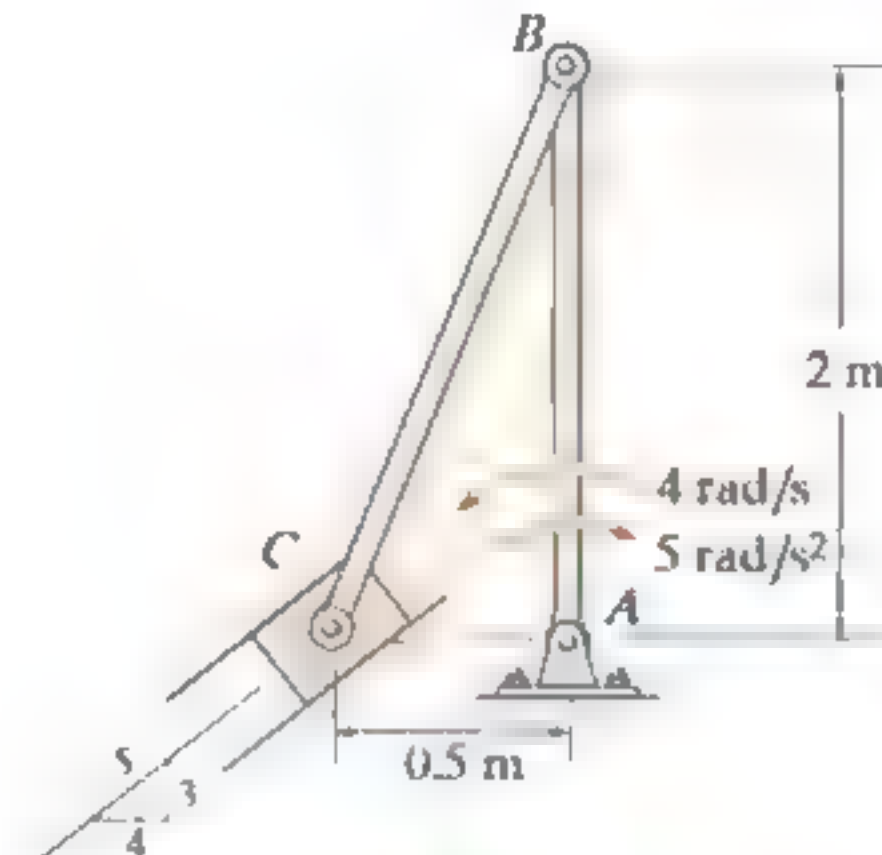
**\*16-104.** En un instante dado, la parte inferior  $A$  de la escalera tiene una aceleración  $a_A = 4 \text{ ft/s}^2$  y una velocidad  $v_A = 6 \text{ ft/s}$ ; ambas actúan hacia la izquierda. Determine la aceleración de la parte superior de la escalera,  $B$ , y la aceleración angular de la escalera en este mismo instante.

**16-105.** En un instante dado, la parte superior  $B$  de la escalera tiene una aceleración  $a_B = 2 \text{ ft/s}^2$  y una velocidad  $v_B = 4 \text{ ft/s}$ ; ambas actúan hacia abajo. Determine la aceleración de la parte inferior  $A$  de la escalera, y la aceleración angular de la escalera en este instante.



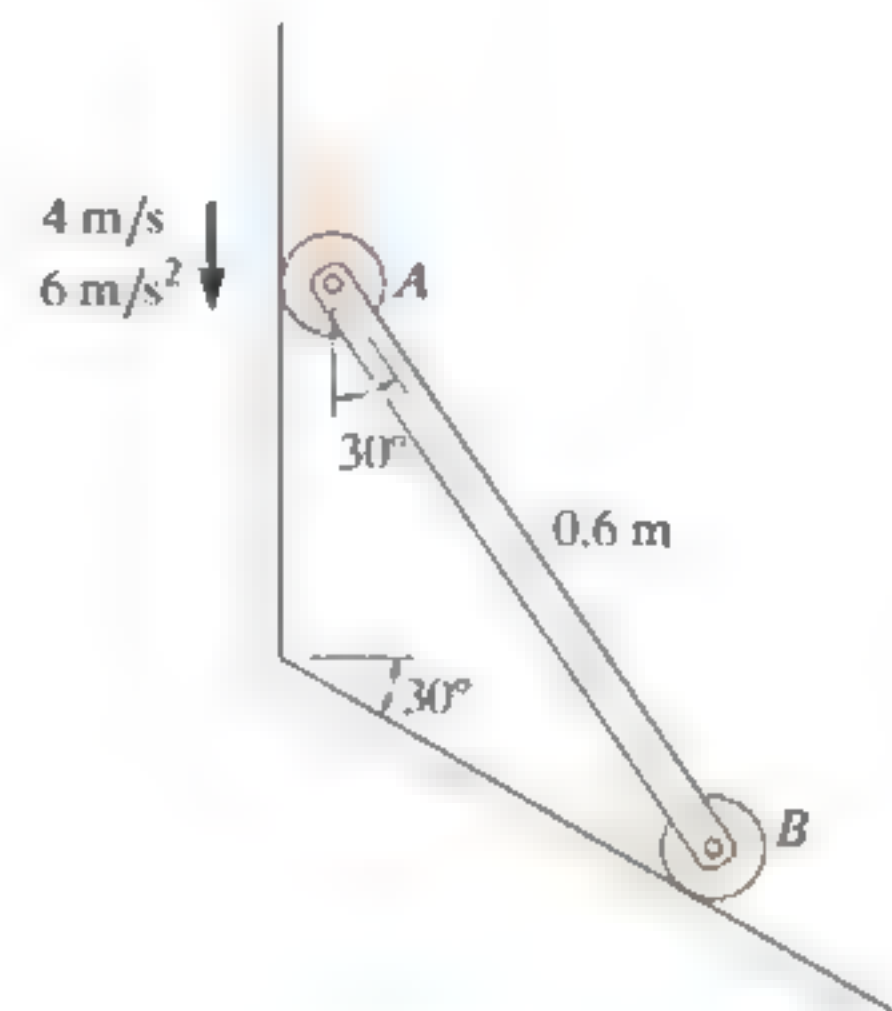
Probs. 16-104/105

**16-106.** El elemento  $AB$  tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizante  $C$  en este instante.



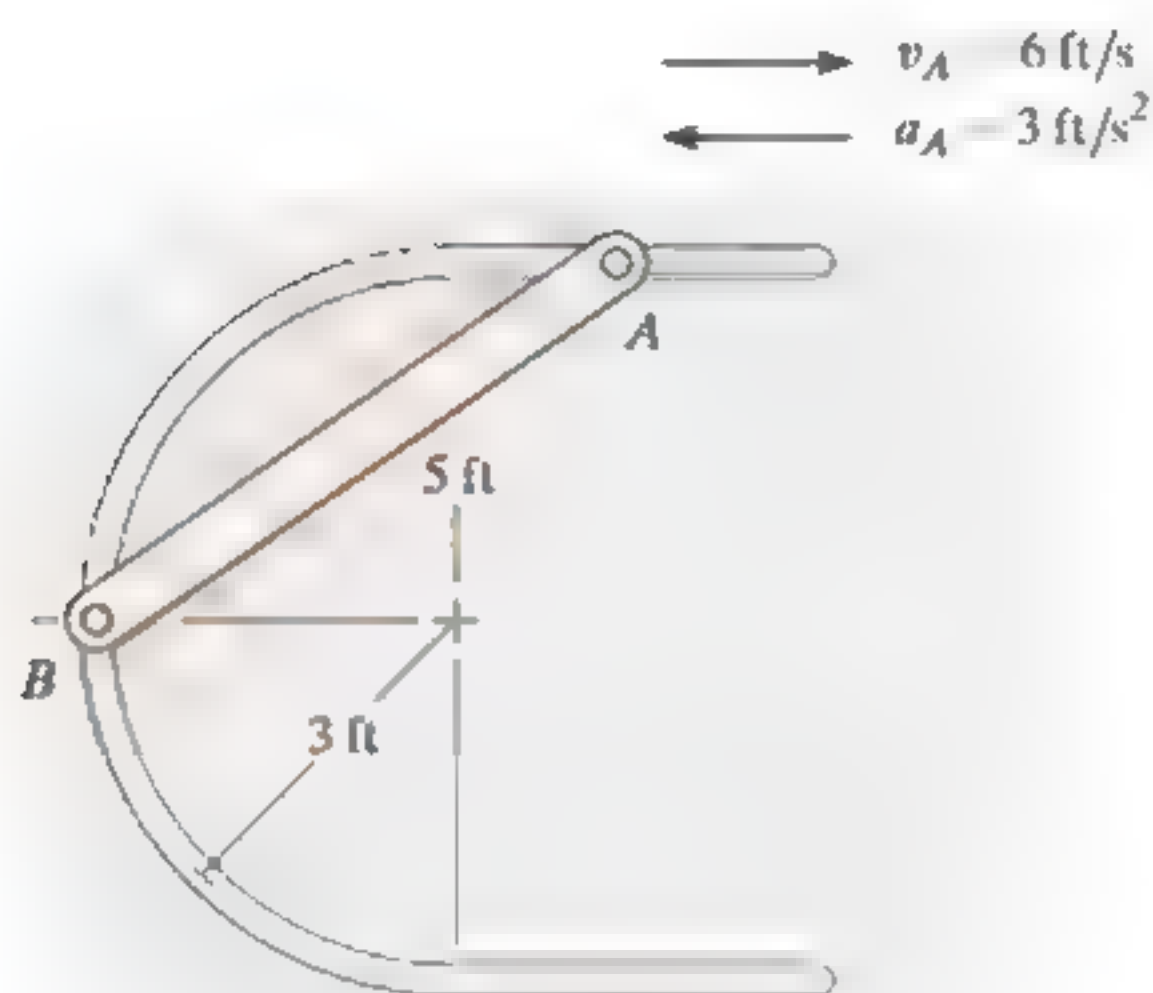
Prob. 16-106

**16-107.** En un instante dado, el rodillo  $A$  en la barra tiene la velocidad y la aceleración mostradas. Determine la velocidad y la aceleración del rodillo  $B$ , así como la velocidad angular de la barra y la aceleración angular en este instante.



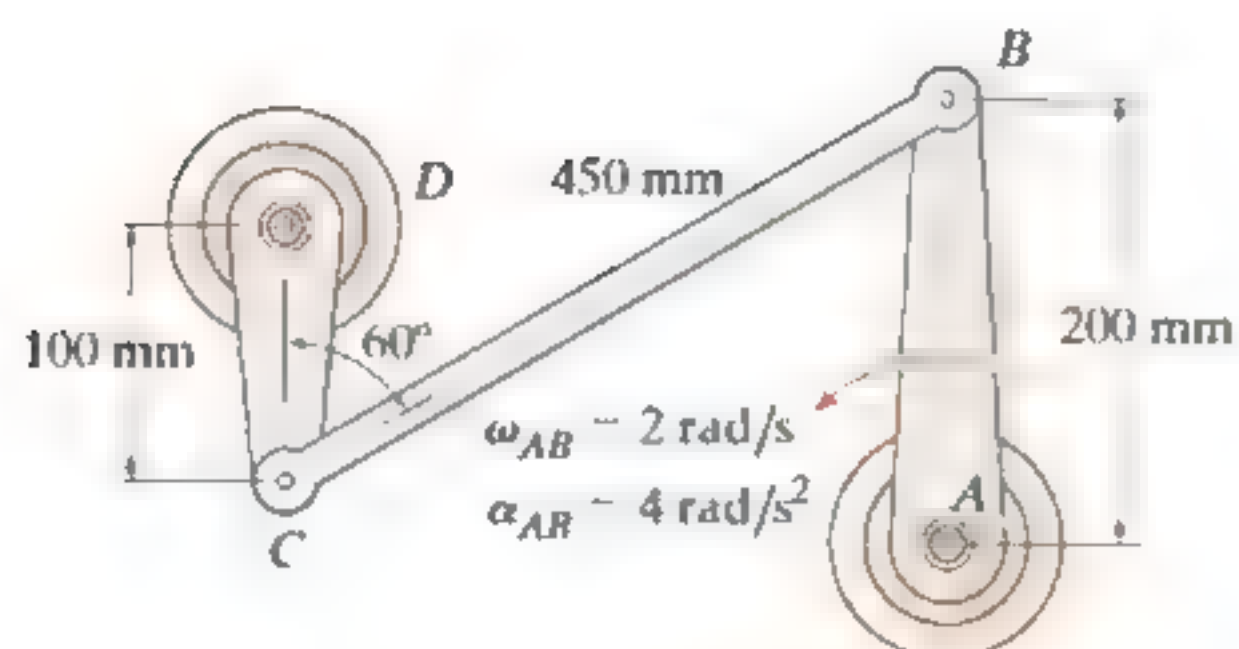
Prob. 16-107

**16-108.** La varilla está limitada a moverse a lo largo de la trayectoria debido a los pasadores en sus extremos. En el instante indicado, el punto  $A$  tiene el movimiento que se indica. Determine la velocidad y la aceleración del punto  $B$  en este instante.



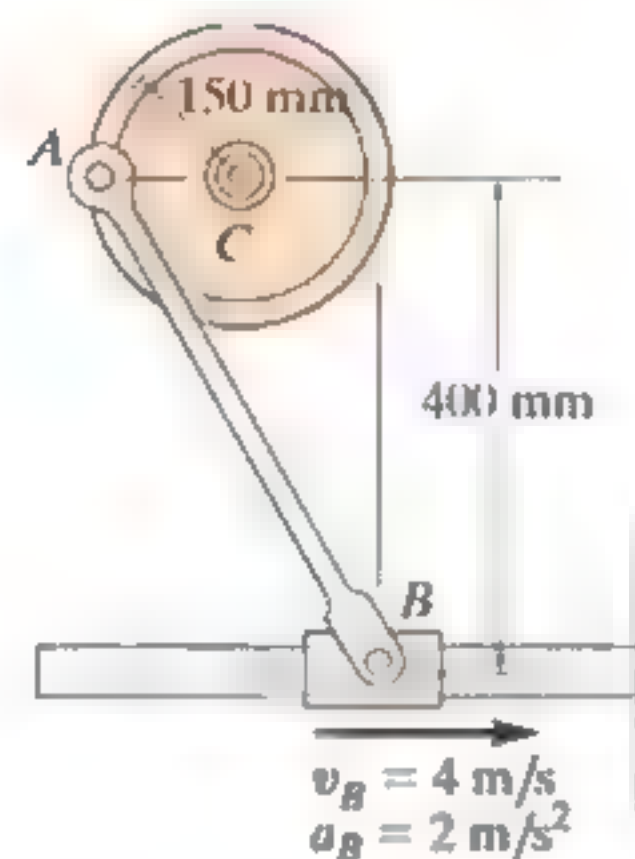
Prob. 16-108

**16-109.** El elemento  $AB$  tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración angulares de los elementos  $CB$  y  $DC$ .



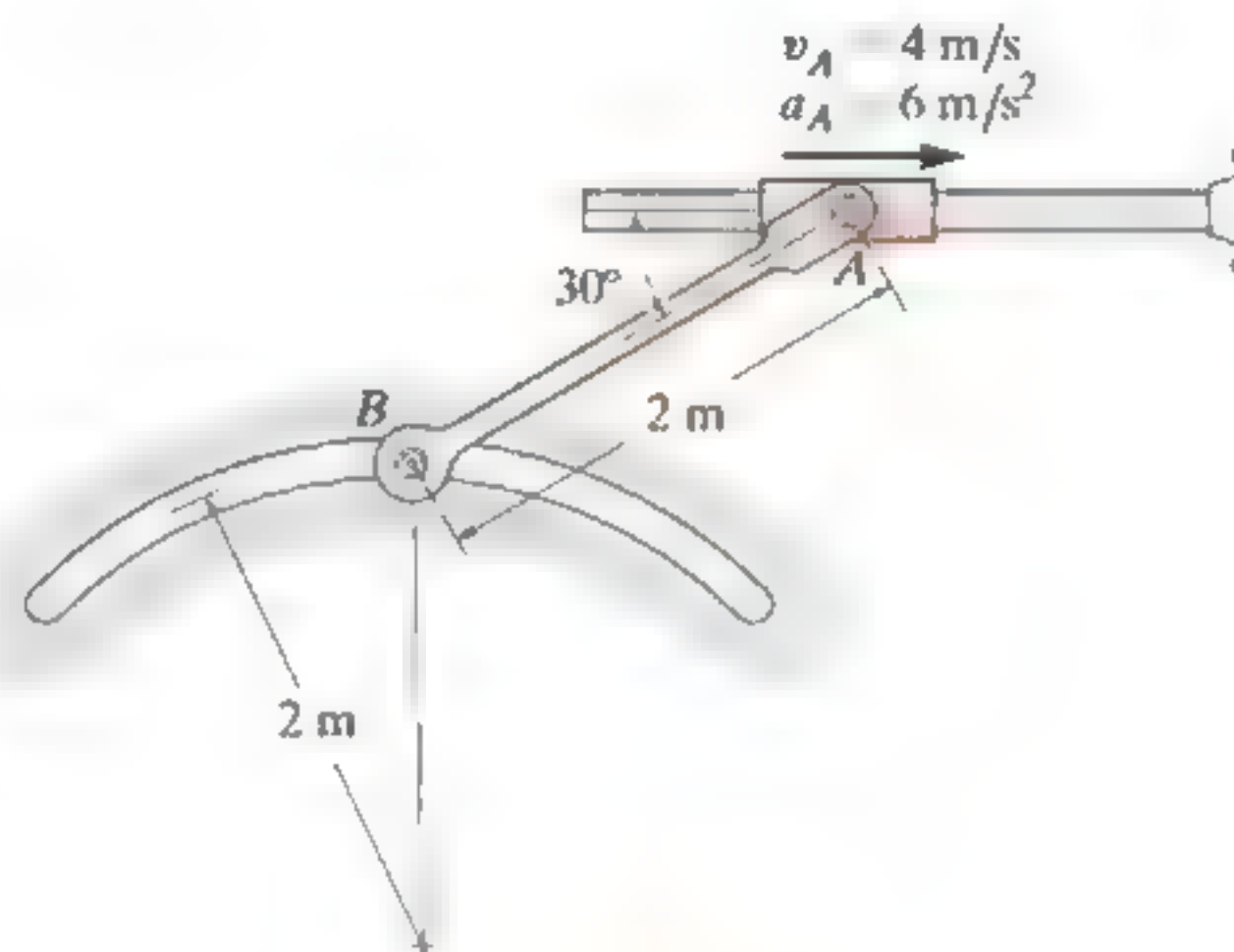
Prob. 16-109

**16-110.** El bloque deslizando tiene el movimiento mostrado. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la rueda en este instante.



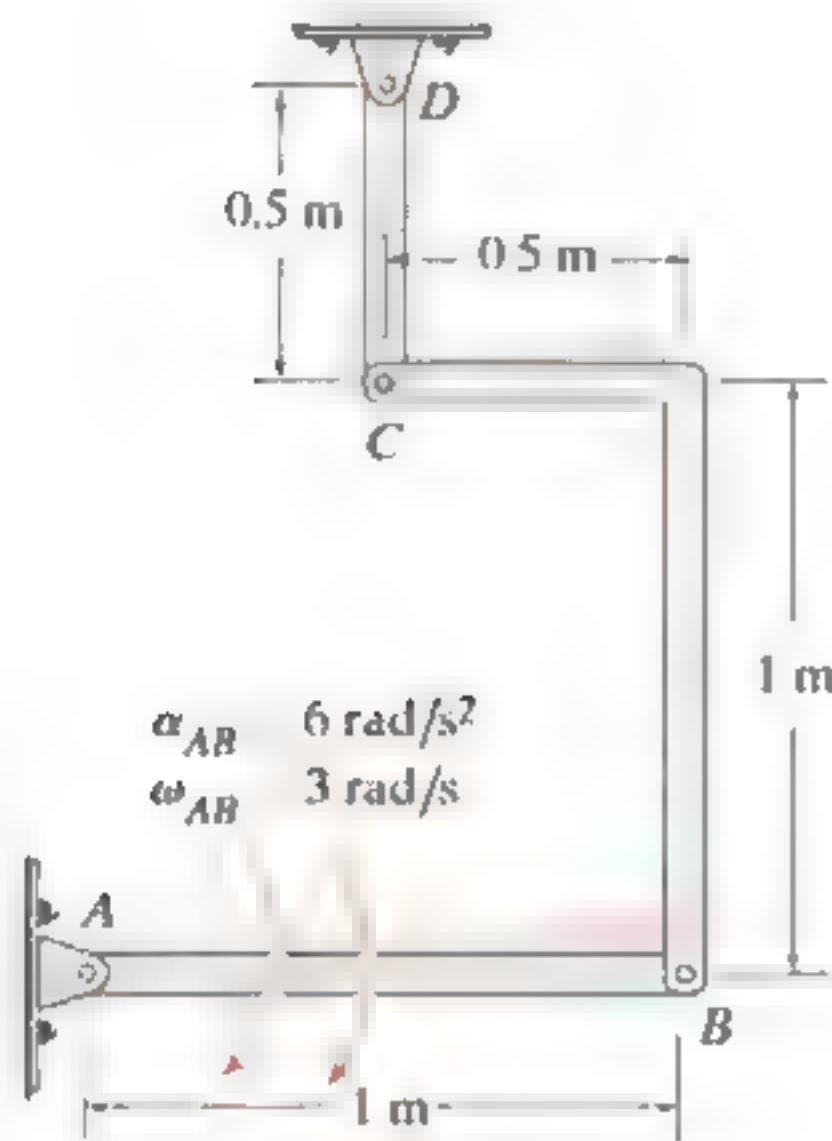
Prob. 16-110

**16-111.** En un instante dado, el bloque deslizando  $A$  se mueve hacia la derecha con el movimiento que se muestra. Determine la aceleración angular del eslabón  $AB$  y la aceleración del punto  $B$  en este instante.



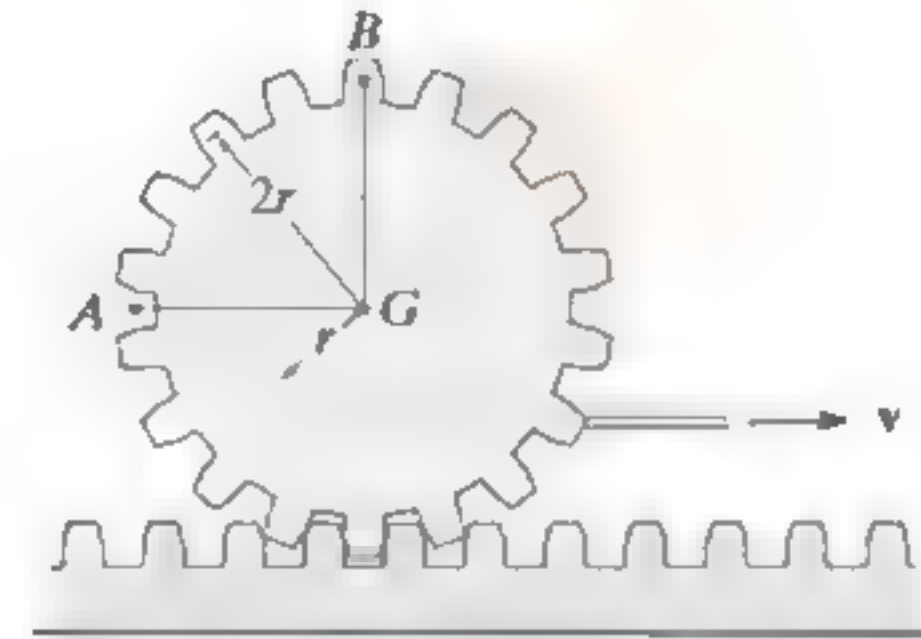
Prob. 16-111

**\*16-112.** Determine la aceleración angular del eslabón  $CD$ , si el eslabón  $AB$  tiene la velocidad y la aceleración angulares mostradas.



Prob. 16-112

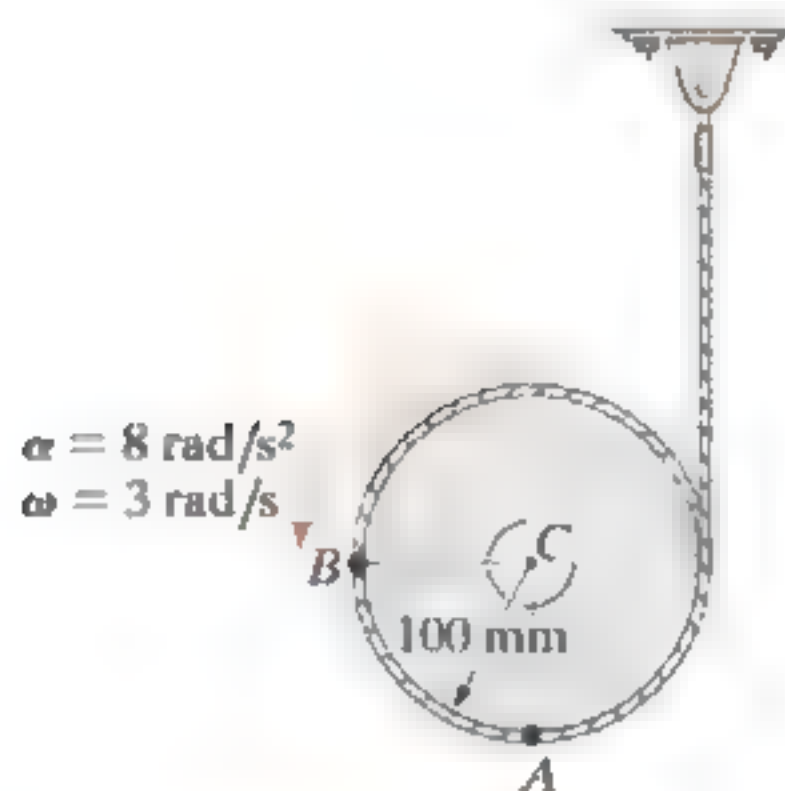
**16-115.** Una cuerda se enrolla alrededor de la bobina interna del engrane. Si se jala con una velocidad constante  $v$ , determine las velocidades y las aceleraciones de los puntos  $A$  y  $B$ . El engrane rueda sobre el engrane dentado fijo.



Prob. 16-115

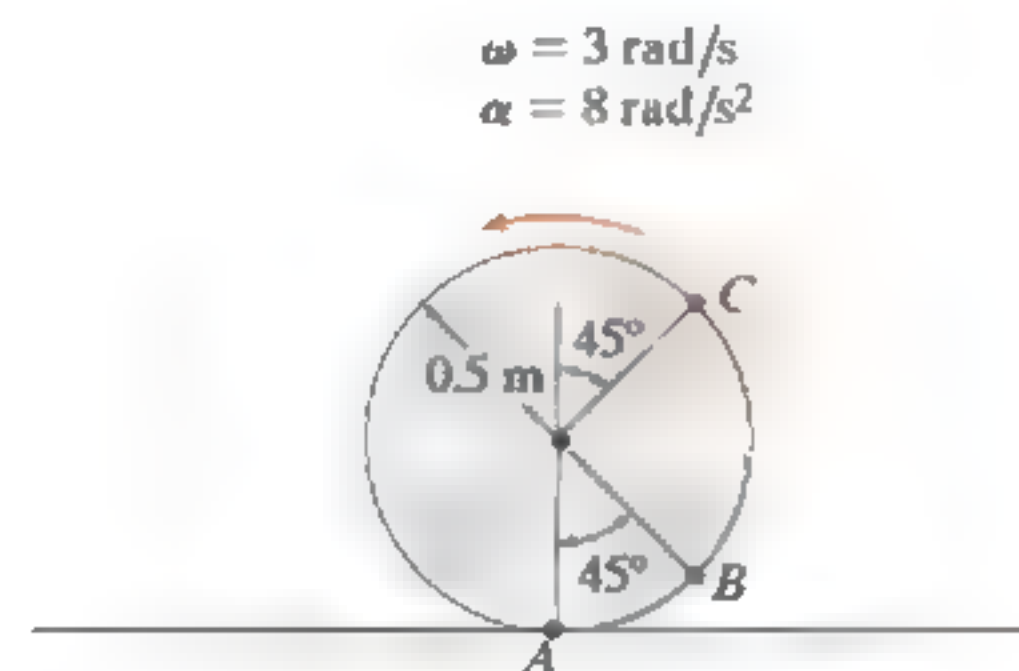
**16-113.** El rollo de cuerda tiene el movimiento angular que se muestra. Determine la velocidad y la aceleración del punto  $A$  en el instante mostrado.

**16-114.** El rollo de cuerda tiene el movimiento angular que se indica. Determine la velocidad y la aceleración del punto  $B$  en el instante mostrado.



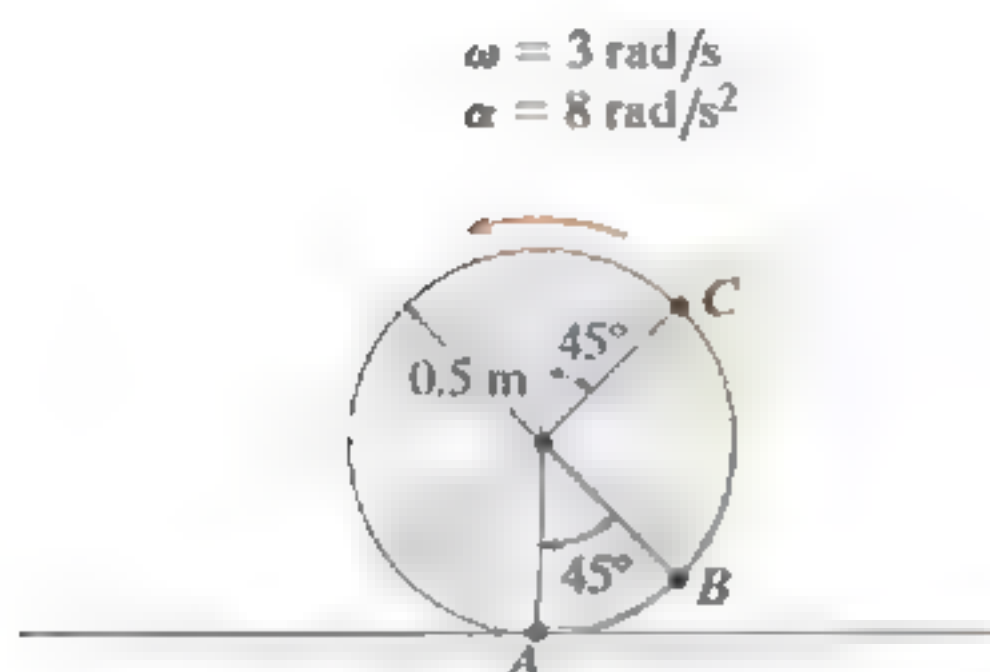
Probs. 16-113/114

**\*16-116.** El disco tiene una aceleración angular  $\alpha = 8\text{ rad/s}^2$  y una velocidad angular  $\omega = 3\text{ rad/s}$  en el instante mostrado. Si no se desliza en  $A$ , determine la aceleración del punto  $B$ .



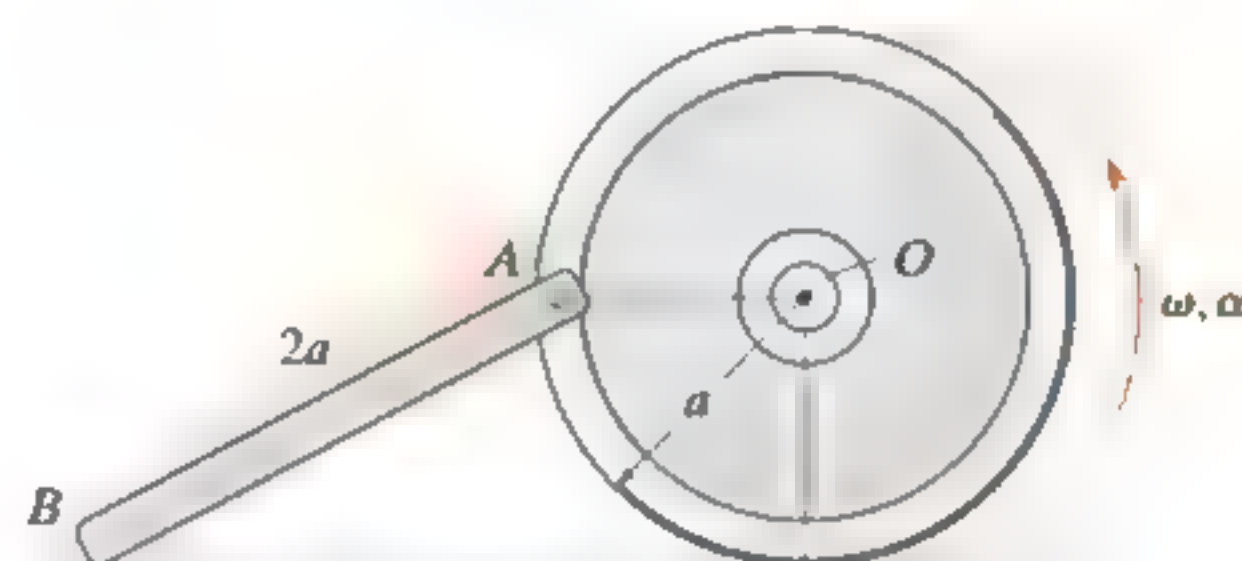
Prob. 16-116

**16-117.** El disco tiene una aceleración angular  $\alpha = 8 \text{ rad/s}^2$  y una velocidad angular  $\omega = 3 \text{ rad/s}$  en el instante mostrado. Si no se desliza en  $A$ , determine la aceleración del punto  $C$ .



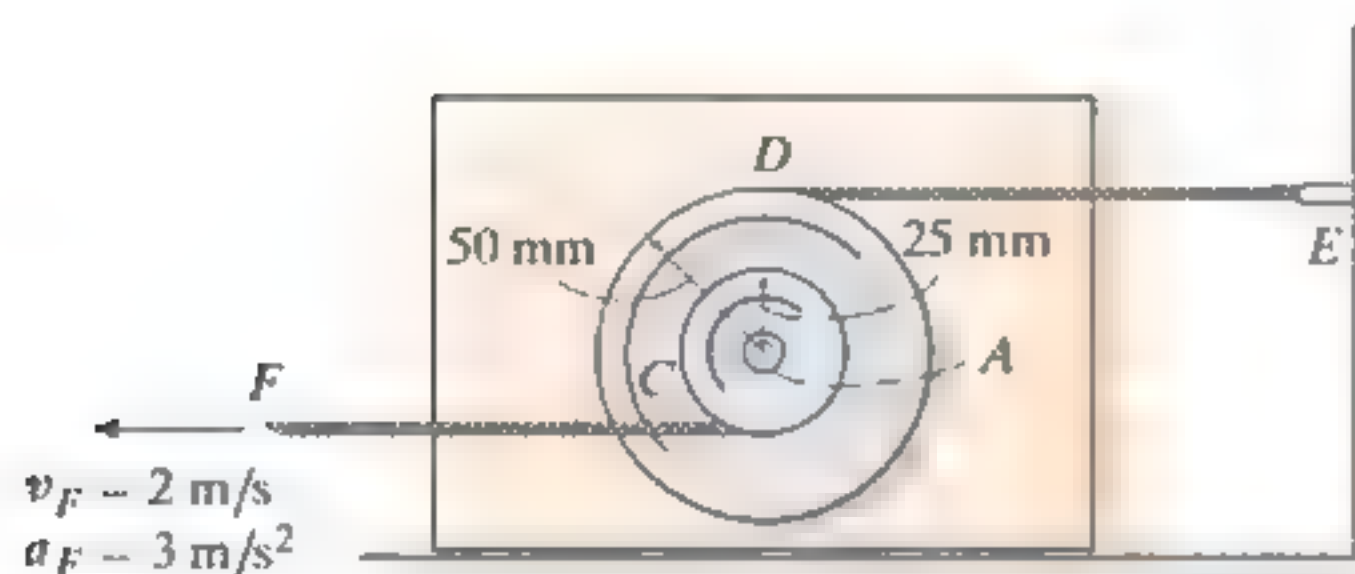
Prob. 16-117

**16-119.** La rueda gira sin deslizarse, de modo que en el instante mostrado tiene una velocidad angular  $\omega$  y una aceleración angular  $\alpha$ . Determine la velocidad y la aceleración del punto  $B$  sobre la varilla en este instante.



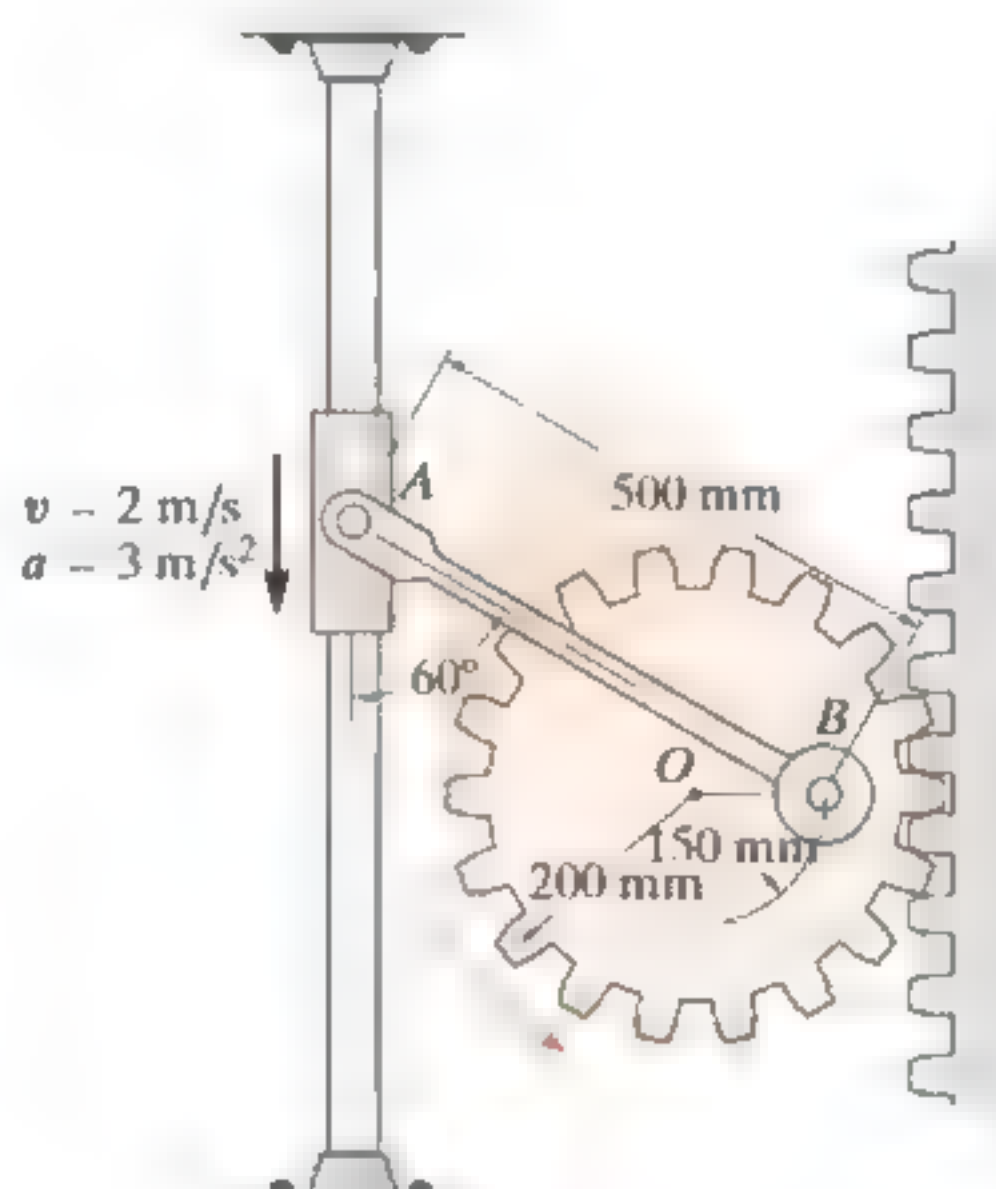
Prob. 16-119

**16-118.** Una sola polea que tiene un reborde interior y otro exterior está articulada al bloque en  $A$ . Conforme la cuerda  $CF$  se desenrolla del reborde interior de la polea con el movimiento señalado, la cuerda  $DE$  se desenrolla del reborde exterior. Determine la aceleración angular de la polea y la aceleración del bloque en el instante mostrado.



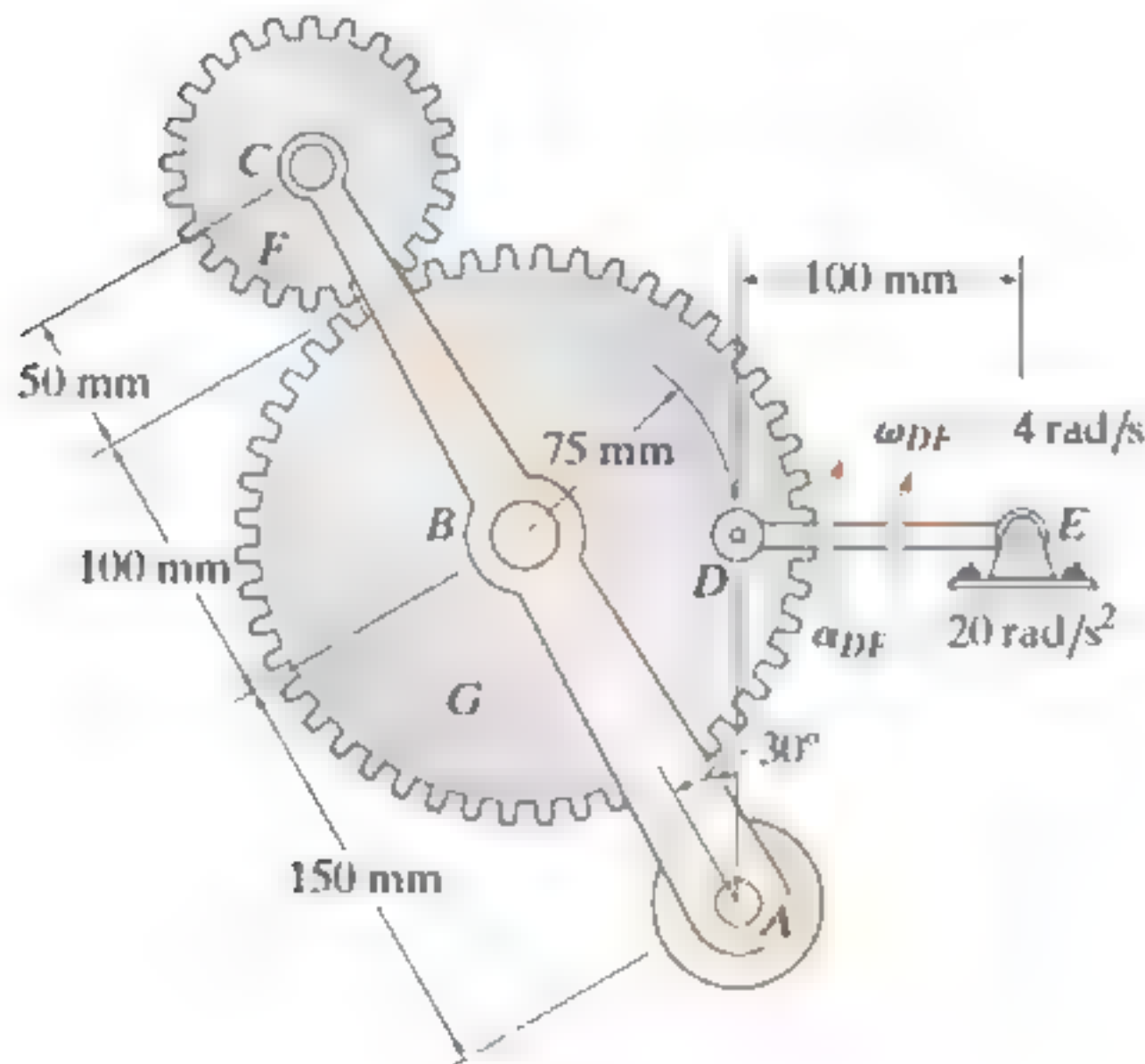
Prob. 16-118

**\*16-120.** El collarín se mueve hacia abajo con el movimiento mostrado. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del engrane en el instante mostrado, conforme rueda a lo largo del engrane dentado fijo.



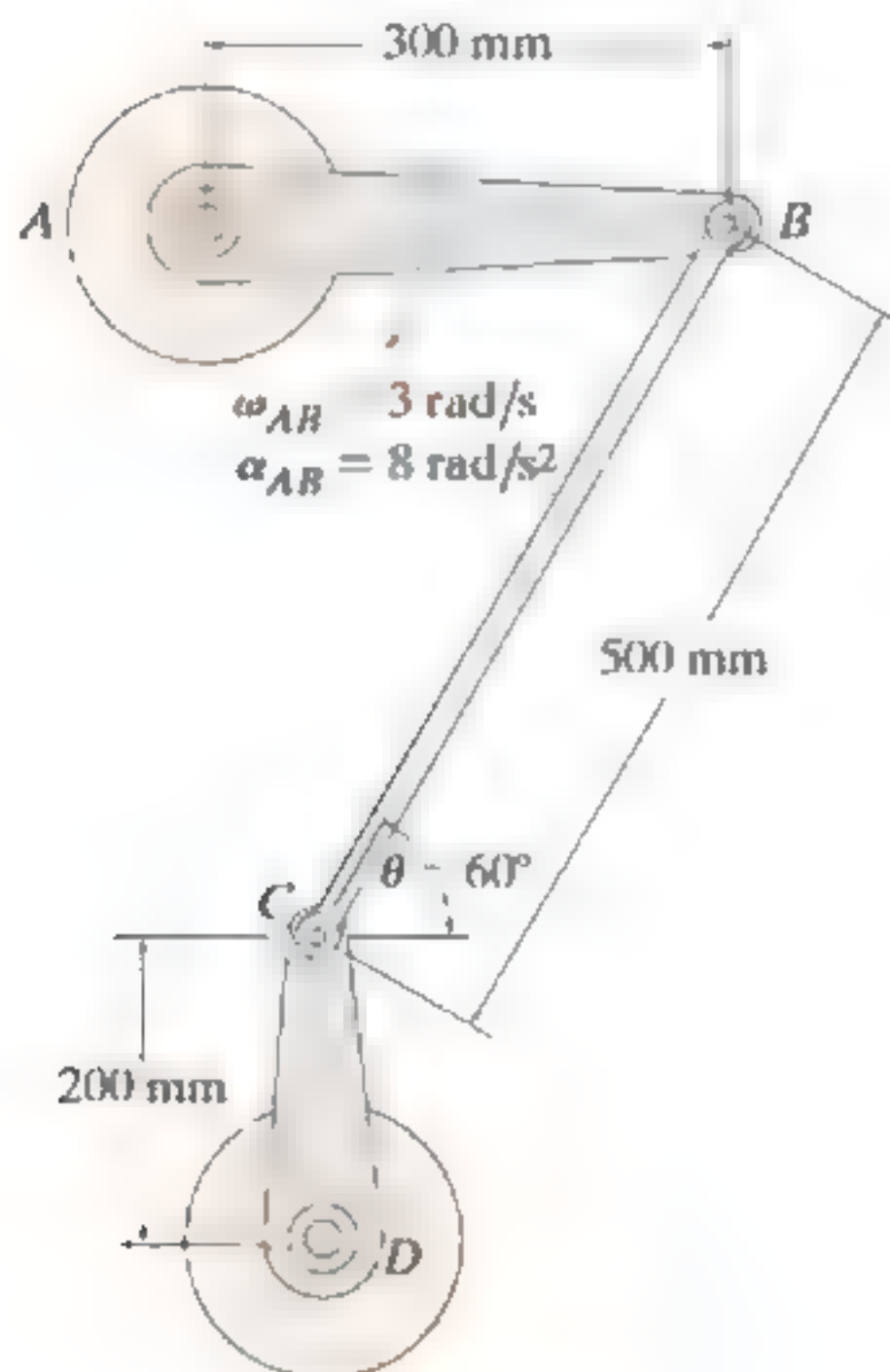
Prob. 16-120

**16-121.** El mecanismo de manivela y engrane vinculados le da un movimiento oscilante a la manivela  $AC$ , necesario para el funcionamiento de una prensa de impresión. Si el eslabón  $DE$  tiene el movimiento angular mostrado, determine las respectivas velocidades angulares del engrane  $F$  y la manivela  $AC$  en este instante, así como la aceleración angular de la manivela  $AC$ .



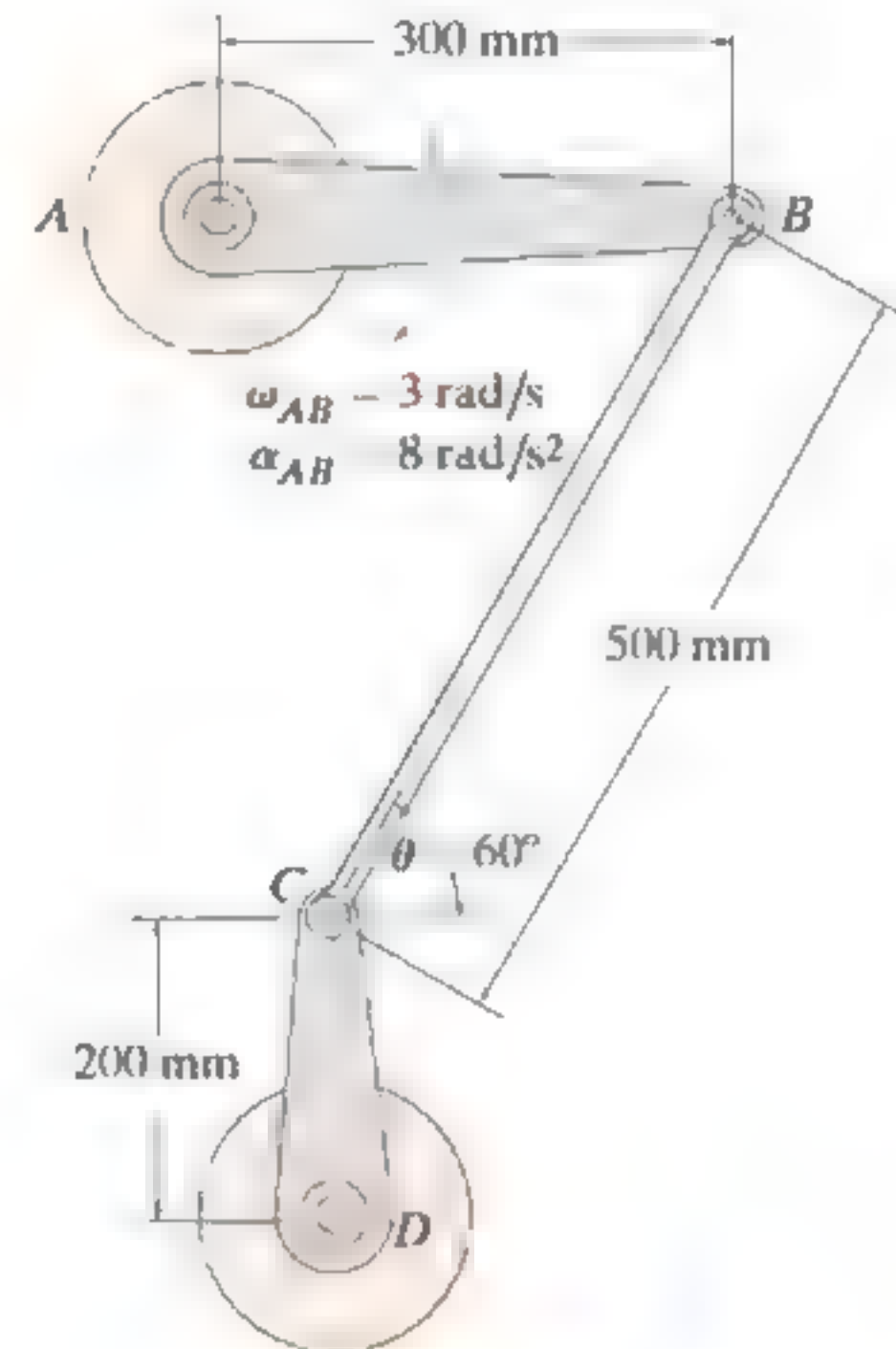
Prob. 16-121

**16-122.** Si el elemento  $AB$  tiene el movimiento angular que se muestra, determine la velocidad y la aceleración angulares del elemento  $CD$  en el instante mostrado.



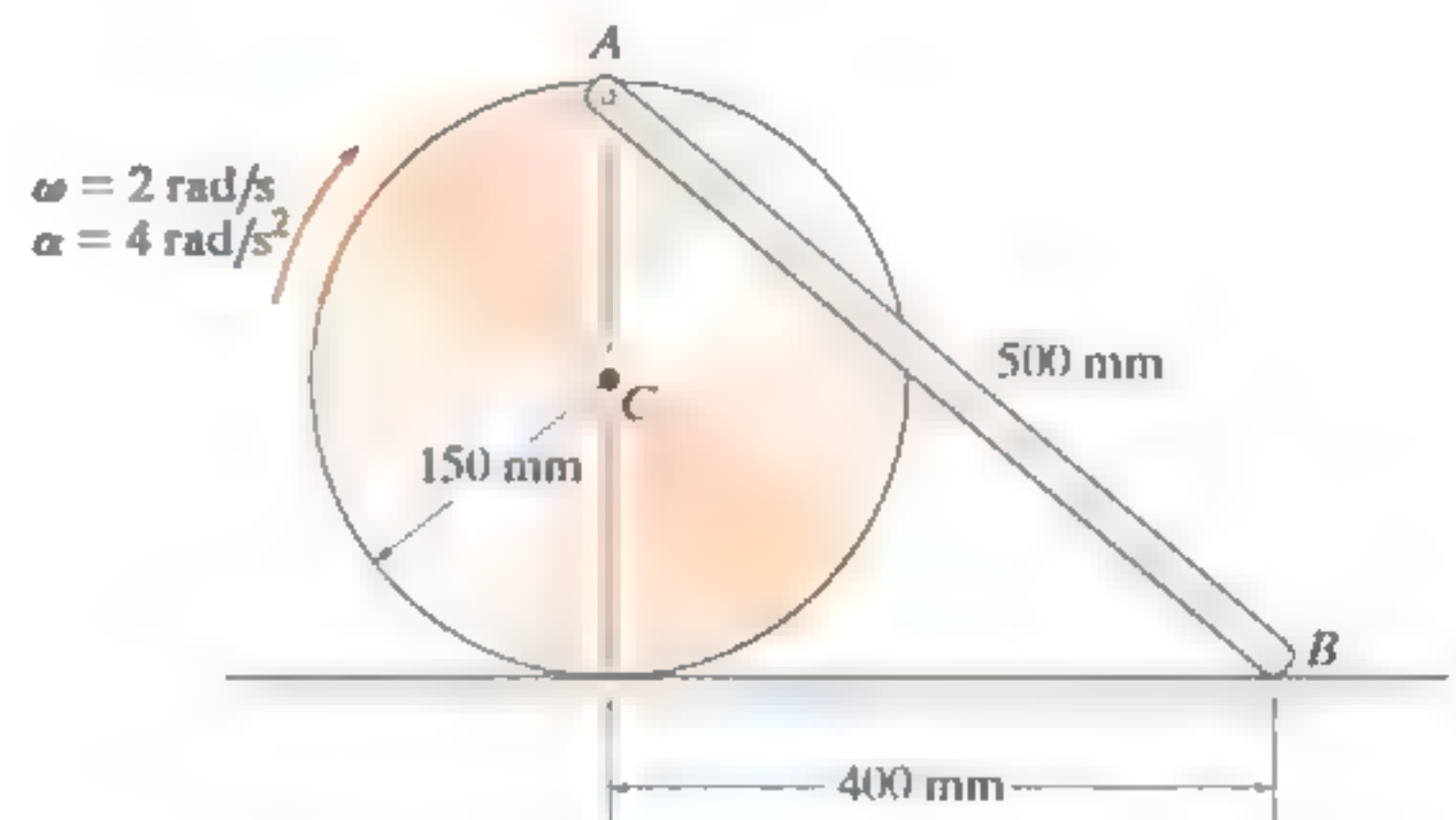
Prob. 16-122

**16-123.** Si elemento  $AB$  tiene el movimiento angular que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto  $C$  en el instante mostrado.



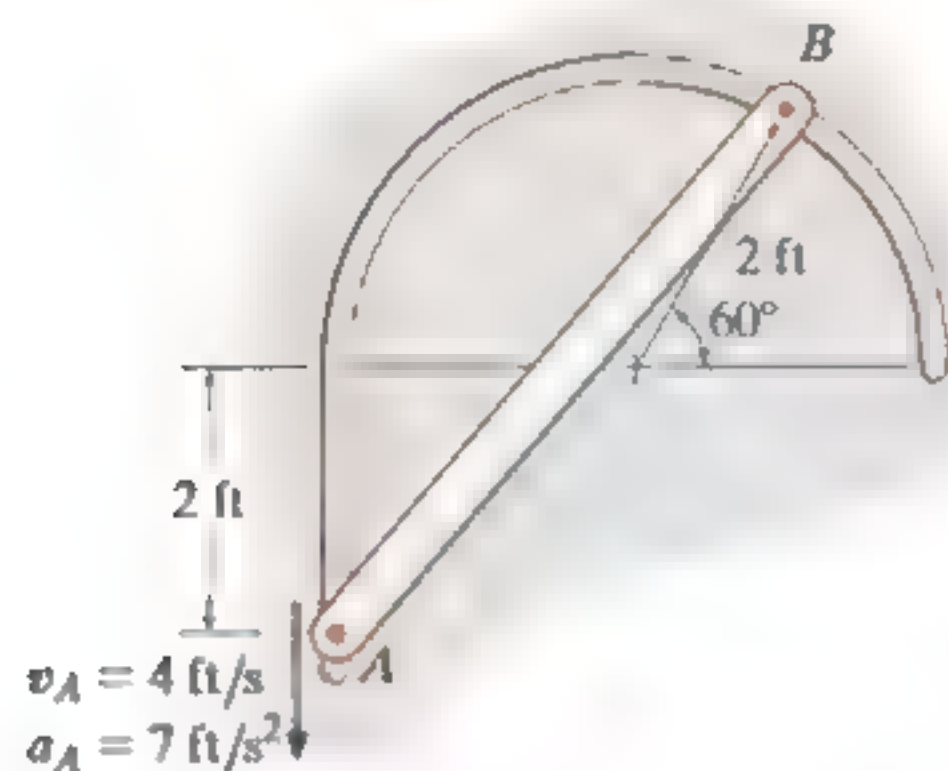
Prob. 16-123

**\*16-124.** El disco rueda sin deslizarse, de modo que tiene una aceleración angular de  $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$  y una velocidad angular de  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  en el instante mostrado. Determine la aceleración de los puntos  $A$  y  $B$  sobre el eslabón y la aceleración angular del eslabón en este instante. Suponga que el punto  $A$  se encuentra en la periferia del disco, a 150 mm de  $C$ .



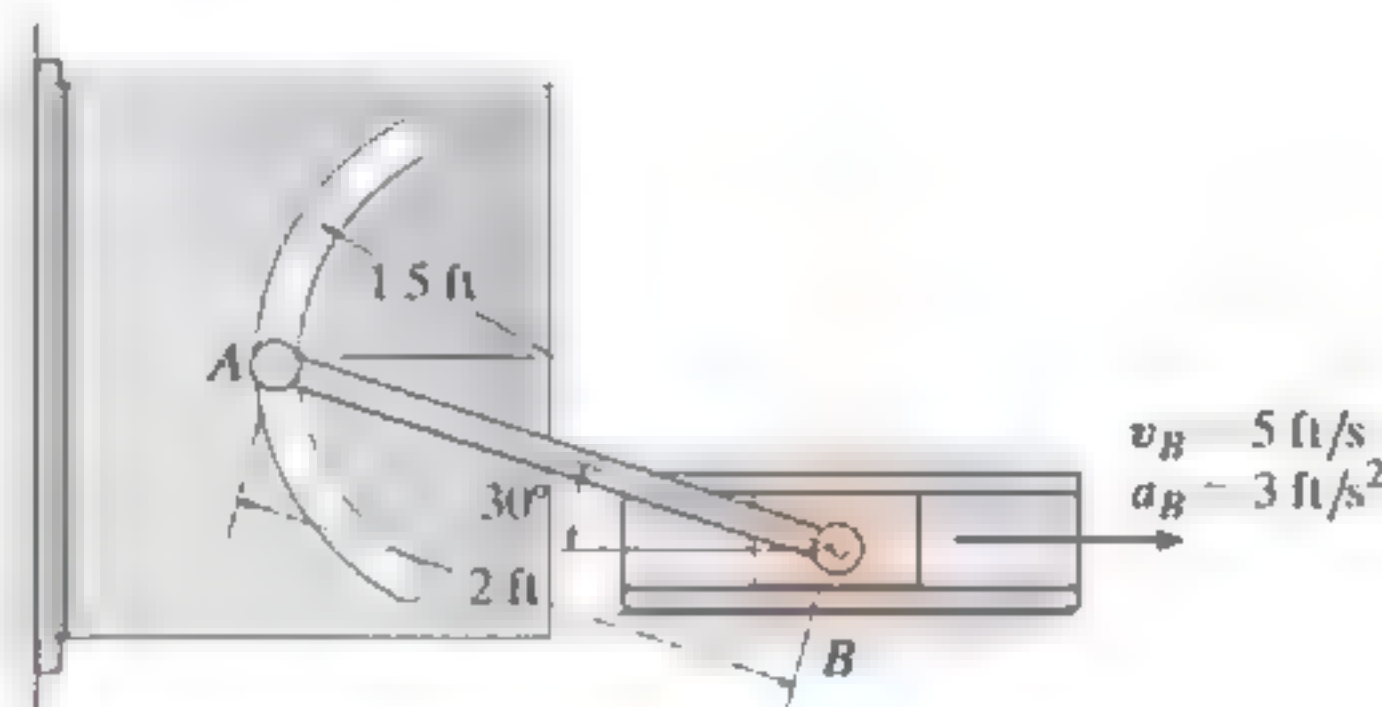
Prob. 16-124

**16-125.** Los extremos de la barra  $AB$  están limitados a moverse a lo largo de las trayectorias mostradas. En un instante dado,  $A$  tiene una velocidad de  $v_A = 4 \text{ ft/s}$  y una aceleración de  $a_A = 7 \text{ ft/s}^2$ . Determine la velocidad y la aceleración angulares de  $AB$  en este instante.



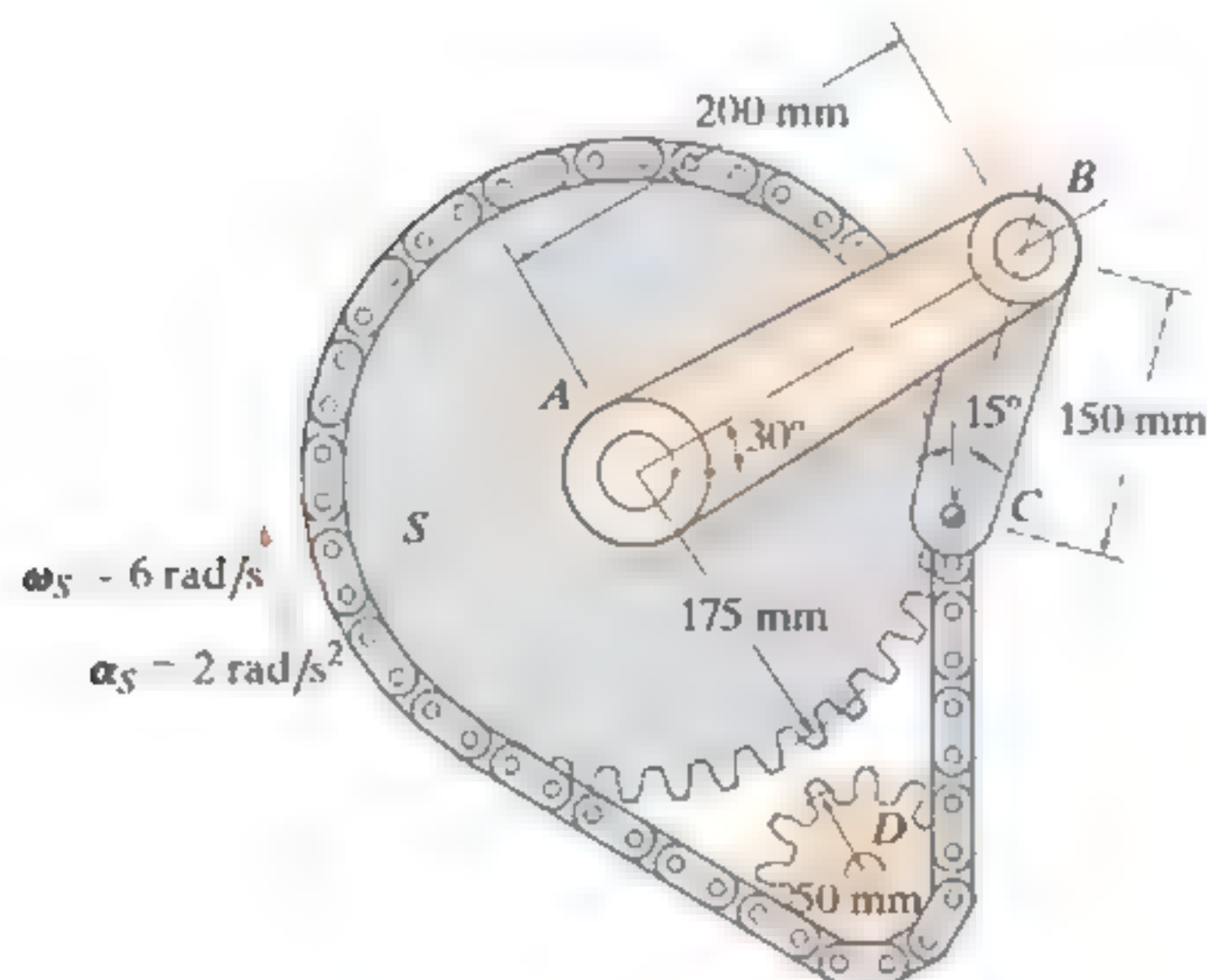
Prob. 16-125

**16-127.** El bloque deslizando se mueve con una velocidad de  $v_B = 5 \text{ ft/s}$  y una aceleración de  $a_B = 3 \text{ ft/s}^2$ . Determine la aceleración angular de la varilla  $AB$  en el instante mostrado.



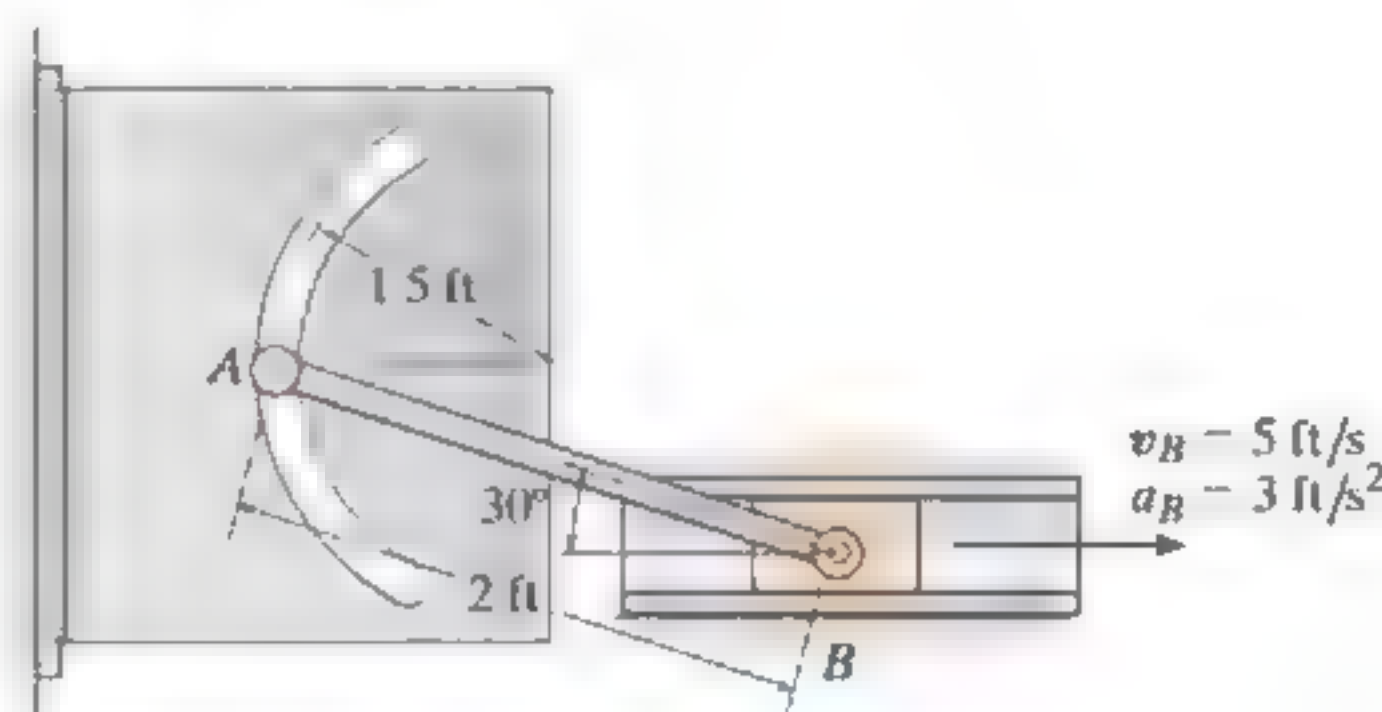
Prob. 16-127

**16-126.** El mecanismo produce movimiento intermitente del eslabón  $AB$ . Si la rueda dentada  $S$  gira con una aceleración angular  $\alpha_S = 2 \text{ rad/s}^2$  y tiene la velocidad angular  $\omega_S = 6 \text{ rad/s}$  en el instante mostrado, determine la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón  $AB$  en este instante. La rueda dentada  $S$  está montada en una flecha separada de una flecha colineal conectada a  $AB$  en  $A$ . El pasador en  $C$  está conectado a uno de los eslabones de la cadena, de modo que éste se mueve verticalmente hacia abajo.



Prob. 16-126

**\*16-128.** El bloque deslizando se mueve con una velocidad de  $v_B = 5 \text{ ft/s}$  y una aceleración de  $a_B = 3 \text{ ft/s}^2$ . Determine la aceleración de  $A$  en el instante mostrado.



Prob. 16-128

## 16.8 Análisis del movimiento relativo mediante ejes rotatorios

En las secciones anteriores, se describió el análisis del movimiento relativo en cuanto a velocidad y aceleración usando un sistema de coordenadas trasladante. Este tipo de análisis es útil para determinar el movimiento de puntos situados en el *mismo* cuerpo rígido, o el movimiento de puntos localizados en varios cuerpos conectados por un pasador. Sin embargo, en algunos problemas, los cuerpos rígidos (mecanismos) están contruidos para que sus conexiones se *deslicen*. El análisis cinemático de casos como éstos se lleva a cabo mejor, si el movimiento se analiza por medio de un sistema de coordenadas que se *traslade y gire*. Además, este marco de referencia es útil para analizar los movimientos de dos puntos en un mecanismo que *no* están en el *mismo* cuerpo, y para especificar la cinemática del movimiento de una partícula cuando ésta se mueve a lo largo de una trayectoria rotatoria.

En el análisis siguiente se desarrollarán dos ecuaciones, las cuales relacionan la velocidad y aceleración de dos puntos, uno de los cuales es el origen de un marco de referencia móvil sometido tanto a traslación como a rotación en el plano\*.

**Posición.** Considere los dos puntos  $A$  y  $B$  de la figura 16-32a. Los vectores de posición  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$  especifican su ubicación, y se miden con respecto al sistema de coordenadas  $X, Y, Z$  fijo. Como se muestra en la figura, el “punto base”  $A$  representa el origen del sistema de coordenadas  $x, y, z$ , el cual se supone que se traslada y rota con respecto al sistema  $X, Y, Z$ . El vector de posición relativa  $\mathbf{r}_{B/A}$  especifica la posición de  $B$  con respecto a  $A$ . Las componentes de este vector pueden expresarse ya sea en función de vectores unitarios a lo largo de los ejes  $X, Y$ , es decir  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , o bien, en función de vectores unitarios a lo largo de los ejes  $x, y$ , es decir,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ . Para el desarrollo siguiente,  $\mathbf{r}_{B/A}$  se medirá con respecto al marco de referencia  $x, y$  móvil. Por lo tanto, si las coordenadas de  $B$  son  $(x_B, y_B)$  (fig. 16-32a), entonces

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j}$$

Por adición vectorial, los tres vectores de posición en la figura 16-32a están relacionados por la ecuación

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (16-21)$$

En el instante considerado, la velocidad del punto  $A$  es  $\mathbf{v}_A$  y su aceleración  $\mathbf{a}_A$ , en tanto que la velocidad y aceleración angulares de los ejes  $x$  y  $y$  son  $\Omega$  (omega) y  $\dot{\Omega} = d\Omega/dt$ , respectivamente.

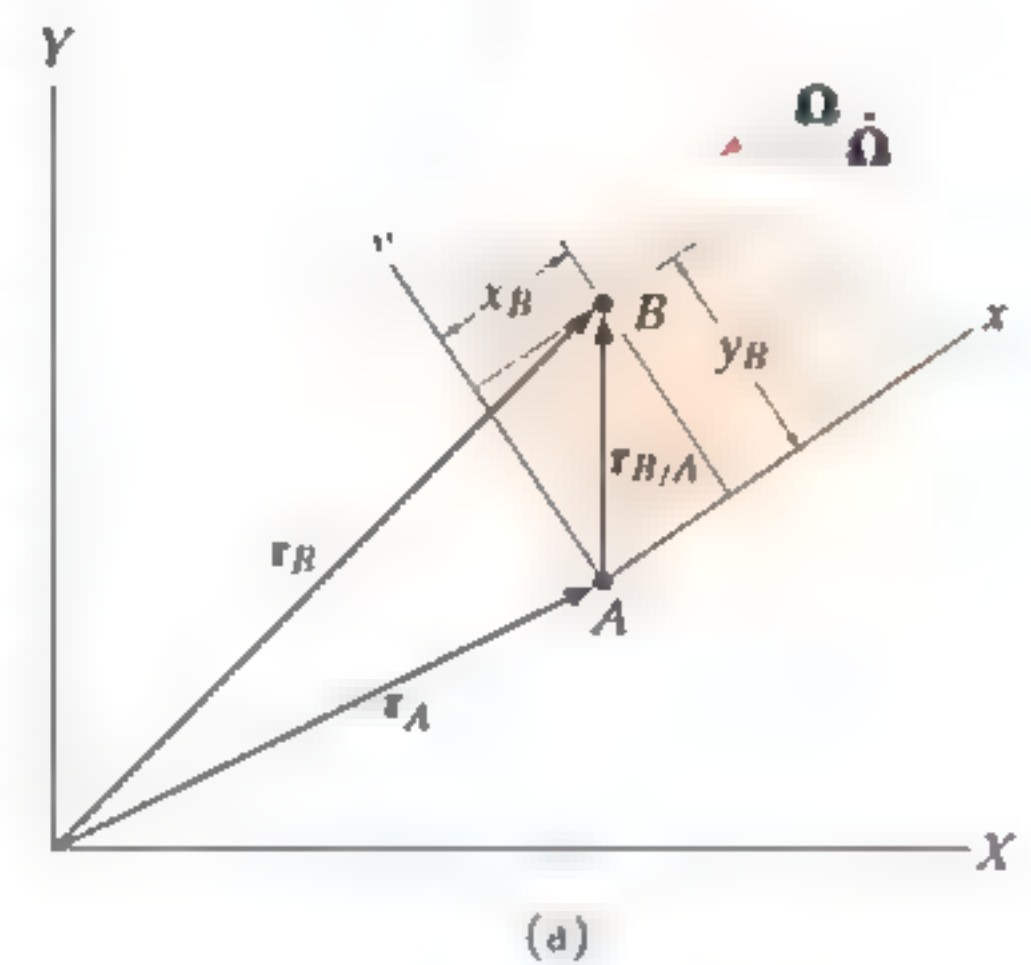


Fig. 16-32

\*El movimiento tridimensional más general de los puntos se desarrolla en la sección 20.4.

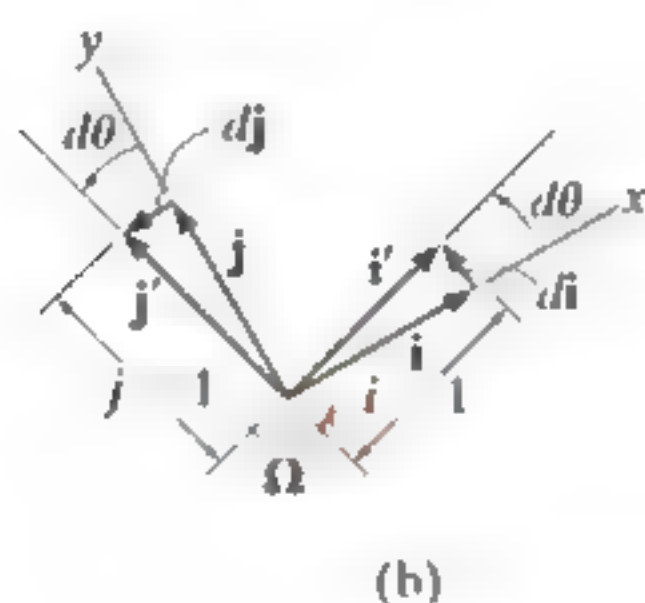
**Velocidad.** La velocidad del punto  $B$  se determina al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-21, de lo cual resulta

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \quad (16-22)$$

El último término de la ecuación se evalúa como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) \\ &= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt} \\ &= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right) \end{aligned} \quad (16-23)$$

Los dos términos en el primer par de paréntesis representan las componentes de velocidad del punto  $B$  medidas por un observador situado en el sistema de coordenadas móvil  $x, y, z$ . Estos términos serán denotados por el vector  $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ . En el segundo par de paréntesis, el cambio instantáneo con respecto al tiempo de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  es medido por un observador situado en el sistema de coordenadas fijo  $X, Y, Z$ . Estos cambios,  $d\mathbf{i}$  y  $d\mathbf{j}$ , se deben sólo a la rotación  $d\theta$  de los ejes  $x, y, z$ , que hace que  $\mathbf{i}$  se vuelva  $\mathbf{i}' = \mathbf{i} + d\mathbf{i}$  y que  $\mathbf{j}$  se vuelva  $\mathbf{j}' = \mathbf{j} + d\mathbf{j}$  (fig. 16-32b). Como se muestra, las magnitudes tanto de  $d\mathbf{i}$  como de  $d\mathbf{j}$  son iguales a  $1 \cdot d\theta$ , puesto que  $i = i' = j = j' = 1$ . La dirección de  $d\mathbf{i}$  está definida por  $+\mathbf{j}$ , ya que  $d\mathbf{i}$  es tangente a la trayectoria descrita por la punta de flecha de  $\mathbf{i}$  en el límite conforme  $\Delta t \rightarrow dt$ . Asimismo,  $d\mathbf{j}$  actúa en la dirección  $-\mathbf{i}$  (fig. 16-32b). Por consiguiente,



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

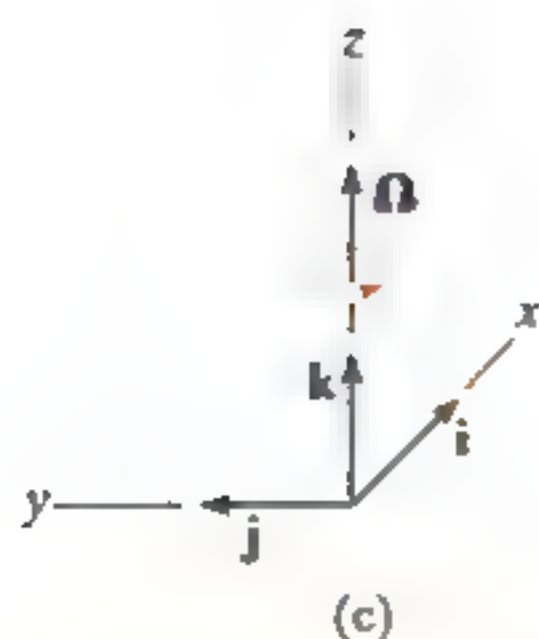
Si vemos los ejes en tres dimensiones (fig. 16-32c) y observamos que  $\Omega = \Omega\mathbf{k}$ , podemos expresar las derivadas anteriores en función del producto vectorial como

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \times \mathbf{i} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \Omega \times \mathbf{j} \quad (16-24)$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación 16-23 y utilizar la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \Omega \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (16-25)$$

Fig. 16-32 (cont.)



donde

$\mathbf{v}_B =$  velocidad de  $B$ , medida con respecto al marco de referencia  $X, Y, Z$

$\mathbf{v}_A$  = velocidad del origen  $A$  del marco de referencia  $x, y, z$  medida con respecto al marco de referencia  $X, Y, Z$

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$  = velocidad de "B con respecto a A", medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio  $x, y, z$

$\Omega$  = velocidad angular del marco de referencia  $x, y, z$  medida con respecto al marco de referencia  $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$  = posición de  $B$  con respecto a  $A$

Al comparar la ecuación 16-26 con la ecuación 16-16 ( $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ ), la cual es válida para un marco de referencia trasladante, se observa que la única diferencia entre estas dos ecuaciones está representada por el término  $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ .

Quando se aplica la ecuación 16-26 suele ser útil entender lo que representa cada uno de los términos. En orden de aparición, son los siguientes:

$$\mathbf{v}_B \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad absoluta de } B \\ \text{movimiento de } B \text{ observado} \\ \text{desde el marco de referencia } X, Y, Z \end{array} \right.$$

(cs igual a)

$$\mathbf{v}_A = \left\{ \begin{array}{l} \text{la velocidad absoluta del origen} \\ \text{del marco de referencia } x, y, z \end{array} \right\} \quad \text{(m\u00e1s)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{movimiento del marco de referencia} \\ \text{\textit{x, y, z} observado desde el marco} \\ \text{de referencia } X, Y, Z \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \left\{ \begin{array}{l} \text{el efecto de velocidad angular} \\ \text{provocado por la rotaci\u00f3n del} \\ \text{marco de referencia } x, y, z \end{array} \right\}$$

(más)

$$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad de } B \text{ con respecto} \\ \text{a } A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{movimiento de } B \text{ observado} \\ \text{desde el marco de referencia } x, y, z \end{array}$$

**Aceleración.** La aceleración de  $B$ , observada desde el sistema de coordenadas  $X, Y, Z$ , puede expresarse en función de su movimiento medido con respecto al sistema rotatorio de coordenadas, si se considera la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-26.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \\ \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}\end{aligned}\quad (16-27)$$

En este caso  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$  es la aceleración angular del sistema de coordenadas  $x, y, z$ . Como  $\boldsymbol{\Omega}$  siempre es perpendicular al plano de movimiento, entonces  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  mide sólo el cambio de magnitud de  $\boldsymbol{\Omega}$ . La derivada  $d\mathbf{r}_{B/A}/dt$  está definida por la ecuación 16-25, de modo que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \quad (16-28)$$

Se determina la derivada con respecto al tiempo de  $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x \mathbf{i} + (v_{B/A})_y \mathbf{j}$ ,

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[ \frac{d(v_{B/A})_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt} \mathbf{j} \right] + \left[ (v_{B/A})_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right]$$

Los dos términos en el primer par de paréntesis representan las componentes de la aceleración del punto  $B$ , medida por un observador situado en el sistema de coordenadas rotatorio. Estos términos denotarán mediante  $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ . Los términos en el segundo par de paréntesis pueden simplificarse con las ecuaciones 16-24.

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Al sustituir ésta y la ecuación 16-28 en la ecuación 16-27 y reordenar los términos,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \quad (16-29)$$

donde

$\mathbf{a}_B$  = aceleración de  $B$ , medida con respecto al marco de referencia  $X, Y, Z$

$\mathbf{a}_A$  = aceleración del origen  $A$  del marco de referencia  $x, y, z$ , medida con respecto al marco de referencia  $X, Y, Z$

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$  = aceleración y velocidad de  $B$  con respecto a  $A$ , medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio  $x, y, z$

$\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\Omega}$  = aceleración y velocidad angulares del marco de referencia  $x, y, z$ , medidas con respecto al marco de referencia  $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$  = posición de  $B$  con respecto a  $A$

Si se compara la ecuación 16-29 con la ecuación 16-18, escrita en la forma  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ , la cual es válida para un marco de referencia trasladante, se observa que la diferencia entre estas dos ecuaciones está representada por los términos  $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ . En particular,  $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$  se llama *aceleración de Coriolis*, en honor del ingeniero francés G. C. Coriolis, quien fue el primero en determinarlo. Este término representa la diferencia de la aceleración de  $B$  medida desde ejes  $x, y, z$  no rotatorios y rotatorios. Como se indica mediante el producto vectorial, la aceleración de Coriolis *siempre* será perpendicular tanto a  $\boldsymbol{\Omega}$  como a  $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ . Es una componente importante de la aceleración, la cual debe considerarse siempre que se utilizan marcos de referencia rotatorios. Esto ocurre con frecuencia, por ejemplo, cuando se estudian las aceleraciones y fuerzas que actúan en cohetes, proyectiles de largo alcance, u otros cuerpos que tienen movimientos cuyas mediciones se ven significativamente afectadas por la rotación de la Tierra.

La siguiente interpretación de los términos de la ecuación 16-29 puede ser útil cuando se aplica esta ecuación a la solución de problemas.

$$\mathbf{a}_B \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{aceleración absoluta de } B \\ \text{(es igual a)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{movimiento de } B \text{ observado} \\ \text{desde el marco de referencia} \\ X, Y, Z \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_A \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{aceleración absoluta del} \\ \text{origen del marco } x, y, z \\ \text{(más)} \\ \text{el efecto de la aceleración} \\ \text{angular provocado por la} \\ \text{rotación del marco de} \\ \text{referencia } x, y, z \\ \text{(más)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{movimiento del} \\ \text{marco de referencia} \\ x, y, z \text{ observado} \\ \text{desde el marco de} \\ \text{referencia } X, Y, Z \end{array}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{el efecto de la velocidad} \\ \text{angular provocado por la} \\ \text{rotación del marco de} \\ \text{referencia } x, y, z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{movimiento interactuante} \end{array}$$

(más)

$$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{el efecto combinado de } B \\ \text{al moverse con respecto a} \\ \text{las coordenadas } x, y, z \text{ y a} \\ \text{la rotación del marco de} \\ \text{referencia } x, y, z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{movimiento interactuante} \end{array}$$

(más)

$$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la aceleración de } B \\ \text{con respecto a } A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{movimiento de } B \text{ observado} \\ \text{desde el marco de referencia } x, y, z \end{array}$$

## Procedimiento para el análisis

Las ecuaciones 16-26 y 16-29 pueden aplicarse a la solución de problemas que implican el movimiento plano de partículas o cuerpos rígidos por el siguiente procedimiento.

### Ejes de coordenadas

- Seleccione un lugar adecuado para el origen y la orientación adecuada de los ejes, para los marcos de referencia tanto fijos  $X, Y, Z$  como móviles  $x, y, z$ .
- Con mucha frecuencia las soluciones son fáciles de obtener, si en el instante considerado:
  1. los orígenes coinciden
  2. los ejes correspondientes son colineales
  3. los ejes correspondientes son paralelos
- El marco móvil debe seleccionarse fijo en el cuerpo o dispositivo a lo largo del cual ocurre el movimiento relativo.

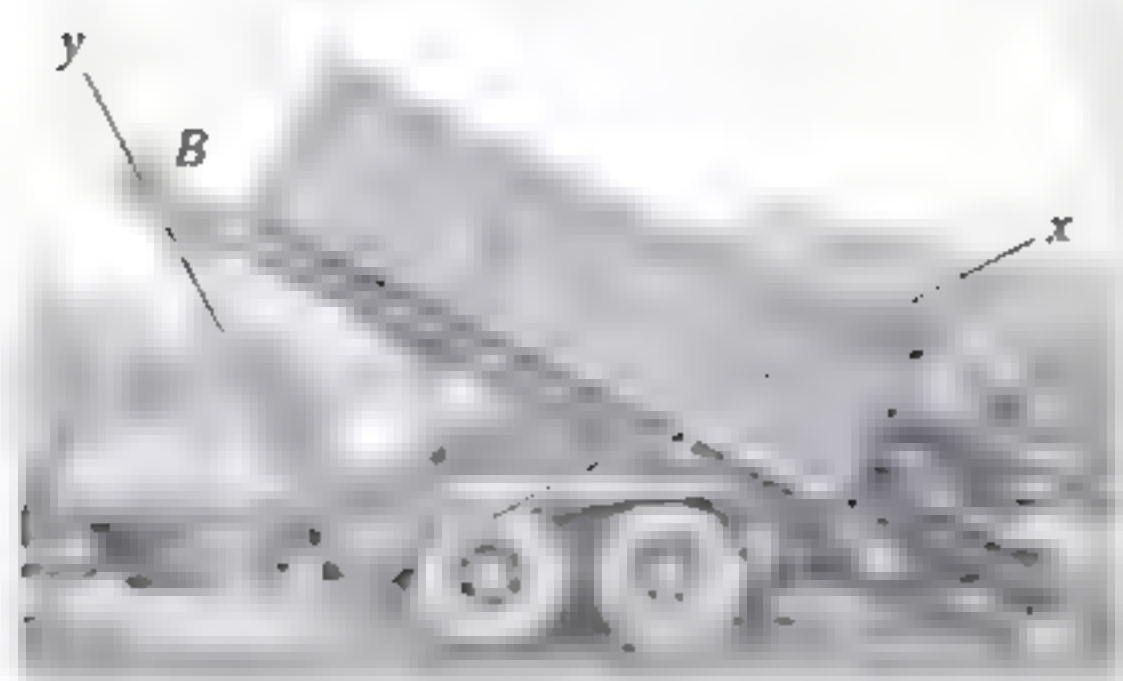
### Ecuaciones cinemáticas

- Después de definir el origen  $A$  de la referencia móvil y de especificar el punto  $B$  en movimiento, las ecuaciones 16-26 y 16-29 deben escribirse en forma simbólica como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Las componentes cartesianas de todos estos vectores pueden expresarse a lo largo de los ejes  $X, Y, Z$  o los ejes  $x, y, z$ . La selección es arbitraria siempre que se utilice un conjunto consistente de vectores unitarios.
- El movimiento de la referencia móvil se expresa por  $\mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A, \boldsymbol{\Omega}$  y  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ; al movimiento de  $B$  con respecto a la referencia móvil lo expresa  $\mathbf{r}_{B/A}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ .



La rotación de la caja de volteo del camión alrededor del punto  $C$  funciona por la extensión del cilindro hidráulico  $AB$ . Para determinar la rotación de la caja producida por esta extensión, podemos utilizar las ecuaciones de movimiento relativo y determinar los ejes  $x, y$  en el cilindro, para que el movimiento relativo de la extensión del cilindro ocurra a lo largo del eje  $y$ . (© R. C. Hibbeler)

## EJEMPLO

En el instante  $\theta = 60^\circ$ , la varilla de la figura 16-33 tiene una velocidad angular de  $3 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular de  $2 \text{ rad/s}^2$ . En este mismo instante, el collarín se desplaza hacia fuera a lo largo de la varilla, de modo que cuando  $x = 0.2 \text{ m}$  la velocidad es de  $2 \text{ m/s}$  y la aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$ , medidas ambas con respecto a la varilla. Determine la aceleración de Coriolis y la velocidad y aceleración del collarín en este instante.

## SOLUCIÓN

**Suposiciones.** El origen de los dos sistemas de coordenadas se encuentra en el punto  $O$  (fig. 16-33). Como el movimiento del collarín se reporta con respecto a la varilla, el marco de referencia  $x, y, z$  móvil se fija a ésta.

## Ecuaciones cinemáticas

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \quad (2)$$

Será más sencillo expresar los datos en función de vectores de componentes  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  que de componentes  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ . Por lo tanto,

Movimiento de la referencia móvil	Movimiento de C con respecto a la referencia móvil
$\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\} \text{ m}$
$\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\} \text{ m/s}$
$\boldsymbol{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$	$(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\} \text{ m/s}^2$
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$	

La aceleración de Coriolis se define como

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.}$$

Éste es el vector de rayas que aparece en la figura 16-33. Si se desea, puede dividirse en componentes  $\mathbf{I}, \mathbf{J}$  que actúan a lo largo de los ejes  $X$  y  $Y$ , respectivamente.

La velocidad y aceleración del collarín se determinan mediante la sustitución de los datos en las ecuaciones 1 y 2 y la evaluación de los productos vectoriales, de lo cual resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \\ &= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \\ &= \{2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}\} \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \\ &= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \\ &= \mathbf{0} - 0.4\mathbf{j} - 1.80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i} \\ &= \{1.20\mathbf{i} - 12.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

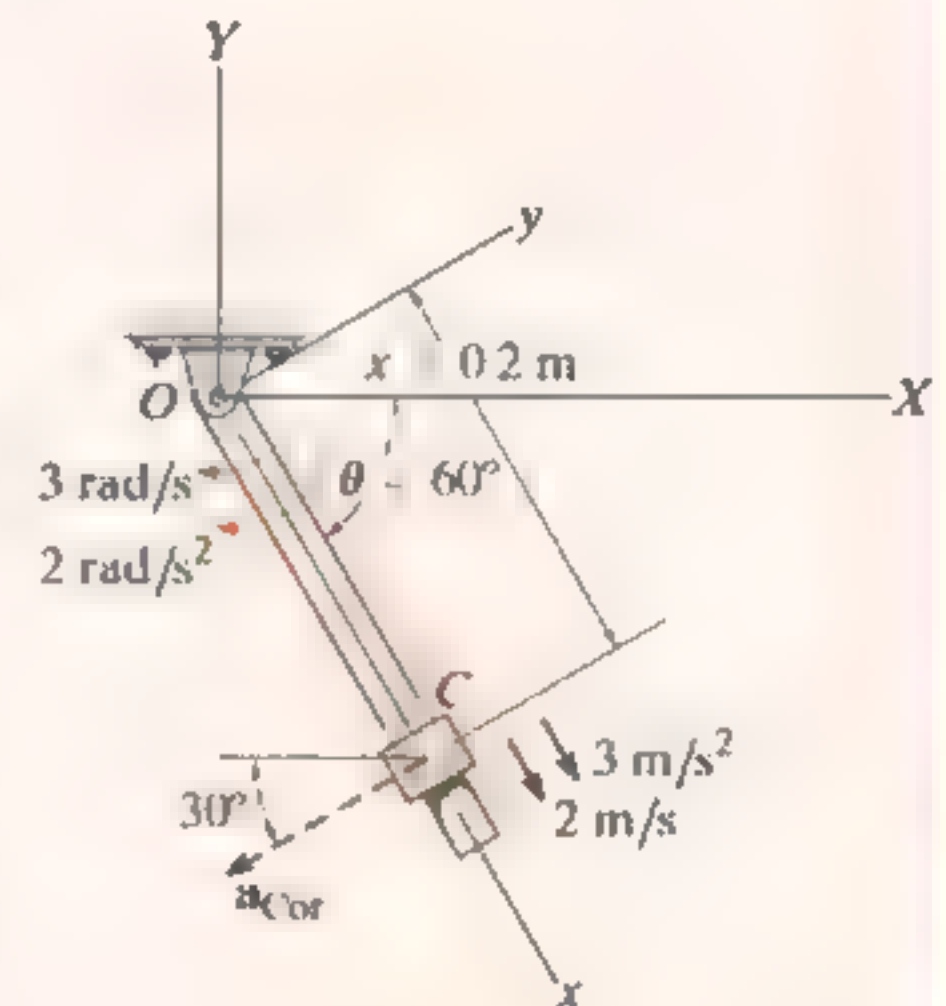


Fig. 16-33

## EJEMPLO 16.17

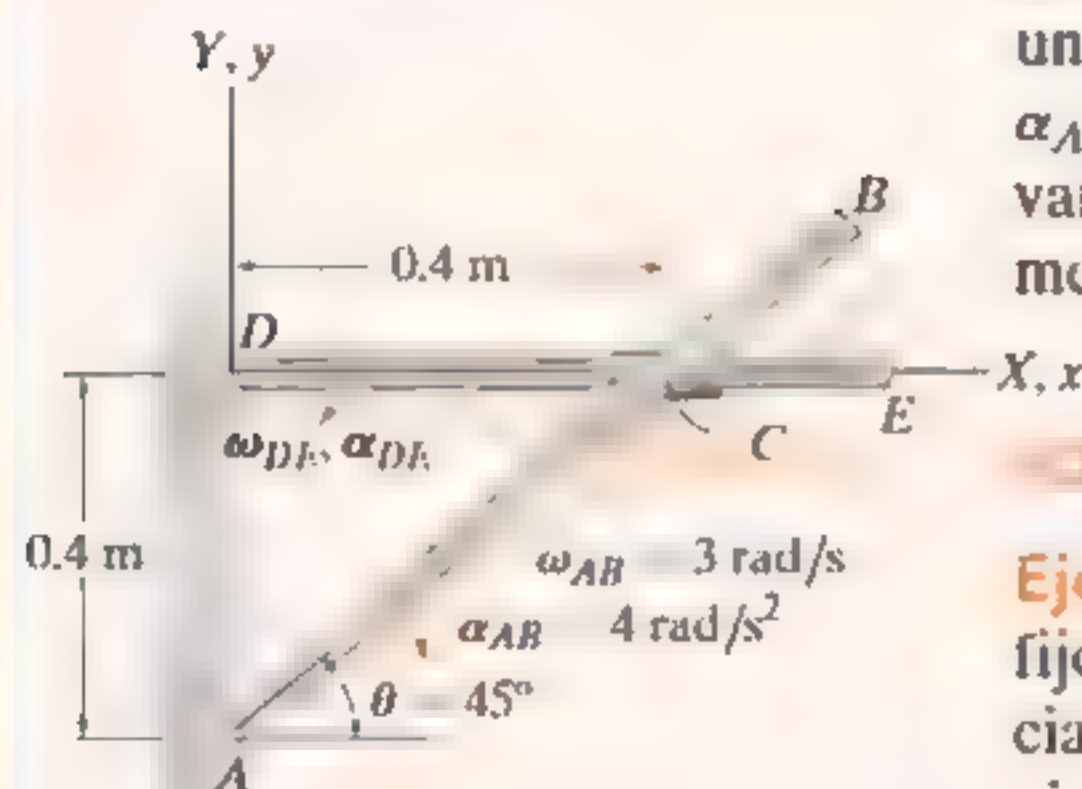


Fig. 16-34

La varilla  $AB$  mostrada en la figura 16-34, gira en sentido horario con una velocidad angular  $\omega_{AB} = 3 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular  $\alpha_{AB} = 4 \text{ rad/s}^2$  cuando  $\theta = 45^\circ$ . Determine el movimiento angular de la varilla  $DE$  en este instante. El collarín en  $C$  está conectado a  $AB$  y por medio de un pasador se desliza sobre la varilla  $DE$ .

**Ejes de coordenadas.** El origen tanto de los marcos de referencia fijos como móviles se encuentra en  $D$  (fig. 16-34). Además, la referencia  $x, y, z$  está fija en la varilla  $DE$  y gira con ésta, de modo que el movimiento relativo del collarín es fácil de seguir.

**Ecuaciones cinemáticas**

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$

Todos los vectores se expresarán en función de componentes  $i, j, k$ .

Movimiento de la referencia móvil	Movimiento de $C$ con respecto a la referencia móvil
$\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/D} = \{0.4i\} \text{ m}$
$\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}i$
$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_{DE}k$	$(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}i$
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\alpha_{DE}k$	

**Movimiento de  $C$ :** como el collarín se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio  $AC$ , su velocidad y aceleración se determinan con las ecuaciones 16-9 y 16-14.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3k) \times (0.4i + 0.4j) = \{1.2i - 1.2j\} \text{ m/s} \\ \mathbf{a}_C &= \alpha_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{C/A} \\ &= (-4k) \times (0.4i + 0.4j) - (3)^2(0.4i + 0.4j) = \{-2i - 5.2j\} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Al sustituir los datos en las ecuaciones 1 y 2, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \\ 1.2i - 1.2j &= \mathbf{0} + (-\omega_{DE}k) \times (0.4i) + (v_{C/D})_{xyz}i \\ 1.2i - 1.2j &= \mathbf{0} - 0.4\omega_{DE}j + (v_{C/D})_{xyz}i \\ (v_{C/D})_{xyz} &= 1.2 \text{ m/s} \\ \omega_{DE} &= 3 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} \\ -2i - 5.2j &= \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}k) \times (0.4i) + (-3k) \times [(-3k) \times (0.4i)] \\ &\quad + 2(-3k) \times (1.2i) + (a_{C/D})_{xyz}i \\ -2i - 5.2j &= -0.4\alpha_{DE}j - 3.6i - 7.2j + (a_{C/D})_{xyz}i \\ (a_{C/D})_{xyz} &= 1.6 \text{ m/s}^2 \\ \alpha_{DE} &= -5 \text{ rad/s}^2 = 5 \text{ rad/s}^2 \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

## EJEMPLO

Los aviones  $A$  y  $B$  vuelan a la misma altura y con los movimientos que se muestran en la figura 16-35. Determine la velocidad y la aceleración de  $A$  medidas por el piloto de  $B$ .

## SOLUCIÓN

**Ejes de coordenadas.** Como se busca el movimiento relativo de  $A$  con respecto al piloto de  $B$ , los ejes  $x, y, z$  se fijan al avión  $B$  (fig. 16-35). En el instante considerado, el origen  $B$  coincide con el origen del marco fijo  $X, Y, Z$ .

## Ecuaciones cinemáticas

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} \quad (2)$$

Movimiento de la referencia móvil:

$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\} \text{ km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900 \text{ km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (a_B)_n + (a_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600 \text{ km/h}}{400 \text{ km}} = 1.5 \text{ rad/h} \quad \boldsymbol{\Omega} = \{-1.5\mathbf{k}\} \text{ rad/h}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100 \text{ km/h}^2}{400 \text{ km}} = 0.25 \text{ rad/h}^2 \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{0.25\mathbf{k}\} \text{ rad/h}^2$$

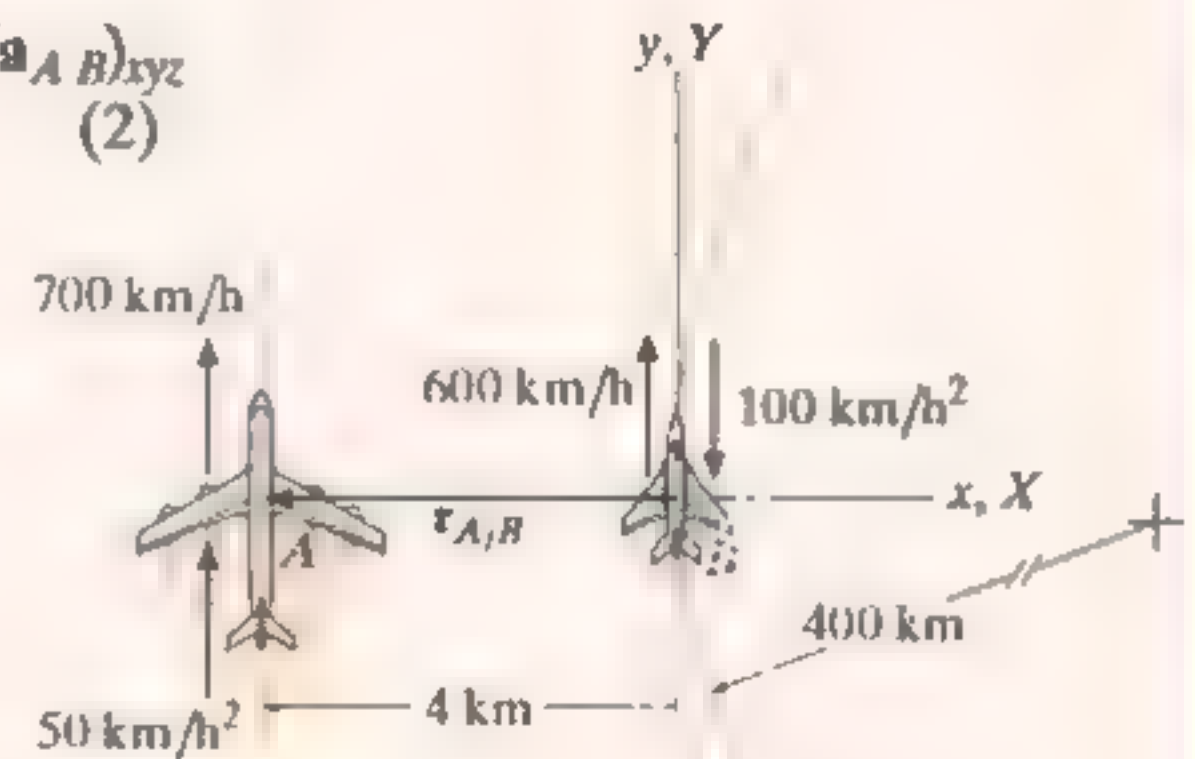


Fig. 16-35

Movimiento de  $A$  con respecto a la referencia móvil:

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\} \text{ km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$

Al sustituir los datos en las ecuaciones 1 y 2, y como  $\mathbf{v}_A = \{700\mathbf{j}\} \text{ km/h}$  y  $\mathbf{a}_A = \{50\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$ , tenemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\} \text{ km/h} \quad \text{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0.25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})$$

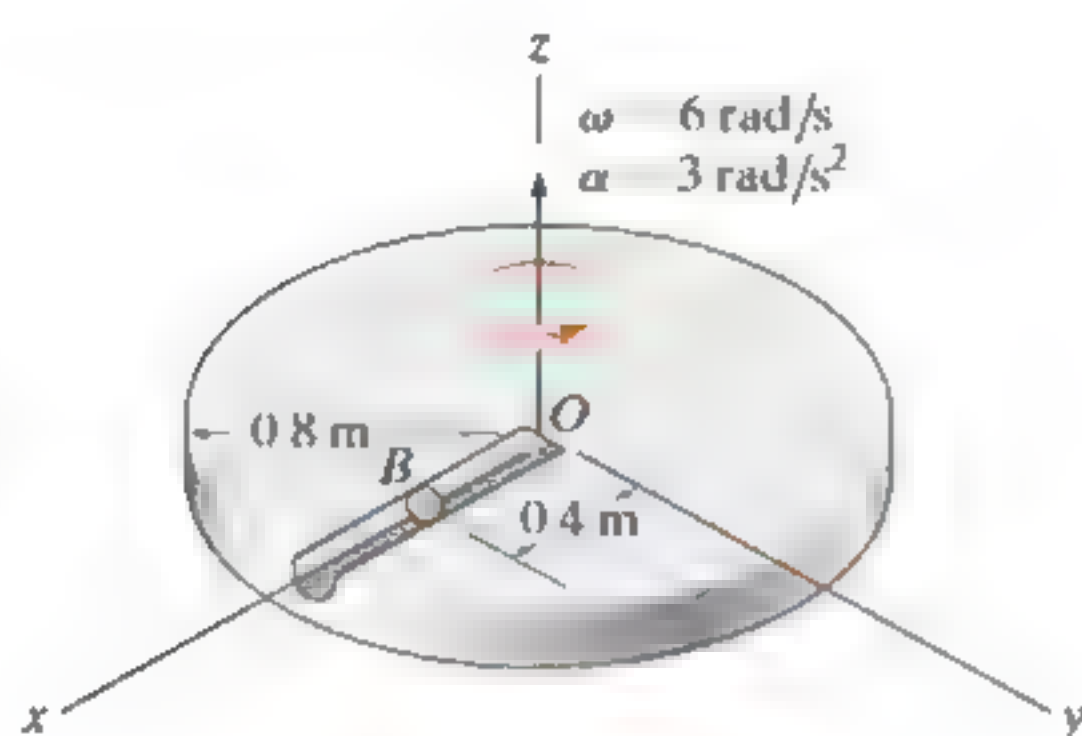
$$+ (-1.5\mathbf{k}) \times [(-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1.5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2 \quad \text{Resp.}$$

**NOTA:** La solución de este problema deberá compararse con la del ejemplo 12.26, donde se observa que  $(v_{B/A})_{xyz} \neq (v_{A/B})_{xyz}$  y  $(a_{B/A})_{xyz} \neq (a_{A/B})_{xyz}$ .

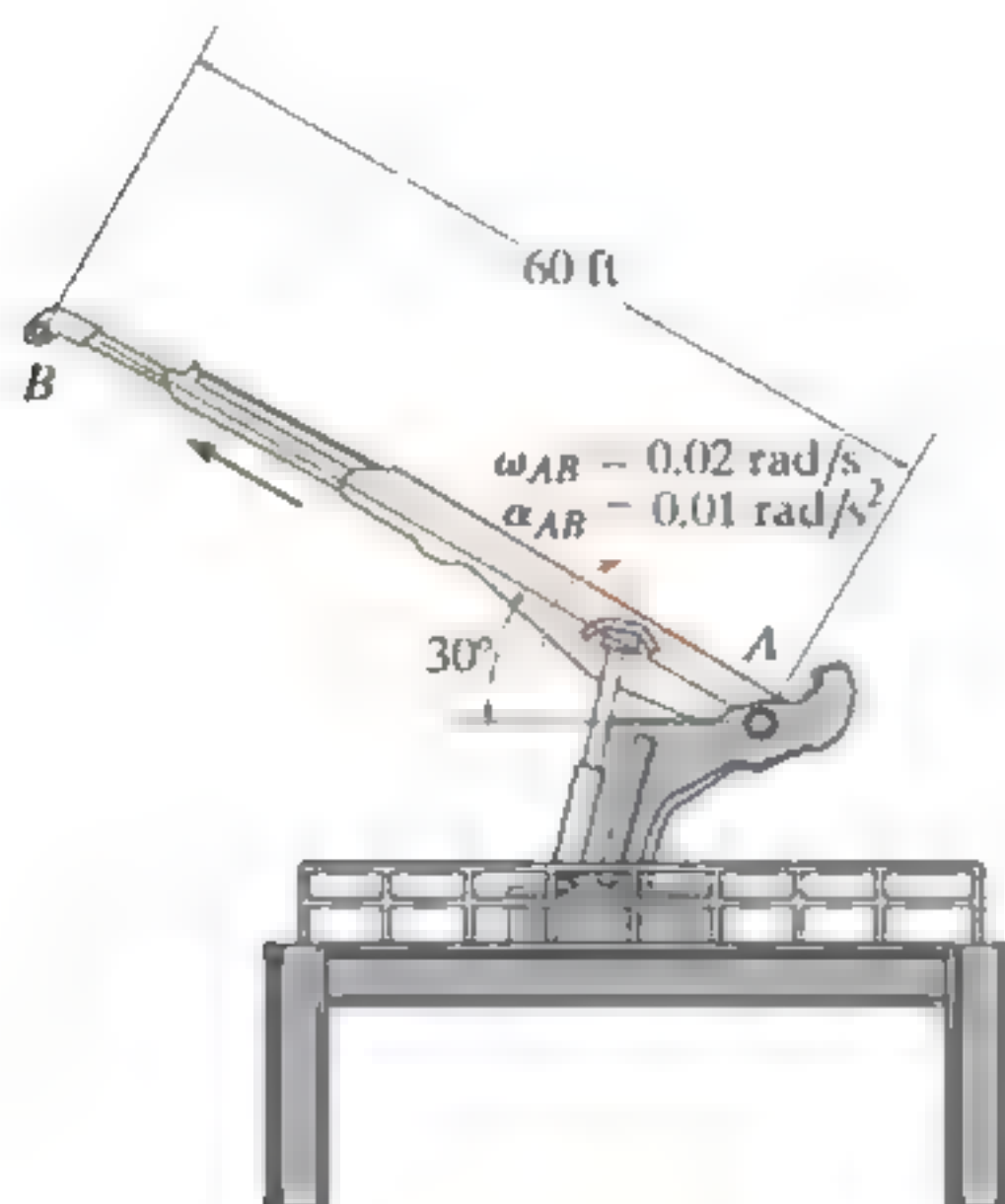
## PROBLEMAS

**16-129.** En el instante que se muestra, la bola  $B$  rueda a lo largo de la ranura en el disco con una velocidad de  $600 \text{ mm/s}$  y una aceleración de  $150 \text{ mm/s}^2$ , ambas medidas con respecto al disco y al alejarse de  $O$ . Si en el mismo instante el disco tiene la velocidad y aceleración angulares que se indican, determine la velocidad y aceleración de la bola en este instante.



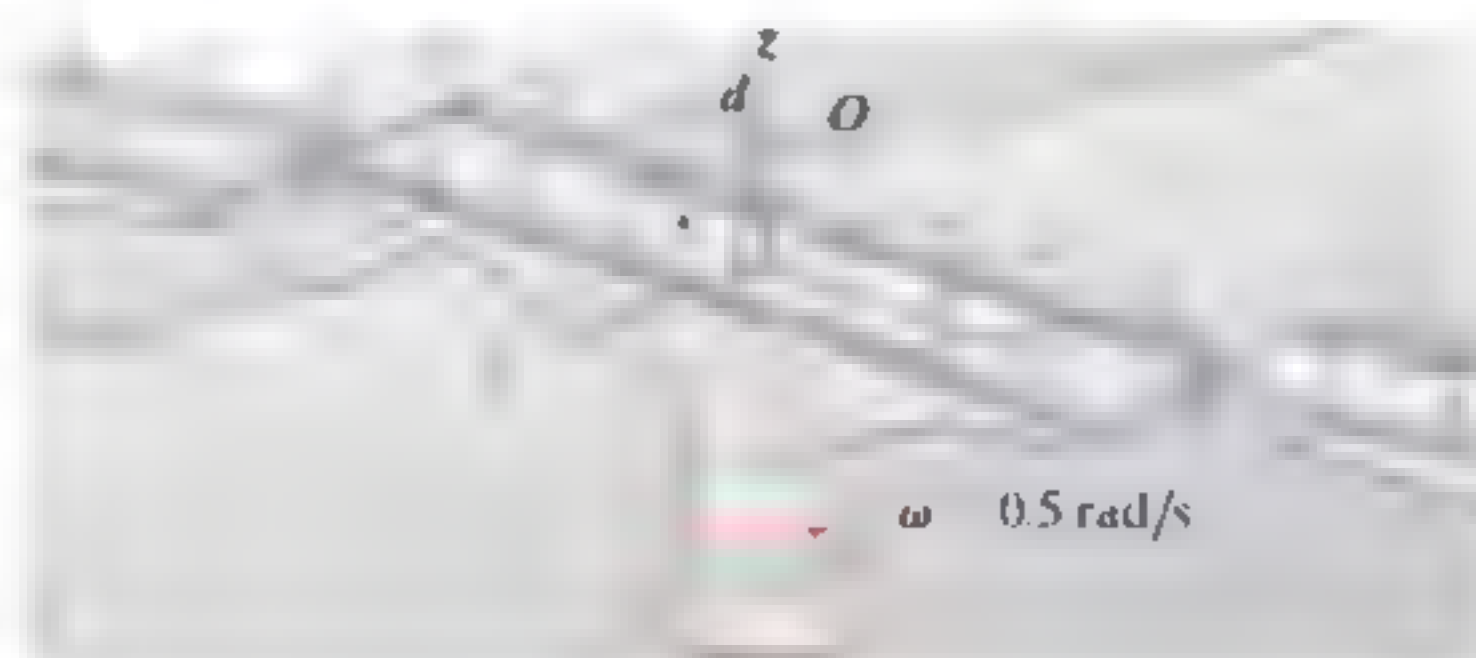
Prob. 16-129

**16-130.** La pluma telescópica de la grúa gira con la velocidad y la aceleración angulares mostradas. En el mismo instante, la pluma se extiende a una rapidez constante de  $0.5 \text{ ft/s}$ , medidos en relación con la pluma. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto  $B$  en este instante.



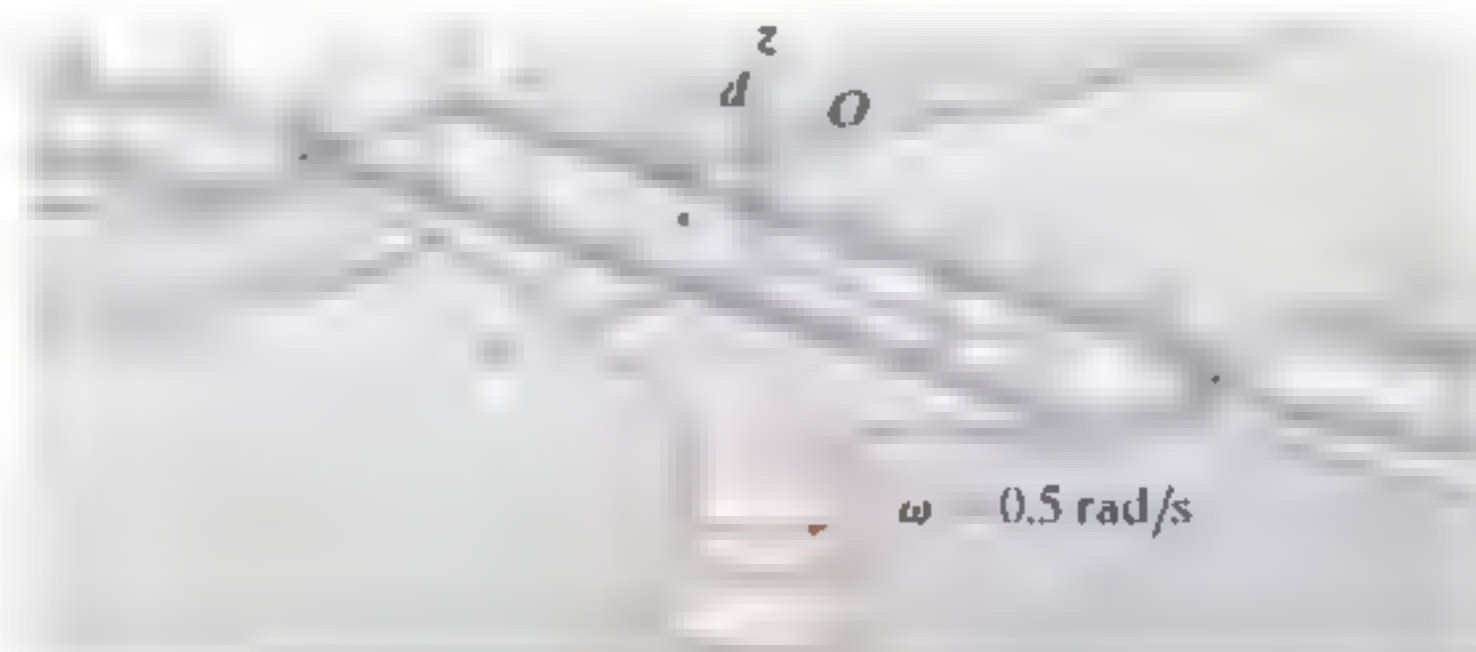
Prob. 16-130

**16-131.** Mientras el puente giratorio se está cerrando con una rotación constante de  $0.5 \text{ rad/s}$ , un hombre corre a lo largo del camino a una velocidad constante de  $5 \text{ ft/s}$  con respecto al camino. Determine su velocidad y aceleración en el instante  $d = 15 \text{ ft}$ .



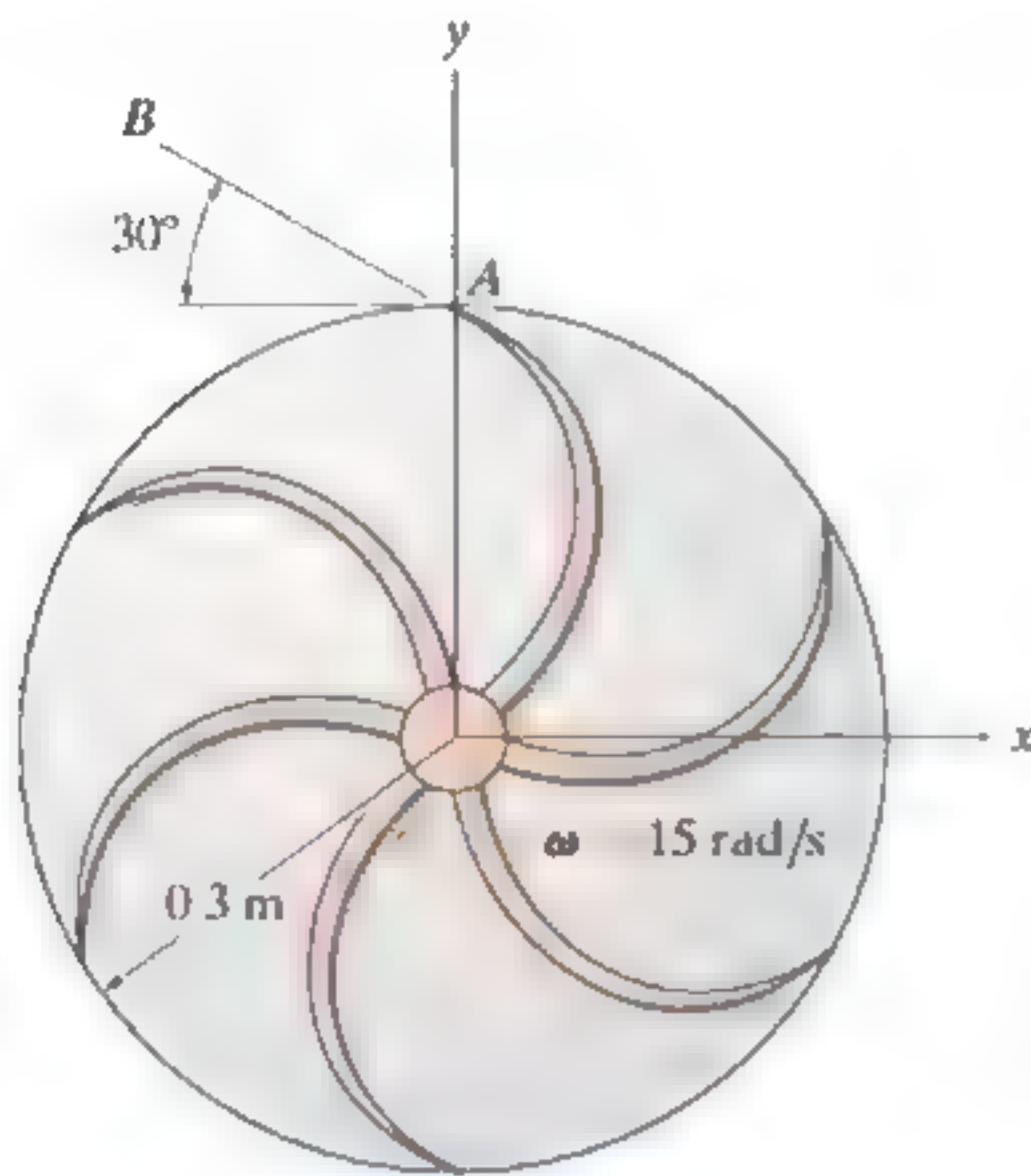
Prob. 16-131

**\*16-132.** Mientras el puente giratorio se está cerrando con una rotación constante de  $0.5 \text{ rad/s}$ , un hombre corre a lo largo del camino, de modo que cuando  $d = 10 \text{ ft}$  corre del centro hacia afuera a  $5 \text{ ft/s}$  con una aceleración de  $2 \text{ ft/s}^2$ , ambas medidas con respecto al camino. Determine su velocidad y aceleración en este instante.



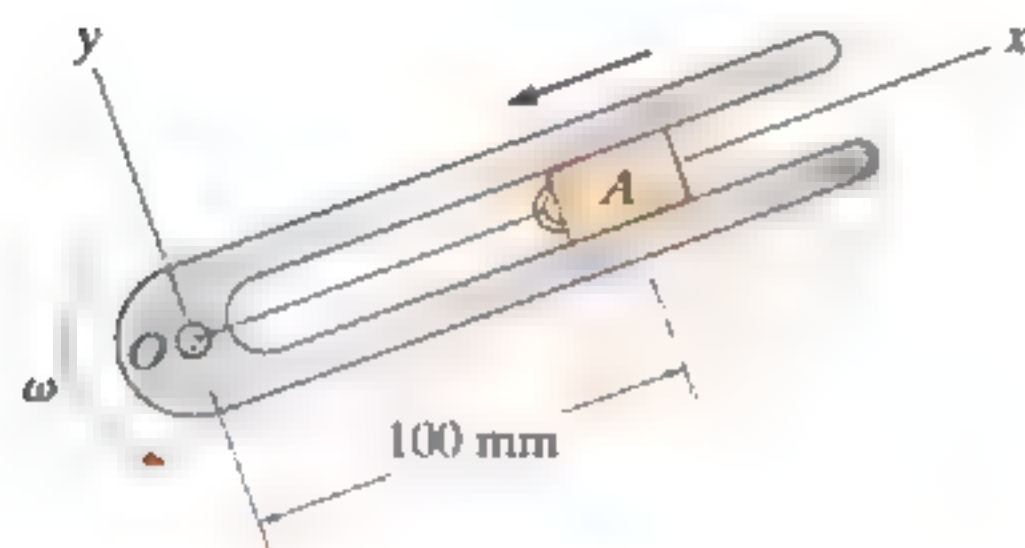
Prob. 16-132

**16-133.** El agua sale del impulsor de la bomba centrífuga con una velocidad de  $25 \text{ m/s}$  y una aceleración de  $30 \text{ m/s}^2$ , ambas medidas con respecto al impulsor a lo largo de la línea del aspa  $AB$ . Determine la velocidad y la aceleración de una partícula de agua en  $A$ , cuando sale del impulsor en el instante que se muestra. El impulsor gira a una velocidad angular constante de  $\omega = 15 \text{ rad/s}$ .



Prob. 16-133

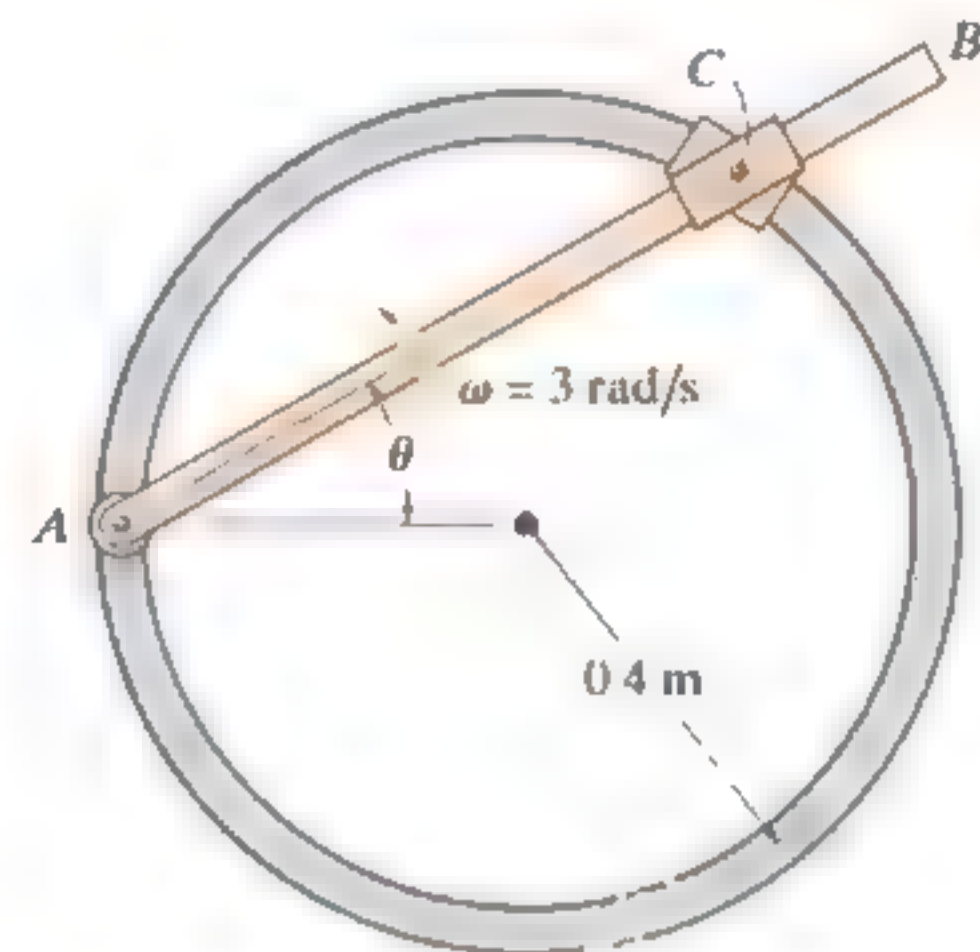
**16-134.** El bloque  $A$ , que está unido a una cuerda, se mueve a lo largo de la ranura de una varilla en forma de horquilla horizontal. En el instante indicado, la cuerda se jala hacia abajo a través del orificio en  $O$  con una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$  y su velocidad es de  $2 \text{ m/s}$ . Determine la aceleración del bloque en este instante. La varilla gira alrededor de  $O$  con una velocidad angular constante  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ .



Prob. 16-134

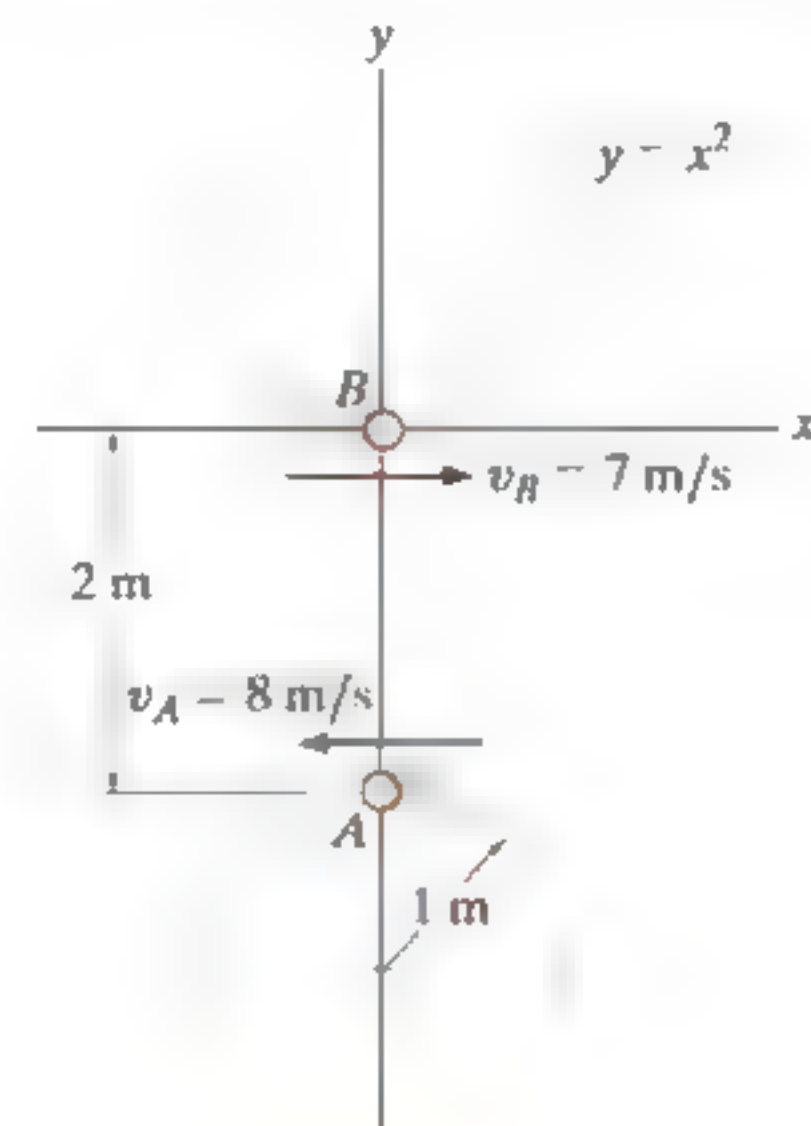
**16-135.** La varilla  $AB$  gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad del punto  $C$  localizado sobre el collarín doble cuando  $\theta = 30^\circ$ . El collarín se compone de dos bloques deslizantes conectados por pasadores, que están restringidos a moverse a lo largo de la trayectoria circular y de la varilla  $AB$ .

**\*16-136.** La varilla  $AB$  gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad y la aceleración del punto  $C$  situado en el collarín doble cuando  $\theta = 45^\circ$ . El collarín se compone de dos bloques deslizantes conectados por pasadores, que están restringidos a moverse a lo largo de la trayectoria circular y de la varilla  $AB$ .



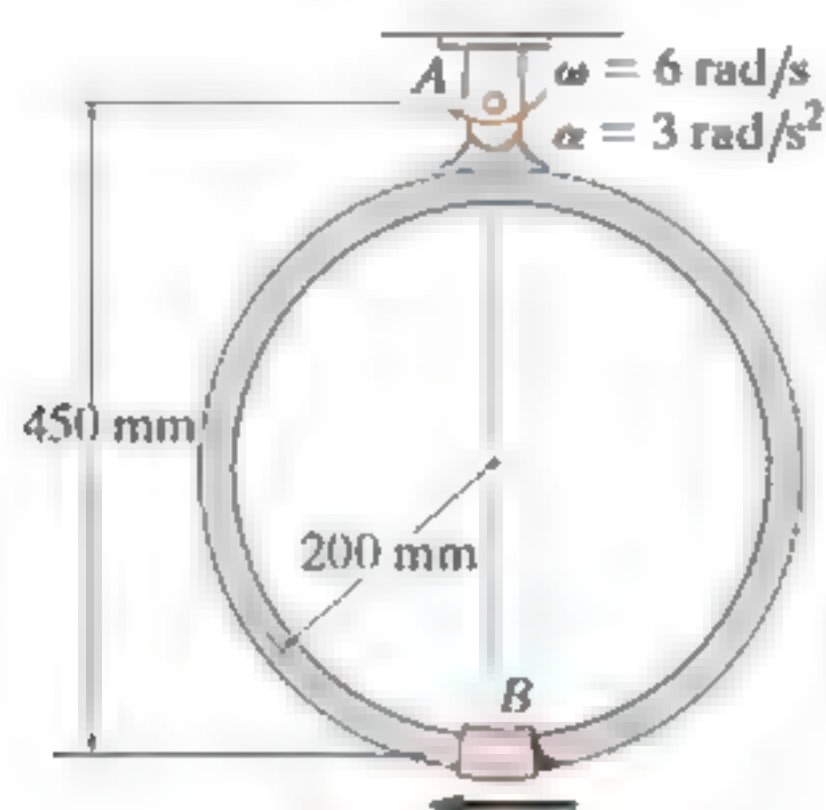
Probs. 16-135/136

**16-137.** Las partículas  $B$  y  $A$  se mueven a lo largo de las trayectorias parabólica y circular, respectivamente. Si  $B$  tiene una velocidad de  $7 \text{ m/s}$  en la dirección mostrada y su rapidez está aumentando a  $4 \text{ m/s}^2$ , mientras que  $A$  tiene una velocidad de  $8 \text{ m/s}$  en la dirección mostrada y su rapidez está disminuyendo a  $6 \text{ m/s}^2$ , determine la velocidad relativa y la aceleración relativa de  $B$  con respecto a  $A$ .



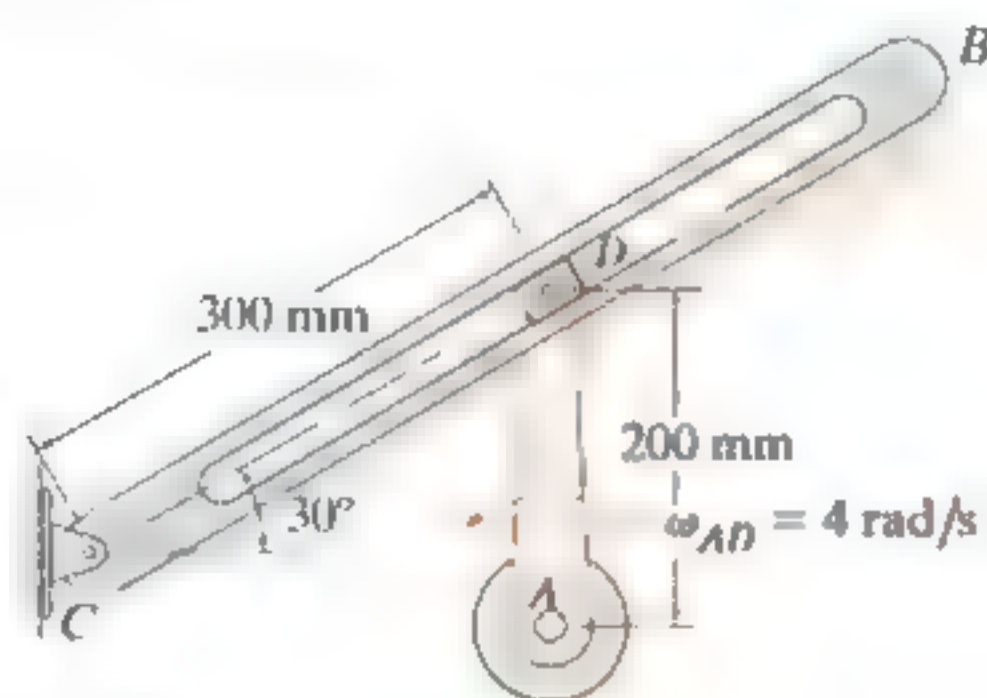
Prob. 16-137

**16-138.** El collarín  $B$  se mueve hacia la izquierda con una velocidad de  $5 \text{ m/s}$ , que está aumentando a una velocidad constante de  $1.5 \text{ m/s}^2$ , en relación con el aro, mientras éste gira con la velocidad angular y la aceleración angular mostradas. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



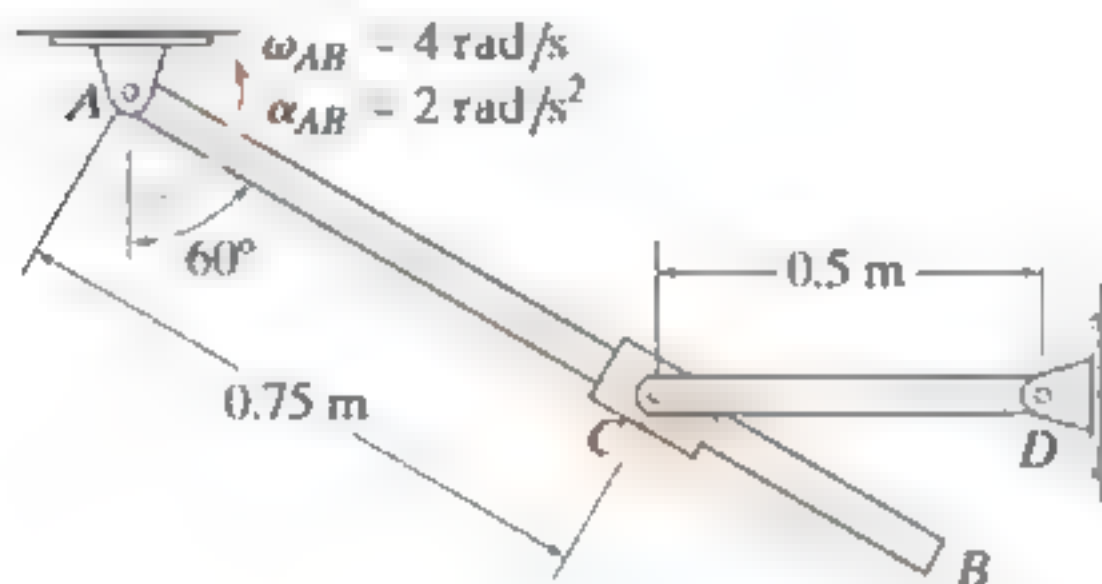
Prob. 16-138

**16-139.** El bloque  $D$  del mecanismo está limitado a moverse dentro de la ranura del elemento  $CB$ . Si el eslabón  $AD$  gira a una velocidad constante de  $\omega_{AD} = 4 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular y la aceleración angular del elemento  $CB$  en el instante mostrado.



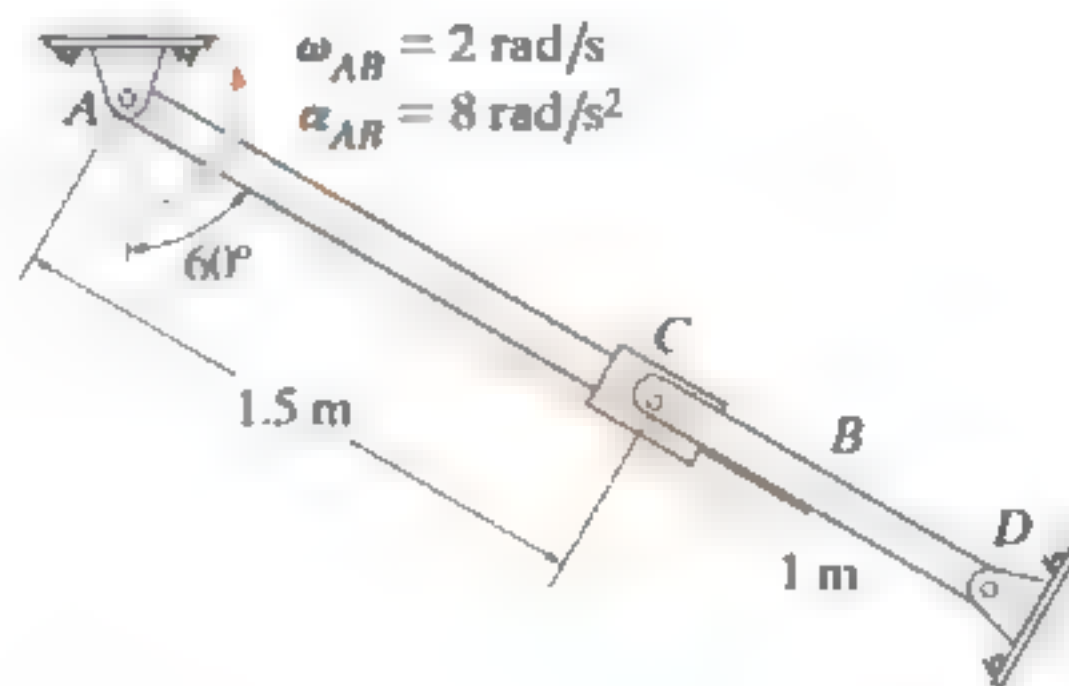
Prob. 16-139

**16-140.** En el instante mostrado, la varilla  $AB$  tiene una velocidad angular  $\omega_{AB} = 4 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular  $\alpha_{AB} = 2 \text{ rad/s}^2$ . Determine la velocidad y la aceleración angulares de la varilla  $CD$  en este instante. El collarín en  $C$  está conectado mediante un pasador a  $CD$  y se desliza libremente a lo largo de  $AB$ .



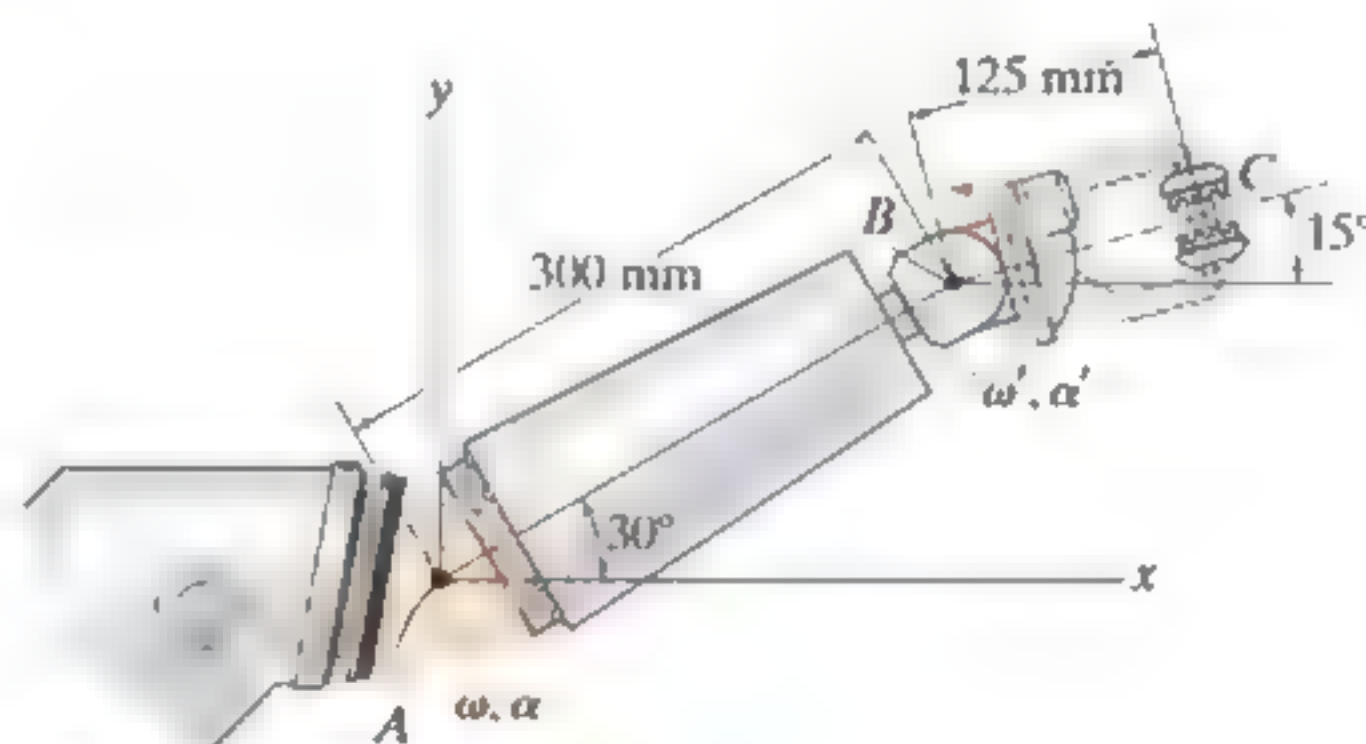
Prob. 16-140

**16-141.** El collarín  $C$  está articulado a la varilla  $CD$  mientras se desliza sobre la varilla  $AB$ . Si la varilla  $AB$  tiene una velocidad angular de  $2 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular de  $8 \text{ rad/s}^2$ , ambas en sentido antihorario, determine la velocidad y la aceleración angulares de la varilla  $CD$  en el instante mostrado.



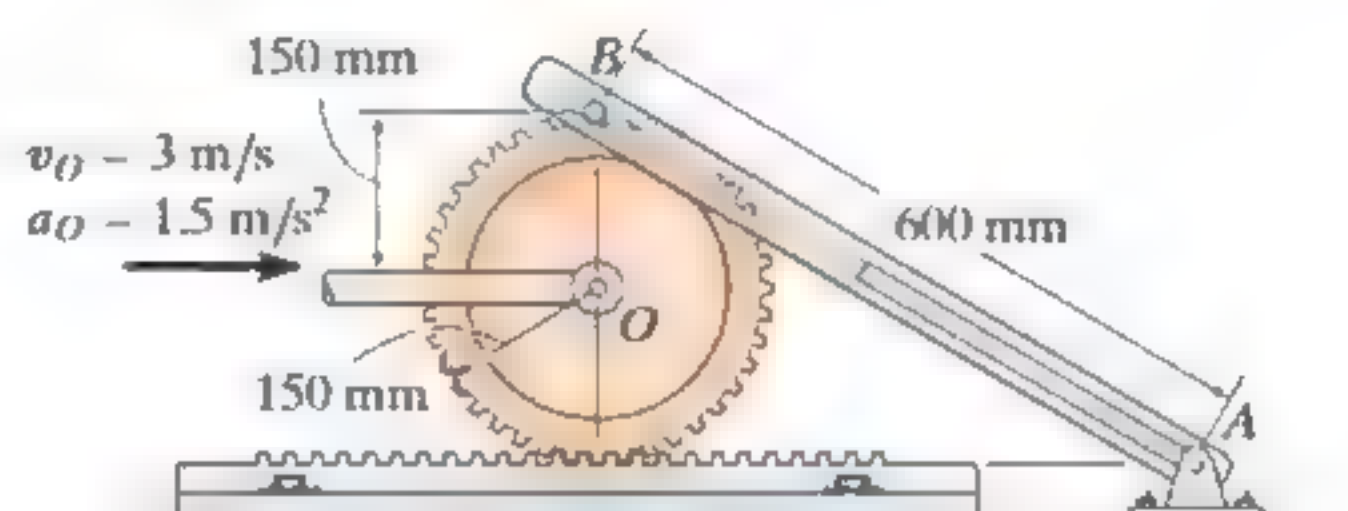
Prob. 16-141

**16-142.** En el instante mostrado, el brazo robótico  $AB$  gira en sentido antihorario a  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ , y tiene una aceleración angular  $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$ . Simultáneamente, la tenaza  $BC$  gira en sentido antihorario a  $\omega' = 6 \text{ rad/s}$  y  $\alpha' = 2 \text{ rad/s}^2$ , ambas medidas con respecto a una referencia fija. Determine la velocidad y la aceleración del objeto que sostiene la tenaza en  $C$ .



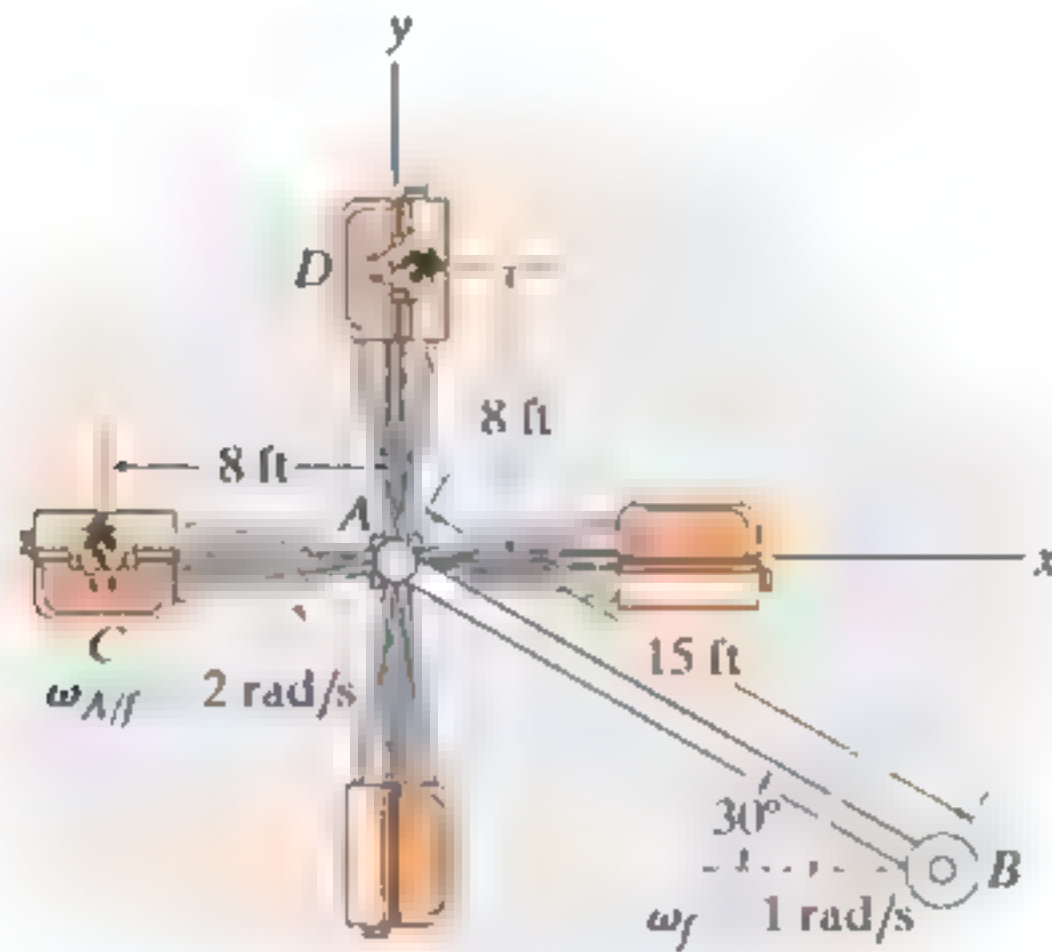
Prob. 16-142

**16-143.** La clavija  $B$  sobre el engrane se desliza libremente a lo largo de la ranura del eslabón  $AB$ . Si el centro del engrane  $O$  se mueve con la velocidad y la aceleración mostradas, determine la velocidad y la aceleración angulares del eslabón en este instante.



Prob. 16-143

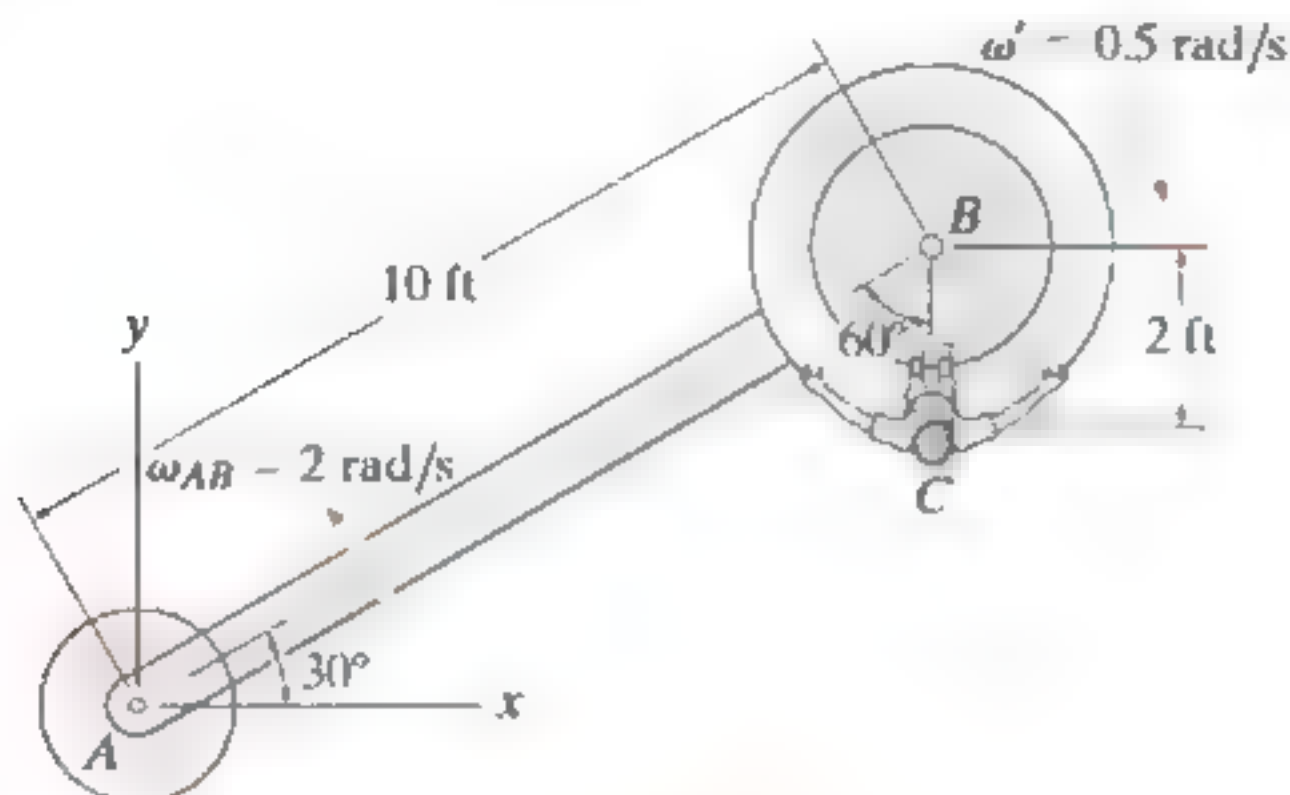
**\*16-144.** Los carros de un juego mecánico de un parque de diversiones giran alrededor del eje en  $A$ , con una velocidad angular constante  $\omega_{A/f} = 2 \text{ rad/s}$ , medida en relación con el bastidor  $AB$ . Al mismo tiempo, el bastidor gira alrededor del soporte del eje principal en  $B$  con una velocidad angular constante  $\omega_f = 1 \text{ rad/s}$ . Determine la velocidad y la aceleración del pasajero en  $C$  en el instante mostrado.



Prob. 16-144

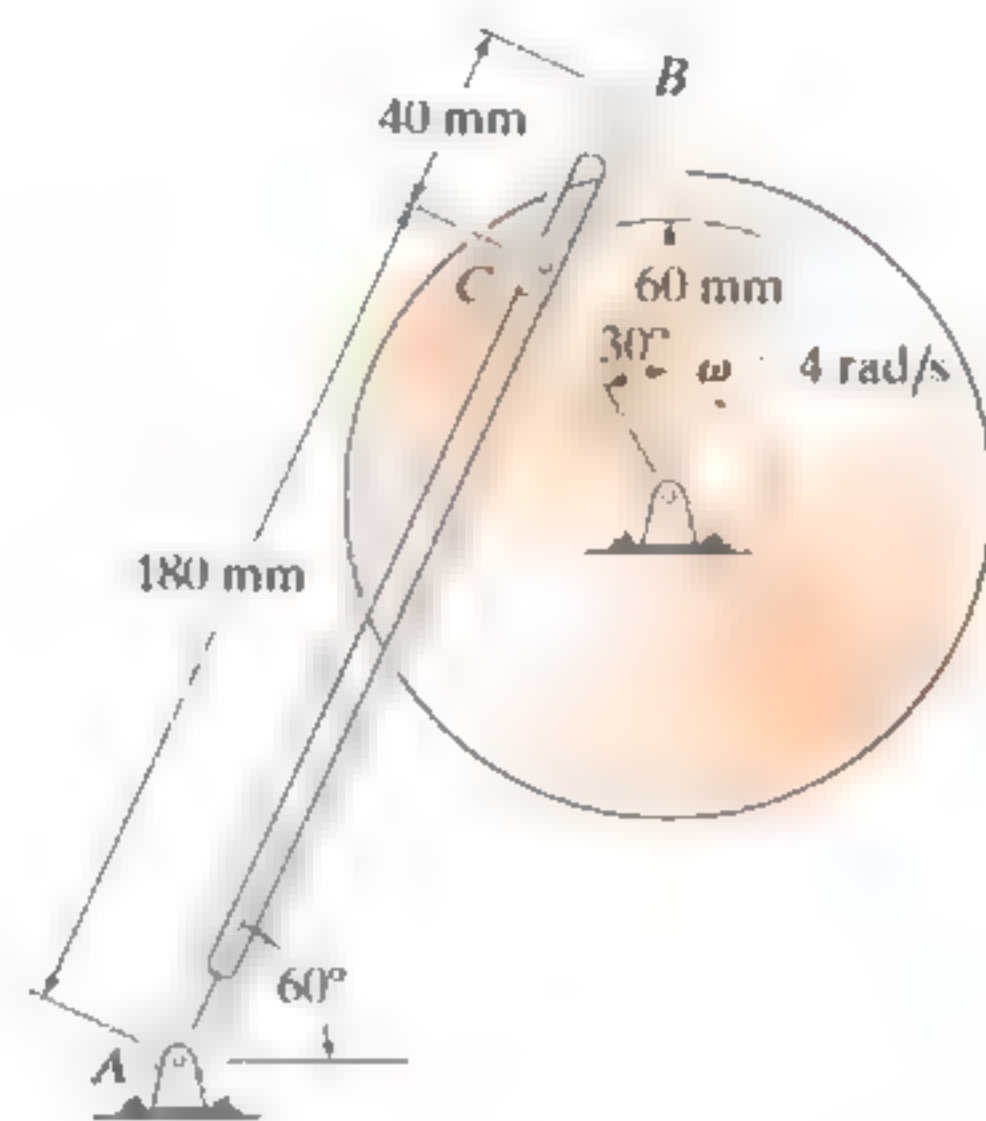
**16-145.** Un juego mecánico de un parque de diversiones se compone de un brazo rotatorio  $AB$  que gira a una velocidad angular constante de  $\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$ , alrededor del punto  $A$  y un carro montado en el extremo del brazo, el cual tiene una velocidad angular constante  $\omega' = \{-0.5\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$ , medida con respecto al brazo. En el instante que se muestra, determine la velocidad y aceleración del pasajero en  $C$ .

**16-146.** Un juego mecánico de un parque de diversiones se compone de un brazo rotatorio  $AB$  que gira a una aceleración angular constante de  $\alpha_{AB} = 1 \text{ rad/s}^2$  cuando  $\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$  en el instante que se muestra. Asimismo, en este instante el carro montado en el extremo del brazo tiene una aceleración angular constante de  $\alpha = \{-0.6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$  y una velocidad angular de  $\omega' = \{-0.5\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$ , medidas con respecto al brazo. Determine la velocidad y aceleración del pasajero  $C$  en este instante.



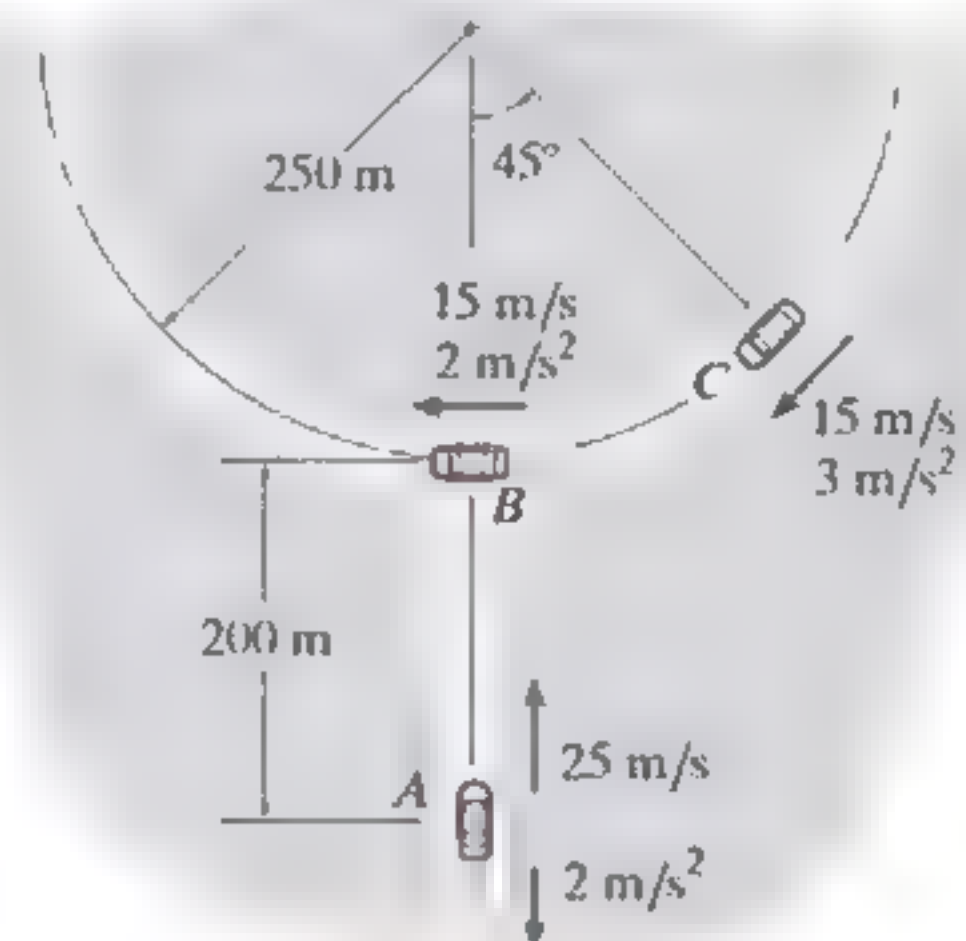
Probs. 16-145/146

**16-147.** Si el bloque deslizante  $C$  se fija en el disco, que tiene una velocidad angular constante en sentido antihorario de  $4 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad y la aceleración angulares del brazo ranurado  $AB$  en el instante mostrado.



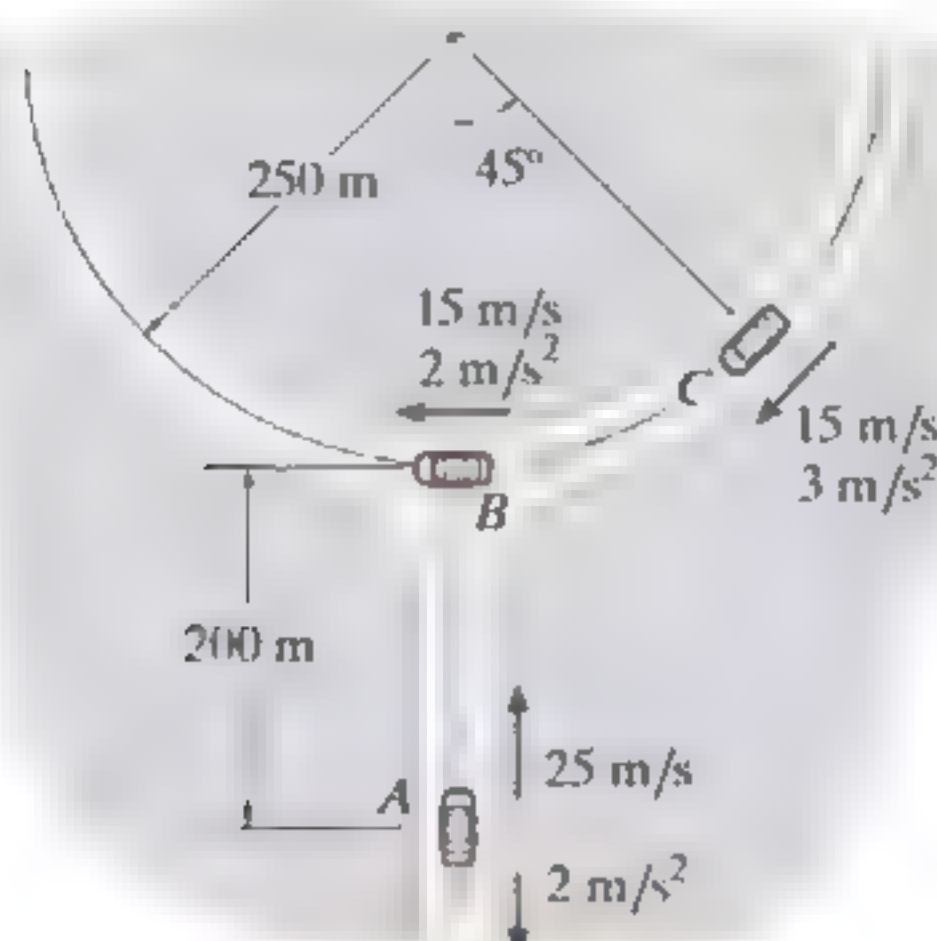
Prob. 16-147

**\*16-148.** En el instante mostrado, el automóvil  $A$  se desplaza con una rapidez de  $25 \text{ m/s}$ , la cual disminuye a razón constante de  $2 \text{ m/s}^2$ , mientras que el automóvil  $C$  se desplaza con una velocidad de  $15 \text{ m/s}$ , la cual aumenta a razón constante de  $3 \text{ m/s}^2$ . Determine la velocidad y la aceleración del auto  $A$  con respecto al auto  $C$ .



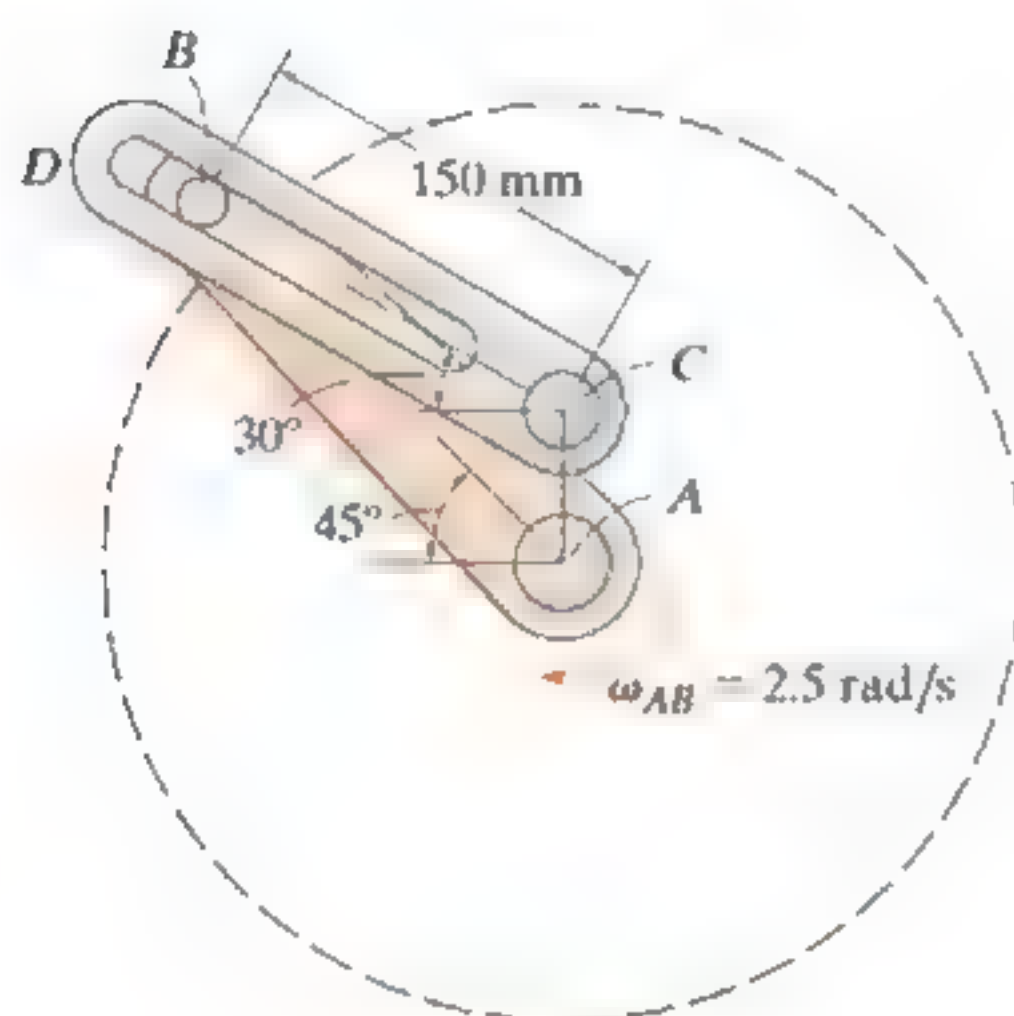
Prob. 16-148

**16-149.** En el instante indicado, el automóvil  $B$  se desplaza con una rapidez de  $15 \text{ m/s}$ , la cual aumenta a razón constante de  $2 \text{ m/s}^2$ , mientras que el automóvil  $C$  se desplaza con una rapidez de  $15 \text{ m/s}$ , la cual aumenta a razón constante de  $3 \text{ m/s}^2$ . Determine la velocidad y la aceleración del auto  $B$  con respecto al auto  $C$ .



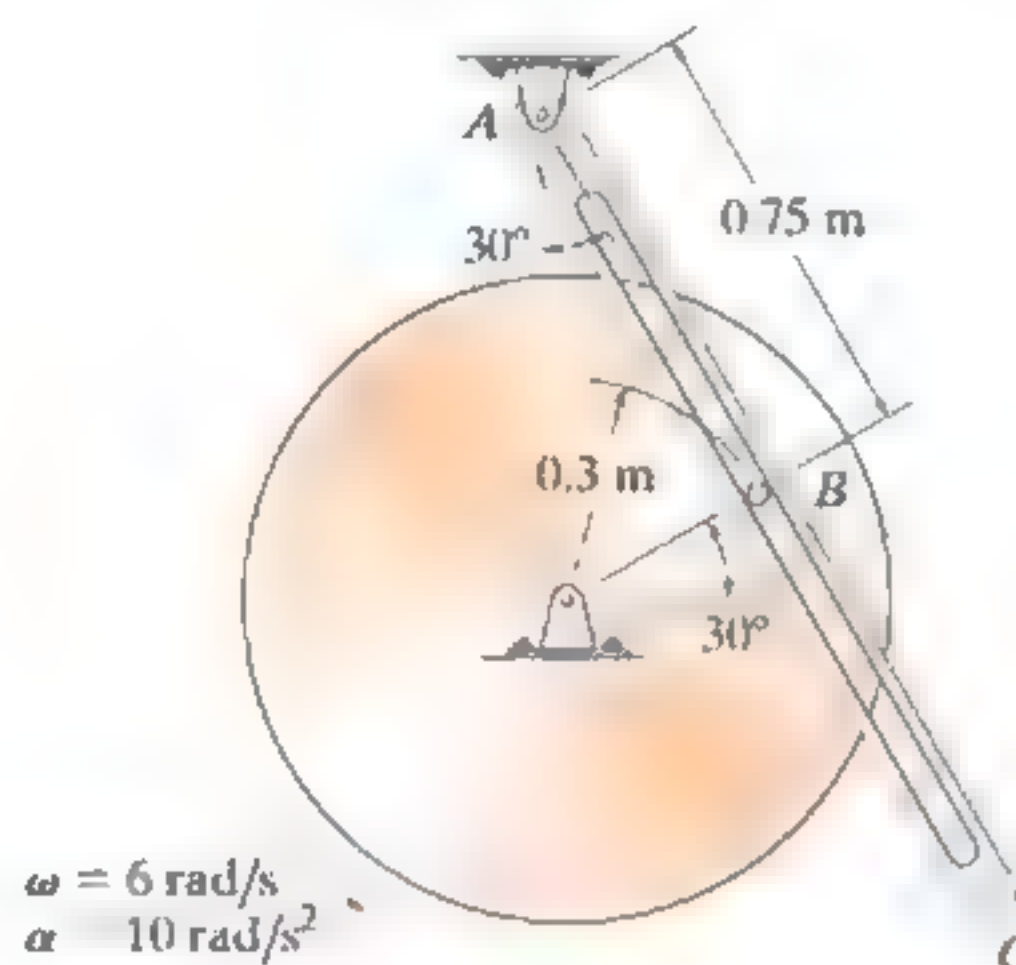
Prob. 16-149

**16-150.** El mecanismo de dos eslabones sirve para ampliar el movimiento angular. El eslabón  $AB$  tiene un pasador en  $B$  que está limitado a moverse dentro de la ranura del eslabón  $CD$ . Si en el instante mostrado,  $AB$  (entrada) tiene una velocidad angular de  $\omega_{AB} = 2.5 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad angular de  $CD$  (salida) en este instante.



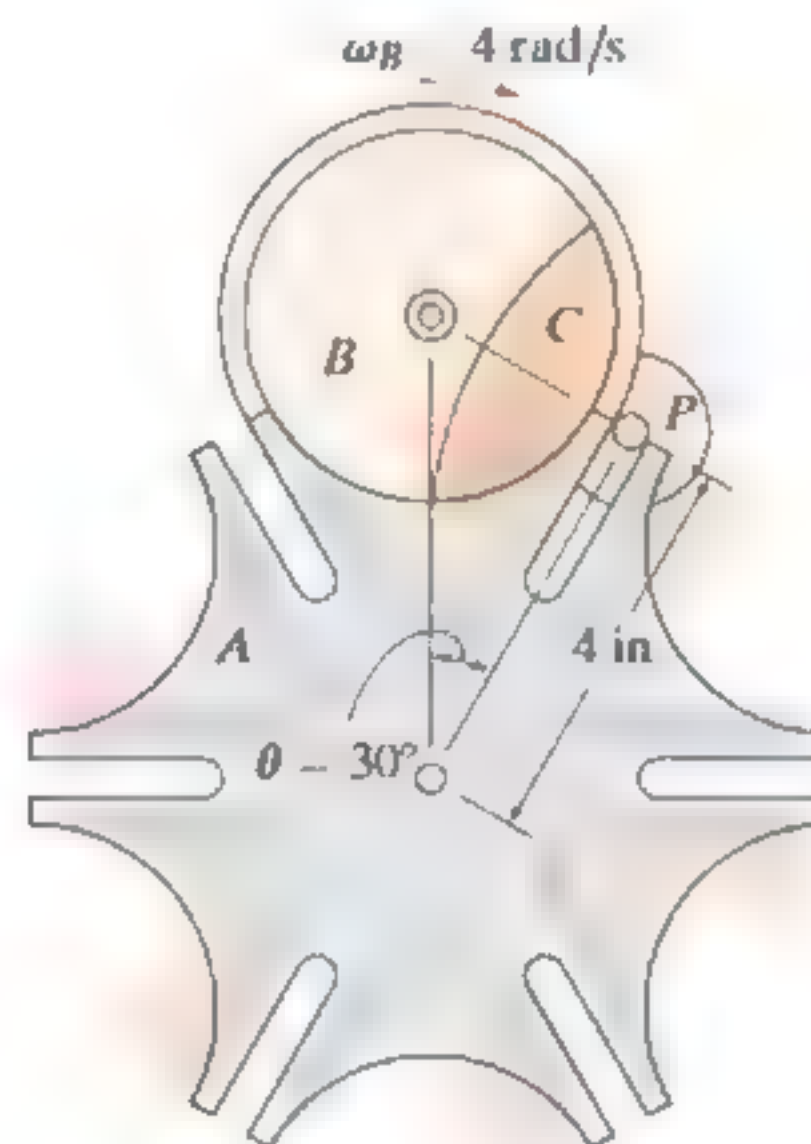
Prob. 16-150

**16-151.** El disco gira con el movimiento angular mostrado. Determine la velocidad y la aceleración angulares del eslabón ranurado  $AC$  en este instante. La clavija en  $B$  está fija al disco.



Prob. 16-151

**16-152.** El mecanismo Ginebra se utiliza en un sistema empacador para convertir el movimiento angular constante en movimiento angular intermitente. La rueda de estrella  $A$  realiza un sexto de revolución por cada revolución completa de la rueda propulsora  $B$  y la guía anexa  $C$ . Para hacer esto, el pasador  $P$ , el cual está fijo en  $B$ , se desliza hacia dentro de una de las ranuras radiales de  $A$ , por lo que la rueda  $A$  gira y luego sale de la ranura. Si  $B$  tiene una velocidad angular constante de  $\omega_B = 4 \text{ rad/s}$ , determine  $\omega_A$  y  $\alpha_A$  de la rueda  $A$  en el instante que se muestra.



Prob. 16-152

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**C 16-1.** Un motor eléctrico hace girar la llanta  $A$  a una velocidad angular constante y la fricción origina que la rueda gire sin deslizarse sobre el borde interno de la rueda de la fortuna. Con los valores numéricos apropiados, determine la magnitud de la velocidad y la aceleración de los pasajeros en una de las canastas. ¿Los pasajeros en las demás canastas experimentan este mismo movimiento? Explique su respuesta.



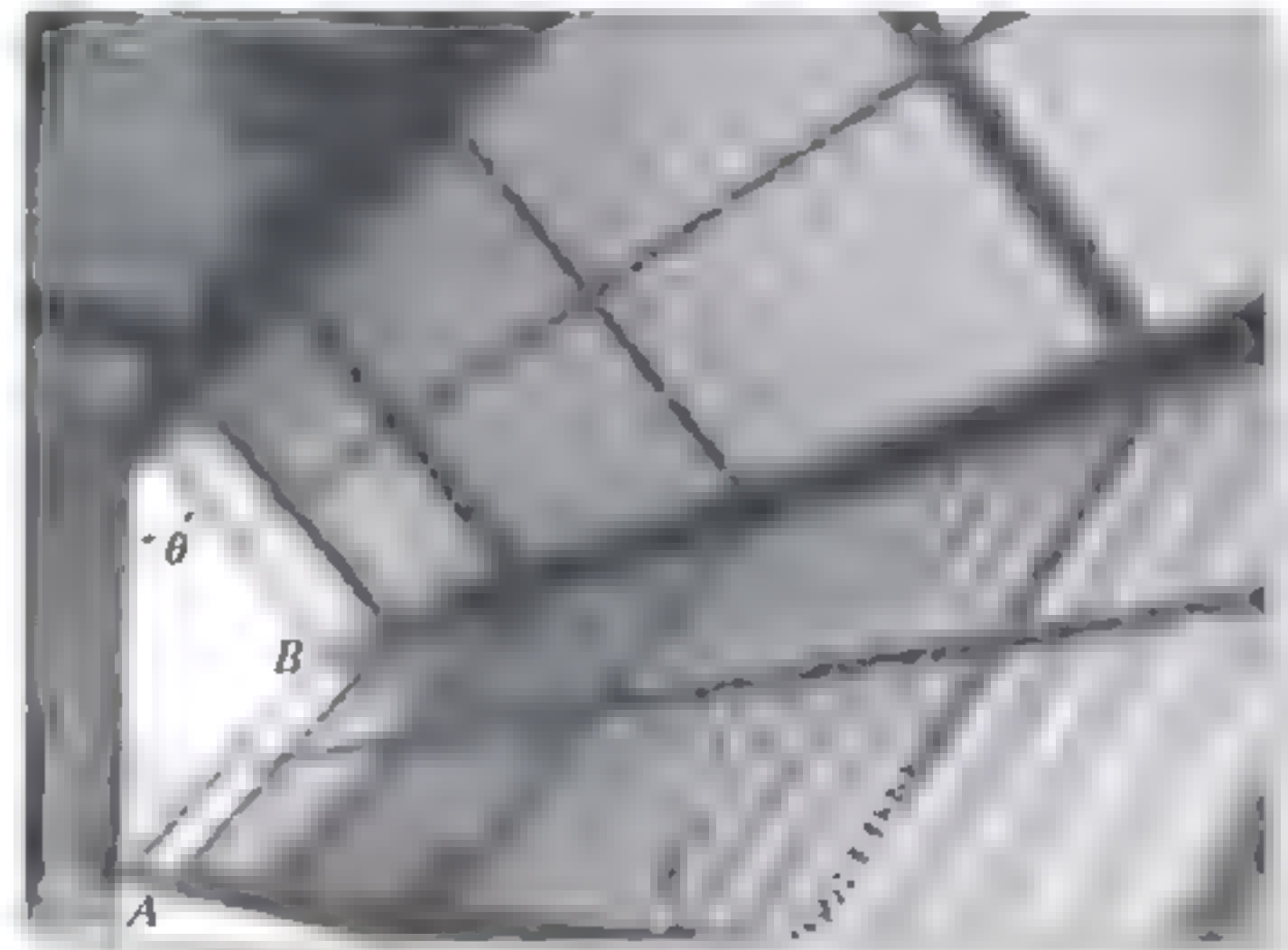
Prob. C 16-1 (© R. C. Hibbeler)

**C 16-2.** La manivela  $AB$  gira en sentido antihorario a una velocidad constante  $\omega$  que hace que se muevan el brazo de conexión  $CD$  y el balancín  $DE$ . Trace un bosquejo que muestre la ubicación del  $C$  del brazo de conexión cuando  $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  y  $270^\circ$ . Además, ¿cómo se determinó la curvatura de la cabeza  $E$  y por qué se curva de esta manera?



Prob. C 16-2 (© R. C. Hibbeler)

**C 16-3.** La puerta plegadiza del hangar se abre por medio de cables que se mueven hacia arriba a una rapidez constante de  $0.5 \text{ m/s}$ . Determine la velocidad angular de  $BC$  y la velocidad angular de  $AB$  cuando  $\theta = 45^\circ$ . El panel  $BC$  está articulado en  $C$  y tiene una altura que es igual a la de  $BA$ . Use valores numéricos adecuados para explicar su resultado.



Prob. C 16-3 (© R. C. Hibbeler)

**C 16-4.** Si los neumáticos no patinan en el pavimento, determine los puntos en el neumático que tienen una rapidez máxima y mínima, así como los puntos que tienen una aceleración máxima y mínima. Use valores numéricos adecuados para la rapidez del automóvil y el tamaño de las llantas para explicar su resultado.



Prob. C 16-4 (© R. C. Hibbeler)

## TEMAS DEL CAPÍTULO

### Movimiento plano de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido experimenta tres tipos de movimiento plano: traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general.

#### Traslación

Cuando un cuerpo se traslada en línea recta, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias paralelas en línea recta. Si las trayectorias tienen el mismo radio de curvatura, entonces la traslación es curvilínea. Siempre que conozcamos el movimiento de una de las partículas, entonces también conoceremos el movimiento de todas las demás.



Trayectoria de traslación rectilínea



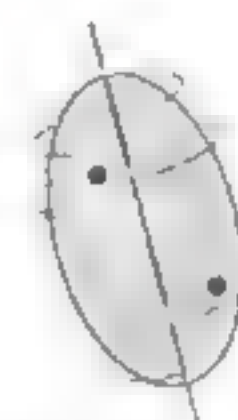
Trayectoria de traslación curvilínea

#### Rotación alrededor de un eje fijo

En este tipo de movimiento, todas las partículas se mueven a lo largo de trayectorias circulares. Aquí, todos los segmentos de línea en el cuerpo experimentan un desplazamiento angular, una velocidad angular y una aceleración angular iguales.

Una vez que se conoce el movimiento angular del cuerpo, entonces puede obtenerse la velocidad de cualquier partícula situada a una distancia  $r$  del eje.

La aceleración de cualquier partícula tiene dos componentes. La componente tangencial responde al cambio de la magnitud de la velocidad; y la componente normal, al cambio de la dirección de la velocidad.



Rotación alrededor de un eje fijo

$$\omega = d\theta/dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\alpha = d\omega/dt$$

o bien

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Constante  $\alpha_c$

$$v = \omega r$$

$$a_t = \alpha r, \quad a_n = \omega^2 r$$

#### Movimiento plano general

Cuando un cuerpo experimenta movimiento plano general, se traslada y gira al mismo tiempo. Se cuenta con varios tipos de métodos para analizar este movimiento.

##### Análisis del movimiento absoluto

Si se conocen el movimiento de un punto en el cuerpo o el movimiento angular de una línea, entonces es posible relacionar este movimiento con el de otro punto o línea usando un análisis del movimiento absoluto. Para hacerlo, se establecen coordenadas de posición lineal o angular  $\theta$  (medidas con respecto a un punto o una línea fijos). Estas coordenadas de posición se relacionan entonces por medio de la geometría del cuerpo. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación da la relación entre las velocidades y/o las velocidades angulares. Una segunda derivada con respecto al tiempo relaciona la aceleración y/o las aceleraciones angulares.



Movimiento plano general

### Movimiento relativo mediante ejes trasladantes

El movimiento plano general también puede analizarse por medio de un análisis de movimiento relativo entre dos puntos  $A$  y  $B$  localizados en el cuerpo. Este método considera el movimiento en partes: primero una traslación del punto base  $A$  seleccionado y, en seguida, una “rotación” relativa del cuerpo alrededor del punto  $A$ , el cual se mide con respecto a un eje trasladante. Como el movimiento relativo se observa como movimiento circular alrededor del punto base, el punto  $B$  tendrá una velocidad  $\mathbf{v}_{B/A}$  tangente al círculo. También tiene dos componentes de aceleración,  $(\mathbf{a}_{B/A})_t$  y  $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ . Además, es importante darse cuenta de que  $\mathbf{a}_A$  y  $\mathbf{a}_B$  tendrán componentes tangenciales y normales, si estos puntos se mueven a lo largo de trayectorias curvas.

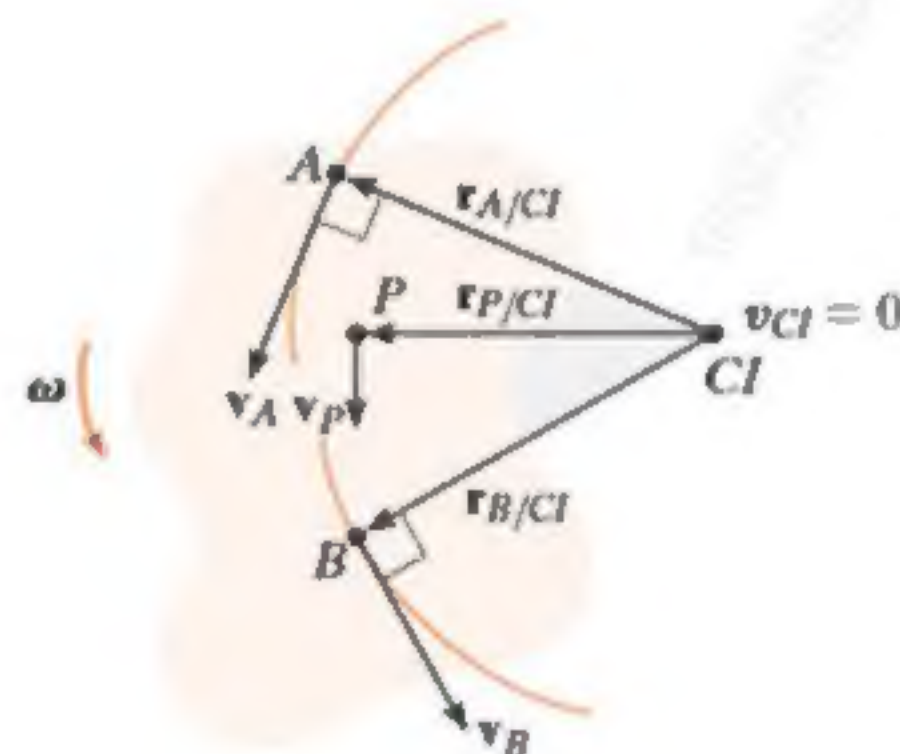
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

### Centro instantáneo de velocidad cero

Si se considera que el punto base  $A$  tiene una velocidad cero, entonces la ecuación de velocidad relativa se escribe  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ . En este caso, parece que el cuerpo girará alrededor de un eje instantáneo que pasa por  $A$ .

El centro instantáneo de rotación ( $CI$ ) puede establecerse siempre que se conozcan las direcciones de las velocidades o la velocidad angular de dos puntos cualesquiera del cuerpo. Como una línea radial  $r$  siempre será perpendicular a cada velocidad, entonces el  $CI$  está en el punto de intersección de estas dos líneas radiales. Su ubicación medida se determina con la geometría del cuerpo. Una vez que se establece, entonces puede determinarse la velocidad de cualquier punto  $P$  del cuerpo con  $v = \omega r$ , donde  $r$  se extiende del  $CI$  al punto  $P$ .



### Movimiento relativo por medio de ejes rotatorios

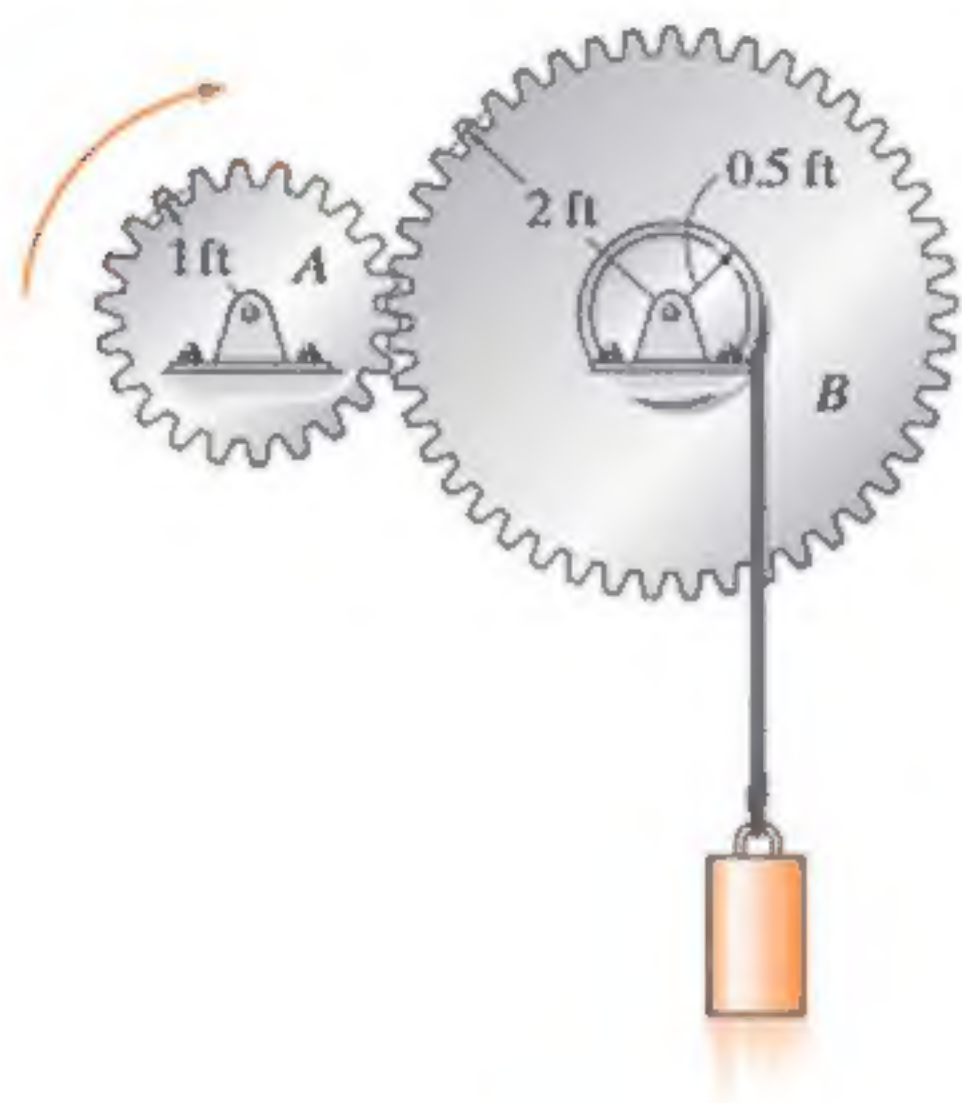
Los problemas que implican elementos conectados que se deslizan uno con respecto al otro o puntos que no están en el mismo cuerpo pueden estudiarse por medio de un análisis de movimiento relativo con respecto a un marco rotatorio. Esto da lugar al término  $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$  conocido como aceleración de Coriolis.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

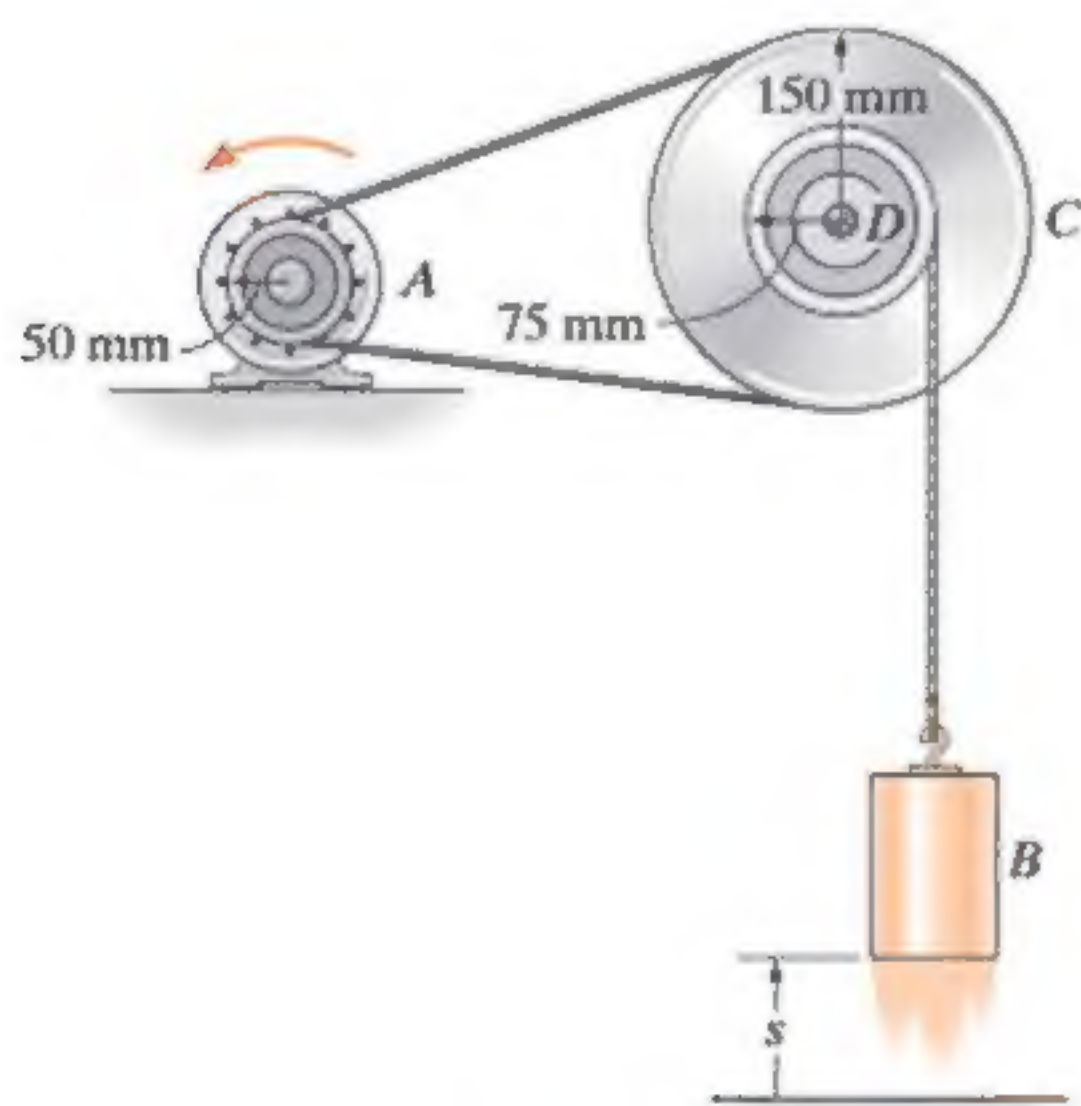
## PROBLEMAS DE REPASO

**R16-1.** El engrane de elevación  $A$  tiene una velocidad angular inicial de  $60 \text{ rad/s}$  y una desaceleración constante de  $1 \text{ rad/s}^2$ . Determine la velocidad y la desaceleración del bloque que está siendo elevado mediante el eje del engrane  $B$  cuando  $t = 3 \text{ s}$ .



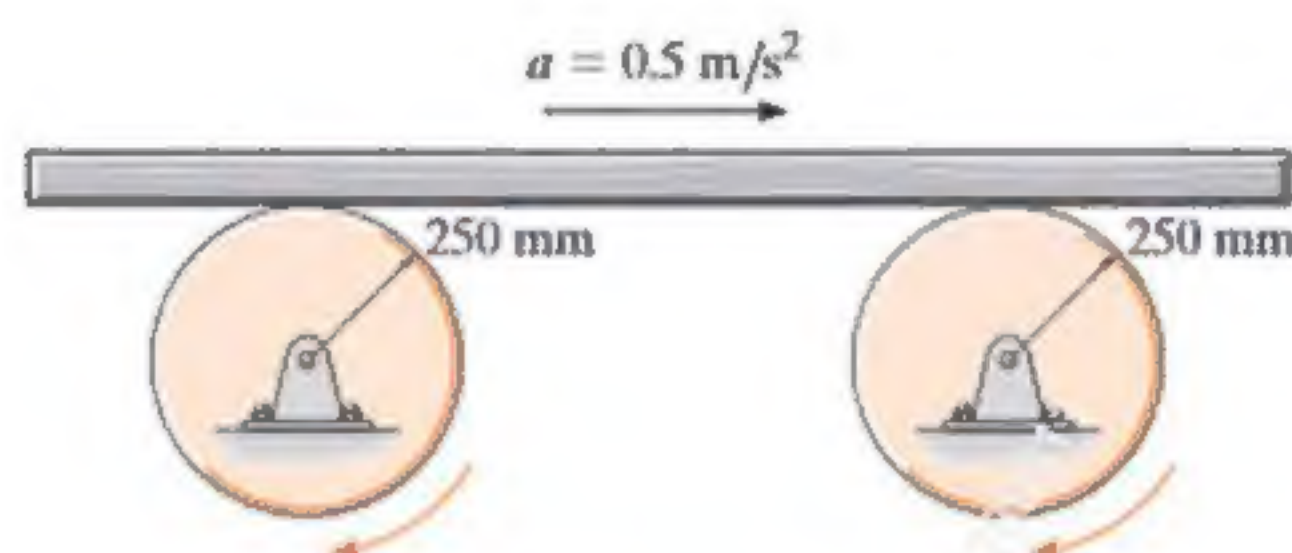
Prob. R16-1

**R16-2.** A partir de  $(\omega_A)_0 = 3 \text{ rad/s}$ , cuando  $\theta = 0, s = 0$ , la polea  $A$  recibe una aceleración angular  $\alpha = (0.6\theta) \text{ rad/s}^2$ , donde  $\theta$  está en radianes. Determine la velocidad del bloque  $B$  cuando se haya elevado  $s = 0.5 \text{ m}$ . La polea tiene un eje interno  $D$  que está fijo a  $C$  y gira junto con él.



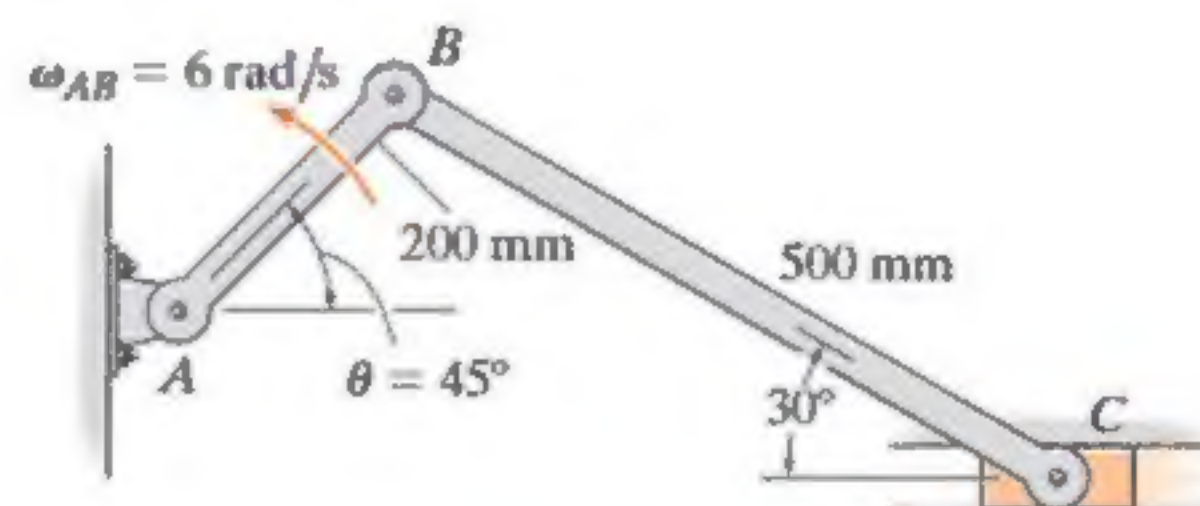
Prob. R16-2

**R16-3.** La tabla descansa sobre la superficie de dos tambores. En el instante mostrado, tiene una aceleración de  $0.5 \text{ m/s}^2$  hacia la derecha, mientras que en el mismo instante, los puntos en el borde exterior de cada tambor tienen una aceleración con una magnitud de  $3 \text{ m/s}^2$ . Si la tabla no se desliza sobre los tambores, determine su velocidad debida al movimiento.



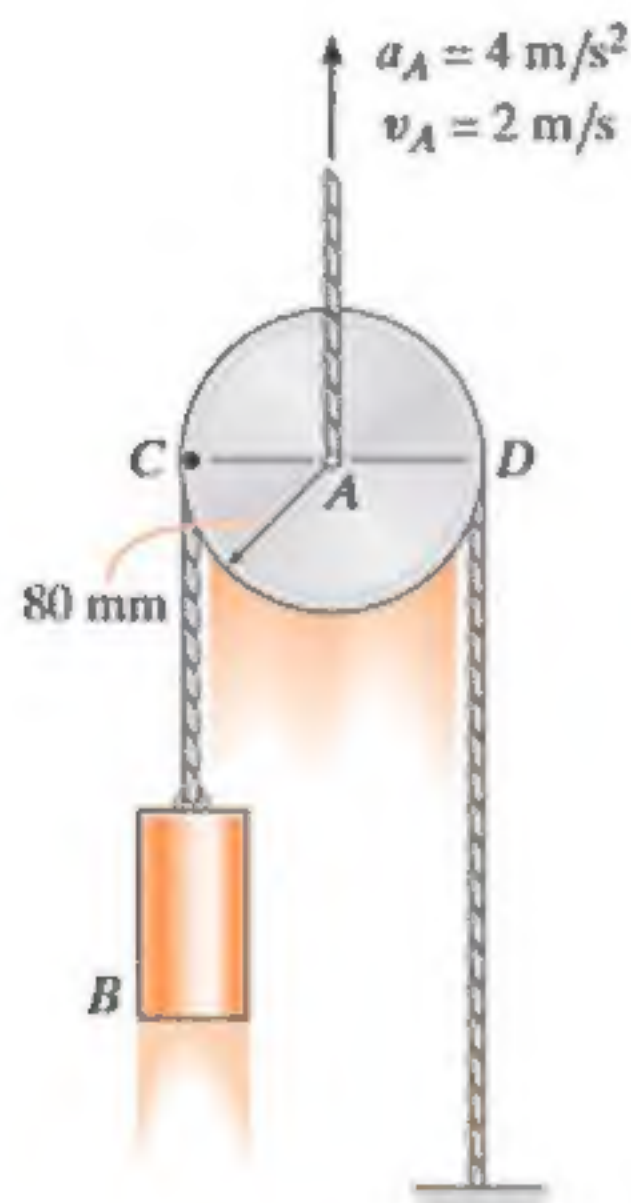
Prob. R16-3

**R16-4.** Si la barra  $AB$  tiene una velocidad angular  $\omega_{AB} = 6 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad del bloque deslizando  $C$  en el instante mostrado.



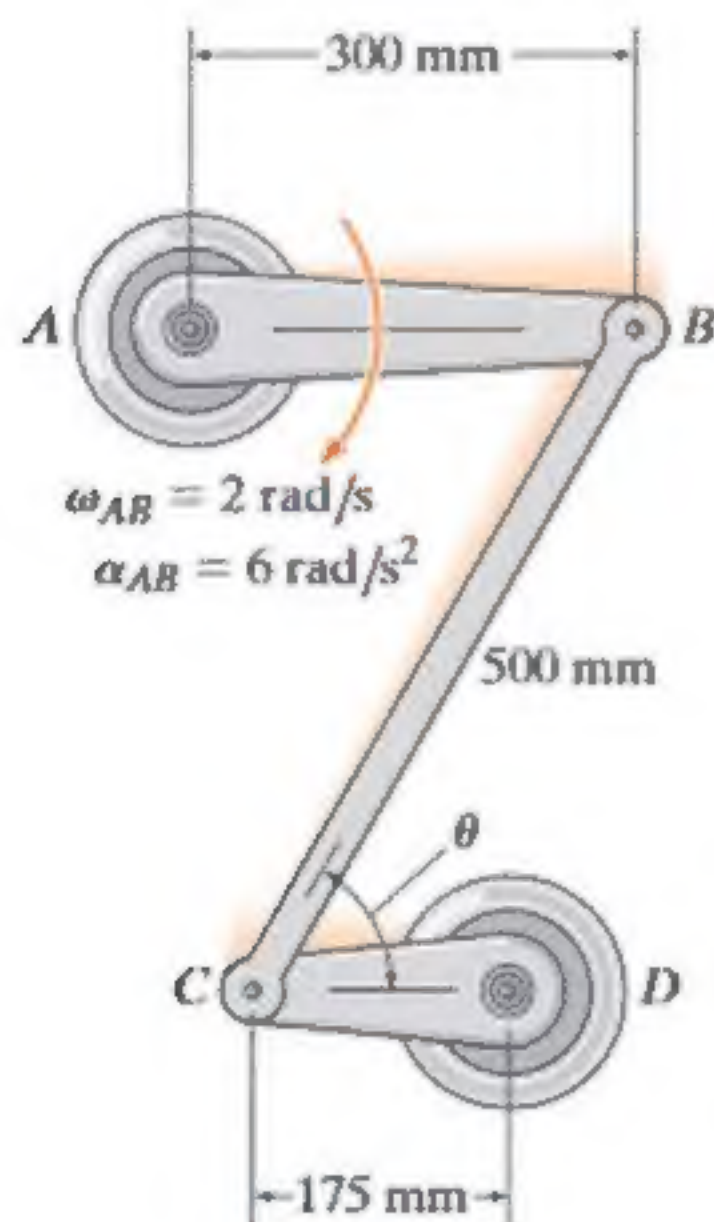
Prob. R16-4

**R16-5.** El centro de la polea se eleva verticalmente con una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$  en el instante en que tiene una velocidad de  $2 \text{ m/s}$ . Si el cable no se desliza sobre la superficie de la polea, determine las aceleraciones del cilindro  $B$  y el punto  $C$  sobre la polea.



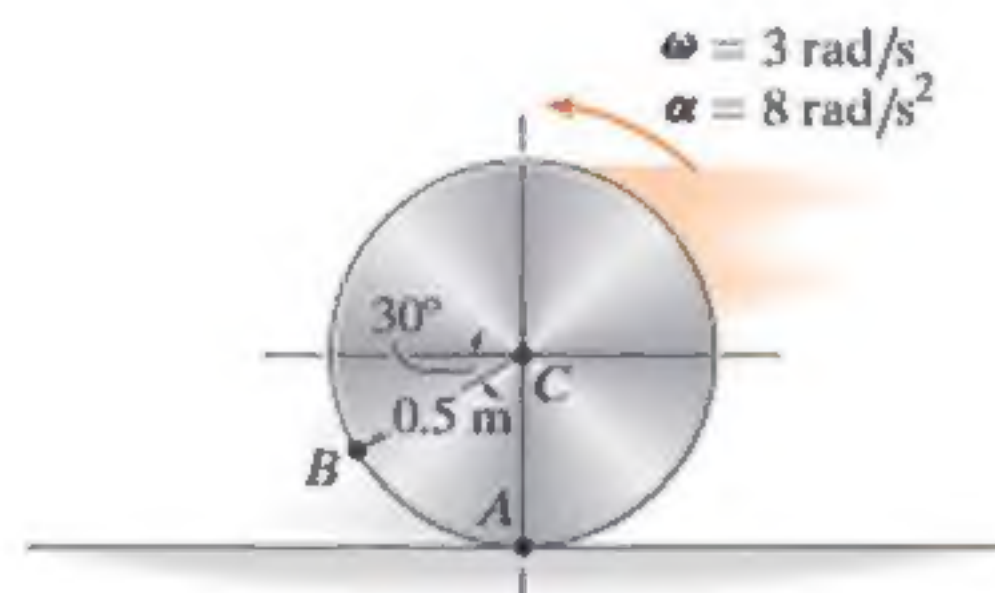
Prob. R16-5

**R16-6.** En el instante indicado, el eslabón  $AB$  tiene una velocidad angular  $\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular  $\alpha_{AB} = 6 \text{ rad/s}^2$ . Determine la aceleración del pasador en  $C$  y la aceleración angular del eslabón  $CB$  en este instante, cuando  $\theta = 60^\circ$ .



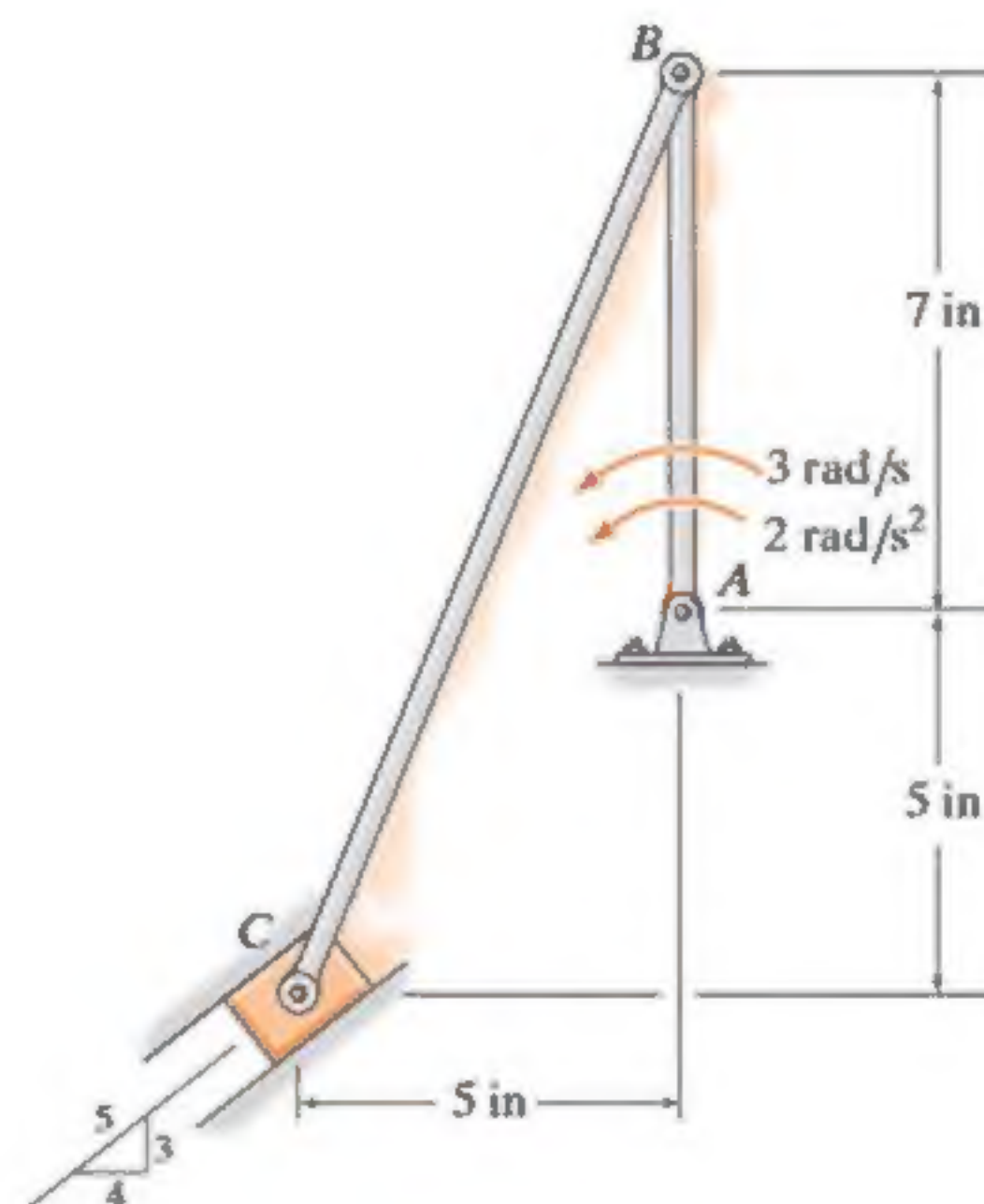
Prob. R16-6

**R16-7.** El disco se mueve hacia la izquierda de modo que tiene una aceleración angular  $\alpha = 8 \text{ rad/s}^2$  y la velocidad angular  $\omega = 3 \text{ rad/s}$  en el instante mostrado. Si no se desliza en  $A$ , determine la aceleración del punto  $B$ .



Prob. R16-7

**R16-8.** En el instante dado, el elemento  $AB$  tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizando  $C$  en este instante.



Prob. R16-8

# Capítulo 17



(© Surasaki/Fotolia)

Los tractores y otros equipos pesados pueden someterse a cargas severas debido a las cargas dinámicas que generan al acelerar. En este capítulo se mostrará la forma de determinar esas cargas para el movimiento plano.